doi: 10.12011/1000-6788(2016)03-0569-12 中图分类号: F830.59 文献标志码: A

Kelly 模型及其在高频交易中的应用

罗 勇[1], 朱 波[2]

(1. 宁波工程学院 金融工程系, 宁波 315211; 2. 西南财经大学 金融学院, 成都 611130)

摘 要 本文研究了在交易成本约束下的基金财富动态最优增长. 我们建立了基于 Kelly 理论的投资组合模型, 它能确保采用该模型的基金的财富长期沿最优路径增长. 随着投资组合中资产数量增加, 目标函数变得非常复杂, 如果按照 Kelly 原始的表达方式, 模型无法求解. 本文利用大数定律与对数效用函数可加性推导了连续时间情形下投资组合中资产的最优资金配置比例, 并分析了模型的性质和效用函数. 基于期货市场高频数据的实证结果显示该模型具有较高实用价值.

关键词 Kelly; 资金增值; 资产配置; 投资组合优化

Kelly model and its application in high frequency trading

LUO Yong[1], ZHU Bo[2]

(1. Department of Financial Engineering, Ningbo University of Technology, Ningbo 315211, China; 2. School of Finance, Southwestern University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China)

Abstract We investigate the problem of dynamic optimal capital growth of a portfolio under transaction costs constrained. A general framework that one strives to maximize the long term growth rate of its expected log utility was developed. However, when applying to portfolio management with many assets, optimization algorithms such as quadratic programming run into difficulties. In our research, we get the fraction for a portfolio in continuous time by combining law of large numbers and the additivity of the logarithm utility functions. Empirical research indicate that the approach is inspiring for this class of problems.

Keywords Kelly; capital growth; asset allocation; portfolio optimization

1 引言

在对冲基金资产管理实务中有这样一个问题: 假设对冲基金经理掌握了 10 亿美金的资金, 要交易的投资品种已经确定, 开仓与平仓的交易策略也研发完成, 现在要解决的问题是每次下单交易需要动用多少资金?

对这个问题最直接的回答是将资金平均分配到将要交易的市场中, 但平均分配资金是否是最优的投资决策呢? 投资决策的资金配置模型通常建立在基金经理效用函数基础上, 常见的效用函数有幂效用函数等. 但是, 采用幂效用函数构建投资组合所得到的投资策略仅仅针对那些效用函数为幂效用的基金经理, 如果另一位基金经理有不同效用函数形式, 那么基于不同效用函数所得到的投资策略就有所不同. 对多项投资机会、市场之间具有相关性、多期连续投资、利润用于再投资的情形, 哪一个效用函数才能使资金增值速度最快呢?

1956 年, 贝尔实验室科学家 Kelly 将博弈理论和信息论整合到一起发表了论文 “A New Interpretation of Information Rate”, 文章研究一个赌博者要最大化自己的财富在每局应该如何下注. 后来这一方法被用到很多地方, 如体育比赛博彩, 21 点等 [1]. 1961 年, Breiman 证明了: 使用 Kelly 效用函数所产生的财富, 从长期看, 远超过采用其他效用函数产生的财富. Kelly 的工作后来引起了很多研究人员兴趣 [2–8].

收稿日期: 2014-08-29
作者简介: 罗勇 (1978–), 男, 汉, 四川成都人, 讲师, 博士, 研究方向: 投资管理与交易策略, E-mail: cbi_luoy@aliyun.com.
基金项目: 国家自然科学基金 (71103146)
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (71103146)
中文引用格式: 罗勇, 朱波. Kelly 模型及其在高频交易中的应用 [J]. 系统工程理论与实践, 2016, 36(3): 569–580.
英文引用格式: Luo Y, Zhu B. Kelly model and its application in high frequency trading[J]. Systems Engineering — Theory & Practice, 2016, 36(3): 569–580.

Kelly 原始模型假定有两个赌徒进行赌博, 其中一位赌徒每次赢钱的概率为 p, 每次赢钱得到一个单位资金, 输钱的概率为 $1-p$, 每次输钱则输掉一个单位资金, 下注资金占总资金的比例为 f. 他采用最大化

$$p\ln(1+f)+(1-p)\ln(1-f) \tag{1}$$

的方式下注, 求解得到最优下注比例为

$$f^*=2p-1 \tag{2}$$

职业 21 点玩家经常同时参与几场赌局, 而赌局之间可能存在某种相关性, 一家对冲基金进行跨市场投资与此类似. 赌博中下注的理论和模型可以被用于基金公司投资实务, 特别是一些多期连续投资、利润用于再投资的高频程序化交易对冲基金, Kelly 模型下注方式与对冲基金资金配置非常相似.

我们的研究思路来源于 Kelly 最优资金配置理论. 原始 Kelly 资金配置理论起源于赌博, 与金融市场风险资产资金配置有很大差别. 原始模型需要估计利润因子及其发生的概率, 对应到金融市场则需要估计期望收益率及其发生的概率, 在金融市场上这些数据很难准确估计, 因此推广 Kelly 理论到金融市场还有很多问题需要解决 [9−10].

对于多项投资机会、市场之间具有相关性、多期连续投资、利润用于再投资的情形, 本文基于 Kelly 理论建立了动态投资组合模型, 并将该模型用于量化投资实务. 本文的模型与其他投资组合优化模型不同点在于我们以资金增值速度作为优化目标, 寻找资金增值最快的投资策略.

本文结构安排如下: 第 2 节首先建立单一资产 Kelly 模型, 然后给出基于 Kelly 的一般投资组合框架并对模型性质进行分析. 第 3 节基于期货市场高频数据完成了实证研究, 并与等权重投资组合进行比较. 第 4 节给出结论.

2 Kelly 动态投资组合

2.1 单一资产 Kelly 模型

假定交易者面临的交易机会期望收益大于零, 他可以无限次重复进行交易, 初始财富记为 W_0, 在第 n 次交易后财富变为 W_n. 假定每次赚钱的概率为 p, 亏损的概率为 $q=1-p$. 第 i 次交易后的收益率记为 $r_i=(W_i-W_{i-1})/W_{i-1}$, 其中 W_i 是第 i 次交易后的财富.

我们现在关心的问题是交易者每次到底应该动用多少钱去购买风险资产? 假定交易者在第 i 次交易时动用的资金占总资金的百分比为 $f, 0\le f\le 1$. 那么, 在第 n 次交易之后, 交易者的财富变为

$$W_n=W_0\prod_{i=1}^{n}(1+fr_i) \tag{3}$$

每次交易可以看作是独立的, 因此, 第 n 次交易之后的平均财富可以写为

$$W_0\prod_{i=1}^{n}(1+E[fr_i]) \tag{4}$$

既然交易机会期望收益为正, 也就是 $E[fr_i]>0$, 为了最大化 $<W_n>$, 那么就应该在每一期最大化 $E[fr_i]$. 因此, $f=1$, 最优策略就是把所有的钱都配置到风险资产上. 这样一来, 破产概率为 $1-p^n$, 其中 $p<1$, 取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-p^n)=1$, 得知采用这样的策略破产是一必然事件. 所以, 最大化 $<W_n>$ 并不是一个好的优化准则.

