Физика из SU(2)-фазовой геометрии на трёхмерной сфере: Основы

Дмитрий Шурбин

10 Октября, 2025

Аннотация

В этой работе сформулирована единая геометрическая структура, в рамках которой классическая механика, электродинамика, теория относительности и квантовая механика возникают как предельные случаи единой фазовой динамики группы SU(2) на компактной трёхсфере S^3. Внутреннее фазовое поле $U(x) \in \mathrm{SU}(2)$ определяет кривизну, спин и временную структуру в глобально конечном, но локально непрерывном многообразии. Все физические сущности — материя, излучение и гравитация — трактуются как проявления кривизны и эволюции этой фазовой геометрии. Модель вводит двойственное понятие времени: локальное операционное время $t(x)$ определяется скоростью фазового изменения $\omega(x)$ относительно глобального параметра эволюции T, тем самым объединяя гравитационное и кинематическое замедление времени. Ньютонова динамика, уравнения Максвелла и уравнения Эйнштейна получаются как последовательные пределы одной и той же лагранжевой структуры, в то время как квантовая дискретность вытекает из компактности S^3 и спиновой топологии SU(2). Данная структура предлагает геометрические интерпретации релятивистских и квантовых явлений, включая отклонение света, запутанность, туннелирование и космологическое красное смещение, и предсказывает проверяемые отклонения от зависимости между красным смещением и светимостью в модели ΛCDM. Таким образом, SU(2)-фазовая геометрия обеспечивает согласованное и самодостаточное основание, связывающее классические и квантовые области через единое компактное фазовое многообразие.

Содержание

1 Введение и мотивация

Цель данной работы — установить единую геометрическую структуру, в рамках которой все известные физические взаимодействия — гравитационные, электромагнитные и квантовые — возникают из единой фазовой структуры, определённой на компактной трёхсфере S^3. Внутренняя геометрия этого фазового пространства описывается группой Ли $\mathrm{SU}(2)$, топологически эквивалентной S^3. В этом контексте материя, излучение и кривизна пространства-времени рассматриваются как различные проявления единого фундаментального поля — *фазового поля* $U(x) \in \mathrm{SU}(2)$.

Выбор $\mathrm{SU}(2)$ и S^3 не является произвольным. Компактность трёхсферы естественным образом приводит к дискретизации собственных мод, обеспечивая квантование физических состояний без дополнительных постулатов. Группа $\mathrm{SU}(2)$ представляет собой минимальную неабелеву структуру, допускающую как вращательное, так и спинорное поведение, что позволяет напрямую связать геометрическую кривизну с внутренними степенями свободы спина. В этом смысле $\mathrm{SU}(2)$-фазовое многообразие является простейшей замкнутой и самосогласованной основой, способной вместить наблюдаемое сосуществование волновых и корпускулярных свойств.

С геометрической точки зрения, стереографическая проекция S^3 на $\mathbb{R}^3$ показывает, как семейства параллелей и меридианов образуют ортогональную сетку, сохраняя локальную евклидову структуру при наличии глобальной кривизны. Это свойство позволяет существование локальных инерциальных систем на глобально замкнутом многообразии, обеспечивая естественную геометрическую основу релятивистских и квантовых эффектов.

Мотивация данного подхода вытекает из требования, чтобы физическая Вселенная была одновременно глобально конечной и локально непрерывной. Компактное фазовое пространство гарантирует существование нормируемых собственных мод и конечной общей фазовой энергии, избегая расходимостей, характерных для некомпактных формулировок. Кроме того, структура $\mathrm{SU}(2)$ позволяет объединить калибровочные, спиновые и гравитационные свойства в рамках единого математического объекта, тем самым связывая геометрию пространства-времени с геометрией материи.

Ранее выдвигались качественные идеи фазово-геометрического описания физического мира в полу-популярной форме. Настоящая работа излагает их в строгом математическом языке и формирует теоретический фундамент, необходимый для дальнейшего развития. Последующие исследования будут расширять данную структуру, описывая атомные, ядерные и космологические системы как частные реализации одной и той же $\mathrm{SU}(2)$-фазовой геометрии.

2 Геометрическая основа: фазовое поле $\mathrm{SU}(2)$ на S^3

Фундаментальной основой предлагаемой формулировки является четырёхмерное лоренцево многообразие пространства-времени $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, наделённое внутренним компактным фазовым пространством, изоморфным групповому многообразию $\mathrm{SU}(2) \simeq S^3_{\mathrm{phase}}$. Каждой точке пространства-времени $x \in \mathcal{M}$ сопоставляется элемент $U(x) \in \mathrm{SU}(2)$, представляющий локальную ориентацию фазового поля. Физические величины строятся из лево-инвариантного тока Мора—Картана:

$$J_\mu \equiv U^{-1}\nabla_\mu U \;\in\; \mathfrak{su}(2), \tag{1}$$

где ∇_μ обозначает ковариантную производную Леви–Чивиты, соответствующую метрике пространства-времени $g_{\mu\nu}$.

Замечание о размерности. Четырёхмерное лоренцево многообразие $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ описывает наблюдаемую геометрию пространства-времени с локальным операционным временем $t(x)$. Внутреннее фазовое пространство SU(2), топологически эквивалентное S^3, характеризуется четырьмя вещественными параметрами (a_0, a_1, a_2, a_3), удовлетворяющими условию $a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1$, что соответствует вложенной гиперсфере в $\mathbb{R}^4$. Четвёртая координата этого вложения не расширяет внешнее пространство-время, а кодируется во внутренней фазовой ориентации $U(x)$ и эволюционирует относительно глобального фазового параметра T. Таким образом, глобальная эволюция во времени T заменяет необходимость введения дополнительного пространственного измерения: она представляет собой развитие компактной фазы SU(2), а не движение во внешнем четвёртом направлении. Эта внутренняя четвёртая степень свободы имеет геометрическую, а не пространственную природу; она проявляется через наблюдаемые величины, такие как спин и фазовая кривизна, а не как дополнительная внешняя координата, тем самым разрешая проблему её ненаблюдаемости.

