Многокритериальный анализ.

1. Основы и принципы.

1. Повторение общих сведений о математических моделях
2. Введение в многокритериальность: идея и принципы

Вводная часть

Многокритериальная оптимизация: общие принципы 3

1. Общая постановка задачи

Модель выбора вариантов

Многокритериальная оптимизация: общие принципы 12

1. Использование качественной информации о важности
2. Использование обобщенного критерия оптимальности

Принципы решения многокритериальных задач

Многокритериальная оптимизация: общие принципы 24

1. Воспоминания о бинарных отношениях
2. Бинарные отношения при выборе вариантов
3. Оптимальность по Парето и Слейтеру

Бинарные отношения

Многокритериальная оптимизация: общие принципы 37

1. Исторический экскурс

Вильфредо Парето

Многокритериальная оптимизация: общие принципы 58

Вводная часть

1. Повторение общих сведений о математических моделях
2. Введение в многокритериальность: идея и принципы

Задача принятия решения

- **Оптимизационная задача (задача оптимизации)** –
  - выбор среди некоторого множества допустимых (то есть допускаемых обстоятельствами дела) решений, которые можно в том или ином смысле квалифицировать как оптимальные.

- **Содержательный смысл задачи принятия решений:**
  - точное описание непосредственных последствий принятия решения (в содержательном смысле этого) слова является решением в формальном математическом смысле:
    - всякое решение в ИО описывается числом или системой чисел;
    - допустимость того или иного решения определяется возможностью реализации соответствующих последствий при имеющихся ресурсах;
    - ограниченность ресурсов выражается в виде математических ограничений, чаще всего имеющих вид неравенств;
    - оптимальность (целесообразность) решения предполагает наличие в каждой задаче ИО некоторой системы целей, выраженной в наборе критериев оптимальности.

Компоненты принятия решения

Компоненты принятия решения

Варьируемые параметры

- Variable parameters

Область допустимых значений варьируемых параметров

- Area of feasible solutions

Цели и критерии оптимальности

- Objectives, Criteria of Optimization

Лицо, принимающее решение (ЛПР)

- Decision Maker (DM)

Варьируемые параметры

Вектор варьируемых параметров из евклидового пространства размерности *n*.

- Непрерывная задача оптимизации (принятия решений)
- Частный случай – одномерная задача оптимизации

Варьируемые переменные представляют собой целые числа (в частном случае - 0 или 1)

- Задача дискретной оптимизации
- Варьируемая переменная является скалярной и представляет собой порядковый номер варианта (альтернативы)

Задача выбора

- Задача дискретной оптимизации с относительно небольшим количеством альтернатив, позволяющем использовать полный перебор альтернатив.

- **Варьируемые параметры** –
  - параметры (переменные), которые в процессе принятия решения произвольно выбираются (из множества допустимых решений) лицом, принимающим решение.
    - Варьируемые параметры (варьируемые переменные) – то, что ЛПР может назначать произвольно при принятии решения.
    - Выбор значений параметров при принятии решения и есть задача ЛПР.
    - Оптимальное значение параметров – это значит наилучшее в каком-то смысле.

Область допустимых значений параметров

- **Определяет параметры принятия решения.**
  - Описывается одним или несколькими ограничениями
  - ЛПР в процессе принятия решения может менять ОДЗ и рассматривать другие возможные варианты.
- **Внешние и внутренние ограничения**
  - Внешние ограничения (ограничения среды – экзогенные)
  - Внутренние ограничения (ограничения модели – эндогенные)
- **ОДЗ задается** набором ограничений на варьируемые параметры:
  - Частные ограничения на переменные («гиперкуб»);
  - Ограничения общего вида (линейные и нелинейные).

- Ограничения типа «гиперкуб» для вектора варьируемых параметров x из n-мерного евклидового пространства:
  $a_j \le x_j \le b_j, j = 1, \dots, n.$
  - Данный тип ограничений в практическом применении существует почти всегда.
- Ограничения общего вида для вектора варьируемых параметров x из n-мерного евклидового пространства:
  $g(x) = g(x_1, \dots, x_n) \ge 0.$
  - Данные ограничения могут быть легко преобразованы в ограничения типа равенств.

Свойства, характеризующие качество варианта выбора

- Каждый из вариантов характеризуется некоторым набором свойств, играющих роль в процессе принятия решения.

- Каждое свойство может быть выражено в числовом виде и значения этих чисел характеризуют качество варианта с точки зрения этого свойства (чем больше, тем лучше, или, чем меньше, тем лучше).

- Свойство (одно из свойств, характеристик) каждого варианта, выраженное в некоторой числовой шкале, называется частным критерием оптимальности.

- Каждое свойство представляет собой оценку относительной предпочтительности одного варианта по сравнению с другим в контексте этого свойства.
  - Например, если свойство – это цена, то можно сказать, что вариант *x* предпочтительнее варианта *y*, если вариант *x* дешевле.

- Частные критерии должны характеризовать каждый из вариантов таким образом, чтобы было любые два варианта сравнить между собой по данному частному критерию, выразив либо предпочтение одного из них, либо эквивалентность обоих в смысле данного частного критерия оптимальности.

- Понятие оптимальности при многих критериях достаточно сложно.
  - В литературе утвердился термин «*рациональное решение*», под которым понимается наличие рациональных, понятных другим людям причин, приведших к выбору данного решения из множества допустимых.

Цели и критерии

- **Цель** характеризует поведение ЛПР в процессе принятия решения.

- **Критерий оптимальности** –
  характеристика (или одна их характеристик) варианта решения.
  - Критерий обязательно должен быть выражен в числовой форме.
  - Большее (меньшее) значение означает лучшую (худшую) характеристику с точки зрения ЛПР.
  - По данному критерию можно сравнить любые два варианта (лучше, хуже или эквивалентно)

- **Количество критериев**:
  Задачи принятия решения делятся на:
  - однокритериальные;
  - многокритериальные.

Формирование критерия

- **Частный критерий – объективная характеристика.**
  - При условии, что значение характеризует качество.
  - Примеры: вес, размеры, стоимость, калорийность и т.д.
- **Наличие/отсутствие возможности.**
  - Приводит к бинарным значениям характеристик качества (1/0).
  - Пример: наличие круиз-контроля в автомобиле.
- **Порядковый номер в случае качественного ранжирования возможных значений критерия.**
  - Такая характеристика указывает, какое значение лучше, но не указывает, на сколько.
  - Пример: ранжирование на выставке собак.
- **Экспертная оценка.**
  - Результат субъективного оценивания эксперта и/или ЛПР.
  - Пример: судейство на спортивных соревнованиях.

ЛПР и принцип оптимальности

- **Принцип оптимальности** – это принцип, по которому выбирается решение из множества возможных:
  - ЛПР выбирает **«наилучшее»** с его точки зрения решение;
  - **Оптимальное решение** в многокритериальном случае чаще всего не существует;
  - **Рациональное решение** – решение, принятие которого можно объективно объяснить.

- **Роль ЛПР** в процессе принятия решения:
  - В случае многокритериальной задачи принятия решения – формирование предпочтений, на основе которых будет вырабатываться решение.

1. Общая постановка задачи

Модель выбора вариантов

Компоненты модели принятия решения

Модель принятия решения

- Исходное множество вариантов
- Принцип оптимальности
- Лицо, принимающее решение

Исходное множество альтернатив

- Будем считать, что это множество представляет собой дискретный конечный набор альтернатив, которые будем обозначать номерами:
  $$D = \{1,2,\dots,m\}.$$
- На практике количество таких вариантов не очень велико.
  - Задача выбора, корректна и имеет смысл, когда количество вариантов не менее двух.
  - Если речь идет, например, о выборе типа приобретаемого оборудования, особенно дорогостоящего, то речь может идти о десятке наименований.
  - Количество вариантов m не ограничивается и может быть любым.

- Задача выбора заключается в выборе варианта
  $$x^* \in D = \{1,2,\dots,m\},$$
  который является наилучшим (оптимальным) с точки зрения ЛПР.
- Данная постановка легко обобщается на случай исходного множества общего вида $D \subset R^n$.
- **Основная проблема многокритериальной оптимизации –**
  - сравнить между собой два любых варианта.