令 $G(f)$ 为资金增值速度, 基于 Kelly 在赌博中资金配置的方法, 我们采用自然对数表示资金增值速度

$$G(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{W_n}{W_0} \tag{5}$$

将财富 W_n 的表达式代入, 可将 $G(f)$ 整理为

$$G(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\prod_{i=1}^{n}(1+fr_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+fr_i)=<\ln(1+fr_i)> \tag{6}$$

以下是单一风险资产情况下资金配置策略建模及求解过程, 假定交易者的财富是可无限分割的. 如果按照 $B_i=fW_{i-1}$ 分配资金, 其中 $0\le f\le 1$, 这种分配方法就是 “固定比例” 资金管理. 假定 S 和 F 是赚钱和亏损的次数, 那么, 第 n 次交易后财富为

$$W_n=W_0(1+f)^S(1-f)^F \tag{7}$$

其中 $S+F=n$, 记交易者的利润因子为 R. 从平均看, 如果期初投资 1 元钱, 期末变为 1.8 元, 则利润因子为 1.8. 基于过去的经验, 下一期可能的回报和潜在的风险, 以及对应发生的概率都可以被估计出来. 令盈利、亏损的利润因子分别为 a 和 b. 这种情形下, 财富的指数增长率

$$\ln\left[\frac{W_n}{W_0}\right]^{1/n}=\frac{S}{n}\ln(1+af)+\frac{F}{n}\ln(1-bf) \tag{8}$$

对单一资产交易, 由 Borel 强大数定律, 以上方程可以整理为

$$G(f)=p\ln(1+af)+(1-p)\ln(1-bf) \tag{9}$$

$G(f)$ 为财富增长率函数, 对 f 求一阶导数, 并令其为零

$$G'(f)=\frac{pa}{1+af}-\frac{(1-p)b}{1-bf}=0 \tag{10}$$

求解得到最优值资金配置比例

$$f^*=\frac{pa+pb-b}{ab} \tag{11}$$

再次对 $G'(f)$ 求导可得

$$G''(f)=-\frac{pa^2}{(1+af)^2}-\frac{(1-p)b^2}{(1-bf)^2}<0 \tag{12}$$

因此, $G(f)$ 在 $f=f^*$ 有唯一最大值, 将 f^* 代入可得最优增长率

$$G(f^*)=p\ln\left(\frac{pa+pb}{b}\right)+(1-p)\ln\frac{(a+b)(1-p)}{a} \tag{13}$$

更进一步, 令 $G(f_c)=0$, 我们可以得到财富增长率为零时候的临界资金分配比例 f_c, 其中 $0<f^*<f_c<1$. 此处的交易者和普通交易者不同, 他在每次交易中根据最大化下期财富对数的期望来分配资金. 因为多期交易可以用到对数函数可加性, 并且可以使用大数定律.

如果资金分配比例 f 从这个区间 $(0,f_c)$ 内选择, 财富增长率大于零, 从长期看, 交易者拥有的财富将超过初始财富. 但是, 如果 $f>f_c$, 财富增长率小于零, 长期下去破产是必然事件. 可行的资金配置范围是 $(0,f^*)$, 一旦 f 超过 f^*, 财富增长率下降. 为了最大化期末财富, 我们应该选择期望效用函数 $E[\log(1+fr_i)]$ 作为目标函数进行优化, 求解就可以得到最优资金配置比例 f^*.

假定交易者初始财富为 W_0, 资金是可以无限分割的. 考虑期望收益为正的交易, 假设赢利的概率为 0.51, 赢利与亏损的金额都是 1 个单位资金. 应用这些数据可得到最优资金分配比例为

$$f^*=2p_i-1=1.02-1=0.02 \tag{14}$$

因此, 要使财富增长率最大, 或者说财富增长速度最快, 应该分配总资金的 2% 进行交易. 如果资金配置比例小于 2%, 初始财富 W_0 仍然会不断增长, 只不过增长速度有所放慢.

此时, 读者可能会指责交易资金不是无限可分割的. 总资金通常是最小资金单位的倍数, 如果交易的最小资金单位, 相对于总资金非常小, 那么, 破产概率是可以忽略的. 也就是说, 总资金量越大, 破产的风险就越小. 在金融市场, 最小头寸单位可以非常小, 正好符合这个条件. 如果资金量不足, 聪明的基金经理会退出交易, 而不是去赌一把. 基于 Kelly 理论的资金配置策略渐进最大化基金财富的指数增长率, 这正好适用于多期连续投资, 利润用于再投资的情形.

单资产 Kelly 模型中, 当 $a=b=1$, 资金分配比例简化为 $f=f^*=2p-1$. 如果 $p<1/2$, $f^*<0$, 这意味着对资产做空. 如果不考虑做空的情况, 那么最优的资金分配比例应该为 $f^*=0$. 对于 $1/2<p<1$, 在这种情况下, 最优财富增长率 $G(f)$ 可以整理为

$$G(f^*)=\ln 2+p\ln p+(1-p)\ln(1-p) \tag{15}$$

其中

$$S(p)=-[p\ln p+(1-p)\ln(1-p)] \tag{16}$$

就是 Shannon 所定义的信息熵, 主要用来衡量信息量的大小. 一条信息的不确定越大, 熵也越大, 把它搞清楚所需要的信息量也越大. 计算可知 $p=0.01$, $S(p)=0.056$, $p=0.5$, $S(p)=0.6931$.

熵最早用来衡量能量在空间中分布的均匀程度, 能量分布越均匀, 熵就越大. 一个系统的能量完全均匀分布, 这个系统的熵就达到最大. 对绝热过程, 系统熵保持不变, 对不可绝热过程, 熵单调增加. 随着系统由非

平衡状态趋于平衡状态, 其熵单调增加, 系统达到平衡状态, 熵达到最大值. 一个系统的熵总是趋向于增加, 熵的变化决定了系统演化的方向, 熵的最大值确定了系统演化的限度.

一只基金财富增长过程与系统能量趋于均匀的过程非常类似, 财富增长率相当于系统的熵, 财富增长率单调递增类似于熵单调递增, 最大财富增长率相当于熵的最大值. 参考 Shannon 信息熵, 类似地定义财富增长率.

