

KERN David  
Promotion 2017  
Année universitaire 2016 ~ 2017

Diplôme d'ingénieur Télécom Physique Strasbourg

Mémoire de stage de 3<sup>ème</sup> année

**« Géométrie des systèmes intégrables et récurrence topologique, de la  
Physique statistique à la théorie des cordes »**



IPhT, Institut de Physique Théorique  
CEA Saclay  
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

M. Bertrand EYNARD  
bertrand.eynard@cea.fr  
(+33) 1 69 08 73 76  
Stage du 6 mars au 31 juillet 2017



# Résumés

Résumé court en Français

## Géométrie des systèmes intégrables et récurrence topologique, de la physique statistique à la théorie des cordes

La formule de récurrence topologique permet d'associer une suite d'invariants  $\omega_{g,n}$  à toute courbe spectrale, une courbe complexe plongée dans le plan complexe  $\mathbb{C}^2$ . Nous les interprétons dans des exemples comme les solutions à des problèmes de géométrie énumérative afin de faire apparaître naturellement la récurrence topologique, et nous étudions leurs transformations lors de déformations de la courbe spectrale. Grâce au lien entre les courbes spectrales et l'intégrabilité, nous reconstruisons des systèmes intégrables quantifiés comme des séries perturbatives en une constante de Planck formelle.

Abstract

## Geometry of integrable systems and topological recursion, from statistical physics to string theory

The topological recursion associates a series of invariants  $\omega_{g,n}$  to any spectral curve, a complex curve embedded into the complex plane  $\mathbb{C}^2$ . We interpret them as solutions to problems of enumerative geometry through examples to show how the topological recursion appears, and study their changes along deformations of the spectral curves. Furthermore, we use the link between spectral curves and integrability to reconstruct quantised integrable systems as perturbative series in the formal Planck constant.

# Remerciements

Je suis tout d'abord extrêmement reconnaissant envers Bertrand Eynard, qui a accepté de me proposer ce sujet, et a pris beaucoup de temps tout au long du stage pour m'en expliquer avec grand enthousiasme les différents aspects. Il m'a également laissé la liberté d'assister à des conférences et cours sur le sujet et a accepté de me proposer une poursuite en thèse.

Une pensée aussi pour l'équipe de l'IPhT, en particulier le groupe de stagiaires, thésards et post-doctorants, qui m'ont bien accueilli dans le laboratoire.

Je souhaite également remercier Jérôme Baudot, qui a organisé cette année de Master et m'a mis en contact avec Bertrand Eynard pour me permettre d'obtenir ce stage.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1 Introduction . . . . .	1
0.2 L'Institut de Physique Théorique . . . . .	2
0.2.1 Le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives	2
0.2.2 L'IPhT . . . . .	2
 <b>I Récurrences topologiques en Physique statistique et théorie des cordes</b>	 <b>5</b>
<b>1 Dénombrements et matrices aléatoires</b>	<b>7</b>
1.1 Nombres de Catalan généralisés . . . . .	7
1.1.1 Nombres de Catalan classiques : relations de récurrence et fonctions génératrices . . . . .	7
1.1.2 Récurrence pour les nombres de Catalan généralisés . . . . .	8
1.1.3 Paramétrisation de Joukovski et courbe spectrale . . . . .	10
1.2 Matrices aléatoires . . . . .	11
1.2.1 Intégrales de matrices . . . . .	11
1.2.2 Équations de boucles . . . . .	12
1.2.3 Formules déterminantales pour les densités de valeurs propres .	14
 <b>2 Cordes topologiques et géométrie énumérative</b>	 <b>15</b>
2.1 Surfaces de Riemann et sigma-modèles topologiques . . . . .	15
2.2 Géométrie énumérative des courbes . . . . .	16
2.2.1 Espace de modules des courbes stables . . . . .	16
2.2.2 Couplage avec les classes de Chern . . . . .	17
2.3 Gravité topologique 2D . . . . .	19
2.3.1 Développement combinatoire des fonctions de corrélation . . . .	19
2.3.2 Le modèle B . . . . .	21
 <b>3 Courbes spectrales et récurrence topologique</b>	 <b>23</b>
3.1 Invariants de la récurrence topologique . . . . .	23
3.1.1 Surfaces de Riemann et courbes spectrales . . . . .	23
3.1.2 Récurrence topologique . . . . .	24
3.1.3 Structures d'Airy et quantification de Lagrangiennes . . . . .	26
3.2 Déformations de courbes spectrales et des invariants . . . . .	28
3.2.1 Espace de déformations et cohomologie méromorphe . . . . .	28
3.2.2 Cycles généralisés et polarisation . . . . .	29
3.2.3 Formules variationnelles pour les invariants . . . . .	30