Представление в виде таблицы

- В таблице:
  - **строка** содержит наименование и численные значения частных критериев для одного варианта;
  - **столбец** содержит значения частного критерия оптимальности у всех вариантов.
- При этом каждый частный критерий оптимальности численно выражен в некоторой шкале.

Таблица многокритериального выбора

Варианты (альтернативы)	Q_1	Q_2	…	Q_n
1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1n}
2	q_{21}	q_{22}	…	q_{2n}
…	…	…	…	…
m	q_{m1}	q_{m2}	…	q_{mn}

$$q_{ij} = Q_j(i)$$

Решение задачи выбора

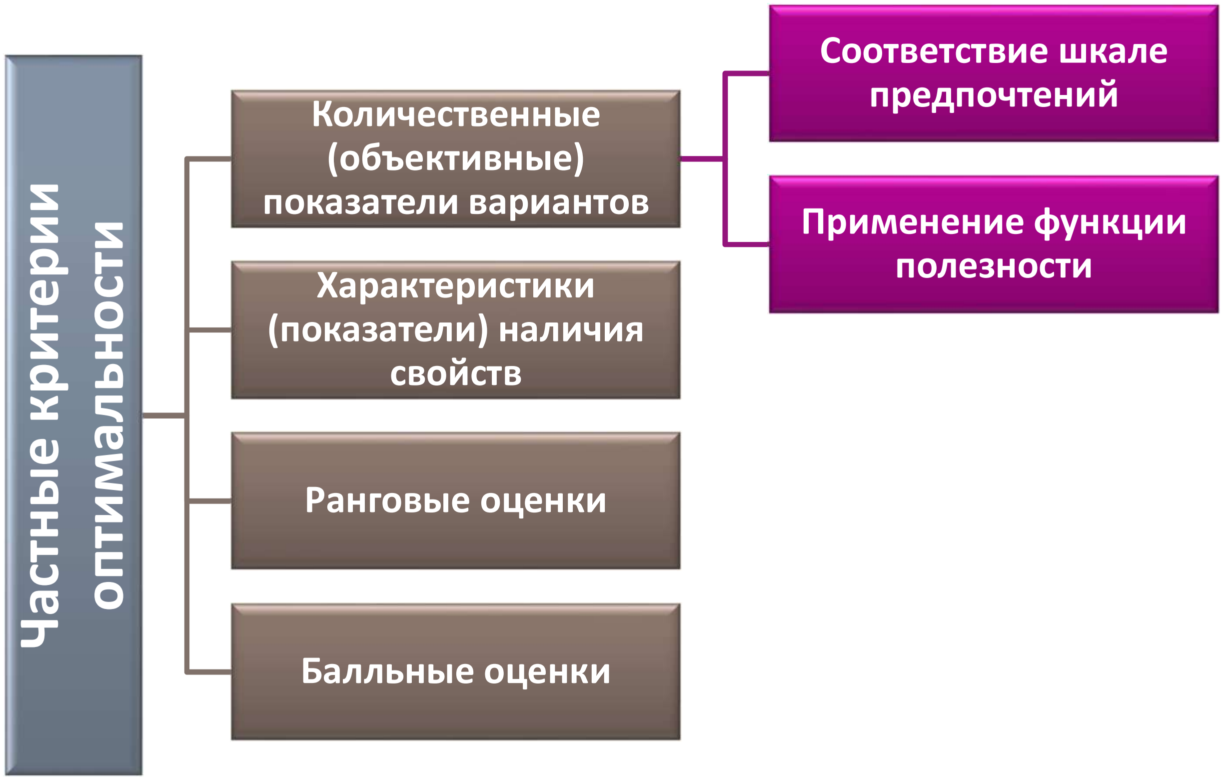
- **Для решения задачи выбора наилучшего варианта требуется упорядочить варианты по предпочтительности (качеству)**
  - То есть построить на множестве вариантов отношение порядка.
  - Отношение порядка легче всего построить, если у каждого варианта существует интегральная числовая характеристика $Q(x)$, отражающая взгляд ЛПР на данную предметную область.
- **Если таблица многокритериального выбора содержит только один столбец (один критерий), то этот критерий и является такой характеристикой.**
  - В этом случае для решения задачи требуется упорядочить варианты по ухудшению данной характеристики (то есть по убыванию или возрастанию частного критерия в зависимости от его типа) и тогда первый вариант и будет решением задачи (если несколько первых вариантов имеют одинаковое значение частного критерия, то все они являются решением задачи в данной постановке).
- **Если критериев несколько, то для формирования такой интегральной характеристики часто используют, например, обобщенный критерий оптимальности.**
  - Например,

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} w_i Q_i(x)\,.$$

  - Весовые коэффициенты $w_i, i = 1, \ldots, n$, отражают взгляд ЛПР на важность частных критериев оптимальности.

Формирование частных критериев

- Возможны трудности в численном оценивании
  - Характеристика является качественной
    - Экспертное оценивание
  - Характеристика является комплексной
    - Декомпозиция цели



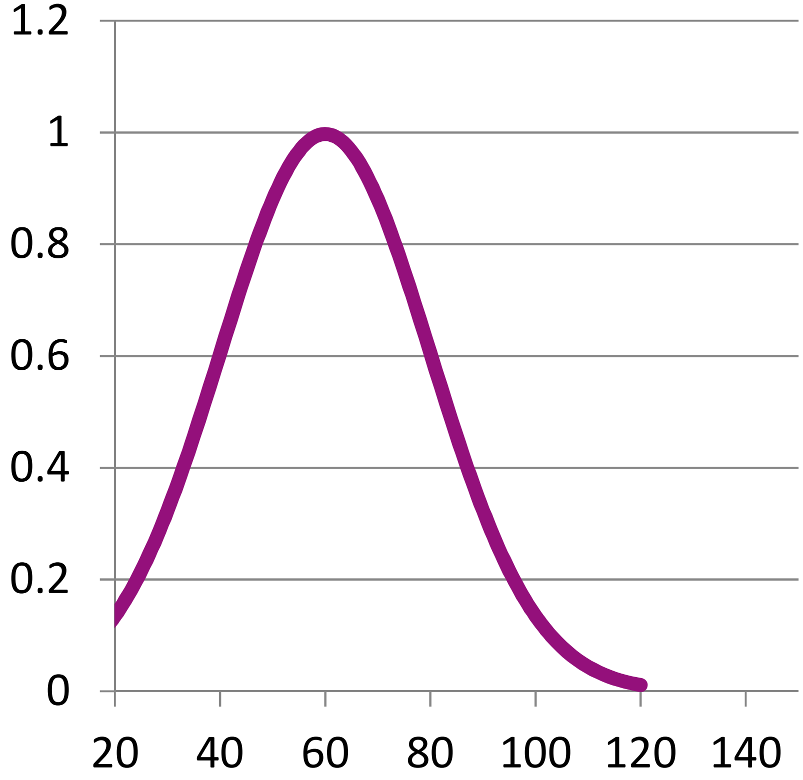
Количественные характеристики качества

- Численные значения количественных характеристик имеют **объективный характер** и могут быть **точно измерены** для **всех** объектов.

