Интерполирование. Интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона. Точность интерполяционных формул. Интерполяция кубическими сплайнами

Чеховской Игорь Сергеевич

Понятие интерполяции

Частный случай **аппроксимации**.
Построение аналитического выражения функции по ее таблице значений и нахождение промежуточных значений (восстановление или доопределение функции).
Пусть $y(x)$ - некоторая функция, для которой известна лишь таблица ее значений:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \\ \ldots\ldots \\ y(x_n) = y_n \end{cases}$$

Примеры применения:

- Экспериментальные данные
- Аналитическое выражение $y(x)$ очень сложное

$P_n(x)$ - любая функция, принимающая в заданных точках заданные значения. В общем случае бесконечное количество функций $P_n(x)$.

Формулировка задачи

Задача алгебраической интерполяции:
Для данных **различных** значений $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ и $y = y_0, y_1, \dots, y_n$ найти алгебраический полином $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{cases} P_n(x_0) = y_0 \\ P_n(x_1) = y_1 \\ \dots\dots \\ P_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Точки $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ – *узлы интерполяции*,
$P_n(x)$ – *интерполяционный полином*,
формулы для нахождения $P_n(x)$ – *интерполяционные формулы*.

Формулировка задачи

Ищем $P_n(x)$ в виде полинома n-ой степени с неизвестными коэффициентами $a_0, \ldots, a_n$:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Используя условия

$$\begin{cases} P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \ldots\ldots \\ P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n, \end{cases}$$

получим систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с $n+1$ неизвестными. Решение СЛАУ существует и единственно, так как матрица системы – матрица Вандермонда, ее определитель $\prod\limits_{0 \le i,j \le n} (x_j - x_i)$ – ненулевой при $x_i \ne x_j$, $i \ne j$.

Решив СЛАУ, получим интерполяционный полином $P_n(x)$.

Формулировка задачи

Пример:
$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$ и $y_0 = 1, y_1 = 1, y_2 = 3$.
Интерполяционный полином $P_n(x) = 1 - x + x^2$

Проблемы:

- нужно решать СЛАУ специального вида
- полученная СЛАУ чувствительна к ошибкам округления при решении – **плохо обусловлена**.

Интерполяционная формула Лагранжа

Ищем

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varphi_i(x),$$

где $\varphi_i(x)$ – полином степени n такой, что $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$.
Каковы $\varphi_i(x)$? Имеет место

$$\varphi_i(x) = \Phi_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n).$$

Подставим $x = x_i$:

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Интерполяционный полином в форме Лагранжа:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\prod\limits_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i - x_j)}$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega_n'(x_i)}, \ \omega_n(x) = \prod_{j}(x - x_j), \ \omega_n'(x_i) = \prod_{j\neq i}(x_i - x_j)$$

Примеры

$n = 1$ (прямая):

$$P_n(x) = \frac{x-b}{a-b}y_0 + \frac{x-a}{a-b}y_1$$

$n = 2$ (парабола):

$$P_n(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}y_0 + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}y_1 + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}y_2$$

Недостаток формулы Лагранжа: необходимость перевычисления всего полинома при смене набора узлов интерполяции (например, при добавлении узлов).
Как преодолеть этот недостаток?

Разделенные разности

Определим *разделенные разности* следующим образом:

$$
\begin{aligned}
y(x_i, x_j) &= \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \\
y(x_i, x_j, x_k) &= \frac{y(x_i, x_j) - y(x_j, x_k)}{x_i - x_k}, \\
y(x_i, x_j, x_k, x_m) &= \frac{y(x_i, x_j, x_k) - y(x_j, x_k, x_m)}{x_i - x_m} \\
\ldots \quad & \ldots \quad \ldots
\end{aligned}
$$

Пример с 4 узлами (разделенная разность 3-го порядка):

x_0	y_0			
		$y(x_0, x_1)$		
x_1	y_1		$y(x_0, x_1, x_2)$	
		$y(x_1, x_2)$		$y(x_0, x_1, x_2, x_3)$
x_2	y_2		$y(x_1, x_2, x_3)$	
		$y(x_2, x_3)$		
x_3	y_3			

Интерполяционный полином в форме Ньютона

Ищем полином n - ой степени в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Определим коэффициенты:

$$\begin{array}{ccl} y_0 & = & P_n(x_0) = a_0, \\ y_1 & = & P_n(x_1) = y_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = y(x_0, x_1) \\ y_2 & = & P_n(x_2) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow & a_2 = \dfrac{1}{x_2 - x_0}\left(\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right) = y(x_0, x_1, x_2) \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Формула Ньютона:

$$\begin{array}{rcl} P_n(x) & = & y_0 + y(x_0, x_1)(x - x_0) + y(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots & + & y(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \end{array}$$

Интерполяционный полином в форме Ньютона

Вычисление по схеме Горнера:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= y_0 + \ldots \\
\ldots &+ (x - x_0) \cdot [y(x_0, x_1) + \ldots \\
\ldots &+ (x - x_1) \cdot [y(x_0, x_1, x_2) + \ldots \\
\ldots & \\
\ldots &+ (x - x_{n-1}) \cdot y(x_0, x_1, \ldots, x_n)] \ldots]]
\end{aligned}
$$

Удобнее, если узлы не меняются.

