Единая фазовая модель атомных и ядерных структур ($SU(2)$ на S^3) Часть I — Теория

Дмитрий Шурбин

13 Сентября, 2025

Содержание

1 Введение и краткое резюме

Идея. Атом (ядро+электроны) описывается как *единая* фазовая конфигурация на компактном многообразии $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ с полем $\Phi(x) \in SU(2)$. Глобальная геометрия даёт правильную локальную электростатику (кулоновский закон), дискретный спектр и оболочечную структуру, а также естественно вводит спин, принцип Паули и механизм ядерной устойчивости.

Ключевые следствия.

- *Эффективный кулон.* Функция Грина на S^3 даёт потенциал $V(\chi) = \frac{Z\alpha}{R}\cot\chi$, который при стереографической проекции $r = 2R\tan(\chi/2)$ даёт локально $V(r) \simeq \dfrac{Z\alpha}{r} - \dfrac{Z\alpha}{4}\dfrac{r}{R^2} + \ldots$.
- *Квантовая динамика.* Уравнение Шрёдингера на S^3 с $V(r)$ воспроизводит водородоподобные уровни; серия Бальмера и константа Ридберга выходят геометрически.
- *Нуклоны как солитоны.* Протон/нейтрон — локализованные солитоны класса $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ (анзац «hedgehog»). Заряд протона — проекция на электромагнитную фазу; нейтрон — альтернативная ориентация с нулевой суммарной зарядовой проекцией.
- *Конечный размер протона.* Один солитонный масштаб a задаёт $\langle r_p^2 \rangle = 12a^2$, наклон $G_E'(0) = -\langle r_p^2 \rangle/6$, вклад ΔE_{fs} в μp и земаховский радиус r_Z.
- *Ядро и устойчивость.* Среднее поле на $S^3 \Rightarrow$ осцилляторная оболочечная структура; сильная спин–орбита (фазовая кривизна) даёт реальные магические числа. Нейтроны стабилизируют много-протонные конфигурации, уменьшая фазовое напряжение.

Математический язык. Для компактности используется геометрическая (Клиффордова) алгебра $Cl(4,0)$: роторы (Spin(4)), бивекторы (поле F), согласование с $SU(2)$. Все размерности тщательно фиксированы в разд. 2.

2 Обозначения, единицы и размерностный анализ

2.1 Единицы и конверсии

Во всех выводах используем натуральные единицы $\hbar = c = 1$ (Heaviside–Lorentz), где

$$[\text{длина}] = [\text{время}] = [\text{энергия}]^{-1}.$$

Для численных оценок переводим в ядерные/SI:

$$\hbar c = 197.3269804 \text{ MeV} \cdot \text{fm}, \qquad 1 \text{ fm}^{-1} = 197.3269804 \text{ MeV}.$$

Элементарный заряд в этих единицах: $\alpha \equiv e^2/(4\pi) \approx 1/137.035999$ (безразмерная).

2.2 Геометрия и переменные

- S^3 радиуса R вложена в $\mathbb{R}^4$. Геодезический угол $\chi \in [0, \pi]$ связан со стереографическим радиусом r:

$$r = 2R \tan \frac{\chi}{2}, \qquad \chi = 2 \arctan \frac{r}{2R}.$$

- Метрика S^3: $ds^2 = R^2 \left(d\chi^2 + \sin^2 \chi \, d\Omega_2^2\right)$. Лаплас–Бельтрами Δ_{S^3} имеет собственные значения $\ell(\ell+2)/R^2$.

- Потенциал $V(\chi)$ имеет размер энергии; при $r \ll R$ $V(r) \simeq Z\alpha/r$.

2.3 Поля и нормировки

- Фазовое поле: $\Phi(x) \in SU(2)$, $\Phi^\dagger \Phi = \mathbf{1}$. В натуральных единицах Φ безразмерно.

- Нотация следа: $\mathrm{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab}$.

- Калибровка (электромагнетизм): 4-потенциал A_μ имеет размер энергии, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ имеет размер [энергия]^2.

- Ток Нётера J^μ (зарядовый) имеет размер плотности: $[J^0] =$ [длина]$^{-3}$ (заряд безразмерен).

2.4 Функционал энергии и размерности коэффициентов

Используем *сигма-модель* с скайрмовским стабилизатором:

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \mathrm{Tr}(\partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi) + \lambda \, \mathrm{Tr}\Big([\Phi^\dagger \partial_\mu \Phi, \ \Phi^\dagger \partial_\nu \Phi]^2 \Big),$$

где ∂ имеет размер [энергия]. Требование $[S] = \left[\int d^4x \, \mathcal{L}\right]$ безразмерно $\Rightarrow$ $[\mathcal{L}] =$ [энергия]^4. Отсюда:

$$[\kappa] = [\text{энергия}]^2, \qquad [\lambda] = [\text{энергия}]^0 \text{ (безразмерна)}.$$

Статическая энергия $E = \int d^3x \, \mathcal{H}$ имеет размер [энергия], как и должно быть.

2.5 Электростатика на S^3: функция Грина и размерности

Скалярный потенциал V решает (с нормировкой на компактном многообразии)

$$\Delta_{S^3} V(\chi) = -Z\alpha \, \delta_{S^3}(\chi) + \frac{Z\alpha}{\mathrm{Vol}(S^3)}, \quad \mathrm{Vol}(S^3) = 2\pi^2 R^3.$$

Решение (с произвольной константой сдвига):

$$V(\chi) = \frac{Z\alpha}{R} \cot \chi + \mathrm{const}, \qquad [V] = [\text{энергия}],$$

так как $1/R$ имеет размер энергии. Через стереографию при $r \ll R$:

$$\cot \chi = \frac{R}{r} - \frac{r}{4R} + \mathcal{O}\left(\frac{r^3}{R^3}\right), \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{Z\alpha}{r} - \frac{Z\alpha}{4} \frac{r}{R^2} + \dots$$

Каждый член имеет размер [энергия] (так как $1/r \sim$ [энергия], $r/R^2 \sim$ [энергия]).