- Соответствие шкале предпочтений
  – Большее (меньшее) значение критерия соответствует лучшей (худшей) с точки зрения ЛПР

- Применение функции полезности
  – Utility function

- Функция полезности для частного критерия



- Пример с весом жениха

Преобразование значений критериев

- Преобразование в шкалу отношений:

$$\bar{Q}_i = \frac{Q_i(x)}{Q_i^+}(\beta - \alpha) + \alpha$$

- Для единичного интервала:

$$\bar{Q}_i = \frac{Q_i(x)}{Q_i^+}, i = 1, \dots, n.$$

- Обозначения:

$$Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x), Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x),$$

$$i = 1, \dots, n.$$

- Преобразование в шкалу интервалов:

$$\tilde{Q}_i = \frac{Q_i(x) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-}(\beta - \alpha) + \alpha$$

- Для единичного интервала:

$$\tilde{Q}_i = \frac{Q_i(x) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-}, i = 1, \dots, n.$$

Пример преобразования критериев

- Рассматриваем четыре объекта
- Один частный критерий – вес (гр)
  - Шкала интервалов идет от нуля

Вариант	Вес	Интервалы	Отношения
1	100	1.0	1.0
2	70	0.625	0.7
3	50	0.375	0.5
4	20	0	0.2

- Преобразование в шкалу отношений:

$$\bar{Q}_i = \frac{Q_i(x)}{Q_i^+}(\beta - \alpha) + \alpha$$

- Для единичного интервала:

$$\bar{Q}_i = \frac{Q_i(x)}{Q_i^+}, i = 1, \dots, n.$$

- Обозначения:

$$Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x),$$
$$Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x),$$
$$i = 1, \dots, n.$$

- Преобразование в шкалу интервалов:

$$\tilde{Q}_i = \frac{Q_i(x) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-}(\beta - \alpha) + \alpha$$

- Для единичного интервала:

$$\tilde{Q}_i = \frac{Q_i(x) - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-}, i = 1, \dots, n.$$

Показатели наличия свойств

- Показывают наличие у вариантов характерного признака, влияющего на качество.
- Бинарные значения из интервала [0,1].
  - Например, наличие в планшетном компьютере USB порта.

- Значения формируются как:
  - 1 – наличие свойства;
  - 0 – отсутствие свойства.
- Значения уже автоматически приведены к единичному интервалу.

Ранговые оценки

- Получаются, если варианты ранжировать (упорядочить) по убыванию или возрастанию характеристики
  - Порядковый номер объекта и будет ранговой оценкой.
- Ранговые оценки характеристик можно только сравнивать на больше-меньше (лучше-хуже)
  - Невозможно сравнивать интервалы оценок.
- Применяются тогда, когда высказать численное значение очень затруднительно.

- Примеров ранговых оценок можно привести достаточно много:
  - оценка качества дизайна или внешнего вида устройства;
  - качество гастрономических блюд;
  - качество деятельности человека (в частности спортивной) и так далее.
    - Во всех этих случаях сомнительно даже наличие объективного критерия, по которому объекты можно было бы сравнить с соотношениями типа «на сколько больше» или «во сколько раз больше».
- Нужно, по возможности, избегать

Балльные оценки

- Выражают субъективное мнение в числовой шкале и имеет смысл сравнивать их количественные отношения.
  - Например, школьные оценки, выставляемые учителем по четырехбалльной шкале (2, 3, 4, 5). Можно вспомнить также спортивные соревнования по гимнастике, фигурному катанию и прыжкам в воду.

- Для получения балльных оценок применяются методы проведения экспертизы.

- Ранговые и балльные оценки в дальнейшем обрабатываются и используются как оценки по количественным характеристикам.
  - У учетом направления (минимизация или максимизация)

Принципы решения многокритериальных задач

1. Использование качественной информации о важности
2. Использование обобщенного критерия оптимальности

Метод главного критерия

- Основная идея
  - Оптимизация по наиболее важному частному критерию при условии, что значения других частных критериев не хуже заданных пороговых значений.
    - ЛПР выделяет n частных критериев один, который, является намного более предпочтительным, чем остальные.

- Постановка задачи:

$$x^* = \arg\max_{x \in \widetilde{D}} Q_1(x),$$

$$\widetilde{D} = D \cap D'; \quad D' = \left\{ x \middle| Q_i(x) \geq Q_i^0, i = 2,3, \dots, n \right\}.$$

  - Этот метод позволяет решить исходную задачу достаточно быстро и понятно.
  - Но очевидны и недостатки этого метода.
    1. Выделение единственного главного критерия – это серьезное ограничение.
    2. Проблема назначения пороговых значений Q_i^0.
       - В книге [Батищев, 1979] приводятся две теоремы, которые устанавливают правила назначения данных пороговых значений (там же приведены доказательства теорем).
    3. Приводит к слабоэффективному решению.

Назначение пороговых значений [Батищев, 1979]

- *Теорема 5.* Для равноценных частных критериев

$$Q_i(x), i = 1,2, \dots, n,$$

пороговые значения Q_i^0 должны выбираться из условия:

$$\frac{Q_i^0 - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-} = k_0, i = 1,2, \dots, n$$

где $0 < k_0 \leq 1$;

$$Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x); \;\; Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x)$$

- *Теорема 6.* Для неравноценных критериев $Q_i(x), i = 1,2, \dots, n,$ предпочтение между которыми задано с помощью коэффициентов w_i:

$$w_i > 0, i = 2,3, \dots, n; \; \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,,$$

пороговые значения Q_i^0 должны выбираться из условия:

$$w_i \cdot \left(\frac{Q_i^0 - Q_i^-}{Q_i^+ - Q_i^-} \right) = k_0,$$
$$i = 1,2, \dots, n;$$

где $0 < k_0 \leq 1$;
$$Q_i^+ = \max_{x \in D} Q_i(x); \;\; Q_i^- = \min_{x \in D} Q_i(x)$$

Лексикографическое упорядочение частных критериев

- Развитие метода главного критерия
    - [Подиновский, 1975; Батищев, 1979]
  - Случай, множественности вариантов с одинаковым значением главного частного критерия.

- Задано предпочтение по важности, указывающее качественное отношение предпочтения:

$$Q_1 \succ Q_2 \succ \cdots \succ Q_n.$$

- При предположении, что все частные критерии приведены к типу максимизации, получаем последовательность соотношений:

$$Q_1(i) > Q_1(j);$$
$$Q_1(i) = Q_1(j); Q_2(i) > Q_2(j);$$
$$\ldots$$
$$Q_1(i) = Q_1(j); \ldots;$$
$$Q_{n-1}(i) = Q_{n-1}(j); Q_n(i) > Q_n(j).$$

Лексикографическое упорядочение частных критериев

- Последовательность задач:

$$Q_1 = \arg\max_{x \in D_1} Q_1(x)\,;$$
$$Q_2 = \arg\max_{x \in D_2} Q_2(x)\,;$$
$$\ldots$$
$$Q_n = \arg\max_{x \in D_n} Q_n(x)\,.$$

- Здесь

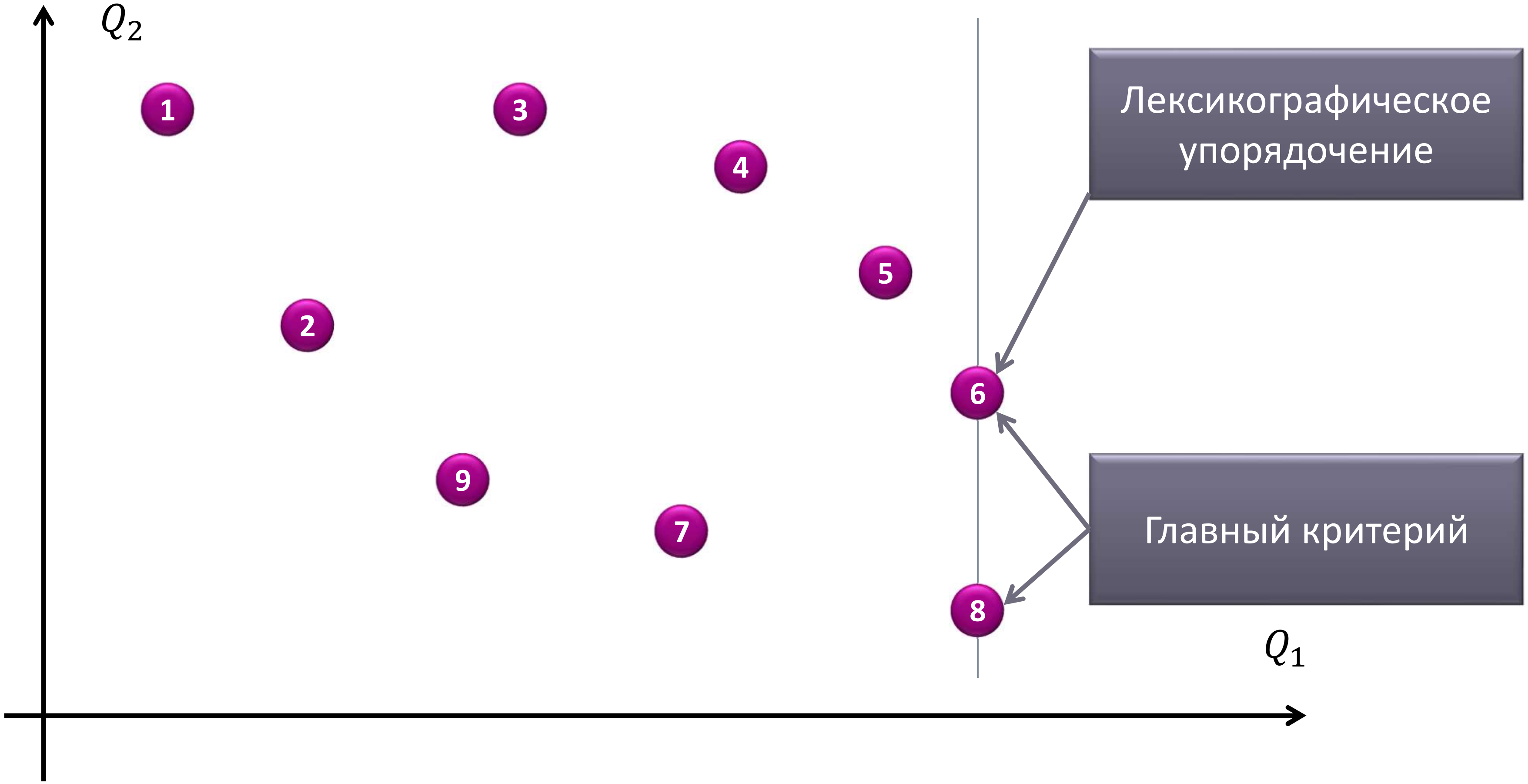
$$D_1 = D;$$
$$D_k = D \cap \{x | Q_j(x) = Q_j(\tilde{x}^j), j = 1, \ldots, k-1\}.$$