Погрешность полинома Ньютона

$P_n(x)$ - полином степени n. Представим погрешность в виде $y(x) - P_n(x) = \omega_n(x) r(x)$, где $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.
Вспомогательная функция $q(\xi) = y(\xi) - P_n(\xi) - \omega_n(\xi) r(x)$ имеет $n + 2$ нуля: $\xi = x_0, x_1, \ldots, x_n, x$.
Пусть $y(x)$ имеет $n + 1$ непрерывную производную, тогда

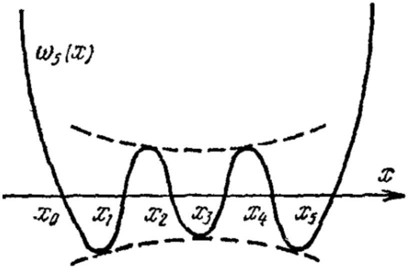
$$q^{(n+1)}(\xi) = y^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! r(x).$$

Между двумя нулями гладкой функции лежит нуль ее производной. Поэтому между крайними из $n + 2$ нулей функции лежит нуль $n + 1$-й производной, т. е. $q^{(n+1)}(\xi^*) = 0$, тогда $r(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi^*)}{(n+1)!}$
Итоговая оценка погрешности:

$$|y(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|,$$

где $M_{n+1} = \max |y^{(n+1)}(\xi)|$, а ξ лежит между наименьшим и наибольшим из значений $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Погрешность при равномерном расположении узлов



Пусть $n = 2k + 1$. Оценим погрешность в центральном интервале. Экстремум $\omega_n(x)$:

$$\left[\frac{h}{2}\frac{3h}{2}\dots\frac{(2k+1)h}{2}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{(2k+1)!h^{k+1}}{k!2^{2k+1}}\right]^2$$

Пользуясь формулой Стирлинга $p! \approx \sqrt{2\pi p}(p/e)^p$ имеем:

$$|y(x) - P_n(x)| < \sqrt{2/\pi n} M_{n+1}(h/2)^{n+1} = C\ h^{n+1}$$

Т.е. полином Ньютона имеет погрешность $O(h^{n+1})$, если $y(x)$ имеет $n+1$ непрерывную производную.

Вычислительная сложность интерполяционных формул

Формула Лагранжа:

$$2n^2 + 2n = O(n^2)$$

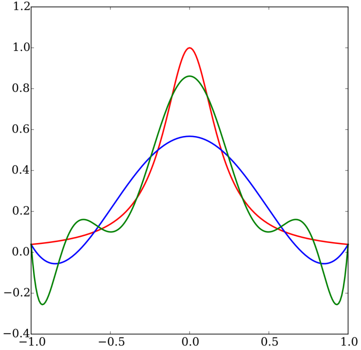
Формула Ньютона:

$$n(n+1)/2 = O(n^2)$$

– подготовительный этап с построением таблицы конечных разностей, который выполняется один раз.
Вычисление формулы Ньютона по схеме Горнера:

$$3n = O(n)$$

Феномен Рунге



$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

$$x_i = \frac{2i}{n} - 1, \quad i \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

Погрешность растет неограниченно с увеличением числа узлов интерполяции!

Сплайны. Определения

Пусть интервал $[a, b]$ разбит на подынтервалы $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, причем $a = x_0$, $x_n = b$.
Сплайн на $[a, b]$ – это функция, непрерывная вместе со своими производными вплоть до некоторого порядка на $[a, b]$, и которая на каждом $[x_{i-1}, x_i]$ является некоторым полиномом.
Степень сплайна – максимальная из степеней полиномов, задающих сплайн на подынтервалах $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$.
Дефект сплайна – разность между степенью сплайна и наивысшим порядком производной сплайна, непрерывной на $[a, b]$ (то, сколько сплайну не хватает до “полноценного полинома”).
Исторически сплайн (spline) – гибкая металлическая линейка, которая применялась для решения задачи геометрической интерполяции.
Простейшие сплайны – степень 1, дефект 1 (кусочно-линейная функция).

Сплайны. Определения

Сплайны 2-й степени – квадратичные или параболические.
Сплайны 3-й степени – кубические сплайны.
Интерполяционные сплайны – сплайны, используемые для задачи интерполяции.
Узлы сплайна – точки x_i, $i = 0, 1, 2, ..., n$, определяющие отрезки, на которых сплайн – это полином (могут не совпадать с узлами интерполяции!).