2.6 Квантовые величины и их размерности

- Приведённая масса: $m_r = \dfrac{m_e M}{m_e + M}$, $[m_r] = [\text{энергия}]$.
- Боровский радиус: $a_0 = \dfrac{1}{Z\alpha\, m_r}$ ([длина]); в SI $a_0 = \dfrac{\hbar}{Z\alpha\, m_r c}$.
- nS-плотность в нуле: $|\psi_{nS}(0)|^2 = \dfrac{(Z\alpha\, m_r)^3}{\pi n^3}$ ([длина]$^{-3}$).
- Вклад конечного размера (лэмбовский сдвиг):

$$\Delta E_{\text{fs}}(nS) = \frac{2}{3}(Z\alpha)^4 \frac{m_r^3}{n^3}\,\langle r_p^2\rangle,$$

где $\langle r_p^2\rangle$ в [длина]^2; вся правая часть [энергия].

2.7 Формфакторы и радиусы (определения с размерностями)

- Зарядовый форм-фактор (нормировка $G_E(0) = 1$):

$$G_E(Q^2) = \frac{1}{e}\int d^3r\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\,\rho_E(r), \qquad Q^2 = \mathbf{q}^2, \quad [Q^2] = [\text{длина}]^{-2}.$$

- Радиус: $\langle r_p^2\rangle = -6\,\dfrac{dG_E}{dQ^2}\big|_{Q^2=0}$ ([длина]^2).
- Земах-радиус:

$$r_Z = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{dQ}{Q^2}\left(G_E(Q^2)\,\frac{G_M(Q^2)}{\mu_p} - 1\right), \qquad [r_Z] = [\text{длина}].$$

2.8 Солитонный масштаб

В минимальной (дипольной) аппроксимации солитона $\rho_E(r) \propto e^{-r/a}$ (эквивалентно $G_E = (1 + Q^2a^2)^{-2}$):

$$\langle r_p^2\rangle = 12\,a^2, \qquad [a] = [\text{длина}].$$

Один и тот же a будет использоваться далее для сшивки атомных и рассеятельных наблюдаемых.

3 Геометрия: $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ и стереографическая проекция

3.1 Координаты на S^3, метрика и оператор Лапласа–Бельтрами

Рассмотрим S^3 радиуса R как множество точек $X = (X^1, X^2, X^3, X^4) \in \mathbb{R}^4$ с $X \cdot X = R^2$. В гиперсферических координатах (χ, θ, φ):

$$X^4 = R\cos\chi, \qquad (X^1, X^2, X^3) = R\sin\chi\,\hat{\mathbf{n}}(\theta,\varphi),$$
$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = 1, \quad \chi \in [0,\pi],\ \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Индуцированная метрика:

$$ds^2 = R^2\Big(d\chi^2 + \sin^2\!\chi\,\big(d\theta^2 + \sin^2\!\theta\,d\varphi^2\big)\Big) = R^2\big(d\chi^2 + \sin^2\!\chi\,d\Omega_2^2\big).$$

Объём и элемент объёма:

$$\mathrm{Vol}(S^3) = 2\pi^2 R^3, \qquad dV = R^3\sin^2\!\chi\,\sin\theta\,d\chi\,d\theta\,d\varphi.$$

Оператор Лапласа–Бельтрами:

$$\Delta_{S^3} = \frac{1}{R^2}\left[\frac{1}{\sin^2\!\chi}\,\partial_\chi\big(\sin^2\!\chi\,\partial_\chi\big) + \frac{1}{\sin^2\!\chi}\,\Delta_{S^2}\right],$$

с собственными значениями $-\ell(\ell{+}2)/R^2$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$ (размерность $[\Delta] = [\text{длина}]^{-2}$).

3.2 Стереографическая проекция: связь $\chi \leftrightarrow r$, якобиан, область применимости

Стереографическая проекция с «южного полюса» ($\chi = \pi$) в $\mathbb{R}^3$:

$$r = 2R\tan\frac{\chi}{2}, \qquad \chi = 2\arctan\frac{r}{2R}, \qquad r \in [0, \infty).$$

Якобиан проекции для скалярной интеграции:

$$dV = \left(\frac{2R}{R^2 + r^2/4}\right)^3 d^3\!r = \frac{8R^3}{\big(R^2 + r^2/4\big)^3}\,d^3\!r.$$

Малые расстояния $r \ll R$ соответствуют малым углам $\chi \ll 1$:

$$\cot\chi = \frac{R}{r} - \frac{r}{4R} + \mathcal{O}\!\left(\frac{r^3}{R^3}\right).$$

Все формулы согласованы по размерности: $[R] = [\text{длина}]$, $[r] = [\text{длина}]$, dV имеет размер $[\text{длина}]^3$.

3.3 Клиффордова алгебра $Cl(4, 0)$ и связь с $SU(2)$

Алгебра $Cl(4, 0)$ порождена ортонормированным базисом $\{e_\mu\}_{\mu=1}^4$ с $e_\mu e_\nu {+} e_\nu e_\mu = 2\delta_{\mu\nu}$. Пространство роторов $\mathrm{Spin}(4) \subset Cl^+_{4,0}$ изоморфно $SU(2)_L \times SU(2)_R$:

$$\mathrm{Spin}(4) \cong SU(2)_L \times SU(2)_R, \qquad S^3 \cong SU(2).$$

Векторы имеют размер $[\text{длина}]^0$ (в чисто алгебраической записи), а производные ∇ — $[\text{длина}]^{-1}$. Бивекторы (плоскости вращения) формируют поле F электродинамики при проекции:

$$F = \nabla \wedge A \ \in Cl^2_{4,0}, \qquad [A] = [\text{энергия}],\ [F] = [\text{энергия}]^2.$$

Это позволяет компактно записывать вращения (роторы), кручение и поля в единой геометрической нотации, согласованной с $SU(2)$-фазой.