假设有 $n+1$ 项投资机会, 时间 t 资产收益率分别为 $r_{t0}, r_{t1}, \cdots, r_{tn}$, 其中 r_{t0} 代表无风险资产的收益率, 发生的概率分别为 $p_{t0}, p_{t1}, \cdots, p_{tn}$,. 在资产 $i(i=0,1,\cdots,n)$ 上分配的资金占总资金的比例为 f_{ti}, 财富增长率为:

$$G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn}) = \sum [p_t(\cdot)\ln(1+f_{t0}r_{t0}+f_{t1}r_{t1}+\cdots+f_{tn}r_{tn})] \tag{17}$$

若假设 $r_{t0}, r_{t1}, \cdots, r_{tn}$ 相互独立, 则 $p_t(\cdot) = p_{t0}p_{t1}\cdots p_{tn}$. 增值熵表示财富增长速度, 优化目标就是要使财富增值熵最大. 在实务投资中通常有很多约束条件:

$$\sum_{i=0}^{n} f_{ti} = 1, \quad t=1,2,\cdots,T \tag{18}$$

这意味着所有资金都配置到风险资产与无风险资产上.

$$f_{ti} \le 1, \quad t=1,2,\cdots,T \tag{19}$$

表示不允许借钱进行风险投资.

$$f_{ti} \ge 0, \quad t=1,2,\cdots,T \tag{20}$$

表示不能对资产做空.

2.2 基于 Kelly 的一般投资组合框架

在应用 Kelly 理论到金融市场的时候, 遇到很多问题. 金融资产未来的收益率是不确定的, 可能有很多种情况发生, 而赌局中赢多少钱是事先知道的. 这就让人想到用连续模型去代替离散模型. 需要解决的问题是求出 n 项资产的资金分配比例, 求最大化的方法通常是基于效用函数的凹性, n 可能是很大的数值, 甚至还需要考虑约束 $\sum f_i = 1$, 并且需要 $1+fr>0$ 以便 $\ln(\cdot)$ 有意义, 下面研究连续时间近似.

令 X 为随机变量, 概率 $P(X=\mu+s) = P(X=\mu-s) = 0.5$, 则 $E(X)=\mu, Var(X)=s^2$. 初始资本 W_0, 风险资产 (可以是一项风险资产, 也可以是一个风险资产投资组合) 上资金分配比例为 f, 风险资产收益率为 r, 第一期后财富为

$$W_1 = W_0(1+(1-f)r_0+fr) = W_0(1+r_0+f(r-r_0)) \tag{21}$$

其中, r_0 无风险利率. 财富增长率函数为

$$\begin{aligned} G(f) &= E\left(\ln\frac{W_1}{W_0}\right) = E[\ln(1+r_0+f(r-r_0))] \\ &= 0.5\ln(1+r_0+f(r-r_0+s)) + 0.5\ln(1+r_0+f(r-r_0-s)) \end{aligned} \tag{22}$$

现将时间划分为 n 个相等的小块, 那么 μ, s^2, r 将被 $\mu/n, s^2/n, r/n$ 替换掉. 我们有 n 个独立 $X_i, i=1,2,\cdots,n$ 满足

$$P\left(X_i = \frac{\mu}{n} + \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = P\left(X_i = \frac{\mu}{n} - \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 0.5 \tag{23}$$

则

$$V_n = W_1 = W_0 \prod_{i=1}^{n}(1+(1-f)r_0+fr_i) \tag{24}$$

对以上方程两边取 $E(\ln(\cdot))$, 幂函数展开得到

$$G(f) = r_0 + f(\mu - r_0) - \frac{s^2 f^2}{2} + O(n^{-1/2}) \tag{25}$$

令 $n \to \infty$, 则

$$G_\infty(f) = r_0 + f(\mu - r_0) - \frac{s^2 f^2}{2} \tag{26}$$

$G_\infty(f)$ 是投资比例为 f 时的财富增长率. 此处, 对随机变量没有特别的要求, 任何均值为 μ 方差为 s^2 的有界随机变量都会产生相同的结果. 注意 f 不一定在区间 $[0,1]$ 内取值, $f>1$ 表示融资进行风险投资, $f<0$ 表示对资产做空. 求导, 可得最优资金配置策略

$$f^*=\frac{\mu-r_0}{s^2} \tag{27}$$

对应的最优财富增长率为

$$G_\infty(f^*)=\frac{(\mu-r_0)^2}{2s^2}+r_0 \tag{28}$$

当 $\mu=r_0+s^2$, Kelly 类型基金经理不融资, 所有资金投入到风险资产. 如果 $\mu>r_0+s^2$, Kelly 类型基金经理融资进行风险投资. 如果 $\mu<r_0+s^2$, 基金财富部分投资到风险资产, 部分投资到无风险资产.

当 $f=1$, 则 $G_\infty(1)=\mu-s^2/2$, 在坐标系 (μ,s) 上, 有 $\mu-s^2/2=C$, C 是常数. Kelly 类型基金经理效用函数可写为 $U(\mu,s)=\mu-s^2/2$. 以上分析总结如下

$$\begin{aligned}
&f^*=\frac{\mu-r_0}{s^2}\\
&G_\infty(f)=r_0+f(\mu-r_0)-\frac{s^2f^2}{2}\\
&G_\infty(f^*)=\frac{(\mu-r_0)^2}{2s^2}+r_0
\end{aligned} \tag{29}$$

如果不考虑无风险利率为零, 则以上简化为

$$\begin{aligned}
&r_0=0\\
&f^*=\frac{\mu}{s^2}\\
&G_\infty(f)=f\mu-\frac{s^2f^2}{2}\\
&G_\infty(f^*)=\frac{\mu^2}{2s^2}
\end{aligned} \tag{30}$$

更进一步, 假设资金配置比例为 $f=cf^*$, $0\le c\le 1$, 则有

$$\begin{aligned}
&r_0=0\\
&f^*=\frac{\mu}{s^2}\\
&f=cf^*=\frac{c\mu}{s^2}\\
&G_\infty(cf^*)=\frac{c\mu^2}{s^2}-\frac{c^2\mu^2}{2s^2}=\frac{(2c-c^2)\mu^2}{2s^2}
\end{aligned} \tag{31}$$

采用 $f=cf^*$, $0\le c\le 1$ 的资金配置方法, 我们称之为比例 Kelly 策略. 由以上, 可得

$$\frac{G_\infty(cf^*)}{G_\infty(f^*)}=c(2-c) \tag{32}$$

因此, 采用比例 Kelly 策略所产生的财富增长率是最优财富增长率的 $c(2-c)$, 比例系数越小, 财富增值速度越慢.