Фазовый лагранжиан и полный функционал действия

Внутренняя динамика фазового поля определяется лагранжевой плотностью нелинейной сигма-модели и типа Скирма:

$$\mathcal{L}_{\text{phase}} = \frac{\kappa}{2}\,\mathrm{Tr}(J_\mu J^\mu) + \frac{\alpha}{4}\,\mathrm{Tr}\big([J_\mu, J_\nu][J^\mu, J^\nu]\big) - V(U). \tag{2}$$

где κ и α — положительные константы связи, а $V(U)$ — калибровочно-инвариантный потенциал. Первый член описывает плавные вариации фазы (фазовую жёсткость), в то время как второй обеспечивает стабилизирующую поправку против избыточной локальной кривизны, аналогично члену Скирма в хиральной полевой теории. Их отношение определяет характерную длину $L_* \sim \sqrt{\alpha/\kappa}$, которая задаёт типичный размер локализованных фазовых возбуждений. (Обозначение: параметр α заменяет символ β, использовавшийся в предыдущих версиях.)

Полный функционал действия объединяет гравитационный, фазовый и материальный сектора:

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[\frac{c^3}{16\pi G}\,R(g) + \mathcal{L}_{\text{phase}}(U,g) + \mathcal{L}_{\text{matter}}\right], \tag{3}$$

где $R(g)$ — скаляр кривизны Риччи для метрики $g_{\mu\nu}$.

Единицы измерения и масштабирование параметров. В данной формулировке константы связи κ и α имеют размерность. В естественных единицах ($\hbar = c = 1$) выполняется $[\kappa] = \text{Energy} \times \text{Length}^2$ и $[\alpha] = \text{Length}^2$, так что характерная масса солитона определяется соотношением $M_{\text{sol}} \sim \kappa/\alpha$, а соответствующий пространственный масштаб — $L_* \sim \sqrt{\alpha/\kappa}$. Такое нормирование согласуется с соглашениями, принятыми в последующих разделах, посвящённых *атомным* и *ядерным* расширениям модели.

Связь с эффективной электрослабой динамикой. Потенциальный член $V(U)$ в фазовом лагранжиане может включать эффективные вклады, аналогичные потенциалу Хиггса, описывающие спонтанное нарушение симметрии. В низкоэнергетическом разложении локальная амплитуда фазы $\phi(x)$ может быть параметризована коэффициентами (μ^2, λ) следующим образом:

$$V(U) \;\simeq\; -\tfrac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \tfrac{1}{4}\lambda\phi^4,$$

где параметры выводятся из фундаментальных SU(2)-связей и глобальной кривизны:

$$\mu^2 = \zeta_2\,\kappa + \zeta_R/R^2, \qquad \lambda = \zeta_4\,\alpha, \qquad v = \mu^2/\lambda.$$

Такое эффективное представление, используемое в *атомных* и *ядерных* расширениях модели, задаёт электрослабую массу и вакуумное среднее значение как выводимые, а не постулируемые величины, тогда как в настоящей фундаментальной формулировке потенциал $V(U)$ сохраняется в общем виде.

Уравнения поля

Вариация действия по метрике приводит к уравнению Эйнштейна с добавочным фазовым вкладом в тензор напряжений:

$$G_{\mu\nu}(g) + \Phi_{\mu\nu}(U, g) = \frac{8\pi G}{c^4}\,T^{(\mathrm{matter})}_{\mu\nu}, \tag{4}$$

где

$$\Phi_{\mu\nu} \equiv -\frac{8\pi G}{c^4}\,T^{(\mathrm{phase})}_{\mu\nu}, \qquad T^{(\mathrm{phase})}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\,\mathcal{L}_{\mathrm{phase}})}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{5}$$

Явно три вклада в $T^{(\mathrm{phase})}_{\mu\nu}$ имеют вид:

$$T^{(\sigma)}_{\mu\nu} = \kappa\,\mathrm{Tr}(J_\mu J_\nu) - \frac{\kappa}{2}\,g_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}(J_\alpha J^\alpha), \tag{6}$$

$$T^{(\mathrm{Sk})}_{\mu\nu} = \beta\,\mathrm{Tr}([J_\mu, J_\alpha][J_\nu, J^\alpha]) - \frac{\beta}{4}\,g_{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}([J_\alpha, J_\beta][J^\alpha, J^\beta]), \tag{7}$$

$$T^{(V)}_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}V(U). \tag{8}$$

Фазовый тензор напряжений может быть помещён либо в геометрическую (левую), либо в энергетическую (правую) часть уравнения (4); в настоящей интерпретации он рассматривается как геометрическая модификация кривизны, аналогично теориям типа Калуги–Клейна.

Вариация действия по $U(x)$ даёт ковариантное уравнение фазового поля:

$$\nabla_\mu(\kappa\,J^\mu) + \beta\,\nabla_\mu([J_\nu, [J^\mu, J^\nu]]) - \frac{\partial V}{\partial U}\,U^{-1} = 0, \tag{9}$$

описывающее нелинейную динамику фазового поля SU(2) на искривлённом пространстве-времени.

Двойственное время и фазовая частота

Для связи внутренней эволюции фазы с операционным понятием времени вводится глобальный параметр эволюции T. Пусть $n^\mu(x)$ обозначает направленное в будущее единичное временеподобное векторное поле, удовлетворяющее условию $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = -1$. Определяя скалярный фазовый угол $\theta(x)$ вдоль фиксированного генератора алгебры $\mathfrak{su}(2)$, локальная скорость изменения фазы выражается как

$$\omega(x) = n^\mu \partial_\mu \theta(x) = \frac{d\theta}{d\tau}, \tag{10}$$

где $d\tau$ — собственное время вдоль интегральных линий поля n^μ. Наблюдаемое (операционное) время $t(x)$ связано с глобальным параметром фазы T через локальное отношение фазовых частот:

$$\boxed{\frac{dt(x)}{dT} = \frac{\omega_*}{\omega(x)}}, \tag{11}$$

где ω_* — универсальная опорная частота. Таким образом, часы замедляют свой ход в областях, где фазовая частота $\omega(x)$ уменьшается из-за геометрии или фазовой энергии, что обеспечивает геометрическое объяснение замедления времени и красного смещения. В пределе однородной фазы, $\omega(x) \equiv \omega_*$, выполняется соответствие $t \equiv T$, и стандартное релятивистское время возникает как частный случай.