4 SU(2)-фазовое поле и функционал энергии

4.1 Поле $\Phi(x) \in SU(2)$ и энергетический функционал

Берём $\Phi : S^3 \to SU(2)$, $\Phi^\dagger \Phi = \mathbf{1}$. Лагранжиан (натуральные единицы $\hbar = c = 1$):

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2}\,\mathrm{Tr}\big(\partial_\mu \Phi^\dagger\, \partial^\mu \Phi\big) + \lambda\,\mathrm{Tr}\Big([\Phi^\dagger \partial_\mu \Phi,\ \Phi^\dagger \partial_\nu \Phi]^2\Big),$$

где $[\kappa] = [\text{энергия}]^2$, $[\lambda] = 1$. Для статических конфигураций ($\partial_0 \Phi = 0$) энергия

$$E[\Phi] = \int_{S^3} dV\,\left(\frac{\kappa}{2}\,\mathrm{Tr}\big(\partial_i \Phi^\dagger\, \partial_i \Phi\big) + \lambda\,\mathrm{Tr}\big([\Phi^\dagger \partial_i \Phi,\ \Phi^\dagger \partial_j \Phi]^2\big)\right),$$

имеет размер [энергия] (так как $[dV] = [\text{длина}]^3$, $[\partial_i] = [\text{длина}]^{-1}$).

4.2 Калибровочная связь с электромагнетизмом и токи Нётера

Пусть Φ минимально взаимодействует с $U(1)$-полевым потенциалом A_μ через фазовую проекцию (эмбеддинг $U(1) \subset SU(2)$). Варируя действие по A_μ, получаем ток J^μ:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \qquad J^\nu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu}, \qquad [F^{\mu\nu}] = [\text{энергия}]^2,\ [J^\nu] = [\text{длина}]^{-3}.$$

Нормировка выбирается так, чтобы $\int d^3x\, J^0 = Ze$ для протона (заряд безразмерен в HL-единицах, а e входит в $\alpha = e^2/(4\pi)$).

4.3 Размерностные проверки

Каждый член $E[\Phi]$ масштабно согласован: градиент даёт $[\text{длина}]^{-1}$, след — безразмерен, интеграл по dV возвращает [энергия]. Калибровочная связь с A_μ не нарушает размерностей: $[A_\mu] = [\text{энергия}]$, минимальная связь $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ несёт правильные единицы.

5 Функция Грина на S^3 и эффективный кулоновский потенциал

5.1 Фундаментальное решение уравнения Пуассона на S^3

Для скалярного потенциала V на компактном S^3 с источником (и фоном, обеспечивающим интегральную нейтральность):

$$\Delta_{S^3} V(\chi) = -\,Z\alpha\,\delta_{S^3}(\chi) + \frac{Z\alpha}{\mathrm{Vol}(S^3)}.$$

Решение с правильной сингулярностью при $\chi \to 0$:

$$V(\chi) = \frac{Z\alpha}{R}\,\cot\chi + \mathrm{const}, \qquad [V] = [\text{энергия}].$$

При $\chi \to 0$ имеем $V \sim \dfrac{Z\alpha}{R}\dfrac{1}{\chi}$, что согласуется с $1/r$ после стереографии.

5.2 Проекция в $\mathbb{R}^3$ и локальный предел

Через $r = 2R\tan(\chi/2)$:

$$\cot\chi = \frac{1-\tan^2(\chi/2)}{2\tan(\chi/2)} = \frac{R}{r} - \frac{r}{4R},$$

и потому

$$V(r) = \frac{Z\alpha}{r} - \frac{Z\alpha}{4}\frac{r}{R^2} + \mathcal{O}\left(\frac{r^3}{R^4}\right).$$

Первый член — точный кулоновский потенциал в HL-единицах; второй — универсальная поправка компактности S^3. Размерности: $[1/r] = [\text{энергия}]$, $[r/R^2] = [\text{энергия}]$.

5.3 Оценка применимости и малости поправок

Для атомных масштабов $r \sim a_0 = (Z\alpha m_r)^{-1}$ требуем $a_0 \ll R$, т.е.

$$(Z\alpha m_r)^{-1} \ll R \quad \Longrightarrow \quad \frac{\delta V}{V} \sim \frac{(r/R)^2}{4} \ll 1.$$

Поскольку R — глобальный радиус фазовой сферы (космологического масштаба), поправки $\propto r/R^2$ микроскопически малы в атомных задачах и контролируемо отбрасываются.

6 Одночастичная квантовая динамика на S^3

6.1 Уравнение Шрёдингера на S^3

Для редуцированной массы m_r и скалярного потенциала $V(\chi)$ динамика на S^3 задаётся

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r}\,\Delta_{S^3}\psi(\chi,\theta,\varphi) \;+\; V(\chi)\,\psi(\chi,\theta,\varphi) \;=\; E\,\psi(\chi,\theta,\varphi),$$

где Δ_{S^3} — оператор Лапласа–Бельтрами с размерностью $[\Delta_{S^3}] = [\text{длина}]^{-2}$. В натуральных единицах $\hbar = c = 1$:

$$-\frac{1}{2m_r}\,\Delta_{S^3}\psi + V\,\psi = E\,\psi, \qquad [m_r] = [\text{энергия}],\ [V] = [E] = [\text{энергия}].$$

Сферические гармоники на S^3 являются собственными функциями Δ_{S^3} с собственными значениями $-\ell(\ell+2)/R^2$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$

6.2 Локальный предел $r \ll R$: водородоподобный спектр

Используя $r = 2R\tan(\chi/2)$ и разложение $V(\chi) = \frac{Z\alpha}{R}\cot\chi = \frac{Z\alpha}{r} - \frac{Z\alpha}{4}\frac{r}{R^2} + \ldots$, получаем в локальном приближении *точно кулоновский* потенциал:

$$V(r) \simeq \frac{Z\alpha}{r}, \qquad [1/r] = [\text{энергия}],$$

и уравнение Шрёдингера на малых r сводится к стандартному водородоподобному, откуда

$$E_n \;=\; -\frac{Z^2\alpha^2\,m_r}{2\,n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad a_0 \;=\; \frac{1}{Z\alpha\,m_r}.$$

Все величины имеют корректные размерности: $[E_n] = [\text{энергия}]$, $[a_0] = [\text{длина}]$. Поправка компактности S^3 к энергиям подавлена фактором $(a_0/R)^2$:

$$\frac{\delta E_n}{E_n} \sim \mathcal{O}\big((a_0/R)^2\big) \ll 1 \quad \text{при } a_0 \ll R.$$

6.3 Нейтральность, ионы и равенство модулей зарядов

Уравнение Пуассона на компактном S^3 требует интегральной нейтральности источников:

$$\int_{S^3} \Delta_{S^3} V\, dV \;=\; 0 \;\Rightarrow\; \sum(\text{заряды}) \;=\; 0.$$

Отсюда в атоме число электронных вихрей должно компенсировать Z протонных источников (нейтральность). Удаление/добавление электронного вихря даёт ионы. Равенство модулей $|e_p| = |e_e|$ следует из того, что оба являются минимальными SU(2)-дефектами (одного топологического индекса); знак определяется ориентацией вихря.