- Таким образом:

$$D = D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots \supseteq D_n.$$

- В качестве решения исходной задачи принимается вариант, полученный из решения задачи на шаге n.
- Процесс заканчивается, как только в результате решения одной из задач оптимизации получаем единственный вариант.
- Решение эффективно.

Иллюстрация лексикографического упорядочения



$Q_1 \succ Q_2$

Метод последовательных уступок

- На каждом i-м шаге последовательной оптимизации допустимое отклонение $(i-1)$-го частного критерия от его максимального значения.

- Последовательность задач:

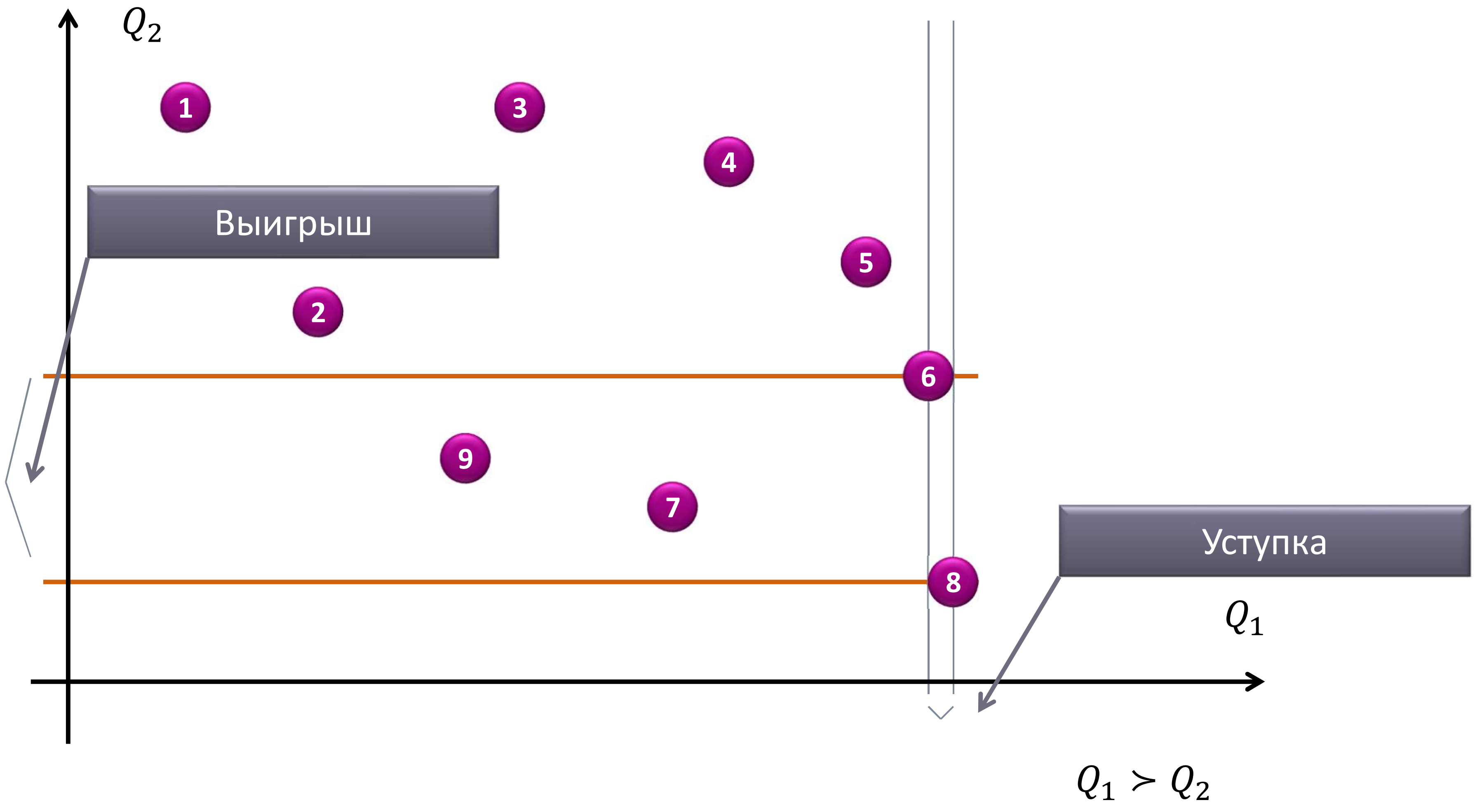
$$Q_1 = \arg\max_{x \in D_1} Q_1(x);$$
$$Q_2 = \arg\max_{x \in D_2} Q_2(x);$$
$$\ldots$$
$$Q_n = \arg\max_{x \in D_n} Q_n(x).$$

- Здесь

$$D_1 = D;$$
$$D_k = D \cap \left\{x \middle| Q_j(x) \geq Q_j\left(\tilde{x}^j\right) - \Delta Q_j, j = 1, \ldots, k-1\right\}.$$

- В качестве решения исходной задачи принимается вариант, полученный из решения на шаге n.

Пример использования уступок



Обобщенный критерий оптимальности

- Идея – построение скалярной функции $F\big(Q(x)\big)$ для оценивания каждого варианта одним числом.
  - Обладает свойством упорядочения вариантов по их предпочтительности.
  - Процедура построения такой функции называется **свертыванием** или **объединением** векторного критерия оптимальности (как вариант – свертыванием или объединением частных критериев).