在多资产投资、资产之间具有相关性、多周期连续投资、利润用于再投资等条件下, 考虑有 $n+1$ 项投资机会, 时间 t 资产收益率分别为 $r_{t0},r_{t1},\cdots,r_{tn}$, 在每一期, 可以同时对这些资产进行投资, 其中, r_{t0} 代表无风险资产的收益率. 基金经理在资产 $i(i=0,1,\cdots,n)$ 上分配的资金占总资金的比例为 f_{ti}, 令 $F_t^*=(f_{t0}^*,f_{t1}^*,\cdots,f_{tn}^*)$ 表示最优资金分配策略, 假定 $f_{t0}^*+f_{t1}^*+\cdots+f_{tn}^*\le 1$, 意味着不能借钱进行风险投资. 令收益率 $r_{t0},r_{t1},\cdots,r_{tn}$ 发生的概率为 $p_{t0},p_{t1},\cdots,p_{tn}$. 为了简化分析, 暂不考虑资产收益率的联合分布, 假定资产收益率相互独立, $p_t(\cdot)=p_{t0}p_{t1}\cdots p_{tn}$, 财富增长函数为:

$$G(f_{t0},f_{t1},\cdots,f_{tn})=\sum\left[p_t(\cdot)\ln(1+f_{t0}r_{t0}+f_{t1}r_{t1}+\cdots+f_{tn}r_{tn})\right] \tag{33}$$

$G(f_{t0},f_{t1},\cdots,f_{tn})$ 为凹函数, 当且仅当, $1+f_{t0}r_{t0}+f_{t1}r_{t1}+\cdots+f_{tn}r_{tn}>0$ 成立, 该方程才有意义. 求最优解需要基于凹函数的性质, 为了求得 f_{ti}^*, 通常令 $\partial G/\partial f_{ti}=0$. 当投资组合包含风险资产的数量大, 这一求解方法就不可行了.

为了解决这个问题, 假定投资组合收益率为 r_{tp}, 投资组合收益率均值, 方差分别为 $E(r_{tp})=\mu_{tp}, Var(r_{tp})=s_{tp}^2$, 整个投资组合中风险资产资金分配比例之和 f_{tp}, 无风险资产收益率 r_{t0}, 无风险资产资金分配比例为 $f_{t0}=1-f_{tp}$. 财富增长函数整理为

$$G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn}) = <\ln[1+(1-f_{tp})r_{t0}+f_{tp}r_{tp}]> \tag{34}$$

将 $G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn})$ 幂函数展开, 则

$$G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn}) = r_{t0}+f_{tp}(\mu_{tp}-r_{t0})-\frac{f_{tp}^2 s_{tp}^2}{2}+O(n^{-1/2}) \tag{35}$$

其中, n 是投资组合中风险资产的数量, 令 $n\to\infty$, 可得

$$G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn}) = r_{t0}+f_{tp}(\mu_{tp}-r_{t0})-\frac{f_{tp}^2 s_{tp}^2}{2} \tag{36}$$

记协方差矩阵 $C_t=(s_{tij})$, 其中 $s_{tij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 项资产和第 j 项资产在时间 t 的协方差. $\mu_{ti}(i=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 项风险资产在时间 t 期望收益率, $U_t=(\mu_{t1},\mu_{t2},\cdots,\mu_{tn})$ 为期望收益率向量. $F_t=(f_{t1},f_{t2},\cdots,f_{tn})$ 为投资组合中风险资产的投资比例, 则

$$\begin{aligned} f_{tp} &= f_{t1}+f_{t2}+\cdots+f_{tn} \\ \mu_{tp} &= f_{t1}\mu_{t1}+f_{t2}\mu_{t2}+\cdots+f_{tn}\mu_{tn} \\ s_{tp}^2 &= F_t^{\mathrm{T}} C_t F_t \end{aligned} \tag{37}$$

为了简化分析, 假定 $r_{t0}=0, f_{tp}=1$, 因此

$$G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn}) = f_{tp}\mu_{tp}-\frac{f_{tp}^2 s_{tp}^2}{2} \tag{38}$$

代入 $G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn})$, 得到

$$G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn}) = f_{t1}\mu_{t1}+f_{t2}\mu_{t2}+\cdots+f_{tn}\mu_{tn}-\frac{(s_{t11}f_{t1}^2+2s_{t12}f_{t1}f_{t2}+\cdots+s_{tnn}f_{tn}^2)}{2} \tag{39}$$

求偏导并解方程 $\partial G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn})/\partial f_{ti}=0$, 可得

$$\partial G(f_{t0}, f_{t1}, f_{t2}, \cdots, f_{tn})/\partial f_{ti} = \mu_{ti}-(s_{tii}f_{ti}+s_{t1i}f_{t1}+s_{t2i}f_{t2}+\cdots+s_{tni}f_{tn})=0 \tag{40}$$

整理如下

$$\begin{cases} (s_{t11}f_{t1}+s_{t12}f_{t2}+\cdots+s_{t1n}f_{tn})=\mu_{t1} \\ (s_{t21}f_{t1}+s_{t22}f_{t2}+\cdots+s_{t2n}f_{tn})=\mu_{t2} \\ \cdots \\ (s_{tn1}f_{t1}+s_{tn2}f_{t2}+\cdots+s_{tnn}f_{tn})=\mu_{tn} \end{cases} \tag{41}$$

其中, $s_{tij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是第 i 项资产与第 j 项资产在时间 t 的协方差. 如果 $\det C_t\neq 0$, 可以得到唯一最优解

$$F_t^* = C_t^{-1}U_t^{\mathrm{T}} \tag{42}$$

财富最优增长率为

$$G(f_{t0}^*, f_{t1}^*, \cdots, f_{tn}^*) = \frac{(F_t^*)^{\mathrm{T}} C_t F_t^*}{2} \tag{43}$$

需要注意的是, 唯一最优解存在的条件是 C_t^{-1} 存在. 如果不考虑相关性, $s_{tii}=\sigma_{ti}^2(i=1,2,\cdots,n)$, 最优资金配置比例简化为

$$f_{ti}^* = \mu_{ti}/\sigma_{ti}^2 \tag{44}$$

此处得到的分析解有一些直观的性质. 首先, 从中可知最优资金配置比例由资产期望收益率, 资产收益率方差, 资产收益率协方差决定. 其次, 资产期望收益率越低, 投资在这项风险资产上的资金量就越少. 资金配置比例与资产收益率方差, 资产收益率协方差成反比例. 最后, 如果投资组合中风险资产相关性越高, 分配到投资组合总资金量就越少, 这与直觉是一致的.

第 n 期后的财富除以初始资金的对数等于 $G(f^*)n$. 给定目标财富 $W_{\text{goal}}>X_0=1$, 则达到目标财富需要的交易次数为

$$n(W_{\text{goal}}, f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn}) = \frac{\ln\frac{W_{\text{goal}}}{W_0}}{G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn})} \tag{45}$$

其中, $f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn}$ 是投资比例. 当 $f_{ti}=f^*_{ti}$, $G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn})$ 有唯一最大值 $G(f^*_{t0}, f^*_{t1}, \cdots, f^*_{tn})$, 并且, $n(W_{\rm goal}, f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn})$ 有唯一最小值. 因此, $n=\frac{1}{G(f^*)}\ln 2$ 给出了资金翻倍所需要的交易次数.