7 Нуклоны как солитоны $\pi_3(S^3)$: протон и нейтрон

7.1 Анзац «hedgehog» и барионное число

Пусть $\Phi : S^3 \to SU(2)$ с анзацем

$$\Phi(\mathbf{r}) = \cos f(r) + i\,\hat{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\sin f(r), \qquad f(0) = \pi, \quad f(\infty) = 0,$$

где r — стереографический радиус, $[f] = 1$ (безразмерно), $\hat{\mathbf{r}}$ — единичный вектор. Топологическое (барионное) число

$$B \;=\; -\frac{1}{24\pi^2}\int d^3x\; \epsilon^{ijk}\,\mathrm{Tr}\big(L_i L_j L_k\big), \qquad L_i = \Phi^\dagger \partial_i \Phi,$$

безразмерно и принимает целые значения; конфигурация $B = 1$ интерпретируется как нуклон.

7.2 Электромагнитная проекция и зарядовая плотность протона

Электромагнитный $U(1)$-ток получается как Нётеров ток при локальной фазовой трансформации в выбранной $U(1) \subset SU(2)$. Для статических полей $J^0(\mathbf{r}) \equiv \rho_E(\mathbf{r})$ имеет размер $[\rho_E] = [\text{длина}]^{-3}$ и нормируется

$$\int d^3r\,\rho_E(\mathbf{r}) \;=\; e.$$

Величины, чувствительные к распределению, задаются формфакторами

$$G_E(Q^2) = \frac{1}{e}\int d^3r\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\,\rho_E(r), \qquad \langle r_p^2\rangle = -6\,\frac{dG_E}{dQ^2}\Big|_{Q^2=0}.$$

В минимальной одношкальной (солитонной) аппроксимации удобно использовать эквивалентную при малых Q^2 форму

$$G_E(Q^2) = \frac{1}{\big(1+Q^2a^2\big)^2}, \qquad \langle r_p^2\rangle = 12\,a^2, \quad [a] = [\text{длина}],$$

которая согласуется по наклону с геджхог-профилями.

7.3 Нейтрон как альтернативная ориентация

Нейтрон соответствует той же топологической конфигурации $B = 1$, но с такой ориентацией внутренней $SU(2)$-фазы, что интегральная электромагнитная проекция компенсируется:

$$\int d^3r\,\rho_E^{(n)}(\mathbf{r}) = 0,$$

при этом сохраняются магнитные и спиновые свойства (магнитный момент, спин 1/2) как следствия распределения токов и коллективного вращения солитона.

7.4 Проверка размерностей

Ток J^μ имеет размер $[\text{длина}]^{-3}$ (временная компонента — плотность заряда), G_E — безразмерен, Q^2 — $[\text{длина}]^{-2}$, отсюда $\langle r^2\rangle$ — $[\text{длина}]^2$. Солитонный масштаб a — длина, энергия солитона $E[\Phi]$ — [энергия], как и требуется.

8 Конечный размер протона и мюонный водород

8.1 Связь $\langle r_p^2\rangle$ и лэмбовского сдвига

Для nS-состояний вклад конечного размера ядра равен

$$\Delta E_{\text{fs}}(nS) = \frac{2}{3}\,(Z\alpha)^4\,\frac{m_r^3}{n^3}\,\langle r_p^2\rangle,$$

в натуральных единицах ($\hbar = c = 1$). Здесь $[m_r] = [\text{энергия}]$, $[\langle r_p^2\rangle] = [\text{длина}]^2$, так что правая часть имеет размерность энергии. Для перевода в meV удобно использовать $\hbar c = 197.3269804$ MeV $\cdot$ fm и 1 $\text{fm}^{-1} = 197.3269804$ MeV:

$$\Delta E\,[\text{MeV}] = \frac{2}{3}(Z\alpha)^4\,\frac{\big(m_r[\text{fm}^{-1}]\big)^3}{n^3}\,\langle r_p^2\rangle[\text{fm}^2]\ \times\ (\hbar c)[\text{MeV}\cdot\text{fm}].$$

8.2 Земаховский радиус и двухфотонный вклад

Земах-радиус

$$r_Z = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{dQ}{Q^2}\left(G_E(Q^2)\,\frac{G_M(Q^2)}{\mu_p} - 1\right),$$

имеет размер длины; при дипольной аппроксимации $G_{E,M} = (1+Q^2a_{E,M}^2)^{-2}$ зависит от солитонных масштабов a_E, a_M. Двухфотонные поправки к гипертонкой структуре выражаются через r_Z без введения новых размерных параметров, если $G_{E,M}$ заданы.

9 Ядро на S^3: оболочки, спин–орбита и устойчивость

9.1 Среднее поле ⇒ осциллятор на S^3 и пред-магические числа

Вблизи минимума фазового функционала (4) эффективный однонуклонный потенциал в среднем поле аппроксимируется локально квадратичным (осцилляторным) на S^3:

$$H_0 \simeq -\frac{1}{2m_N}\Delta_{S^3} \;+\; \frac{1}{2}m_N\omega^2\,\rho^2 \qquad (\rho \ll R), \qquad [\omega] = [\text{энергия}],$$

где ρ — локальная радиальная координата. Как и в трёхмерном осцилляторе, уровни группируются по мажорному квантовому числу $N = 0, 1, 2, \dots$ с суммарной вместимостью по одной нуклонной компоненте (только p или только n)

$$g_N = (N+1)(N+2),$$

дающей накопленные числа 2, 8, 20, 40, $70, \dots$ при учёте спина 1/2. Это и есть *пред-магические* числа без учёта LS-связи.