В практических приложениях, таких как *атомные* и *ядерные* расширения, используется этот локальный предел: частота фазы $\omega(x)$ изменяется пренебрежимо мало в пределах атомных масштабов, поэтому операционное время $t(x)$ совпадает с глобальным параметром эволюции T. Лишь на космологических масштабах, где $\omega(x)$ медленно изменяется из-за глобальной кривизны R, различие между t и T становится наблюдаемым, проявляясь в виде частотных сдвигов или красных смещений.

3 Элементарные фазовые возбуждения: электрон и фотон

Определённое выше фазовое поле SU(2) допускает два фундаментальных класса возбуждений: локализованные топологические вихри, соответствующие материальным частицам, и делокализованные колебательные моды, соответствующие излучению. Оба типа возникают как самосогласованные решения фазового уравнения (9), а их различие определяется топологическими и динамическими свойствами.

Электрон как локализованный вихрь SU(2)

Стационарная локализованная конфигурация с ненулевым числом намотки

$$B = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_{\text{space}}} \epsilon^{ijk}\, \mathrm{Tr}(J_i J_j J_k)\, d^3x. \tag{12}$$

представляет собой квантованный вихрь SU(2). Целое число B характеризует степень топологического отображения $S^3_{\text{space}} \to S^3_{\text{phase}}$, что обеспечивает глобальную устойчивость таких конфигураций. Наименьшая нетривиальная конфигурация $B =$

1 отождествляется с электроном. Здесь $S^3_{\rm space}$ обозначает компактфицированное пространственное сечение физического трёхмерного пространства, тогда как $S^3_{\rm phase}$ относится к внутреннему фазовому многообразию, связанному с группой SU(2).

Топологическое замечание. В ранних формулировках электрон отождествлялся с наинизшей нетривиальной конфигурацией с числом намотки $B = 1$, соответствующей локализованному отображению $S^3_{\rm space} \to S^3_{\rm phase}$. В настоящей динамической трактовке это толкование уточняется: электрон представляет собой делокализованное фазовое возбуждение SU(2), мгновенная конфигурация которого может локально иметь $B = 1$, тогда как глобальный топологический заряд временного поля остаётся равным $B = 0$. Это допускает аннигиляцию пар и непрерывное распространение, согласуя волновую природу электрона с его топологическим происхождением.

В этой интерпретации электрическое и магнитное поля появляются как эффективные проекции компонент тока SU(2):

$$E_i \propto \mathrm{Tr}(T_{\rm em} J_i)\,, \qquad B_i \propto \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,\mathrm{Tr}(T_{\rm em}[J_j, J_k])\,, \tag{13}$$

где $T_{\rm em}$ — фиксированный генератор, задающий электромагнитную ориентацию во внутреннем пространстве. Локальная циркуляция фазового поля порождает собственный магнитный момент, а двусвязная топология SU(2) естественным образом объясняет поведение со спином $\frac{1}{2}$.

Запрещение тождественных фазовых конфигураций следует из ортогональности собственных мод SU(2) на компактном многообразии:

$$\int_{S^3} \mathrm{Tr}\big(U_m^\dagger U_n\big)\; dV_{S^3} = \delta_{mn}. \tag{14}$$

Таким образом, принцип Паули возникает как геометрическое свойство самого фазового пространства, а не как независимый постулат.

В связанных системах локализованный вихрь становится делокализованным вдоль резонансной собственной моды атомного фазового поля. Получающаяся расширенная конфигурация сохраняет тот же топологический заряд, но приобретает распределённую плотность и угловой момент, соответствующие обычной орбитальной структуре атомных состояний.

Фотон как фазовая волна

Второй класс возбуждений возникает из малых колебаний фазового поля с нулевым топологическим зарядом:

$$B = 0, \qquad U(x) \simeq \exp[i\theta(x) T_{\rm em}], \tag{15}$$

что приводит к линеаризованному волновому уравнению. Электромагнитный тензор поля выражается как коммутатор ковариантных производных фазы:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = -i\,\mathrm{Tr}(T_{\rm em}[J_\mu, J_\nu])\,, \tag{16}$$

и удовлетворяет однородным и неоднородным уравнениям Максвелла в слабополевом пределе.

Состояние поляризации соответствует внутренней ориентации SU(2) колебания, тогда как частота ω и волновой четырёхвектор k^μ связаны с временными и пространственными градиентами фазового угла $\theta(x)$. Таким образом, фотон представляет собой *распространяющуюся кривизну фазового поля SU(2)*, передающую энергию и импульс через изменения внутренней ориентации.

В областях, где сосуществуют локализованные вихри и делокализованные волны, взаимодействие между этими двумя типами возбуждений приводит к известным явлениям поглощения, излучения и светового давления. Внешнее калибровочное поле не требуется: электромагнитные взаимодействия возникают как внутренние деформации самой фазовой геометрии.

Материя и излучение как единые фазовые состояния

Таким образом, и корпускулярные, и волновые возбуждения возникают из одного и того же фундаментального объекта $U(x)$. Локализованные вихри соответствуют конечной по энергии топологической дефектной структуре, а фотоны — плавным периодическим модуляциям того же поля. Переход между этими режимами является непрерывным и определяется относительной величиной локального члена кривизны в уравнении (2). Это обеспечивает единое физическое толкование материи и излучения как различных проявлений одной и той же SU(2)-фазовой динамики.

4 Классическая механика как фазовая кинематика

Классическая механика возникает как макроскопический предел фазовой динамики SU(2), когда фазовые вариации являются плавными на масштабе компактного многообразия, а нелинейные члены в уравнении (9) малы. В этом режиме локализованные фазовые вихри ведут себя как квазичастицы, и их коллективное движение подчиняется привычным законам ньютоновской механики.

Фазовый импульс и энергия

Канонический тензор энергии–импульса, связанный с фазовым полем, получается вариацией действия относительно бесконечно малых координатных трансляций:

$$T^{\mu\nu}_{(\text{phase})} = \kappa\,\mathrm{Tr}(J^\mu J^\nu) + \beta\,\mathrm{Tr}([J^\mu, J_\alpha][J^\nu, J^\alpha]) - g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\text{phase}}. \tag{17}$$

Для локализованной конфигурации полный четырёхимпульс равен

$$P^\mu = \int T^{0\mu}_{(\text{phase})}\, d^3x, \tag{18}$$

а инвариантная масса покоя выражается как

$$mc^2 = \int T^{00}_{(\text{phase})}\, d^3x. \tag{19}$$

Подынтегральное выражение соответствует плотности фазовой энергии, накопленной в кривизне поля $U(x)$.

