謝宗翰的隨筆

If you can't solve a problem, then there is an easier problem you can solve: find it. -George Polya

2015年1月8日 星期四

[機率論] Kelly criterion - Simplest Case

這次要介紹 Kelly 在 1956 年透過 Shannon 建構的 Information Theory 提出的一套 賭博理論結果，其後又被其同僚 Throp 進一步推廣，且在近幾十年中已被逐步推廣且應用在 避險基金 與 投信銀行 等金融業中。以下我們將簡介最簡單的 Kelly criterion 型式：

Kelly criterion: 賭徒參與賭局，應追求 最大化 長期 報酬增長率 G (asymptotically maximize the growth rate of wealth)
Kelly formula: 此公式用來計算 每次賭金押注應該是多少可達成最大化 長期報酬增長率 G。

不過在介紹之前我們先考慮以下一個簡單的賭局情形：

Example
考慮 某賭徒身懷 V_0 元全身資產 興致勃勃的 參與 某 投擲銅板 賭局，若銅板出現正面，則賭徒可贏得 1 元，反之若出現反面則 賭徒輸掉 1元。且每次投擲銅板

關於我

Chung-Han Hsieh

82

A student, a researcher, and a husband.

檢視我的完整簡介

捐贈此BLOG

文章分類

控制理論 最佳化 機率

之間彼此互爲獨立，現在給定 銅板出現正面機率爲 p 則反面出現的機率爲 $1-p$ 並且 定義隨機變數 X_k 表示 第 k 次 投擲銅板，若銅板出現正面 我們記做 $X_k=1$ 反之則記做 $X_k=-1$。

試問 (a) 賭徒在 第 k 次 投擲銅板 的獲利期望值爲何 $E[X_k]=?$
(b) 令第 k 次賭注爲 B_k $(k=1,\dots,n)$，試問累計到 n 次投擲銅板時 的獲利期望值爲何 $E[V_n]=?$

Solution
(a) 第 k 次 投擲銅板 的獲利期望值 由定義可知

$$\begin{aligned} E[X_k] &= 1\cdot P(X_k=1)+(-1)\cdot P(X_k=-1) \\ &= 1\cdot p+(-1)\cdot(1-p)=2p-1 \end{aligned}$$

(b) 對 $k=1,2,\dots$ 我們有 $V_k=V_{k-1}+X_kB_k$ 故

$$V_n=V_0+\sum_{k=1}^{n}B_kX_k$$

現在對上式取期望值可得

$$\begin{aligned} EV_n &= V_0+\sum_{k=1}^{n}E[B_kX_k] \\ &= V_0+\sum_{k=1}^{n}E[B_k]E[X_k] \qquad (*) \\ &= V_0+\sum_{k=1}^{n}(2p-1)E[B_k] \end{aligned}$$

論 隨機過程 數學分析 線性系統 隨機分析 投資理論 系統理論 衍生商品 動態系統 選擇權 演算法 線性代數 隨機微分方程 歸正神學 Fourier Series 基礎數學 板橋教會 線性規劃 LQR 訊號與系統 隨筆 MATLAB 微分方程 Windows 動態規劃 電子學 電腦軟硬體 Fourier Transform Martingale 主日學 凸分析 創作 半導體 測度論 變分法 開放式課程 Latex Mac 共軛梯度法 微積分 期貨 遠期契約 Binomial Theorem Contraction Principle Implicit Function Theorem Inverse Function Theorem Kalman Filter Laplace Transform Python 最陡坡度法 歷史 特殊函數 繪圖 遊戲 電影 Arzela-Ascoli Theorem Cauchy-Schwarz Inequality Dynkin Pi-Lambda Theorem Fubini's Theorem Mathematica Picard Iteration Rank-Nullity Theorem Triangular Ineqaulity Weak Laws of Large Numbers 博弈論 多元智能理論

熱門文章

[數學分析] 什麼是若且唯若 "if and only if"
數學上的 if and only if (此文不討論邏輯學中的 if and only if，只討論數學上的 if and only if。) 中文翻譯叫做 若且唯若 (or 當且僅當)，

Comments:

1. 注意到若 $2p-1>0$ 則表示第 k 次 投擲銅板賭局的 獲利的期望值爲正 ($EX_k>0$)。
2. 式 $(*)$ 中利用了 B_k 與 X_k 的獨立性 (儘管 B_k 與 X_{k-1} 有關)。

有了以上想法我們開始檢驗以下幾種策略。假設你已知此投擲銅板的賭局的一個"内線"消息，也就是此銅板是不公平的銅板，其出現正面的機率爲 $p>\frac{1}{2}$ ，若你是賭徒試問應如何建構必勝法?