3.2.4	Exemple des déformations de la courbe d’Airy . . . . .	31
<b>II</b>	<b>Géométrie des systèmes intégrables et quantification perturbative</b>	<b>33</b>
<b>4</b>	<b>Systèmes intégrables et quantification</b>	<b>35</b>
4.1	Intégrabilité et reconstruction géométrique . . . . .	35
4.1.1	Systèmes intégrables classiques et courbes spectrales . . . . .	35
4.1.2	Reconstruction géométrique . . . . .	36
4.2	Quantification et correspondance de Riemann–Hilbert . . . . .	38
4.2.1	Géométrisation de systèmes différentiels : courbes quantiques et fibrés adjoints . . . . .	38
4.2.2	Problème de Riemann–Hilbert . . . . .	38
4.3	Résolution perturbative en développement semi-classique . . . . .	40
4.3.1	Asymptotiques WKB . . . . .	40
4.3.2	Conditions de validité et phénomènes de croisements de murs .	41
4.3.3	Asymptotiques matricielles . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Construction de fonctions tau</b>	<b>43</b>
5.1	Fonction de partition dans les modèles de matrices . . . . .	43
5.1.1	Polynômes orthogonaux . . . . .	43
5.1.2	Noyau matriciel . . . . .	44
5.1.3	Fonction de partition et équation de Hirota . . . . .	45
5.2	Définition perturbative de fonctions tau . . . . .	47
5.2.1	Opérateur de Hirota . . . . .	47
5.2.2	Fonction tau . . . . .	47
5.2.3	Expression en fonction des temps . . . . .	48
	<b>Conclusion</b>	<b>51</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>
	<b>Liste de symboles</b>	<b>55</b>
<b>III</b>	<b>Annexes</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Géométrie complexe, différentielle et algébrique</b>	<b>59</b>
A.1	Algèbre : quotients, modules . . . . .	59
A.2	Variétés différentiables réelles . . . . .	61
A.2.1	Variétés et espaces tangents . . . . .	61
A.2.2	Champs de vecteurs . . . . .	62
A.2.3	Groupes et algèbres de Lie . . . . .	63
A.3	Fibrés et connexions . . . . .	64
A.3.1	Fibrés vectoriels et principaux . . . . .	64
A.3.2	Connexions de Ehresmann . . . . .	64
A.4	Homologie et cohomologie . . . . .	65
A.4.1	Le groupe fondamental . . . . .	65
A.4.2	Homologie singulière . . . . .	65
A.4.3	Cohomologie de de Rham . . . . .	66

A.5	Variétés de Calabi-Yau . . . . .	67
A.5.1	Variétés complexes . . . . .	67
A.5.2	Géométrie symplectique . . . . .	67
A.5.3	Structures kählériennes et variétés de Calabi-Yau . . . . .	68

# Introduction et contexte

## 0.1 Introduction

Ce stage a été effectué à l’Institut de Physique Théorique, dans le groupe de Physique mathématique. Il a pour principal but d’étudier au travers d’exemples de géométrie énumérative liée à la Physique statistique et à la théorie des cordes topologique et dans le cadre des systèmes intégrables les conséquences de la formule de récurrence topologique sur les courbes spectrales.