- Исходная многокритериальная задача

$$\begin{cases} \max\limits_{x \in D} Q_1(x)\,; \\ \max\limits_{x \in D} Q_2(x)\,; \\ \qquad \ldots \\ \max\limits_{x \in D} Q_n(x)\,; \end{cases}$$

где $D = \{1,2,\ldots,M\}$,
сводится к однокритериальной задачи оптимизации:

$$\max_{x \in D} F\big(Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\big).$$

Типы обобщенных критериев оптимальности

- Аддитивный критерий:

$$F_A\big(Q(x)\big) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(x)$$

- Мультипликативный критерий

$$F_M\big(Q(x)\big) = \prod_{j=1}^{n} Q_j(x)$$

- Среднестепенной критерий

$$F_P\big(Q(x)\big) = \left(\sum_{j=1}^{n} Q_j^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

- Логические обобщенные критерии

$$F_{MIN}\big(Q(x)\big) = \min_{1 \leq j \leq n}\big(Q_j(x)\big)$$

$$F_{MAX}\big(Q(x)\big) = \max_{1 \leq j \leq n}\big(Q_j(x)\big)$$

Учет важности критериев в аддитивном критерии

- Вводятся весовые коэффициенты важности частных критериев
  $w = (w_1, \dots, w_n) \in D_w = \left\{ w \in R^n \middle| w_j \geq 0, j = 1, \dots, n;\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \right\}$

- Весовые коэффициенты отражают относительную важность частных критериев
  - Здесь важность критериев понимается в смысле аксиоматической теории важности [Подиновский]
  - Если известна дополнительная информация вида
    “i-й критерий не менее важен, чем j-й критерий” $\left(Q_i \succcurlyeq Q_j\right)$,
    то для весовых коэффициентов w_i и w_j справедливо соотношение $w_i \geq w_j$:

$$Q_i \succcurlyeq Q_j \Leftrightarrow w_i \geq w_j$$

Обобщенные критерии с весами

- Аддитивный критерий:

$$F_A\big(w, Q(x)\big) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j(x)$$

- Мультипликативный критерий

$$F_M\big(w, Q(x)\big) = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{w_j}(x)$$

- Среднестепенной критерий

$$F_P\big(w, Q(x)\big) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^p(x)\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$

- Логические обобщенные критерии

$$F_{MIN}\big(w, Q(x)\big) = \min_{1 \leq j \leq n}\big(w_j Q_j(x)\big)$$

$$F_{MAX}\big(w, Q(x)\big) = \max_{1 \leq j \leq n}\big(w_j Q_j(x)\big)$$

- Замечание (еще раз)
  - Все обобщенные критерии оптимальности являются монотонно возрастающими (неубывающими) функциями.

Свойство весовых коэффициентов важности

- Задача на максимум
  – Шкалы интервалов

Вариант	Крит 1	Крит 2	Итог
1	1	0	**0.8**
2	0	1	**0.2**
w	0.8	0.2	

- Задача на минимум
  – Шкала интервалов

Вариант	Крит 1	Крит 2	Итог
1	1	0	**0.8**
2	0	1	**0.2**
w	0.8	0.2	

- Вывод:
  – Если частный критерий предпочтительнее, то его весовой коэффициент важности больше **независимо от направления оптимизации**

1. Воспоминания о бинарных отношениях
2. Бинарные отношения при выборе вариантов
3. Оптимальность по Парето и Слейтеру

Бинарные отношения

Понятие бинарного отношения

- Рассмотрим ситуацию, при котором два объекта из множества можно сравнить между собой в каком-то смысле.
- Например:
    - «Крым южнее Архангельска»,
    - «Иван – родственник Петра»,
    - «Компьютер фирмы «Рога» лучше компьютера фирмы «Копыта»» и т.д.

- В каждой из этих фраз присутствуют два объекта и само отношение.
  - Объекты являются элементами некоторого множества, относительно которого эти суждения имеют смысл. Это множество называется *исходным множеством бинарного отношения*.
- Для любых двух объектов исходного множества можно сказать, что данное бинарное отношение либо выполняется, либо не выполняется.
  - Например, исходное множество представляет собой множество целых чисел от 0 до 10, и на этом множестве задано отношение «больше». Очевидно, что для пары чисел $< 7,6 >$ данное отношение выполняется, а для пары $< 6,7 >$ – не выполняется.
- Вышеприведенные отношения являются отношениями разного типа:
  - первое отношение («южнее») задает некоторый порядок объектов (в данном случае – географический),
  - второе отношение («являться родственником») – принадлежность объектов некоторому классу (родственников).
- Отношение может быть определено не только для пар, но и для троек, четверок и т.д.
  - В дальнейшем будем рассматривать только бинарные отношения.

Определение и способы задания бинарного отношения

- *Бинарным отношением* R на множестве S называется подмножество R декартового произведения $S \times S$, то есть $R \subseteq S \times S$.
- Содержательный смысл:
  - декартово произведение $S \times S$ представляет собой множество все-возможных пар объектов, а задание его подмножества определяет, какие именно пары входят в это отношение.
- Обозначение:
  - если пара $< x, y >$ входит в отношение R,
то есть $< x, y > \in R$, то пишут xRy, то есть
x находится в отношении R с y

- Способ задания отношения определяет, каким образом мы будем указывать это множество пар. Существует два основных способа задания отношения: матрицей и графом.
- *Задание матрицей* подразумевает построение квадратной матрицы, количество строк и столбцов в которой равно количеству элементов исходного множества S.
  - На пересечении i-ой строки и j-го столбца матрицы ставится единица, если выполняется $x_i R x_j$, и нуль – в противном случае. Здесь через x_i и x_j обозначены элементы исходного множества, пронумерованные в каком-то порядке.
- *Задание графом* более наглядно, так как граф $G(R)$ является геометрическим представлением бинарного отношения R.
  - Элементам исходного множества ставятся во взаимно однозначное соответствие вершины графа $x_1, \dots, x_n$. Дуги в графе рисуются тогда, когда между соответствующими элементами исходного множества выполняется отношение R. То есть, дуга, соединяющая вершины x_i и x_j рисуется тогда и только тогда, когда выпол-няется $x_i R x_j$.

ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЯ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ

- В качестве примера рассмотрим множество из пяти персональных компьютеров, которые обозначим буквами: $\{A, B, C, D, E\}$.
- Предположим, что стоимость компьютеров следующая:

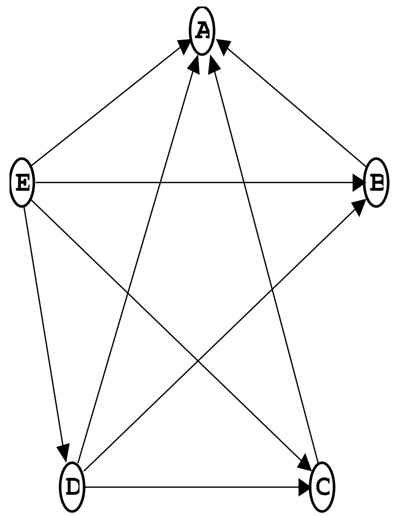
Компьютер	Стоимость (условных единиц)
A	900
B	1000
C	1000
D	1100
E	1200

- На этом множестве зададим отношение «компьютер x стоит дороже, чем компьютер y».

- Тогда матрица, характеризующая это отношение, будет выглядеть следующим образом:

Компьютеры	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0
D	1	1	1	0	0
E	1	1	1	1	0

- Приведенное отношение можно представить следующим графом:



Операции над отношениями

- Для отношения можно определить все операции, которые определены для множеств – объединение, пересечение и т.д.
  - Поскольку отношение по определению является множеством (подмножеством пар произведения исходного множества на себя)
- *Дополнение отношения*.
  - Отношение $\bar{R}$ называется дополнением отношения R, если оно выполняется для тех и только тех пар, для которых не выполняется отношение R.
    - Очевидно, что $\bar{R} = (S \times S) \backslash R$.
    - В матричной записи: $a_{ij}(\bar{R}) = 1 - a_{ij}(R), \ \ i, j = 1,2, \dots, n$.
    - В графе $G(\bar{R})$ присутствуют те и только те дуги, которые отсутствуют в графе $G(R)$.
- *Обратное отношение*.
  - Отношение R^{-1} называется обратным к отношению R, если для любых элементов x и y исходного множества выполняется условие $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$.
    - В матричной записи: $a_{ij}(R^{-1}) = 1 - a_{ji}(R), \ \ i, j = 1,2, \dots, n$.
    - Граф $G(R^{-1})$ получается из графа $G(R)$ изменением направления всех дуг на противоположные.

Теоремы про операцию обращения

Для операции обращения справедливы следующие две теоремы.

- *Теорема 1*. $(R^{-1})^{-1} = R$.
    - То есть дважды выполненное обращение отношения возвращает к первоначальному состоянию.

- *Теорема 2*. Результат последовательного выполнения операций дополнения и обращения не зависит от порядка, в котором они выполняются: $\overline{R^{-1}} = (\bar{R})^{-1}$.