比较物理学中公式, 速度 = 距离/时间, $G(f_{t0}, f_{t1}, \cdots, f_{tn})$ 反映了资金增值速度. 令财富目标为 $W_{\rm goal}$, 财富增长倍数为 $\lambda=\frac{W_{\rm goal}}{W_0}$, 投资组合财富达到给定财富目标所需交易次数等于 $n(\lambda, f)=\frac{\ln\lambda}{G(f)}$.

2.3 模型性质分析

给定效用函数 U, 并且满足 $U'>0$, $U''\leq 0$, 这表示基金经理总是偏好拥有更多的财富, 但随着财富增长, 财富带来的边际效用递减. 基金经理的风险厌恶程度可以通过绝对 (相对) 风险厌恶系数和衡量.

$$\begin{aligned} R_A(x) &= -\frac{U''(x)}{U'(x)} \\ R_R(x) &= -\frac{xU''(x)}{U'(x)} \end{aligned} \tag{46}$$

最直观的解释是: 效用函数越 “弯曲”(曲度高), 基金经理越厌恶风险. Kelly 动态投资组合模型使用期望对数效用函数

$$G(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\prod_{i=1}^{n}(1+fr_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+fr_i)=<\ln(1+fr_i)> \tag{47}$$

对数函数 $U(W)=\ln W$ 的 Arrow Pratt 绝对风险厌恶系数、相对风险厌恶系数为

$$\begin{aligned} R_A(W) &= -U''(W)/U'(W)=\frac{1}{W} \\ R_R(W) &= R_A(W)W=1 \end{aligned} \tag{48}$$

绝对风险厌恶系数是对基金管理人风险偏好程度的度量, 系数越大, 表示越厌恶风险, 所要求的风险补偿就越高. 随着财富增长, 对数效用函数有趋近于零的绝对风险厌恶, Kelly 类型基金经理操作风格会非常激进. 因此, Kelly 投资策略风险很高, 即使是比例 Kelly 投资策略风险也比较高. Kelly 策略的优势需要更长的时间周期才能体现出来, 即使具有正的期望收益, 或者投资的周期也足够长, 遇到一些不利的极端事件, 基金也可能遭遇巨大损失.

因此, 永远不要让资产配置比例超过 f^*, 一旦超过该比例, 投资风险增加, 财富增长率降低. 如果资金分配比例超过临界资金配置比例 f_c, 财富增长率为负, 长期下去, 意味着破产必然发生.

投资组合选择另外两个常见的效用函数是幂效用函数与均值方差效用函数. 考虑如下负幂效用函数

$$\begin{aligned} &U(W)=W^{\delta}, W>0, \delta<0 \\ &U'(W)=\delta W^{\delta-1}, U''(W)=\delta(\delta-1)W^{\delta-2} \end{aligned} \tag{49}$$

Arrow Pratt 风险厌恶系数为

$$\begin{aligned} &R_A(W)=-U''(W)/U'(W)=(\delta-1)W^{-1} \\ &R_R(W)=R_A(W)W=\delta-1 \end{aligned} \tag{50}$$

并且

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}R_A(W)}{\mathrm{d}W}=(1-\delta)W^{-2} \\ &\frac{\mathrm{d}R_R(W)}{\mathrm{d}W}=0 \end{aligned} \tag{51}$$

随着财富增加, 绝对风险厌恶程度降低, 当财富趋近无穷大时, 绝对风险厌恶系数趋近于零. 令 $\delta\to 0$, 幂效用函数变换为对数效用函数

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{W^{\delta}-1}{\delta}=\ln W \tag{52}$$

也就是说, 对数效用函数是幂效用函数的特殊形式.

考虑负幂效用函数 $\frac{1}{\delta}W^{\delta}$, 其中 $\delta<0$. 不同的基金管理人可以根据自己的风险厌恶程度选择适合自己的 δ. 根据 Merton 基于齐次幂效用函数在连续时间情形下得出的最优资金配置策略

$$F^*(t)=\frac{1}{1-\delta}(CC')^{-1}\hat{\mu} \tag{53}$$

可知

$$\alpha=\frac{1}{1-\delta},\quad \delta=1-\frac{1}{\alpha} \tag{54}$$

其中, α 为比例 Kelly 系数. 令 α 为风险因子, 如果 α 越小, 则投资者越厌恶风险. 当 $\alpha=1$, 对应的财富增长率为最大增长率, 记为全 Kelly 策略. 随着 α 减小, 财富增长率也随之降低, 对应的投资策略我们称之为 α-Kelly 策略.

因此, 全 Kelly 资金配置策略对应 $\delta=0$, 半 Kelly 策略对应 $\delta=-1$, 四分之一 Kelly 策略对应 $\delta=-3$. 连续选择合适的 δ 就能够使基金财富在理想路径上增长. 需要注意的是, 以上关系是在资产期望收益率服从对数正态分布的假设下推导出来的, 仅仅告诉我们幂函数风险厌恶系数与风险因子的关系, 并不具有普适性.

基于 Kelly 理论的投资准则有很多良好的性质. 主要好处是财富增长率长期最大化, 但是, 对数效用函数是风险极高的效用函数, 财富增长过程中波动幅度非常大. 以下我们讨论 Kelly 动态投资组合模型的一些重要性质.

定理 1 Kelly 动态投资组合财富增长率有以下三条重要性质:

- 如果 $G(f)>0$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} W_n=\infty$ 几乎必然成立, 对于给定财富目标 M, 有 $\mathrm{Prob}[\liminf\limits_{n\to\infty} W_n>M]=1$ 成立.
- 如果 $G(f)<0$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} W_n=0$ 几乎必然成立, 任给无穷小数值 ε, 有 $\mathrm{Prob}[\limsup\limits_{n\to\infty} W_n<\varepsilon]=1$ 成立.
- 如果 $G(f)=0$, 那么 $\limsup\limits_{n\to\infty} W_n=\infty$ 几乎必然成立, 并且 $\liminf\limits_{n\to\infty} W_n=0$ 几乎必然成立.

证明 (a) 由 Borel 强大数定律, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{W_n}{W_0}=G(f)$, 且 $G(f)>0$, 存在 $N\in Z^+$, 任给 $n>N$, 有

$$\frac{1}{n}\ln\frac{W_n}{W_0}\geq\frac{G(f)}{2} \tag{55}$$

整理可得

$$W_n\geq W_0\mathrm{e}^{\frac{nG(f)}{2}} \tag{56}$$

对任意 $n>N$ 成立, 因此, $\lim\limits_{n\to\infty} W_n=\infty$.

(b) 同理可证, $\lim\limits_{n\to\infty} W_n=0$.