В нерелятивистском пределе, когда $J_0 \gg J_i$, временная часть уравнения (9) сводится к эффективному уравнению движения центра вихря:

$$m\,\frac{d^2x^i}{dt^2} = F^i, \tag{20}$$

где эффективная сила F^i возникает из пространственных градиентов окружающей фазовой энергии. Уравнение (20) воспроизводит второй закон Ньютона как описание поступательной динамики локализованного вихря SU(2).

Угловой момент и вращательная динамика

Вращательное движение описывается внутренней реориентацией фазового поля. Соответствующая сохраняющаяся величина вытекает из SU(2)-инвариантности лагранжиана и имеет вид:

$$L^a = \int \epsilon^{ijk} x_i \,\mathrm{Tr}(T^a\, J_j J_k)\; d^3x, \tag{21}$$

где T^a — генераторы алгебры $\mathfrak{su}(2)$. Для медленно вращающихся конфигураций можно ввести эффективный тензор момента инерции I_{ab}, определяемый соотношением

$$L^a = I_{ab}\,\Omega^b, \tag{22}$$

где Ω^b — обобщённые угловые скорости, описывающие внутреннее вращение фазовой ориентации. Кинетическая энергия вращения принимает стандартную квадратичную форму:

$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I_{ab}\,\Omega^a\Omega^b. \tag{23}$$

Таким образом, привычные соотношения между моментом силы, угловым ускорением и угловым моментом возникают как макроскопические проявления SU(2)-фазовой реориентации.

Потенциальная энергия и фазовая деформация

Внешние поля и взаимодействия соответствуют пространственным вариациям фоновой фазовой конфигурации. Градиент скалярного фазового угла $\theta(x)$ создаёт эффективный потенциал:

$$V_{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}) \propto \frac{\kappa}{2}\,\mathrm{Tr}\big(J_i J^i\big)\,, \tag{24}$$

который действует как восстанавливающая или притягивающая сила в зависимости от кривизны окружающей фазы. Малое возмущение δU от равновесного состояния подчиняется линеаризованному уравнению движения, аналогичному гармоническому осциллятору:

$$\kappa\,\partial_t^2 \delta U = -\frac{\partial^2 V}{\partial U^2}\,\delta U, \tag{25}$$

что демонстрирует общий геометрический источник инерционных и потенциальных эффектов — локальную кривизну фазового многообразия.

Гамильтонова и лагранжева структура

Локальная лагранжева плотность (2) определяет сопряжённые импульсы:

$$\Pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{phase}}}{\partial(\partial_{\mu} U)} = \kappa\, U^{-1}\partial^{\mu} U + \beta\, [J_{\nu}, [J^{\mu}, J^{\nu}]], \tag{26}$$

что приводит к гамильтоновой плотности:

$$\mathcal{H}_{\text{phase}} = \operatorname{Tr}(\Pi_{\mu}\, \partial^{\mu} U) - \mathcal{L}_{\text{phase}}. \tag{27}$$

В пределе плавного поля $\mathcal{H}_{\text{phase}}$ сводится к стандартной форме суммы кинетического и потенциального членов:

$$\mathcal{H}_{\text{phase}} \simeq \frac{\kappa}{2} \operatorname{Tr}(J_0 J^0) + \frac{\kappa}{2} \operatorname{Tr}(J_i J^i) + V(U), \tag{28}$$

что соответствует обычному разложению механической энергии на слагаемые движения и деформации.

Возникновение классических законов

Уравнения (19)–(20) показывают, что масса, импульс и сила могут быть истолкованы как меры кривизны и потока энергии внутри фазового поля. Классические законы движения, включая сохранение энергии и углового момента, следуют как прямое следствие внутренней SU(2)-симметрии и инвариантности действия относительно преобразований пространства-времени. Следовательно, ньютоновская механика восстанавливается не как независимая аксиома, а как низкочастотный предел общей фазовой динамики SU(2).

5 Электродинамика из фазовой геометрии

Электродинамика возникает как проекция фазовой динамики SU(2) на фиксированное внутреннее направление, связанное с электромагнитной ориентацией. В этом представлении электромагнитное поле соответствует абелеву сектору неабелевой фазовой геометрии, получаемому путём проекции тока Мора—Картана J_{μ} на один из генераторов алгебры $\mathfrak{su}(2)$.

Проекция и эффективный четырёхпотенциал

Пусть T_{em} — фиксированный нормированный генератор алгебры $\mathfrak{su}(2)$, удовлетворяющий условию $\operatorname{Tr}(T_{\text{em}}^2) = \frac{1}{2}$. Проекция тока SU(2) на это направление определяет эффективный электромагнитный четырёхпотенциал:

$$a_{\mu} = -i \operatorname{Tr}\!\left(T_{\text{em}}\, U^{-1} \nabla_{\mu} U\right). \tag{29}$$

Соответствующий тензор поля выражается как

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} a_{\nu} - \partial_{\nu} a_{\mu} = -i \operatorname{Tr}(T_{\text{em}}[J_{\mu}, J_{\nu}]), \tag{30}$$

что представляет собой кривизну проецированного фазового соединения.

В слабополевом пределе, когда нелинейные коммутаторные члены малы, тождество Бьянки для кривизны SU(2) приводит к соотношению

$$\partial_{[\lambda}\mathcal{F}_{\mu\nu]} = 0, \tag{31}$$

которое соответствует однородным уравнениям Максвелла. Вариация действия по компонентам фазы, направленным вдоль T_{em}, даёт

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = j^\nu, \tag{32}$$

где j^ν обозначает эффективный ток, возникающий при движении заряженных фазовых вихрей. Таким образом, уравнения (30)–(32) воспроизводят уравнения Максвелла как предельный случай фазового уравнения SU(2) (9).