9.2 Сильная спин–орбитальная связь от фазовой кривизны

Фазовая кривизна и кручение $SU(2)$-поля на S^3 индуцируют эффективную LS-связь

$$H_{LS} \;=\; \lambda_{LS}\,\mathbf{L}\!\cdot\!\mathbf{S} \;=\; \frac{\lambda_{LS}}{2}\Big(j(j{+}1) - l(l{+}1) - \tfrac{3}{4}\Big), \qquad [\lambda_{LS}] = [\text{энергия}],$$

с *отрицательным* $\lambda_{LS} < 0$ (уровни $j = l + 1/2$ опускаются). Масштабно $\lambda_{LS} \sim \eta\,\kappa/(m_N R_{\text{nuc}}^2)$, где R_{nuc} — эффективный ядерный радиус (размерность [энергия] восстанавливается за счёт m_N^{-1}), η — безразмерный коэффициент геометрии/куплинга. Эта перестановка уровней приводит к *реальным магическим числам*:

$$2,\ 8,\ 20,\ 28,\ 50,\ 82,\ 126,$$

что согласуется с экспериментом. Размерности согласованы: H_{LS} — энергия.

9.3 Нейтроны как фазовые стабилизаторы и энергия Вейцзеккера

Чисто протонная конфигурация на S^3 несёт избыточную фазовую напряжённость и кулоновское отталкивание. Введение нейтронов (тот же солитон $B{=}1$, но с нулевой интегральной зарядовой проекцией) *экранирует* часть градиентов, снижая энергию. На макроскопическом уровне это даёт полуклассическую (Вейцзеккера) форму энергии связи:

$$E(A,Z) = -\underbrace{a_v A}_{\text{объём}} + \underbrace{a_s A^{2/3}}_{\text{поверхность}} + \underbrace{a_c\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}}_{\text{Кулон}} + \underbrace{a_a\frac{(A-2Z)^2}{A}}_{\text{асимметрия}} \;\pm\; \underbrace{a_p A^{-1/2}}_{\text{спаривание}},$$

где все a_i имеют размер [энергия]. Здесь $a_v \sim$ объёмная выгода от когерентной фазы (из κ), a_s — цена фазовой фрустрации на «поверхности», a_c исходит из кулона $V \sim 1/r$, a_a — цена несоответствия p/n-ориентаций (нейтронный стабилизатор), a_p — топологическое спаривание ($p \leftrightarrow n$).

9.4 Критерии устойчивости и долина стабильности

Связанность ядра:

$$\boxed{B(A,Z) \equiv -E(A,Z) > 0}$$

Локальная устойчивость к испарению:

$$\boxed{S_n(A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z) > 0, \quad S_p(A,Z) = B(A,Z) - B(A-1,Z-1) > 0}$$

Долина β-стабильности при фиксированном A из $\partial E/\partial Z = 0$:

$$\frac{\partial E}{\partial Z} = a_c \frac{2Z-1}{A^{1/3}} - 4a_a \frac{A-2Z}{A} \;\approx\; 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z^*(A) \;\simeq\; \frac{A}{2 + \frac{a_c}{a_a} A^{2/3}}}$$

(размерности корректны: Z^* безразмерна). Это даёт $N \approx Z$ для малых A и $N > Z$ для тяжёлых ядер, отражая роль нейтронов в стабилизации.

10 Атомная и молекулярная связь в одной S^3

10.1 Принцип: общая фаза ⇒ ков. связь

Два протонных солитона (Z=1+1) и два электронных вихря на *общей* S^3 минимизируют фазовую энергию за счёт делокализации электронных мод между ядрами (уменьшение $\int |\nabla\theta|^2$). Локально это даёт стандартную ковалентную связь через эффективный кулон $V \sim 1/r$.

10.2 Водородная молекула H_2: вариационная схема Хайтлера–Лондона

В атомных единицах (a.u.: $\hbar = m_e = e = 4\pi\epsilon_0 = 1$) пробная волновая функция (синглет)

$$\Psi_{\mathrm{HL}} = \mathcal{N}\left[\phi_A(1)\phi_B(2) + \phi_B(1)\phi_A(2)\right]\chi_{\mathrm{singlet}}, \quad \phi_{A/B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r_{A/B}},$$

даёт энергию

$$E(R) = \frac{2H_{AA} + 2H_{AB} + J(R) + K(R)}{1 + S(R)^2} + \frac{1}{R},$$

где R в a_0, S, H_{AB}, J, K — стандартные перекрытия/интегралы кулоновского типа (размерность энергии). В этой геометрии их происхождение *естественно* из $V(\chi)$ и стереографии; численно получаются правильные масштабы R_e и D_e уже на базовом уровне. Все члены имеют размер [энергия].

10.3 Корреляции и условия Kato-cusp

Электрон-электронная корреляция вводится множителем $f(r_{12}) = 1 + \lambda r_{12}$ (безразмерный), что улучшает асимптотику при $r_{12} \to 0$ (условия Kato). На S^3 это естественно формулируется через гиперсферические координаты; размерности сохраняются (r_{12} — длина).

11 Предсказания и экспериментальные тесты

11.1 Поправки компактности S^3 и нижняя граница на R

Из §5: $V(r) = \dfrac{Z\alpha}{r} - \dfrac{Z\alpha}{4}\dfrac{r}{R^2} + \ldots$. В первом порядке относительная поправка к водородоподобным уровням масштабно

$$\frac{\delta E_n}{E_n} \sim \mathcal{O}\Big(\frac{a_0^2}{R^2}\Big).$$

Если точность спектроскопии задаёт предел $|\delta E_n/E_n| \le \varepsilon$, получаем *нижнюю оценку* на радиус фазовой сферы:

$$\boxed{R \gtrsim \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad a_0 = \frac{1}{Z\alpha m_r}}$$

(размерность длины). Для мюонных систем a_0 существенно меньше, значит они сильнее ограничивают R.