(c) 任给正整数 m, 交易赢利次数 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n\geq np+m+1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, S_n\leq np-m-1$ 几乎必然成立, 其中 p 是赢利概率. 如果 $S_n>np+m$, 并且 $G(f)=0$, 对于单一风险资产情形, 有

$$\frac{1}{n}\ln\frac{W_n}{W_0}\geq\frac{np+m}{n}\ln(1+f)+\frac{n-(np+m)}{n}\ln(1-f)=G(f)+\frac{m}{n}\ln\frac{1+f}{1-f}=\frac{m}{n}\ln\frac{1+f}{1-f} \tag{57}$$

整理可得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, W_n\geq W_0\left(\frac{1+f}{1-f}\right)^m \tag{58}$$

几乎必然成立, 因此, $\limsup\limits_{n\to\infty} W_n=\infty$ 几乎必然成立. 同理可证, $\liminf\limits_{n\to\infty} W_n=0$ 几乎必然成立.

该定理意味着: 如果选择财富增长率为正的资金配置策略, 从长期看, 基金经理的财富将趋于无穷; 如果资金配置策略导致财富增长率小于零, 从长期看, 基金必定会破产.

定理 2 在每一期, 两个基金经理有相同的投资机会, 其中一位基金经理使用策略 f^*, 这一策略选择最大化 $E\ln W_n$ 作为优化准则, 而另一位则使用普通的资金配置策略, 记为 f, $G(f^*)>G(f)$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n(f^*)}{W_n(f)}\to\infty \tag{59}$$

证明

$$\ln\left[\frac{W_n(f^*)}{W_0}\right]^{\frac{1}{n}}-\ln\left[\frac{W_n(f)}{W_0}\right]^{\frac{1}{n}}=\ln\left[\frac{W_n(f^*)}{W_n(f)}\right]^{\frac{1}{n}}=\frac{S}{n}\ln\frac{1+f^*}{1+f}+\frac{F}{n}\ln\frac{1-f^*}{1-f} \tag{60}$$

其中, S,F 是交易赢利与亏损的次数, 由 Borel 强大数定律

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{W_n(f^*)}{W_n(f)}\right]\to G(f^*)-G(f)>0 \tag{61}$$

因此

$$\ln\left[\frac{W_n(f^*)}{W_n(f)}\right]\geq\frac{G(f^*)-G(f)}{2}>0 \tag{62}$$

变换可得

$$W_n(f^*) \geq W_n(f)\mathrm{e}^{\frac{G(f^*)-G(f)}{2}} \tag{63}$$

定理得证, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n(f^*)}{W_n(f)} \to \infty \tag{64}$$

随着时间推移, 使用对数策略的基金经理的财富将远远超过另一位基金经理的财富.

以下是 Kelly 动态投资组合模型的其他性质:

- 只要资金配置比例小于临界值 f_c, 基于最大化 $E\ln W_n$ 的投资策略永远不破产.
- 投资到单一资产上的财富数量随着总财富单调递增.
- 如果希望交易的风险更小, 那么选择适当的比例 Kelly 因子, 牺牲一部分财富增长率 (降低资金增值速度) 就可以实现. 采用负幂效用函数 δW_n^δ, 选择适当的风险厌恶参数 δ 即可.
- 当投资项目期望收益非常高, 或者风险很低, 那么投资到这项资产上的资金量就极大, 如果遇到不利的小概率事件, 损失就很高.
- 如果从历史数据中高估了资产期望收益率, 以及对应的概率, 用 Kelly 策略计算出来的头寸就非常大.
- 对于抛硬币实验, 如果输赢次数相同, 都等于 n, 那么最终财富为 $W_{2n} = W_0(1-f^2)^n$.
- 比例 Kelly 策略包含其他任何固定比例策略.
- 从长期看, Kelly 策略财富增值最快. 但是, 如果遇到不利的小概率事件, 仍然可能导致大的亏损.
- 最优财富增长投资策略占优于其他策略可能需要很长时间.

Kelly 策略和比例 Kelly 策略如果使用得当, 并且有好的数据估计和风险管理机制, 能够在基金管理领域发挥重要作用. 考虑到 $Elog$ 对输入参数非常敏感, 特别是投资组合中资产期望收益率误差可能导致结果被高估, 实际应用的时候尽量减小资金分配比例. 总之, 对长期投资者而言, 好的性质远远多过坏的性质.

在第 t 期投资, 配置在投资组合中某风险资产 i 上资金占总资金的比例 f_{ti} 可行配置范围为 $[0, f_{ti}^*]$, 其中 f_{ti}^* 为风险资产 i 最优资金配置比例. 如果资金配置比例超过 f_{ti}^*, 财富增长率 (收益) 降低, 资金衰落水平 (风险) 增加; 如果资金配置比例是 f_{ti}^* 的两倍, 基金收益率等于无风险利率; 如果资金配置比例超过临界比例 $2f_{ti}^*$, 基金财富负增长, 长期下去基金破产. 这可用于指导对冲基金进行资金配置, 只要资金配置在可行域范围 $(0, f_{ti}^*]$, 基金破产概率为零, 并且基金财富会不断增值.

投资组合中风险资产上的资金配置比例越高, 并且在可行域范围 $[0, f_{ti}^*]$ 内, 基金财富增长率 (收益) 越高; 资金配置比例等于 f_{ti}^*, 财富增值速度最快; 资金配置比例超过 f_{ti}^*, 财富增值速度降低. 这意味着要获得更高的收益, 需要将更多的资金配置到风险资产上.

风险资产上的资金配置比例越高, 基金财富衰落水平 (风险) 也越大. 随着资金配置比例增加, 财富衰落曲线的斜率逐渐趋于零.

如果投资人愿意接受更高的财富衰落水平 (风险), 那么他将拥有更高的财富增长率 (收益). 此处非常类似于马科维茨均值方差分析, 财富衰落水平表示风险, 财富增长率表示收益, 有效投资组合位于 $[0, f_{ti}^*]$ 区间内. 但从均值方差分析得到的结论是承担的风险越高, 投资组合受益越大. 从我们的模型可知, 如果资金衰落水平超过了临界值, 财富增长率开始下降, 承担的风险越多, 财富增长率越小, 超过了临界值水平就没有必要承担过多的风险. 系统性风险越高收益越高的结论只在可行资金配置范围才有效. 该模型同时还给出了投资组合有效前沿, 与均值方差有效前沿不同的是, 我们的模型存在拐点并且能够反映资金增值速度.

Kelly 模型根据资产历史收益率来配置资金, 过去表现良好的资产在下一期交易的时候资金配置比例较高. 模型建立在历史会重演的基础上, 如果资产未来表现与历史绩效相差过大, 则从短期看使用 Kelly 模型进行资金配置的风险会很高. 在没有任何先验信息的情况下, Kelly 模型可退化为等权重模型, 如果基金经理掌握了先验信息, 运用 Kelly 模型可获得更多的财富. 基金经理通常会根据自己对资产未来的预期修正资金配置比例, 不同基金经理对未来预期不同, 这就造成了不同基金的绩效差异.