Электрические и магнитные поля

В локальной системе отсчёта покоя электрическое и магнитное поля выражаются как

$$E_i = \mathcal{F}_{0i}, \qquad B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\mathcal{F}^{jk}. \tag{33}$$

Плотность энергии и вектор Пойнтинга непосредственно следуют из тензора напряжений фазового поля:

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right), \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{B}. \tag{34}$$

Следовательно, поток электромагнитной энергии соответствует переносу кривизны фазы в пространстве-времени.

Ток, напряжение и сопротивление

Эффективный электрический ток j^μ в уравнении (32) возникает из градиентов фазового угла SU(2), переносимого локализованными вихрями:

$$j^\mu \propto \nabla^\mu \theta(x), \tag{35}$$

где $\theta(x)$ — локальная проекция внутренней фазы на направление T_{em}. Разность скалярных потенциалов между двумя точками A и B вдоль пути Γ определяется как

$$V_{AB} = \int_\Gamma E_i\,dx^i = -\int_\Gamma \partial_i\theta\,dx^i, \tag{36}$$

что показывает: электрическое напряжение соответствует градиенту проецированной SU(2)-фазы.

Локальное сопротивление определяется скоростью потери когерентности фазы. Для ансамбля вихрей с временем фазовой когерентности τ_c проводимость может быть записана как

$$\sigma \propto \tau_c, \tag{37}$$

что означает, что при идеальной когерентности ($\tau_c \to \infty$) проводимость становится бесконечной. Таким образом, омическое сопротивление не является фундаментальным свойством, а отражает меру фазового беспорядка.

Сверхпроводимость как когерентность фазы

В идеально когерентной фазовой области ковариантная производная фазового угла обращается в ноль:

$$\nabla_\mu \theta(x) = 0, \tag{38}$$

и проецированное электрическое поле внутри материала исчезает, тогда как поверхностные токи поддерживают постоянную фазу. Это условие соответствует состоянию Мейсснера, при котором магнитный поток вытесняется, а сопротивление исчезает. Следовательно, сверхпроводимость естественным образом возникает как макроскопическое проявление когерентного выравнивания фаз SU(2).

На микроскопическом уровне плотность сверхтока пропорциональна градиенту глобальной фазы:

$$\mathbf{j}_s \propto \nabla\theta, \tag{39}$$

и удовлетворяет уравнению Лондона:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2}\,\mathbf{B}, \qquad \lambda_L^{-2} \propto \kappa\,|\Psi|^2, \tag{40}$$

где λ_L — глубина проникновения, а $|\Psi|$ обозначает амплитуду когерентной фазы. Эти соотношения возникают без привлечения дополнительных потенциалов или механизмов спаривания, так как когерентность является внутренним свойством компактного фазового многообразия SU(2).

Резюме

Электродинамика таким образом отождествляется с абелевой проекцией фазовой геометрии SU(2). Заряд соответствует топологической намотке фазы, электрические и магнитные поля представляют её градиенты и вихревые компоненты, а электрический ток отражает коллективный перенос внутренней ориентации фазы. Уравнения Максвелла, перенос электромагнитной энергии и сверхпроводимость возникают как предельные выражения фундаментальной фазовой динамики SU(2).

6 Теория относительности и фазовый тензор напряжений

Геометрическая структура фазового поля SU(2) предоставляет естественное основание как для специальной, так и для общей теории относительности. Компактность S^3 обеспечивает локальные евклидовы окрестности, поддерживающие инерциальные системы отсчёта, тогда как вариации скорости фазы вызывают эффективную кривизну и замедление времени. Релятивистские явления, таким образом, возникают как проявления реакции пространства-времени на внутреннюю фазовую энергию.

Специальная теория относительности как предел однородного фазового потока

Рассмотрим однородную фазовую конфигурацию, в которой скорость изменения фазы $\omega(x)$ постоянна, $\omega(x) = \omega_*$. В этом случае локальное операционное время t, определённое уравнением (11), совпадает с глобальным параметром T, и метрика пространства-времени локально является метрикой Минковского:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{41}$$

Малые возмущения фазового поля соответствуют локальным бустам внутренней ориентации, что приводит к преобразованиям Лоренца между движущимися наблюдателями. Инвариантность фазового действия относительно таких преобразований гарантирует постоянство скорости света c, поскольку она представляет собой скорость распространения бесконечно малых фазовых возмущений на S^3.

Таким образом, специальная теория относительности восстанавливается как симметрия однородной эволюции фазы, где все области имеют одинаковую фазовую частоту ω_*, а внутренняя геометрия изотропна.

Гравитационные эффекты как вариации фазовой частоты

Когда фазовая частота $\omega(x)$ изменяется в пространстве вследствие локальной кривизны поля SU(2), соотношение между операционным временем $t(x)$ и глобальным временем T становится нетривиальным, как задано уравнением (11). Отношение $\omega_*/\omega(x)$ выступает в роли эффективного фактора красного смещения, и гравитационное замедление времени следует напрямую:

$$\frac{dt}{dT} = \frac{\omega_*}{\omega(x)} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\omega(x_2)}{\omega(x_1)}. \tag{42}$$

Области с повышенной фазовой кривизной соответствуют уменьшенной локальной частоте $\omega(x)$, что приводит к замедлению хода часов и формированию потенциальных ям. Ньютонов потенциал ϕ восстанавливается в слабополевом пределе из соотношения:

$$\frac{\omega(x)}{\omega_*} \simeq 1 + \frac{\phi}{c^2}, \qquad g_{00} \simeq -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right), \tag{43}$$

что воспроизводит стандартное постньютоновское приближение.

Фазовый тензор напряжений и тензор Эйнштейна

Геометрическая связь между фазовой энергией и кривизной выражается уравнением (4):

$$G_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}, \tag{44}$$

где фазовый тензор напряжений $\Phi_{\mu\nu}$ представляет кривизну, индуцированную внутренней динамикой SU(2). В явном виде:

$$\Phi_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu}^{(\text{phase})}, \tag{45}$$

при этом $T_{\mu\nu}^{(\text{phase})}$ задаётся в уравнениях (17)–(21). Этот тензор кодирует полное влияние фазового поля на геометрию пространства-времени и может рассматриваться как геометрический аналог тензора энергии–импульса самого гравитационного поля.