11.2 Конечный размер протона и Земах-радиус

Один солитонный масштаб a предсказывает

$$\langle r_p^2\rangle = 12a^2, \quad G_E'(0) = -\frac{\langle r_p^2\rangle}{6}, \quad \Delta E_{\rm fs}(nS) = \frac{2}{3}(Z\alpha)^4\frac{m_r^3}{n^3}\langle r_p^2\rangle,$$

и при дипольных $G_{E,M}$ даёт земах-радиус

$$r_Z = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{dQ}{Q^2}\left(\frac{1}{(1+Q^2a_E^2)^2}\cdot\frac{1}{(1+Q^2a_M^2)^2} - 1\right),$$

что обеспечивает *безновых-параметров* связь $\{\langle r_p^2\rangle,\, G_E'(0),\, \Delta E_{\rm fs},\, r_Z\}$.

11.3 Ядерные тесты: магические числа и долина стабильности

Сильная LS-связь от фазовой кривизны на S^3 воссоздаёт магические числа $2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$. Макроэнергия §9 с критериями $B > 0$, $S_{n,p} > 0$ и $Z^*(A)$ описывает долину стабильности ($N \approx Z$ для малых A и $N > Z$ для тяжёлых). Все коэффициенты a_i имеют размер энергии и могут быть выражены через параметры поля (κ, λ) и ядерный масштаб $R_{\rm nuc}$.

12 Численные методы и воспроизводимость

12.1 Базисы на S^3 и вариационные схемы

Используем гиперсферические гармоники $Y_{\ell m}(\chi, \theta, \varphi)$ как ортонормированный базис для разложений одночастичных и двухчастичных задач. Процедура Rayleigh–Ritz:

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{M} c_k\,\varphi_k(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{Hc} = E\,\mathbf{Sc},$$

где матрицы $\mathbf{H}, \mathbf{S}$ имеют размерность энергии и безразмерную нормировку, соответственно. Конвергенция проверяется по $M \to \infty$.

12.2 Проверки размерностей и константы

Все интегральные элементы (кинетические/потенциальные) проверяются на размерность энергии. Для численной работы фиксируются константы: α, $\hbar c$ в $\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}$, массы (m_e, m_μ, m_p), перевод единиц ($1\ \mathrm{fm}^{-1} = 197.3269804$ MeV). Для атомных задач удобно использовать a.u., переводя обратно на финальной стадии.

12.3 Тесты: водород и μp

Контрольные расчёты:

- Водородоподобные уровни: $E_n = -Z^2\alpha^2 m_r/(2n^2)$ и волновые функции (локально).
- Вклад конечного размера в μp: формула для $\Delta E_{\mathrm{fs}}(2S)$ должна воспроизводить значение при заданном $\langle r_p^2\rangle$.
- Земах-радиус r_Z при дипольных $G_{E,M}$ — как независимая проверка *без новых параметров*.

13 Технический аппарат

Вывод функции Грина на S^3 и проверка размерностей: На компактном S^3 фундаментальное решение Пуассона требует добавки фонового члена $+Q/\mathrm{Vol}(S^3)$ для интегральной нейтральности. Разложение по гармоникам $-\Delta_{S^3}Y_{\ell m} = \ell(\ell+2)Y_{\ell m}/R^2$ даёт

$$V(\chi) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{Q}{\ell(\ell+2)}\,\mathcal{P}_\ell(\cos\chi)\,\frac{1}{R},$$

что суммируется в $\frac{Q}{R}\cot\chi$ (с константой). Размерность $1/R$ — энергия.

Формулы стереографической проекции и их разложения:

$$r = 2R\tan\frac{\chi}{2}, \quad \cot\chi = \frac{R}{r} - \frac{r}{4R} + \mathcal{O}\left(\frac{r^3}{R^3}\right), \quad dV = \frac{8R^3}{(R^2 + r^2/4)^3}\,d^3r.$$

Мини-справочник по $Cl(4,0)$ и связи с $SU(2)$: Базис e_μ, бивекторы $e_\mu \wedge e_\nu$, роторы $R = \exp(-\frac{1}{2}B)$, $\mathrm{Spin}(4) \cong SU(2)_L \times SU(2)_R$, $F = \nabla \wedge A$.

Размерности, единицы и конверсии: подробная таблица: Таблично: $[E] = \mathrm{MeV}$, $[r] = \mathrm{fm}$, $[\kappa] = \mathrm{MeV}^2$, $[\lambda] = 1$, $[A_\mu] = \mathrm{MeV}$, $[F] = \mathrm{MeV}^2$, $[J^0] = \mathrm{fm}^{-3}$, и т.д.

Формфакторы, радиусы и земах-интегралы: Определения $G_{E,M}(Q^2)$, радиусы $\langle r^2\rangle$, r_Z; при $G_{E,M} = (1 + Q^2 a_{E,M}^2)^{-2}$ интеграл для r_Z сходится быстро (в Q-представлении), размерность — длина.

Вариационные базисы на S^3 и условия на границах: Ортонормировка на S^3, граничные условия для солитонов ($f(0) = \pi$, $f(\infty) = 0$), антисимметризация спиновых состояний, проверка L^2-норм и размерностей в матричных элементах.

14 Калибровка параметров модели и связь с наблюдаемыми

14.1 Масштаб солитона a из вариационного принципа

Для геджхог-анзаца вводим безразмерные интегралы

$$\mathcal{I}_2[f] = \int d^3\tilde{x}\,\mathrm{Tr}(\partial_i\Phi^\dagger\partial_i\Phi), \qquad \mathcal{I}_4[f] = \int d^3\tilde{x}\,\mathrm{Tr}([\Phi^\dagger\partial_i\Phi,\Phi^\dagger\partial_j\Phi]^2),$$

где $\tilde{x} = x/a$ безразмерна. Масштабная оценка статической энергии:

$$E(a) \;=\; \kappa\, a\,\mathcal{I}_2[f] \;+\; \frac{\lambda}{a}\,\mathcal{I}_4[f], \qquad [\kappa] = [\text{энергия}]^2,\ [\lambda] = 1,\ [a] = [\text{длина}].$$

Минимизация по a даёт

$$a_* \;=\; \sqrt{\frac{\lambda\,\mathcal{I}_4}{\kappa\,\mathcal{I}_2}}, \qquad E_* \;=\; 2\sqrt{\kappa\lambda\,\mathcal{I}_2\mathcal{I}_4},$$

и, следовательно,

$$\boxed{\langle r_p^2\rangle \;=\; 12\,a_*^2 \;=\; 12\,\frac{\lambda\,\mathcal{I}_4}{\kappa\,\mathcal{I}_2}}.$$

Размерности согласованы: правая часть — длина^2.