Операции над отношениями (2)

- *Двойственное отношение*.
  – Двойственное отношение – это отношение дополнительное к обратному (или обратное к дополнительному, что одно и то же в силу теоремы 2).
    - Двойственное отношение определяется формулой:
$$R^d = \overline{R^{-1}} = (\bar{R})^{-1}.$$
  – Можно показать, что для того, чтобы осуществить переход от графа $G(R)$ к графу $G(R^d)$, требуется выполнить следующие действия:
    - удалить из графа все пары противоположных дуг и все петли;
    - присоединить новые противоположные дуги (i, j) и (j, i), соответствующие парам вершин, не связанным в графе $G(R)$ дугой;
    - добавить петли (i, j), которые отсутствовали в графе $G(R)$.

Свойства отношений: рефлексивность

- Отношение R называется *рефлексивным*, если для любого элемента x исходного множества выполняется xRx.
  - – В матрице рефлексивного отношения на главной диагонали везде стоят единицы, а в графе отношения $G(R)$ около каждой вершины есть петля.
- Отношение R называется *антирефлексивным* (или *иррефлексивным*), если это отношение выполняется только для несовпадающих объектов, иначе говоря, из xRy следует, что $x \neq y$.
  - – В матрице антирефлексивного отношения на главной диагонали везде стоят нули, а в графе $G(R)$ отсутствуют петли.

    - Если вернуться к примеру с компьютерами, то можно заметить, что отношения «компьютер x стоит дороже, чем компьютер y» и «компьютер x стоит дешевле, чем компьютер y» являются антирефлексивными, а отношения «компьютер x стоит не дешевле, чем компьютер y» и «компьютер x стоит не дороже, чем компьютер y» являются рефлексивными.

Свойства отношений: симметричность

- Отношение R называется *симметричным*, если справедливо выражение: $xRy \Longrightarrow yRx$.
  - Матрица такого отношения симметрична относительно главной диагонали $\left(a_{ij} = a_{ji},\ \ i,j = 1,2,\dots,n\right)$.
  - В графе $G(R)$ вместе с дугой (i,j) также присутствует и дуга (j,i).
- Отношение R называется *асимметричным*, если из выражений xRy и yRx по крайней мере одно несправедливо.
  - В матрице асимметричного отношения симметричные относительно главной диагонали элементы имеют различные значения $\left(a_{ij} \cdot a_{ji} = 0,\ i,j = 1,2,\dots,n\right)$, а сами элементы главной диагонали равны нулю.
  - Граф $G(R)$ не может содержать одновременно дуги вида (i,j) и (j,i).
- Отношение R называется *антисимметричным*, если выражения xRy и yRx одновременно справедливы только тогда, когда $x = y$.
  - В матрице антисимметричного отношения симметричные относительно главной диагонали элементы имеют различные значения, если не располагаются на главной диагонали $\left(a_{ij} \cdot a_{ji} = 0,\ \ i,j = 1,2,\dots,n\right)$.
  - Граф $G(R)$ не может содержать одновременно дуги вида (i,j) и (j,i), но, в то же время, может содержать петли.

Симметричность: примеры

- Пример с компьютерами.
- Очевидно, что отношение «стоимость компьютеров x и y одинакова» является симметричным. Отношение «стоит дороже» и отношения «стоит дешевле» являются асимметричными. Но существуют отношения, которые не являются ни симметричными, ни асимметричными.
- Рассмотрим отношение «компьютер x стоит не дороже, чем компьютер y» на приведенном выше множестве компьютеров. Очевидно, что это отношение не является ни симметричным, ни асимметричным. На самом деле, если два компьютера B и C стоят одинаково, то в графе отношения присутствуют обе дуги (от B к C и от C к B), что противоречит определению асимметричного отношения. А если компьютер A стоит меньше, чем компьютер B, то для $< A, B >$ отношение выполняется, а для пары $< B, A >$ – не выполняется, что противоречит определению симметричного отношения.
- Отношение «x меньше или равно y» на множестве натуральных чисел является антисимметричным, так как выражение $x \leq x$ является справедливым. А вот отношение «компьютер x стоит не дороже, чем компьютер y» не является антисимметричным.

Свойства отношений: транзитивность

- Отношение называется *транзитивным*, если из справедливости xRy и yRz следует справедливость xRz.
- Отношение R называется *отрицательно транзитивным*, если его дополнение $\bar{R}$ также транзитивно.
- Отношение называется *сильно транзитивным*, если оно одновременно транзитивно и отрицательно транзитивно.
- Отношение называется *ацикличным*, если из $xRz_1, z_1Rz_2, \ldots, z_kRy$ следует справедливость $x \neq y$.
  - Если компьютер B стоит не больше, чем компьютер C, и, в свою очередь, компьютер C стоит не дороже, чем компьютер D, то компьютер B стоит не дороже, чем компьютер D. Поэтому отношение «компьютер x стоит не дороже, чем компьютер y» является транзитивным. А вот с ацикличностью сложнее. К двум вышеприведенным высказываниям можно добавить выражение «компьютер D стоит не дороже, чем компьютер B» в случае, если стоимость компьютера D составляет 1000 условных единиц и, следовательно, все три компьютера стоят одинаково. Поэтому данное отношение ацикличным не является.
  - А вот отношение «компьютер A стоит дешевле, чем компьютер B» является ацикличным, так как из выражений «компьютер A стоит дешевле, чем компьютер B» и «компьютер B стоит дешевле, чем компьютер D» следует, что компьютер D никак не может стоить дешевле, чем компьютер A.

Некоторые классы отношений

- Отношение R называется *отношением эквивалентности* (или просто *эквивалентностью*), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
  - Отношение эквивалентности разделяет исходное множество на *классы* – то есть непересекающиеся подмножества, объединение которых образует исходное множество.
    - Примером такого разбиения, например, является бинарное отношение вида «числа x и y имеют одинаковый остаток от деления на 10», определенное на множестве натуральных чисел. В один класс попадают числа с нулем на конце (остаток их деления на 10 равен нулю), в другой класс числа с единицей на конце и так далее.
    - Другой пример можно привести с вышеописанным примером с компьютерами. Введем на множестве компьютеров отношение «компьютер x и компьютер y являются компьютерами одного производителя». Тогда исходный набор компьютеров разделится на классы – в зависимости от производителя.
- Отношение R называется *отношением нестрогого порядка* (или просто *отношением порядка*), если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
- Отношение R называется *отношением строгого порядка*, если оно антирефлексивно, асимметрично и транзитивно.

Наилучшие элементы и максимумы

- *Наилучшим (наибольшим) элементом* по отношению R, заданному на множестве S, называется элемент $x \in S$, такой, что для всех элементов $y \in S$ выполняется xRy.
- Соответственно, *наихудшим (наименьшим) элементом* по отношению R, заданному на множестве S, называется элемент $x \in S$, такой, что для всех элементов $y \in S$ выполняется yRx.
    - Наилучший и наихудший элементы могут существовать или не существовать.
    - Если бинарное отношение является отношением строгого порядка то максимум обязательно существует и является единственным.
- *Максимумом* по отношению R, заданному на множестве S, называется элемент $x \in S$, такой, что не существует элементов $y \in S$ таких, что выполняется yRx.
- *Минимумом* по отношению R, заданному на множестве S, называется элемент $x \in S$, такой, что не существует элементов $y \in S$ таких, что выполняется xRy.
    - То есть, максимум – это лучший элемент в том смысле, что нет элемента, лучше его, а минимум – худший элемент в смысле, что нет ни одного элемента хуже его.

Бинарные отношения вариантов выбора

Принципы выбора

- Будем считать, что исходное множество вариантов представляет собой некоторое конечное множество, в котором каждый элемент соответствует исходному варианту и имеет свой номер.
- Каждый вариант при этом характеризуется набором численных значений (вектором) оценок.
- Если на исходном множестве вариантов построить бинарное отношение предпочтения вида «вариант x предпочтительнее варианта y» ($x \succ y$), то все будет зависеть от того, каким именно это отношение будет по его свойствам.
  - Если отношение предпочтительности будет представлять собой строгий порядок, то исходную задачу выбора можно считать решенной.
    - В этом случае, в качестве решения нужно просто взять наилучший (по отношению предпочтения) элемент.
  - Но чаще всего, такое отношение (строгий порядок) в силу разных причин построить не удается.
    - Либо некоторые варианты невозможно сравнить между собой, либо они эквивалентные по предпочтительности. Но, все-таки, для решения исходной задачи выбора, построить такое отношение рано или поздно придется. Для этого есть единственный способ – построить бинарное отношение на основе сравнения численных значений оценок частных критериев.