В областях, где $\mathcal{L}_{\text{phase}} \to 0$, тензор $\Phi_{\mu\nu}$ исчезает, и восстанавливаются обычные уравнения Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu}^{(\text{matter})}. \tag{46}$$

Таким образом, общая теория относительности возникает как предел при исчезающей внутренней фазовой кривизне, тогда как ненулевой $\Phi_{\mu\nu}$ вносит высокопорядковые геометрические поправки, способные объяснить дополнительные эффекты кривизны, обычно приписываемые тёмной энергии или поляризации вакуума.

Геодезические и фазовое движение

Движение пробного вихря в искривлённом пространстве-времени следует из закона сохранения $\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{(\text{phase})} = 0$, который в пределе малых градиентов фазового напряжения приводит к стандартному геодезическому уравнению:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \tag{47}$$

Таким образом, свободное движение соответствует переносу вдоль экстремальных путей фазового многообразия. Отклонения от геодезического поведения возникают лишь тогда, когда внутренние фазовые взаимодействия дают заметный вклад в напряжение, что приводит к гравитационному самодействию или эффектам радиационного отклика.

Объединение гравитационной и электромагнитной геометрии

Уравнения (4) и (30) показывают, что как гравитация, так и электромагнетизм происходят из различных аспектов одной и той же фазовой геометрии SU(2). Кривизна, связанная с диагональным генератором T_{em}, порождает электромагнитное поле, тогда как общая кривизна SU(2) входит в метрику пространства-времени через тензор $\Phi_{\mu\nu}$. Это соответствие отражает структуру объединённых теорий Калуцы–Кляйна и калибровочной гравитации, но без введения дополнительных измерений пространства-времени: внутреннее компактное пространство само порождает как калибровочные, так и гравитационные явления.

Резюме

Специальная теория относительности возникает из однородной эволюции фазового поля, а общая теория относительности — при наличии локальных вариаций фазовой частоты $\omega(x)$, которые изменяют метрику через тензор напряжений $\Phi_{\mu\nu}$. Таким образом, как инерционные, так и гравитационные эффекты имеют общий геометрический источник — кривизну фазового поля SU(2), что обеспечивает единое и согласованное основание для релятивистской физики.

7 Квантовая механика как динамика компактной фазы

Квантовая механика возникает как естественное описание компактной эволюции фазы на многообразии SU(2). Поскольку внутреннее пространство S^3 конечно и замкнуто, все собственные моды оператора Лапласа на этом многообразии образуют дискретный спектр. Квантование, таким образом, является геометрической необходимостью, а не дополнительным постулатом.

Волновое уравнение на компактном многообразии

Рассмотрим малые гармонические возмущения фазового поля около стационарной конфигурации:

$$U(x) = U_0 \exp\bigl[i\,\psi(x)\bigr], \qquad |\psi| \ll 1. \tag{48}$$

Линеаризация уравнения (9) приводит к

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi + M^2 \psi = 0, \tag{49}$$

где M^2 — эффективный массовый член, вытекающий из кривизны потенциала $V(U)$. На компактной трёхсфере радиуса R собственные функции оператора Лапласа удовлетворяют соотношению

$$\nabla^2_{S^3} Y_n = -\frac{n(n+2)}{R^2}\, Y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{50}$$

так что уровни энергии стационарных мод квантуются как

$$E_n = \hbar\omega_n = \hbar c \sqrt{k^2 + \frac{n(n+2)}{R^2}}, \tag{51}$$

что даёт геометрическое объяснение дискретных спектров в связанных системах.

Возникновение уравнения Шрёдингера

В нерелятивистском пределе, когда пространственные градиенты малы по сравнению с временными осцилляциями, поле $\psi(x)$ может быть разложено в виде

$$\psi(x,t) = \Psi(\mathbf{x},t)\, e^{-iMc^2 t/\hbar}, \tag{52}$$

и уравнение (49) сводится к

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M}\, \nabla^2 \Psi + V_{\text{eff}} \Psi, \tag{53}$$

которое представляет собой уравнение Шрёдингера для эффективной волновой функции $\Psi(\mathbf{x},t)$. Таким образом, фундаментальная квантовая эволюция возникает как медленная модуляция внутренней фазовой осцилляции SU(2), при этом постоянная Планка $\hbar$ выступает в роли коэффициента пропорциональности между внутренним угловым моментом и скоростью изменения фазы.

Коммутационные соотношения и неопределённость

Каноническая структура фазового поля приводит к стандартной операторной алгебре. Оператор импульса следует из генератора пространственных трансляций фазы:

$$\hat{p}_i = -i\hbar\, \partial_i, \tag{54}$$

а коммутационное соотношение $[x_i, \hat{p}_j] = i\hbar\, \delta_{ij}$ является прямым следствием структуры алгебры Ли SU(2) в бесконечно малом пределе. Соотношение неопределённости $\Delta x_i\, \Delta p_i \geq \hbar/2$ тем самым отражает некомутабельность сопряжённых фазовых переменных, обусловленную кривизной компактного многообразия.

Вероятность и нормировка на S^3

Плотность вероятности, связанная с квантовым состоянием, интерпретируется как норма фазовой амплитуды на S^3:

$$\int_{S^3} |\Psi(\xi)|^2 \, dV_{S^3} = 1. \tag{55}$$

Для физических наблюдаемых в трёхмерном пространстве плотность получается интегрированием по скрытой координате компактного многообразия:

$$\rho(\mathbf{x}) = \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} |\Psi(\xi)|^2 \, d\mu_{\text{fiber}}(\xi), \tag{56}$$

где $\pi : S^3 \to \mathbb{R}^3$ обозначает стереографическую проекцию, а $d\mu_{\text{fiber}}$ — мера вдоль волокна. Следовательно, привычная вероятностная интерпретация квантовой механики соответствует проекции нормированной фазовой амплитуды $\mathrm{SU}(2)$.

Спин и внутренний угловой момент

Двойносвязная топология $\mathrm{SU}(2)$ подразумевает, что поворот на 2π в физическом пространстве соответствует изменению знака внутренней фазовой ориентации. Это свойство естественным образом порождает спиновое поведение с $s = \frac{1}{2}$ для фермионов без дополнительных предположений. Матрицы Паули представляют собой бесконечно малые генераторы $\mathrm{SU}(2)$, а операторы спина следуют напрямую из внутренней алгебры:

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i, \qquad [\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\,\epsilon_{ijk}\hat{S}_k. \tag{57}$$

Внутренний магнитный момент электрона соответствует связи между ориентацией спина и электромагнитной проекцией T_{em}.