原始模型研究无限次重复下注, 对应到金融市场则适合于无限次重复交易特别适用于对冲基金高频交易. 原始模型将当期赢到的钱作为本金下注, 对应于金融市场则将当期利润用于再投资. 对于多项投资机会、资产之间具有相关性、多期连续投资、利润用于再投资的情形, 可以使用 Kelly 动态投资组合模型. 对于有风险约束、交易成本约束或其他约束的情形, 可以使用风险约束下的 Kelly 动态投资组合模型.

给定风险承受水平, 比如限定最多只能亏损总资金的 20%, 运用风险约束 Kelly 动态投资组合模型, 就能够给出在最多亏损 20% 条件下的最优资金配置策略. 这一比例是在无风险约束模型最优解 f^*_{ti} 基础上乘以风险因子 $\alpha \in [0,1]$, 风险厌恶程度越低, 乘以的系数就越大, 分配到风险资产上的资金量就越多. 基金管理领域不同投资人有不同的风险承受能力, 应用这一方法就能满足不同风险承受能力投资人的需求, 同时又能使基金财富在期望路径上增长.

3 期货市场高频数据实证结果

以下计算采用了中国商品期货和股指期货高频交易数据, 时间范围从 2011 年 1 月 1 日到 2013 年 12 月 31 日, 数据来源于 MultiCharts, 时间框架为 5 分钟. 投资组合中选择的品种主要根据市场流动性, 选择了成交量较活跃的 14 个期货品种, 分别为: 股票指数期货 (IF)、橡胶 (ru)、螺纹钢 (rb)、白银 (ag)、铜 (cu)、焦炭 (j)、豆粕 (m)、棕榈油 (p)、塑料 (l)、豆油 (y)、菜籽粕 (RM)、精对苯二甲酸 (TA)、白糖 (SR)、玻璃 (FG). 由于各大交易所交易成本收取方式差异比较大, 上交所按照百分比收取, 郑商所与大商所按照每手固定金额收取, 中金所则分别按照百分比和固定金额收取, 并且每个品种的交易成本不同. 为简化计算, 下面的绩效结果交易成本设置为成交金额的 0.1%, 该成本略高于期货交易真实成本.

3.1 含交易成本期货投资组合分析

我们先采用 2011 年高频期货数据计算出投资组合中各期货品种的投资比例, 然后将此投资比例用于计算 2012 年和 2013 年绩效. 此处需要注意的是, 模型前提假定是在历史上表现良好的资产, 其未来表现也不会差, 也就是历史会重演. 我们做投资决策的时候, 所知道的就只有历史数据, 并没有任何先验信息. 正如盈透证券创始人 Thomas Peterffy 在他的概率实验室有奖征文里所说 “Everybody is guessing”, 我们不知道未来会发生什么, 所以对未来只能预期, 但我们知道自己的模型在过去是否赚钱. 如果模型在过去都不能盈利, 那么如何确保它在未来能够盈利呢?

计算得到的权重见表 1. 动用资金量比较大的几个品种为股指期货、螺纹钢、精对苯二甲酸, 几乎接近 1% 的比例. 动用资金量比较少的品种为豆粕、棕榈油、豆油、白糖等, 这说明这几个品种在 2011 年的表现不佳. 该资金配置比例与实盘交易的直觉是吻合的, 实际交易中豆粕、豆油等品种的活跃程度相对于其他品种要低一些.

表 1 期货投资组合各品种权重 (基于 2011 年样本)

期货代码	IF	ru	rb	ag	cu	j	m
	p	l	y	RM	TA	SR	FG
投资比例	0.0095	0.0058	0.0099	0.0087	0.0041	0.0014	0.0006
	0.0004	0.0094	0.0004	0.005	0.0099	0.0002	0.0008

2012 年和 2013 年的交易绩效数据分别见表 2、表 3. 初始财富为 200 万人民币, 2012 年与 2013 年平均月收益率分别为 19.57%, 36.64%, 年最大衰落分别为 63.76%, 58.8%. 两年的交易次数基本相当, 分别为 644 次、767 次, 但从数据上分析, 2013 年的绩效表现更优. 从数据的偏度和峰度上看, 收益率不符合正态分布, 我们的模型并没有做任何收益率分布的假定, 这更符合客观事实.

以上的计算没有考虑风险约束, 很多普通投资者无法承受这么高的资金衰落水平, 考察资金衰落约束条件下的绩效在另外的工作中完成.

表 2 期货投资组合 2012 年绩效 (样本外)

统计指标	实证数据	统计指标	实证数据
初始财富	200 万	收益率标准差	8.2
财富增长倍数	5.51 倍	正收益率标准差	7.61
平均月收益率/%	19.57	负收益率标准差	4.91
中位数月收益率/%	18.38	偏度	0.9
最大月收益率/%	102.3	峰度	3.35
最小月收益率/%	–40.02	完成交易次数	644
最大衰落	–63.76	赢利交易次数	241
利润因子	1.25	亏损交易次数	401

表 3 期货投资组合 2013 年绩效 (样本外)

统计指标	实证数据	统计指标	实证数据
初始财富	200 万	收益率标准差	9.93
财富增长倍数	10.63 倍	正收益率标准差	10.14
平均月收益率/%	36.64	负收益率标准差	5.44
中位数月收益率/%	31.23	偏度	1.54
最大月收益率/%	206.32	峰度	6.20
最小月收益率/%	–43.07	完成交易次数	767
最大衰落	–58.8	赢利交易次数	281
利润因子	1.33	亏损交易次数	479

3.2 不同 Kelly 因子期货投资组合比较

为了比较 Kelly 因子对绩效的影响, 我们选择如下几个 Kelly 因子 0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7. 计算的绩效数据为 2013 年样本外数据, 采用的资金配置比例基于 2011 年样本数据, 计算结果包含交易成本, 具体数据见表 4.

表 4 不同 Kelly 因子期货投资组合绩效与风险 (2013 年, 样本外)

Kelly 因子 α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
初始财富/万	200	200	200	200	200	200	200
年收益率/%	50.62	102.72	164.85	240.45	344.46	485.49	601.37
平均月收益率/%	3.78	7.09	10.28	13.72	17.59	22.03	25.52
中位数月收益率/%	3.75	6.42	9.80	12.9	15.19	18.93	22.68
最大月收益率/%	15.54	31.09	46.84	65.79	86.83	109.73	130.6
最小月收益率/%	–5.34	–10.31	–14.58	–19.23	–22.96	–27.1	–31.39
最大衰落/%	–8.77	–16.51	–23.29	–30.09	–35.15	–40.6	–45.77
偏度	1.44	1.54	1.36	1.44	1.5	1.55	1.53
峰度	6.76	6.60	5.68	6.21	6.39	6.46	6.34

结果显示, 一只基金风险承受能力越强, 配置到风险资产上的资金比例就越高, 最终产生的财富也越多. 另一方面, 数据显示, 与高比例策略相伴随的是高风险, 资金衰落与资金配置比例有直接的关系, 在实盘交易中, 可以根据自己的风险承受能力选择合适自的 Kelly 因子.