================

策略 A: 既然已知出現正面機率較高，應該一次就押注全部的錢就對了。

================

ANS: 若採用此策略，不難想像如果這位賭徒運氣不佳，前面好幾次都連續出現反面，則 賭徒如果採用此全部押注的策略，只要出現一次反面就會輸個精光。且如果你說運氣很好 比如說此賭徒連贏 n 次機率 爲 p^n 且 $0<p<1$ 故現在若 $n\to\infty$ 可想而知 賭徒連續贏無窮次的機率爲 0 almost surely，亦即此賭徒必定破產。

對於 策略A 的結論如下：

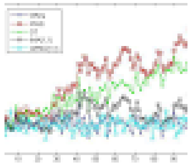
只要輸一次賭徒就破產，且長期而言 ($n\to\infty$) 賭徒連贏的機率是 0，故若將全部資金投入賭局絕非必勝法。

故此很明顯我們該採取 將資金分批賭，那麼該如何分配這些資金才能 最大化賭徒贏錢的機會? 或者說 創造某種必勝法呢?

記得當初剛接觸這個詞彙的時候，我是完全不明白到底是甚麼意思，查了翻譯也是愛莫...

[分享] 台灣國内免費開放式課程推薦

近幾年由MIT開啓的開放式課程風潮 (MIT-OCW)，可以說是讓國内外各大學都開始思考未來教育方式與開放式課程的之間的連結。也使得許多大型開放式課程(Massive open online course, Mooc)聯盟建立起各自的一片天地，比如個人最爲推薦的 Cours...



[隨機過程] 隨機過程淺淺談-先備概念

此文主要介紹隨機過程的定義，基本上建議讀者需要先對機率論有一些基本了解。比如說如果有一點 隨機變數 (可測函數) 與 σ-algebra 的基本認識，那麼在之後接觸較爲抽象的概念時會比較容易上手，有興趣的讀者請參閱此文：[測度論] Sigma Algebra 與 ...

[測度論] Sigma Algebra 與 Measurable function 簡介

這次要介紹的是 Sigma Algebra 與 可測函數 (Measurable function)。(在機率論中 隨機變數 (random variable) 即爲 可測函數，我們會在本文中稍作介紹) 在介紹 measurable function之前我們需要一些先導概...

================
策略 **B: Martingale !** 每輸一次就加倍賭金。
================
ANS: 此法看似必勝法事實上要求賭徒具備無窮資本。相關細節請讀者參閱本 BLOG 相關 Martingale 理論的介紹。

================
策略 **C:** 利用 **Kelly criterion** 幫助我們決定每次賭注金的金額，使得長期而言，賭徒可贏得最大化 **Geometric mean** 收益。
================

Kelly 定義 賭徒 參與第 N 次賭局的資金 長期成長率 G 為

$$G := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log_2 \left(\frac{V_N}{V_0} \right)$$

其中 V_N 為 N 次賭局後賭徒的手上的資金，V_0 為 賭徒的初始資金。(NOTE: 我們在此將成長率定為 $\log_2$ 是依照 Kelly 1956 原文，事實上亦可直接訂為 $\ln(\cdot)$)

由於賭徒事先知道一個 "內線" 消息，也就是此銅板是不公平的銅板，其出現正面的機率為 $p > \frac{1}{2}$，且此時賭徒只考慮投注比率為 K，而 W 與 L 各自代表贏得賭局 或者 輸掉賭局的次數，那麼考慮 N 次賭局之後 (注意 $W + L = N$)，賭徒剩餘資金可表示為

$$V_N = (1+K)^W (1-K)^L V_0$$

且賭徒資金成長率 G 亦可計算如下

[數學分析] 淺談各種基本範數 (Norm)
這次要介紹的是數學上一個重要的概念： Norm： 一般翻譯成 範數 (在英語中 norm 有規範的意思，比如我們說normalization就是把某種東西/物品/事件 做 正規化，也就是加上規範使其正常化)，不過個人認為其實翻譯成 範數 也是看不懂的...這邊建議把 Nor...

$$
\begin{aligned}
G &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\log_2\left(\frac{V_N}{V_0}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\log_2\left(\frac{(1+K)^W(1-K)^L V_0}{V_0}\right)\\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\log_2\left((1+K)^W(1-K)^L\right)\\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}[W\log_2(1+K)+L\log_2(1-K)]\\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{W}{N}\log_2(1+K)+\frac{L}{N}\log_2(1-K)\right]\\
&= p\log_2(1+K)+(1-p)\log_2(1-K)
\end{aligned}
$$