Когерентность и квантовая суперпозиция

Так как многообразие $\mathrm{SU}(2)$ компактно и унитарно, линейная суперпозиция собственных фазовых мод соответствует конструктивной или деструктивной интерференции внутренних ориентаций. Когерентные состояния занимают минимальные объёмы на групповом многообразии и сохраняют устойчивые фазовые соотношения, тогда как декогерентность соответствует диффузии фазовой ориентации и потере недиагональных элементов в матрице плотности. Следовательно, статистический характер квантовой механики возникает из усреднения микроскопических фазовых конфигураций $\mathrm{SU}(2)$.

Резюме

Квантовая механика возникает как компактно-модовый предел фазовой динамики $\mathrm{SU}(2)$. Дискретность уровней энергии обусловлена конечностью S^3; уравнение Шрёдингера представляет собой нерелятивистский предел фазового волнового уравнения; а принцип неопределённости отражает внутреннюю кривизну фазового многообразия. Таким образом, квантовое поведение материи непосредственно вытекает из тех же геометрических принципов, которые порождают классическую механику, электродинамику и теорию относительности в рамках единой фазовой модели $\mathrm{SU}(2)$.

8 Геометрическая интерпретация релятивистских и квантовых эффектов

Единая фазовая геометрия SU(2) не только воспроизводит формальную структуру известных физических законов, но и предоставляет интуитивно понятное геометрическое объяснение широкого спектра экспериментально подтверждённых явлений. Несколько ключевых эффектов, традиционно считающихся парадоксальными или контринтуитивными в теории относительности и квантовой механике, в данной интерпретации оказываются прямыми следствиями кривизны и эволюции компактного фазового многообразия.

Отклонение света и гравитационное красное смещение

Отклонение света в гравитационном поле следует из пространственных вариаций локальной скорости фазы $\omega(x)$. Фотоны распространяются вдоль нулевых геодезических эффективной метрики

$$g_{\mu\nu}^{\text{eff}} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}(\omega),$$

где возмущение $\delta g_{\mu\nu}$ зависит от градиента $\omega(x)$. Разложив по первому порядку по гравитационному потенциалу ϕ,

$$\frac{\omega(x)}{\omega_*} \simeq 1 + \frac{\phi}{c^2},$$

можно получить стандартный угол отклонения света, проходящего вблизи массивного тела:

$$\Delta\theta = \frac{4GM}{c^2 b},$$

где b — параметр импульса. Таким образом, гравитационное линзирование и красное смещение Эйнштейна возникают непосредственно из геометрической модуляции скорости фазы, без дополнительных постулатов.

Замедление времени и фазовая геометрия

Уравнение (11) показывает, что локальные часы измеряют время согласно

$$dt = \frac{\omega_*}{\omega(x)}\, dT,$$

так что более медленная эволюция фазы соответствует более медленному ходу времени. В движущихся системах отсчёта эффективная скорость фазы уменьшается согласно фактору Лоренца:

$$\omega(x, v) = \omega_* \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

что воспроизводит кинематическое замедление времени специальной теории относительности. Таким образом, как гравитационное, так и кинематическое замедление времени объединяются как проявления локальных вариаций фазовой скорости SU(2).

Эффект наблюдателя как синхронизация фаз

Измерение или наблюдение соответствует синхронизации между локальной фазой измерительного прибора и фазой наблюдаемой системы. Во время такого взаимодействия внутренняя ориентация системы $U(x)$ выравнивается с фазовой системой отсчёта наблюдателя, уменьшая доступное пространство состояний. Так называемый «коллапс» волновой функции, таким образом, представляет собой геометрическую проекцию распределённой фазовой конфигурации на синхронизированное подмногообразие полного SU(2)-многообразия. Вероятностные исходы отражают относительные объёмы этих подмногообразий в рамках инвариантной меры группы. *Относительные объёмы этих подмногообразий определяют вероятности соответствующих исходов, тем самым обеспечивая прямое геометрическое основание статистической интерпретации квантовой механики.*

Квантовая запутанность как коррелированная фазовая ориентация

Для двух пространственно разделённых возбуждений, описываемых коррелированными фазовыми полями SU(2) $U_1(x_1)$ и $U_2(x_2)$, единое глобальное условие на составную фазовую ориентацию обеспечивает сохранение корреляции их внутренних состояний, даже при большом пространственном разделении. Эти корреляции возникают из общего глобального параметра эволюции фазы T, тогда как каждый наблюдатель воспринимает локальное время $t(x)$. Поскольку никакой причинный сигнал не передаётся во времени $t(x)$, релятивистская причинность сохраняется. Запутанность, таким образом, представляет собой нелокальное ограничение на совместную фазовую конфигурацию SU(2), а не физическое сверхсветовое взаимодействие.

Квантовое туннелирование как непрерывный фазовый переход

Прохождение через потенциальный барьер интерпретируется как непрерывный поворот фазы SU(2) через область с повышенной кривизной энергии. Экспоненциальное подавление вероятности прохождения

$$P \propto e^{-2\int \sqrt{2m(V-E)}\,dx/\hbar},$$

соответствует геометрическому ослаблению фазовой амплитуды при переходе через изогнутую область многообразия. Этот механизм согласуется с экспериментальными наблюдениями макроскопического квантового туннелирования, например, в работах Джона Кларка, Мишеля Деворе и Джона Мартиниса в сверхпроводящих системах, где скорость туннелирования определяется тем же соотношением между фазой и кривизной.