3.3 与等权重期货投资组合比较

假定 Kelly 投资组合各资产资金配置比例相同, 优化目标还是资金增值速度, 首先用 2011 年样本数据计算等权重条件下, 资金增值最快的投资比例. 为了与风险约束条件下的 Kelly 动态投资组合绩效相比较, 资金衰落约束设置为 20%. 计算所得结果为 9.1150E–004, 然后利用该权重计算 2012 年、2013 年样本外数据的绩效.

等权重条件下 2012 年, 2013 年绩效数据见表 5、表 6. 初始资金为 200 万人民币, 2012 年, 2013 年财富增长倍数分别为 1.59 倍、1.44 倍, 平均月收益率为 3.06%、3.61%, 资金衰落分别为 13.26%、15.09%. 等权情形在分散非系统性风险方面有一定的优势, 非等权投资组合资金配置过于集中到某些历史表现良好的资产上. 但是资产未来的表现是不确定的, 如果资产未来收益不满足历史重演的假定, 则采用非等权的资金配置比例会增加投资组合的风险. 只有在满足历史重演的条件下, 采用非等权的资金配置方法才能够获得更优的绩效, 在实盘交易中, 资金配置比例通常还会根据基金经理对资产未来的预期做调整, 不同基金经理对资产未来表现有不同的预期, 这就造成了不同基金最后的绩效差异.

表 5 期货投资组合 2012 年绩效 (等权重、样本外)

统计指标	实证数据	统计指标	实证数据
初始财富	200 万	收益率标准差	1.63
财富增长倍数	1.59 倍	正收益率标准差	1.57
平均月收益率/%	3.06	负收益率标准差	1.05
中位数月收益率/%	1.19	偏度	1.11
最大月收益率/%	11.98	峰度	5.72
最小月收益率/%	–6.37	完成交易次数	630
最大衰落	–13.26	赢利交易次数	236
利润因子	1.25	亏损交易次数	392

表 6 期货投资组合 2013 年绩效 (等权重、样本外)

统计指标	实证数据	统计指标	实证数据
初始财富	200 万	收益率标准差	1.73
财富增长倍数	1.44 倍	正收益率标准差	1.75
平均月收益率/%	3.61	负收益率标准差	1
中位数月收益率/%	2.02	偏度	1.34
最大月收益率/%	18.98	峰度	4.79
最小月收益率/%	–6.16	完成交易次数	745
最大衰落	–15.9	赢利交易次数	270
利润因子	1.32	亏损交易次数	468

以上数据与 Kelly 动态投资组合模型的性质是完全吻合的, 随着财富增长, Kelly 模型的绝度风险厌恶系数趋近于零, 这意味着 Kelly 类型投资者只关心获得更多的财富, 不关心账户资金曲线的波动. 因此, 使用 Kelly 产生的财富比等权重模型产生的财富更多, 但是 Kelly 模型的资金衰落水平也更大. 在资产管理实务中需要在财富增长率和资金衰落水平之间做好平衡, 在自己风险承受能力范围内运用 Kelly 动态投资组合模型使得基金财富以最快速度增值.

4 结论

本文研究了在交易成本约束下的动态最优资本增长. 我们首先建立了基于 Kelly 理论的单一资产投资模

型, 最后由简单到复杂建立了多项资产情形下的 Kelly 动态投资组合模型, 并且我们还对模型效用函数和模型的性质做了分析. 本文最后以 Kelly 动态投资组合模型为基础基于期货市场高频数据完成了实证分析.

在第 t 期投资, 配置在投资组合中某风险资产 i 上资金占总资金的比例 f_{ti} 可行配置范围为 $[0, f_{ti}^*]$, 其中 f_{ti}^* 为风险资产 i 最优资金配置比例. 如果资金配置比例超过 f_{ti}^*, 财富增长率 (收益) 降低, 资金衰落水平 (风险) 增加; 如果资金配置比例超过临界比例 $2f_{ti}^*$, 基金财富负增长, 长期下去基金破产. 这一结论的意义在于指导对冲基金进行资金配置, 只要资金配置在可行域范围 $(0, f_{ti}^*]$, 基金破产概率为零, 并且基金财富会不断增值.

随着财富增长, Kelly 动态投资组合模型所使用的效用函数绝度风险厌恶系数趋近于零, 这意味着 Kelly 类型投资者只关心获取更多财富, 不关心账户资金曲线波动. 如果某资产历史上收益很高, 那么投资到这一资产上的资金量就很大, 如果资产未来表现不佳, 损失会很高. 因此, 使用 Kelly 模型最后得到的财富虽然更多, 但模型导致的财富增长曲线也更陡峭, 这就需要投资人有足够的风险承担能力和心理承受能力, 并且愿意成为长期投资者. 如果希望交易风险更小, 可选择适当的 Kelly 因子, 将资金增值速度降低就能够实现.

参考文献

[1] Elton E J. Modern portfolio theory and investment analysis[M]. NewYork: Wiley, 2006.
[2] Thorp E O. The Kelly criterion in blackjack sports betting and the stock market[J]. Handbook of Asset and Liability Management, 2006, 11: 387–428.
[3] Ziemba W T, Hausch D B. The Dr. Z betting system in England[J]. Efficiency of Racetrack Betting Markets, 2008, 11: 567–574.
[4] Medo M, Zhang Y C. Diversification and limited information in the Kelly game[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2008, 387: 6151–6158.
[5] Medo M, Zhang Y C. How to quantify the influence of correlations on investment diversification[J]. International Review of Financial Analysis, 2009, 18: 34–39.
[6] MacLean L C, Thorp E O. Medium term simulations of the full Kelly and fractional Kelly investment strategies[J]. The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice, 2010, 15: 543–562.
[7] Ziemba B. Good and bad properties of the Kelly criterion[J]. Wilmott Magazine, 2003, 4: 6–9.
[8] Vince R. Optimal f and the Kelly criterion[J]. IFTA Journal, 2011, 18: 21–28.
[9] Luo Y, Zhu B, Tang Y. Dynamic optimal capital growth with risk constraints[J]. Economic Modelling, 2013, 30: 586–594.
[10] Luo Y, Zhu B, Tang Y. Simulated annealing algorithm for optimal capital growth[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2014, 408: 10–18.