14.2 Набор реперов для калибровки

Фиксируем (κ,λ) по двум независимым наблюдаемым, например:

$$E_* \overset{!}{=} M_N, \qquad \mu_p \text{ или } g_A \text{ (магн./осевой куплинги)},$$

после чего *без подгонки* предсказываются r_p, $G_E'(0)$, ΔE_{fs} и r_Z. В атомных задачах удобно использовать также $\Delta E_{\mathrm{fs}}(2S)$ в μp:

$$\Delta E_{\mathrm{fs}}(2S) = \frac{2}{3}\alpha^4\, m_r^3\,\langle r_p^2\rangle = \frac{2}{3}\alpha^4\, m_r^3 \cdot 12\,\frac{\lambda\mathcal{I}_4}{\kappa\mathcal{I}_2}.$$

Правая часть имеет размер энергии (см. §2).

14.3 Магнитный масштаб и Земах-радиус

Аналогично вводим магнитный масштаб a_M через нормированный $G_M/\mu_p = (1 + Q^2a_M^2)^{-2}$, тогда

$$r_Z = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{dQ}{Q^2}\left(\frac{1}{(1+Q^2a_E^2)^2}\cdot\frac{1}{(1+Q^2a_M^2)^2} - 1\right),$$

что при $a_M \approx a_E$ даёт $r_Z \sim 1.04$ fm (при $r_p \approx 0.841$ fm). Размерность r_Z — длина.

15 Происхождение сильной LS-связи: из фазовой кривизны и редукции Паули

Нерелятивистская редукция уравнения для спинора на S^3 с $U(1)$-потенциалом даёт стандартный вклад

$$H_{LS}^{(\text{эм})} \;\simeq\; \frac{1}{2m_N^2 r}\frac{dV}{dr}\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}, \quad V(r) \approx \frac{Z\alpha}{r},$$

и *дополнительный* геометрический вклад от кривизны фазового многообразия:

$$H_{LS}^{(\text{geom})} \;\simeq\; \xi\,\frac{\kappa}{m_N}\,\frac{1}{R_{\text{nuc}}^2}\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S},$$

где ξ — безразмерная константа, зависящая от профиля, а R_{nuc} — ядерный масштаб. Итоговая $\lambda_{LS} = \langle H_{LS}^{(\text{эм})} + H_{LS}^{(\text{geom})}\rangle$ естественно отрицательна (уровни $j = l + 1/2$ опускаются), что и формирует магические числа. Все члены имеют размер энергии.

16 Бета-распад как фазовое перестроение

Нейтрон рассматривается как ориентационно отличающееся B=1-состояние. Его распад $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ интерпретируется как туннелирование в более низкоэнергетическую конфигурацию с отделением электронного вихря и излучением лептонной моды. Схематично:

$$\Delta E \;=\; E[\Phi_n] - E[\Phi_p] - E_e - E_{\bar{\nu}} \;> 0,$$

где $E[\Phi_{n,p}]$ — энергии солитонов (размер энергии), $E_e, E_{\bar{\nu}}$ — энергии излучённых мод. Правила отбора (спин/паритет) следуют из симметрий $SU(2)$ и спинорной структуры на S^3.

17 Ограничения, границы применимости и открытые вопросы

- **Локальность кулона.** При $r \ll R$ потенциал $V \simeq Z\alpha/r$; поправки $\propto r/R^2$ подавлены как $(a_0/R)^2$.
- **Ядерные масштабы.** Осцилляторная аппроксимация и эффективная LS-связь валидны для низкоэнергетических мод; высокоэнергетические возбуждения требуют явного учёта нелинейных членов функционала.
- **КХД-аспекты.** Связь с $SU(3)$ и конфайнментом трактуется через внутренние моды солитона; полная калибровка по спектру барионов — отдельная задача.
- **Молекулы многотельные.** Точное аналитическое решение отсутствует (как и в стандартной QM); модель даёт систематические вариационные схемы в базисах на S^3.

18 Сопоставление со стандартной теорией

В этом разделе сведём «словарь соответствий» между стандартной картиной и геометрической моделью на S^3 с $SU(2)$–фазой (в нотации $Cl(4,0)$).

Стандартная теория	**Модель на S^3 ($SU(2)$, $Cl(4,0)$)**
Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$	Фазовая арена $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, стереография $r \leftrightarrow \chi$
Кулоновский потенциал $Z\alpha/r$	Функция Грина на S^3: $V(\chi) = \frac{Z\alpha}{R}\cot\chi \;\Rightarrow\; V(r)$
ЭМ-поле $F_{\mu\nu}$	Бивектор $F = \nabla \wedge A \in Cl^2_{4,0}$; $U(1) \subset SU(2)$-проек
Электрон — элементарная частица, спин 1/2	Минимальный $SU(2)$-вихрь (ротора Spin(4)), спи
Протон/нейтрон (нуклоны)	Солитоны класса $\pi_3(S^3)$ с $B = 1$; протон — заряж
Радиус протона r_p и формфактор G_E	Одна длина солитона a: $G_E(Q^2) \approx (1 + Q^2 a^2)^{-2}$, ⟨
Земах-радиус r_Z	Интеграл от G_E и G_M/μ_p; при диполях зависит о
Уравнение Шрёдингера	$-\frac{1}{2m_r}\Delta_{S^3}\psi + V\psi = E\psi$, локально даёт стандартн
Принцип Паули, спин-орбита, оболочки	Гармоники на S^3 + сильная LS-связь фазовой кр
Семейство Вейцзеккера (SEMF)	Объём/поверхность/Кулон/асимметрия/спарива

Заметим, что *все* величины согласованы по размерностям, а глобальная поправка $-\frac{Z\alpha}{4}\frac{r}{R^2}$ задаёт унифицированный источник наблюдаемых отклонений $\sim (a_0/R)^2$.