Космологическое красное смещение как старение фазы

Космологическое красное смещение не обязательно связано с метрическим расширением Вселенной. В рамках фазовой модели SU(2) свет, излучённый при глобальном времени T_{emit} и наблюдаемый при T_{obs}, испытывает изменение частоты вследствие медленной эволюции глобальной скорости фазы:

$$1 + z = \frac{\omega_{\mathrm{emit}}}{\omega_{\mathrm{obs}}} = \frac{\omega_*(T_{\mathrm{emit}})}{\omega_*(T_{\mathrm{obs}})}.$$

Если $\omega_*(T)$ монотонно убывает со временем, тот же закон красного смещения, наблюдаемый в удалённых галактиках, естественным образом возникает как следствие *старения фазы*, без необходимости предполагать расширение пространственных расстояний. Фотон «стареет» в фазовом смысле, распространяясь через глобальное поле SU(2), его частота уменьшается по мере того, как Вселенная эволюционирует к меньшей глобальной фазовой энергии. *Такое толкование предсказывает соотношение красного смещения и светимости для стандартных свечей, отличающееся от модели* Λ*CDM, что может служить потенциальным наблюдательным тестом в будущих астрономических обзорах.*

Резюме

Релятивистские и квантовые явления получают прозрачное геометрическое толкование в рамках фазовой модели SU(2). Отклонение света, замедление времени, запутанность, туннелирование и космологическое красное смещение объединяются как различные проявления кривизны и эволюции на компактном фазовом многообразии. Парадоксы исчезают, если рассматривать материю и излучение как проявления единой SU(2)-фазовой геометрии, эволюционирующей во времени T.

9 Заключительные замечания и перспективы

Представленная формулировка устанавливает единое геометрическое основание, в рамках которого классическая механика, электродинамика, теория относительности и квантовая механика возникают как предельные случаи одной и той же фазовой динамики SU(2) на компактной трёхсфере S^3. Материя, излучение и гравитация не рассматриваются как отдельные сущности, а являются различными проявлениями кривизны и движения внутри единой внутренней фазовой геометрии.

Компактность многообразия SU(2) обеспечивает как глобальную конечность, так и локальную непрерывность, что приводит к естественному квантованию, внутренней спиновой структуре и отсутствию сингулярностей. В этом контексте привычные физические величины — масса, заряд, напряжённость поля и энергия — отождествляются с геометрическими инвариантами фазового поля: масса соответствует локализованной энергии кривизны, заряд — топологической намотке, напряжённость поля — градиентам фазы, а излучение — распространяющимся волнам кривизны. Само время приобретает двойственную интерпретацию — как глобальный параметр эволюции T и как локально измеряемую скорость, определяемую фазовой частотой $\omega(x)$.

Проведённый анализ показывает, что:

- ньютонова динамика возникает как низкочастотный предел локализованного фазового движения;
- электромагнетизм соответствует абелевой проекции кривизны SU(2);
- релятивистские эффекты следуют из пространственных вариаций скорости фазы и связи кривизны через тензор $\Phi_{\mu\nu}$;
- квантовая механика представляет собой динамику собственных мод на S^3, дающую дискретные спектры и внутреннюю спиновую структуру без внешних правил квантования.

Такое единое геометрическое толкование сохраняет весь содержательный объём установившейся физики, устраняя искусственное разделение между частицами, полями и пространством-временем. Все наблюдаемые явления описываются как аспекты одного дифференцируемого объекта $U(x) \in \mathrm{SU}(2)$, локальная ориентация которого кодирует внутренние степени свободы, а кривизна определяет как силы, так и динамику.

Настоящая работа сосредоточена на общем формализме и его прямых следствиях для фундаментальных взаимодействий. Дальнейшие исследования будут развивать конкретные области применения:

1. **Атомные системы:** связанные конфигурации делокализованных вихрей SU(2) вдоль резонансных мод, объясняющие магнитные моменты, спектральную структуру и условия устойчивости. Эта тема заслуживает отдельного рассмотрения.

2. **Ядерная структура:** коллективные фазовые конфигурации на глобальной оболочке S^3, описывающие магические числа и энергии связи как устойчивые многовихревые режимы.

3. **Космология:** крупномасштабная кривизна и расширение глобального фазового многообразия SU(2), связывающие гравитационные константы и космическую эволюцию с геометрией компактного фазового пространства.

Таким образом, фазовая модель SU(2) предоставляет непрерывный переход от микроскопических к космологическим масштабам в рамках единого математического принципа. Будущие работы будут направлены на уточнение количественных предсказаний, исследование устойчивости составных конфигураций и сопоставление наблюдаемых следствий с экспериментальными данными. Конечная цель состоит в построении полностью геометрического представления физической реальности, в котором кажущееся многообразие природных явлений объединяется топологией и кривизной компактного фазового многообразия SU(2).

Возникновение иерархии физических масштабов. Фазовое поле SU(2) описывает внутреннюю геометрию в каждой точке пространства-времени, а не внешнюю пространственную структуру. Огромная разница между адронными, атомными и космологическими масштабами возникает динамически из баланса между градиентной энергией (с коэффициентом связи κ) и стабилизирующим членом Скирма (с коэффициентом α) в едином лагранжиане. Эта конкуренция определяет характерную длину

$$L_* \sim \frac{\alpha}{\kappa},$$

которая задаёт порядок величины равновесных конфигураций поля.

В топологическом секторе с числом намотки $B = 1$ минимизация статической энергии

$$E_{\mathrm{stat}}(r_0) = A\,\kappa\, r_0 + B\,\frac{\alpha}{r_0}$$

даёт компактный солитон размера $r_0^* \sim 1$, который естественно отождествляется с нуклонным ядром — высокоэнергетической ветвью теории. Для лептонной ветви ($B = 0$) доминирующие градиентные и электромагнитные самосогласованные члены предпочитают расширенную конфигурацию с характерным размером порядка длины Комптона $\lambda_C = \hbar/(m_e c)$, соответствующим атомным и субатомным структурам. В противоположном пределе радиус фоновой кривизны R глобальной сферы S^3 определяет космологический масштаб модели. Физические размеры ядер и атомов, таким образом, проявляются как малые отношения r_{nuc}/R и a_0/R, что естественно объясняет наблюдаемую иерархию масштабов.

Следовательно, одно фазовое поле SU(2) допускает несколько классов устойчивых решений — локализованные солитоны, расширенные лептонные моды и глобальную фоновую кривизну — каждое с характерной длиной, определяемой минимизацией энергии того же единого лагранжиана. Групповая структура остаётся универсальной, тогда как наблюдаемые масштабы являются возникающими следствиями её внутренней динамики.