- Построим следующие бинарные отношения для вариантов x и y на основании значений частных критериев оптимальности $Q(x)$ и $Q(y)$ ($x, y \in D$).

Координатные отношения

- **Отношение эквивалентности**
  - $x \sim y \Leftrightarrow Q(x) = Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) = Q_i(y), i = 1,2, \dots, n.$
  - Варианты x и y эквивалентны, если значения соответствующих частных критериев равны между собой.
- **Отношение нестрого порядка**
  - $x \succsim y \Leftrightarrow Q(x) \geq Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) \geq Q_i(y), i = 1,2, \dots, n.$
  - Вариант x не хуже варианта y, если каждая компонента вектора $Q(x)$ не меньше, чем соответствующая компонента вектора $Q(y)$.
- **Отношение строго порядка**
  - $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow Q(x) \geq Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) \geq Q_i(y), i = 1,2, \dots, n; Q(x) \neq Q(y).$
  - Вариант x лучше варианта y, если у вектора $Q(x)$ найдется хотя бы одна компонента, которая строго больше соответствующей компоненты вектора $Q(y)$, а все остальные компоненты – не меньше.
- **Отношение абсолютно строгого порядка**
  - $x \succ y \Leftrightarrow Q(x) > Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) > Q_i(y), i = 1,2, \dots, n.$
  - Вариант x абсолютно лучше варианта y, если каждая компонента вектора $Q(x)$ строго больше, чем соответствующая компонента вектора $Q(y)$.

Для случая минимизации

- Отношение эквивалентности остается прежним:
  - $x \sim y \Leftrightarrow Q(x) = Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) = Q_i(y), i = 1,2, \dots, n.$
- Отношение нестрогого порядка:
  - $x \gtrsim y \Leftrightarrow Q(x) \leq Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) \leq Q_i(y), i = 1,2, \dots, n.$
- Отношение строго порядка:
  - $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow Q(x) \leq Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) \leq Q_i(y), i = 1,2, \dots, n; Q(x) \neq Q(y).$
- Отношение абсолютно строгого порядка:
  - $x \succ y \Leftrightarrow Q(x) < Q(y) \Leftrightarrow Q_i(x) < Q_i(y), i = 1,2, \dots, n.$

Наилучшее решение

- Наилучшему по отношению «$\succ$» варианту среди множества решений соответствует наилучший по отношению «>» вектор на множестве векторов.
  - Этот вариант безусловно можно считать оптимальным решением задачи выбора.
  - Действительно, построение данного отношения и определение наилучшего элемента по отношению означает, что наилучший по отношению $\succcurlyeq$ вариант x^* является лучшим, чем все остальные, так как по каждому частному критерию строго их превосходит:
  - $Q(x^*) > Q(y^*),\ \ y \in D, y \neq x.$
  - Вариант x^* в этой ситуации радикально превосходит все остальные варианты по всем характеристикам.

Эффективные и слабоэффективные решение

- Максимум по отношению «$\succcurlyeq$» называют *эффективным решением*,
  – а также *решением, оптимальным по Парето*; *Парето-оптимальным решением*; *оптимумом по Парето*.
    - Эффективным решением (вариантом) называют решение (вариант), для которого не существует решения (варианта), лучшего по отношению «$\succcurlyeq$».

- Максимум по отношению «$\gtrsim$» называют *слабо-эффективным решением*,
  – а также *решением, оптимальным по Слейтеру*.
    - Слабо-эффективным решением (вариантом) называют решение (вариант), для которого не существует решения (варианта), лучшего по отношению «$\gtrsim$».

Эффективное и слабо-эффективное множества

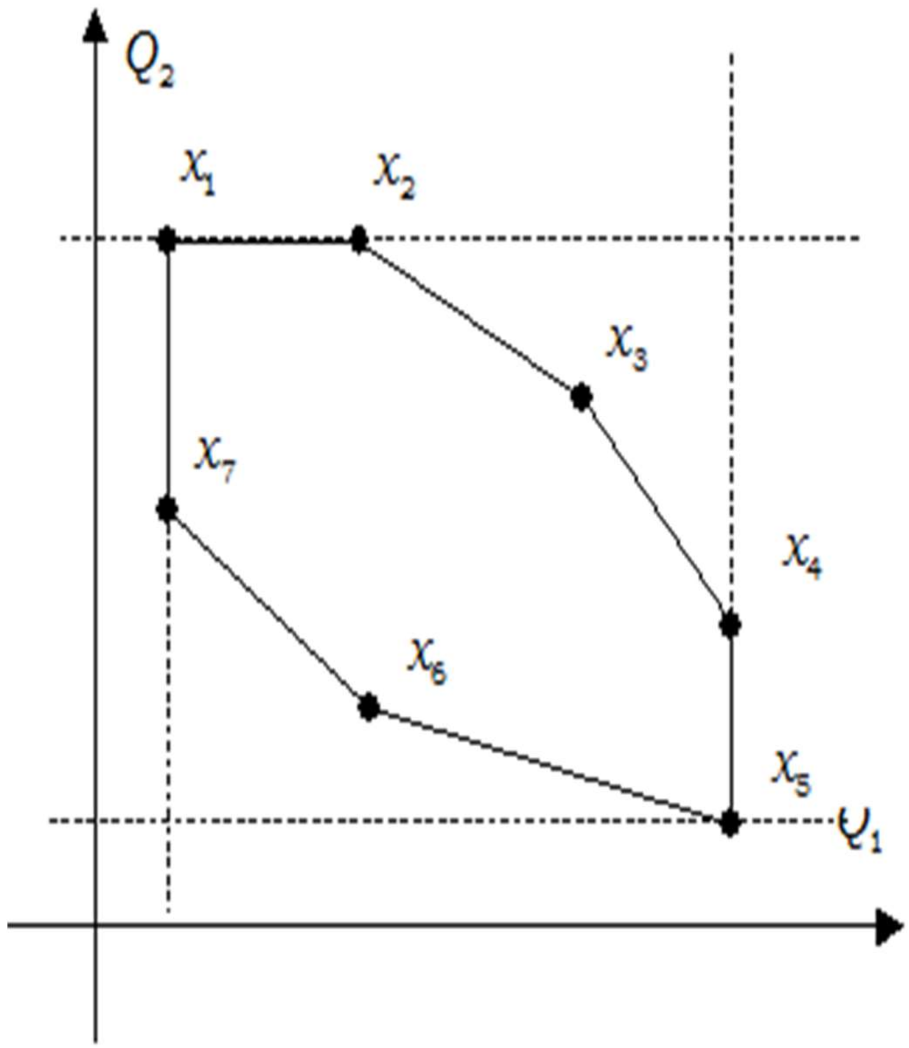
- Множество всех эффективных решений называется *эффективным множеством* или *множеством Парето*.

- Множество всех слабо-эффективных решений называется *слабо-эффективным множеством* или *множеством Слейтера*.

- Из всего исходного множества вариантов рассмотрим два любых, а векторы значений критериев сравнимы по отношению ≥. При этом может оказаться один из следующих случаев.
  - Выполняется соотношение $x \geq y$.
    - Вариант y можно в дальнейшем не рассматривать, так как вариант x не хуже варианта y, более того, хотя бы по одному частному критерию превосходит y.
    - В этом случае говорят, что «x доминирует y».
  - Выполняется соотношение $y \geq x$. Аналогично, y доминирует x и вариант x можно в дальнейшем не рассматривать.
  - Варианты x и y не сравнимы между собой по отношению ≥.
    - Это случится тогда, когда по некоторым частным критериям оптимальности вариант x лучше, чем вариант y, а по другим критериям – наоборот: вариант y лучше варианта x.
- *Эффективное множество представляет собой множество недоминируемых вариантов*.
  - То есть вариантов, для которых не существует ни одного варианта, который был бы лучше в смысле отношения ≥.