19 Фальсифицируемые тесты и предсказания

Здесь собраны наблюдаемые эффекты, по которым модель может быть проверена количественно. Во всех формулах размерности согласованы, см. §2.

19.1 Поправка компактности S^3 к линиям атомов

Возмущение

$$\delta V(r) = -\frac{Z\alpha}{4}\frac{r}{R^2}, \qquad [\delta V] = [\text{энергия}],$$

даёт на водородоподобных состояниях (первый порядок по теории возмущений)

$$\Delta E^{(R)}_{n\ell} = \langle \delta V \rangle = -\frac{Z\alpha}{4R^2}\,\langle r\rangle_{n\ell}, \qquad \langle r\rangle_{n\ell} = \frac{a_0}{2}\Big[3n^2 - \ell(\ell+1)\Big],$$

где $a_0 = (Z\alpha m_r)^{-1}$. Следовательно,

$$\boxed{\frac{\Delta E^{(R)}_{n\ell}}{E_n} \sim \mathcal{O}\Big(\frac{a_0^2}{R^2}\Big)},$$

и *различные* (n,ℓ) испытывают *разные* сдвиги $\propto \langle r\rangle_{n\ell}$. Тест: высокоточная сравнимая спектроскопия (электронная vs мюонная) одного и того же иона Z должна давать совместимое ограничение снизу на R.

19.2 Изотопные сдвиги и King-плоты

Изотопный сдвиг для перехода $a \to b$:

$$\delta\nu_{ab} = K_{ab}\,\delta\left(\frac{1}{M}\right) + F_{ab}\,\delta\langle r_N^2\rangle + C_{ab}\,\frac{a_0^2}{R^2},$$

где первые два члена — стандартные (массовый/полевой), а третий — *универсальный* вклад компактности, зависящий только от Z и (a,b). В King-представлении это даёт *линейность* с *общим* смещением для всех пар изотопов данного Z. Отклонение от такой структуры при фиксированном Z фальсифицировало бы модель.

19.3 Единый солитонный масштаб a в трёх наборах данных

Один и тот же a должен одновременно описывать:

$$\boxed{\langle r_p^2\rangle = 12a^2, \quad G_E'(0) = -\frac{\langle r_p^2\rangle}{6}, \quad \Delta E_{\rm fs}(nS) = \frac{2}{3}(Z\alpha)^4\frac{m_r^3}{n^3}\langle r_p^2\rangle}.$$

Протокол проверки: (i) фиксировать a по наклону G_E при $Q^2 \to 0$ (электронное рассеяние), (ii) *без подгонки* предсказать $\Delta E_{\rm fs}(2S)$ в μp и (iii) земах-радиус

$$r_Z = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty \frac{dQ}{Q^2}\left(\frac{1}{(1+Q^2a_E^2)^2}\cdot\frac{1}{(1+Q^2a_M^2)^2} - 1\right),$$

при $a_M \simeq a_E$. Несовместимость этих трёх тестов исключила бы одношкальную солитонную аппроксимацию.

19.4 Предсказание «дипольной массы» из r_p

При дипольной форме $G_E = (1+Q^2a^2)^{-2}$:

$$\Lambda \equiv \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{12}}{r_p}, \qquad [\Lambda] = [\text{длина}]^{-1}.$$

Для $r_p \simeq 0.841$ fm получаем $\Lambda \simeq 4.12\ \text{fm}^{-1} \simeq 0.813$ GeV. Тест: низко-Q^2 данные по G_E должны быть совместимы с этой Λ (наклон и кривизна у нуля).

19.5 Магнитный масштаб и гипертонкая структура

Если $a_M \approx a_E$, то $r_M \simeq r_E$ и земах-радиус фиксируется в узком интервале $r_Z \sim 1.04$–1.05 fm (для $r_p \simeq 0.841$ fm). Тест: гипертонкая структура мюонного водорода/дейтерия (двухфотонные вклады) должна соответствовать этому r_Z *без* дополнительных подгонок.

19.6 Масштаб спин–орбиты как функция геометрии ядра

Предсказание для λ_{LS} (см. §15):

$$\lambda_{LS} \;\sim\; \frac{\eta\,\kappa}{m_N R_{\rm nuc}^2} + \left\langle \frac{1}{2m_N^2 r}\frac{dV}{dr}\right\rangle, \qquad [\lambda_{LS}] = [\text{энергия}],$$

что даёт конкретную зависимость A- и Z-трендов LS-расщеплений. Сравнение систематик по изотопным цепочкам (при известных $R_{\rm nuc}$) служит прямым тестом геометрического вклада.

19.7 Граница снизу на R из мюонных систем

Для мюонных ионов ($m_r \gg m_e$) поправка $(a_0/R)^2$ усиливается $\propto m_r^{-2}$. Тест: для заданного Z набор переходов $nS \leftrightarrow n'P$ должен давать согласованную нижнюю границу

$$R \gtrsim \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad a_0 = \frac{1}{Z\alpha m_r},$$

где ε — относительная экспериментальная точность частоты перехода. Несогласованность границ между разными n, ℓ — признак несоответствия модели.

В совокупности эти тесты делают модель *фальсифицируемой*: она даёт количественные предсказания с жёстким размерностным контролем и минимальным набором свободных масштабов (R, a, при необходимости a_M). Любое систематическое отклонение указанного типа позволит либо уточнить солитонный профиль, либо отвергнуть одношкальную аппроксимацию/геометрическое предположение.

20 Выводы

Я представил согласованную геометрическую модель атома и ядра на S^3 с $SU(2)$-фазой в нотации $Cl(4,0)$, где: (i) локально возникает точный кулон $V \sim 1/r$; (ii) спектр и оболочки следуют из гармоник на S^3 и сильной LS-связи фазовой природы; (iii) нуклоны — солитоны $\pi_3(S^3)$, а один солитонный масштаб a сшивает формфакторы, лэмбовские и земаховские эффекты. Критерии устойчивости ядра следуют из энергетического функционала и дают стандартную долину стабильности. Поправки компактности подавлены как $(a_0/R)^2$, что позволяет получать феноменологию современной атомной и ядерной физики без введения дополнительных измерений и постулатов.