Построение

Сплайны степени 1, дефекта 1 однозначно строятся по $x_0, x_1, ..., x_n$ и $f_0, f_1, ..., f_n$.
Далее рассматриваем лишь сплайны дефекта 1, их вполне достаточно во многих приложениях.
Пусть p – степень сплайна, дефект равен 1. Чтобы построить сплайн, нужно знать $(p+1)n$ коэффициентов полиномов на n подынтервалах.
Имеем

- $p(n-1)$ условий непрерывности в узлах для сплайна и его производных до $(p-1)$-го порядка;
- $(n+1)$ условие интерполяции.

Не хватает $(p+1)n - (p(n-1) + n + 1) = p - 1$ условий!
Обычно задают их на границах отрезка $[a, b]$. Если p - четное, то требуется $(p-1)$ - нечетное число доп. условий, что приводит к асимметрии задачи. Наиболее популярны сплайны нечетной степени, особенно кубические.

Кубические сплайны

Кубический интерполяционный сплайн на отрезке $[a, b]$ с сеткой $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – это функция $S(x)$, удовлетворяющая условиям:

- $S(x)$ – полином 3-й степени на каждом из $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;
- $S(x) \in C^2[a, b]$;
- $S(x_i) = f_i$ для $i = 0, 1, \ldots, n$.

Для однозначного построения нужны еще $p - 1 = 3 - 1 = 2$ доп. условия. Возможные способы задания:

- даны $S'(a) = f_0'$ и $S'(b) = f_n'$;
- даны $S''(a) = f_0''$ и $S''(b) = f_n''$;
- условие периодичности $S'(a) = S'(b)$, $S''(a) = S''(b)$.

Кубические сплайны

Рассмотрим

$$S''(a) = S''(x_0) = c_0,\ \ S''(b) = S''(x_n) = c_n.$$

Будем искать сплайн в виде

$$S(x) = a_{i-1} + b_{i-1}(x - x_{i-1}) + c_{i-1}\frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + d_{i-1}\frac{(x - x_{i-1})^3}{6}$$

для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. При этом $S''(x_i) = c_i$, i=0,1,...,n-1. $S''(x)$ – линейная функция на $[x_{i-1}, x_i]$, определяется однозначно:

$$S''(x) = c_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + c_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i},\ \ x \in [x_{i-1}, x_i],\ \ i = 1, 2, ..., n$$

С учетом $S(x_{i-1}) = f_{i-1}$, $S(x_i) = f_i$, $i = 1, 2, ..., n$, дважды проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} S(x) &= f_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + f_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i} + \\ &+ c_{i-1}\frac{(x_i - x)^3 - h_i^2(x_i - x)}{6h_i} + c_i\frac{(x - x_{i-1})^3 - h_i^2(x - x_{i-1})}{6h_i} \end{aligned}$$

Кубические сплайны

Используя условие непрерывности

$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0), \; i = 1, 2, ..., n - 1,$$

получим СЛАУ:

$$\begin{cases} \dfrac{h_i}{6} c_{i-1} + \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3} c_i + \dfrac{h_{i+1}}{6} c_{i+1} = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \; i = 1, 2, ..., n - 1, \\ c_0, c_n - \text{заданы.} \end{cases}$$

Матрица системы **– трехдиагональная**, является матрицей с **диагональным преобладанием**, т.е.
$\forall i = 1, 2, ..., n : \; |a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|.$
Признак Адамара неособенности матриц: матрица с диагональным преобладанием неособенна ($Det \neq 0$).
Таким образом, решение СЛАУ на c_i существует и единственно.
Может быть найдено **методом прогонки**, что требует $\mathcal{O}(n)$ арифметических операций.

Оценка погрешности интерполяции сплайнами

Теорема. Пусть $f(x) \in C^p[a, b]$, $p = 1, 2, 3$, а $S(x)$ – ее интерполяционный кубический сплайн с краевыми условиями на S''. Тогда

$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)| = \mathcal{O}(h^{p-k}), \ k = 0, ..., p.$$

Этот результат также справедлив для других типов краевых условий на S.

Вариационное свойство сплайнов

Интерполяционный кубический сплайн $S(x)$, удовлетворяющий условию

$$S''(a) = S''(b) = 0,$$

называется **естественным сплайном**.
Он минимизирует функционал

$$\mathcal{E}(\phi) = \int\limits_a^b \left(\phi''(x)\right)^2 dx,$$

задающий энергию упругой деформации гибкой балки (линейки), закрепленной в $x_0, x_1, ..., x_n$ и принимающий форму $\phi(x) \in C^2[a, b]$.

Ссылки

Шарый С. П.: Курс ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ
`http://www.ict.nsc.ru/matmod/files/textbooks/SharyNuMeth.pdf`