Иллюстрация эффективности

- В данном примере варианты x_2, x_3, x_4 являются эффективными, а варианты x_1, x_5 – слабо-эффективными.



1. Исторический экскурс

Вильфредо Парето

Кто такой Парето?

Вильфредо Парето

(1848 – 1923)

Итальянский инженер, экономист и социолог

- **Диссертация «Фундаментальные принципы равновесия в твердых телах»**
- **Длительная работа инженером в ж/д отрасли и в металлургии**
- **С 1893 – профессор политической экономии Лозаннского университета в Швейцарии**

Закон Парето

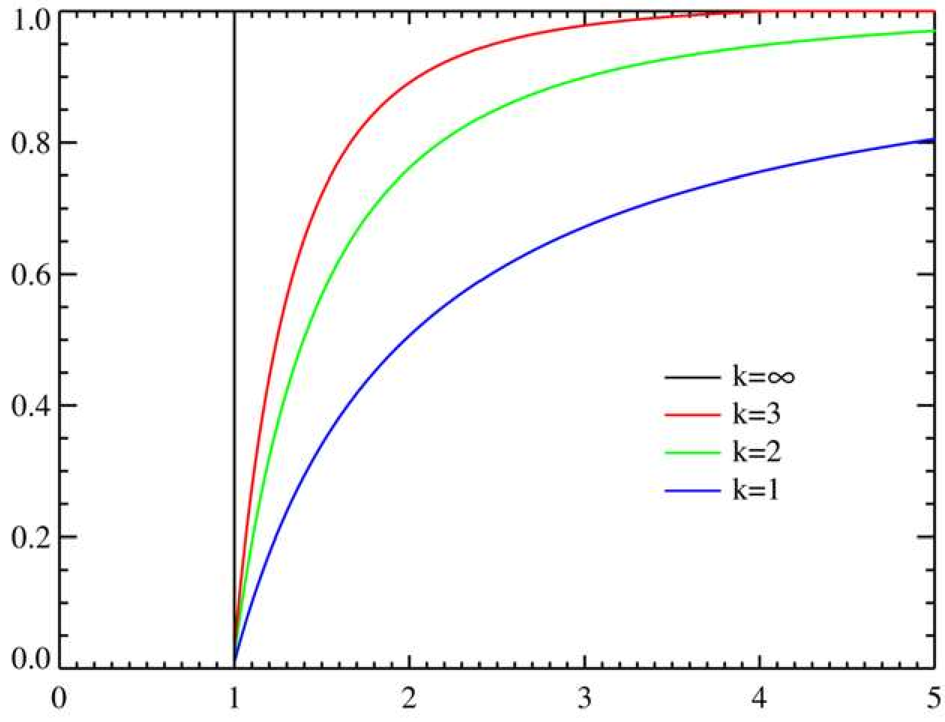
- Закон Парето,
  или принцип Парето,
  или принцип 20/80
  - Эмпирическое правило: «20% усилий дают 80% результата, а остальные 80% усилий — лишь 20% результата».
  - Может использоваться как базовая установка в анализе факторов эффективности какой-либо деятельности и оптимизации её результатов:
    - Нужно правильно выбрать минимум самых важных действий. Дальнейшие улучшения неэффективны и могут быть неоправданны.

- Значимых факторов немного, а факторов тривиальных множество — лишь единичные действия приводят к важным результатам.
- Бо́льшая часть усилий не даёт желаемых результатов.
- То, что мы видим, не всегда соответствует действительности — всегда имеются скрытые факторы.
- То, что мы рассчитываем получить в результате, как правило, отличается от того, что мы получаем (всегда действуют скрытые силы).
- Обычно слишком сложно и утомительно разбираться в том, что происходит, а часто это и не нужно — необходимо лишь знать, работает ваша идея или нет, и изменять её так, чтобы она заработала, а затем поддерживать ситуацию до тех пор, пока идея не перестанет работать.
- Большинство удачных событий обусловлено действием небольшого числа высокопроизводительных сил; большинство неприятностей связано с действием небольшого числа высокодеструктивных сил.
- Бо́льшая часть действий, групповых или индивидуальных, являет собой пустую трату времени. Они не дают ничего реального для достижения желаемого результата.

Кривая Парето

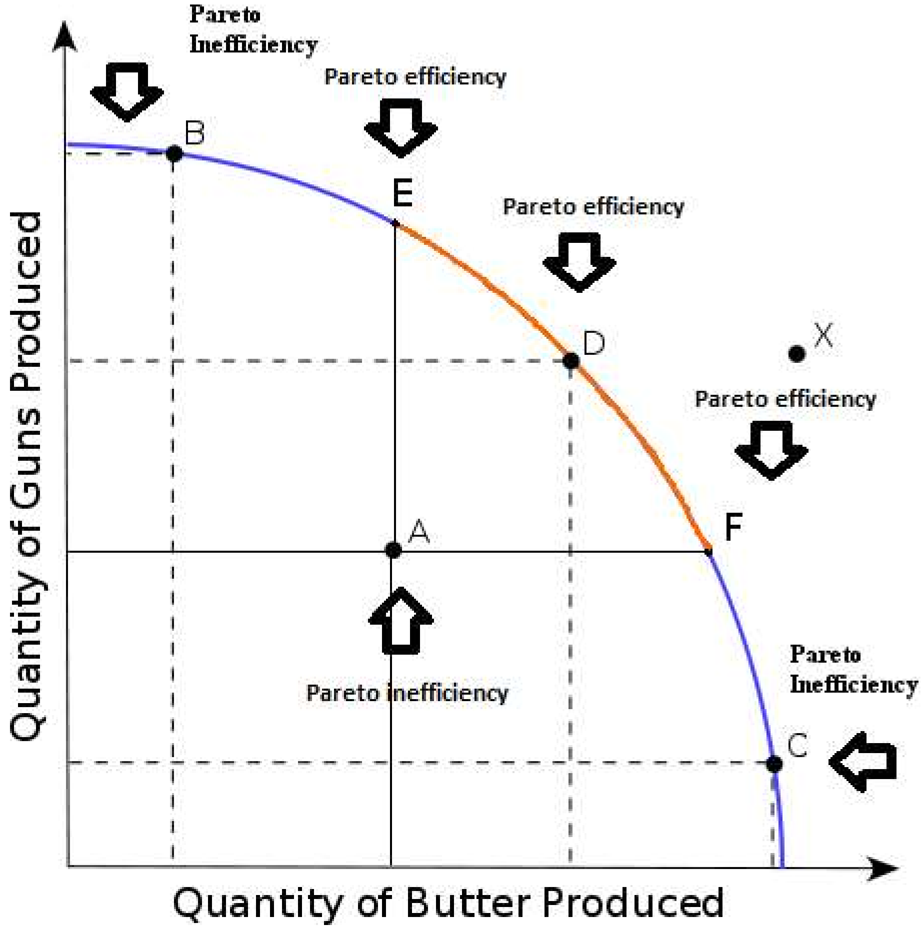
- Графическое отражение закона Парето
  - Кумулятивная зависимость распределения определённых ресурсов (накопленного богатства, результаты голосования…) или результатов от большой совокупности (выборки) причин (например, от количества населения, активности участников).

- С ростом размера контролируемой собственности/богатства, количество людей, достигших соответствующего уровня сокращается в геометрической прогрессии, причем с примерно постоянным множителем.
- Таким образом, Парето пришёл к выводу, что неравенство распределения богатства в обществе — нечто вроде естественного закона природы, эффект которого можно сгладить, но невозможно устранить в денежной системе



Эффективность по Парето

- Оптимальность по Парето — такое состояние системы, при котором значение каждого частного показателя, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других.
  - «Всякое изменение, которое никому не приносит убытков, а некоторым людям приносит пользу (по их собственной оценке), является улучшением».
  - Признаётся право на все изменения, которые не приносят никому дополнительного вреда.
  - Ситуация, когда достигнута эффективность по Парето — это ситуация, когда все выгоды от обмена исчерпаны.



- **Множество Парето – множество состояний системы, оптимальных по Парето**