注意到上式 $-G$ 為 convex function of K，故可對其求解最佳 K 值 (透過一階必要條件 $dG/dK=0$)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{dG}{dK}=0\\
&\Rightarrow -\frac{1-p}{(1-K)\log[2]}+\frac{p}{(1+K)\log[2]}=0\\
&\Rightarrow K=2p-1
\end{aligned}
$$

亦即 Kelly criterion 指出 若賭徒每次都以 $K=2p-1$ 比率的賭金進行賭局，則可以最大化 Geometric mean 報酬率。且賭金成長率的最大值 G_{max} 如下

$$
\begin{aligned}
G_{\max} = G|_{K=2p-1} &= p\log_2(2p)+(1-p)\log_2(2-2p)\\
&= p\left[\log_2(2)+\log_2(p)\right]+(1-p)\left[\log_2 2+\log_2(1-p)\right]\\
&= 1+p\log_2(p)+(1-p)\log_2(1-p)
\end{aligned}
$$

故以前例而言，若已知 $p=0.55$ (因為已知小道消息幫助我們確認正面出現機率

[機率論] Kelly criterion - Simplest Case

[隨機分析] Euler-Maruyama 法求 隨機微分方程 數值解 (利用 MATLAB)

► 2014 (46)
► 2013 (48)
► 2012 (38)
► 2011 (43)
► 2010 (32)
► 2009 (16)
► 2008 (1)
► 2007 (1)

較高) 且賭徒身上帶著 V_0 元作爲賭本， 則 每次賭注金 應爲 $(2p-1)V_0 = 0.1V_0$ 亦即每次下注 10%。

Comments

以前述討論爲例，若賭徒每次下注都低於 10%，則長期而言賭徒仍會持續勝利，但是獲利的成長率會較 每次都下注 10% 來的慢 (因爲非最佳解)。

上述的結果可以進一步推廣如下：首先引入 賠率 (賠率 := 贏的金額 / 輸的金額)；比如說下注金 2元，若賭贏則贏得 4 元，賭輸則輸掉 2 元。則此時賠率爲 $4/2=2$ 。

Generalization of Kelly formula for Uneven payoff game (1984, Thorp)

若已知賠率 B 與獲勝機率 $p>0$ 且 $(B+1)p-1>0$，則前述的 Kelly formula 可修正爲

$$K = \frac{(B+1)p-1}{B}$$

上述結果來自於對下式最大化：

$$\max_K G(K)$$

其中 $G(K) = p\ln(1+BK)+(1-p)\ln(1-K)$

Example: 考慮賠率爲 $B=2$ 且 $p=0.55$ 則 ，每次的最佳下注金比率應爲

$$K = \frac{(B+1)p-1}{B} = \frac{(2+1)(0.55)-1}{2} = 0.325$$

Comment:

1. 事實上，讀者可以找到更保守的投資方法，稱爲 Half-Kelly，亦即限定最大值 $K < 1/2$。但不論是 Kelly 或者 Half-Kelly，此法則都還是有相當大的限制，比如說 Kelly Criterion 所求得的最佳比率 K^* 儘管長期而言能最大化成長率，但不保證有限期間的績效，也就是說很有可能在有限期間透過 K^* 去投資的 sampled path 仍會發生在某時刻大幅度資產減少 (亦即 會有極爲巨大的 最大跌幅 (Max Drawdown))，在 [4] 中我們證明就算是最基本的投擲銅板的情況，其 期望的最大跌幅仍超過 50% 以上。此現象稱爲過度投資 (或稱 Kelly Criterion 是 too aggressive)。

2. 許多文獻試圖透過應用 Kelly Criterion 到股票市場之中，但大多數的文獻都透過 Talyor Approximation method 來求解最佳比率 K^* 此法看似合理但其實仍潛藏諸多限制與問題。有興趣的讀者可參考個人的著作 [4].

ref:
[1] Kelly, J. L., A New Interpretation of Information Rate," *Bell System Technical Journal*, 1956
[2] Thorp, E. O., "*The Mathematics of Gambling,*" Lyle Stuart, Secaucus,NJ. 1984
[3] Thorp, E. O., The Kelly Criterion in Blackjack Sports Betting, and The Stock Market, 2007
[4] Hsieh, C.H., and Barmish, B. R., "On Kelly Betting: Some Limitations,"
Proceedings of 53rd Annual Allerton Conference, pp. 165-172, Monticello, IL., 2015

張貼者： Chung-Han Hsieh 於 下午7:53

標籤： 投資理論, 博弈論, 機率論, Game Theory, Investment Theory, Kelly criterion, Probability Theory

Google+