Le formalisme de la récurrence topologique a été développé dans[EO07] à partir d’observations sur les matrices aléatoires et les « courbes spectrales » décrivant les asymptotiques de leurs spectres. Il a ensuite été rapidement généralisé à une formule universelle permettant d’associer un système d’invariants à une courbe spectrale quelconque. Dans de nombreux cas, ces invariants sont reliés à des problèmes de géométrie énumérative. Dans le cadre de la symétrie miroir, la courbe spectrale correspond au modèle B, caractérisé par la géométrie complexe des fibrés holomorphes, le problème énumératif au modèle A, caractérisé par la géométrie symplectique de la théorie d’intersections, et la récurrence topologique permet d’exhiber une application miroir pour reconstruire le problème original.

La Partie I introduit des exemples de récurrence topologique dans deux grands domaines physiques. Dans le chapitre 1, nous présentons un exemple de problème de physique statistique combinatoire dont la structure récursive donne naissance à une récurrence topologique, ainsi que l’apparition des équations de boucles dans les modèles de matrices aléatoires, qui permettent d’étudier les principales caractéristiques des systèmes intégrables. Dans le chapitre 2, nous étudions un exemple de problème de géométrie énumérative en théorie des cordes topologique et le modèle B qui lui est associé.

Ensuite, le chapitre 3 introduit le formalisme des courbes spectrales et de la récurrence topologique, et étudie ensuite l’espace des déformations de ces courbes.

Les courbes spectrales interviennent également de manière naturelle dans les systèmes intégrables classiques, les systèmes dans lesquels les équations du mouvement sont exactement résolubles, et la récurrence topologique y apparaît alors comme liée à la quantification. La Partie II se penche alors sur la géométrie des systèmes intégrables et l’analyse semi-classique des systèmes différentiels. Dans le chapitre 4, nous présentons la notion d’intégrabilité classique que nous relierons aux courbes spectrales, puis une géométrisation des systèmes différentiels qui apparaissent comme quantifications des systèmes classiques, et qui sont étudiés dans le cadre de l’approximation semi-classique. Dans le chapitre 5, nous montrons comment la récurrence topologique permet de construire de façon perturbative des fonctions tau pour les systèmes intégrables. Nous introduisons d’abord la notion de fonction tau par l’exemple des matrices aléatoires, en tant que fonction de partition, puis nous présentons une construction générale



à partir des invariants de la récurrence topologique et de la géométrie de l'espace des courbes spectrales.

## 0.2 L'Institut de Physique Théorique

### 0.2.1 Le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives

Le CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique) fut créé en 1945 à la demande de Charles de Gaulle. À sa tête furent placés Frédéric Joliot-Curie (haut-commissaire) et Raoul Dautry (administrateur général). En 2009, à la demande de Nicolas Sarkozy, le but des recherches du CEA a été étendu aux énergies renouvelables, et celui-ci a donc été renommé Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives.

Le siège social du CEA est à Paris, son siège administratif à Gif-sur-Yvette. Le CEA possède quatre centres d'études civils, situés à Paris-Saclay (comprenant les établissements de Fontenay-aux-Roses et de Saclay), à Grenoble, à Cadarache et à Marcoule, ainsi que cinq centres pour les applications militaires, DAM Île-de-France, Le Ripault, Valduc, le Cesta et Gramat. Le CEA emploie environ 16000 scientifiques, et a un budget de 4,1 milliards d'euros pour 422 projets européens en cours (en 2016).

Le CEA intervient dans quatre grandes directions : la défense et la sécurité (la DAM, direction des applications militaires), les énergies nucléaire et renouvelables (la DEN, direction de l'énergie nucléaire), la recherche technologique pour l'industrie (la DRT, direction de la recherche technologique), et la recherche fondamentale en sciences de la matière et de la vie (la DRF, direction de la recherche fondamentale), où se trouve l'IPhT.

La DRF, anciennement Direction des Sciences de la Matière, comprend onze instituts de recherche (*c.f.* Figure 1), dont six associés à l'université Paris-Saclay, et les autres associés aux universités Grenoble-Alpes et Aix-Marseille. La DRF emploie, au sein de ses 42 unités mixtes de recherche, 6270 personnes dont 3510 permanents, avec également des liens avec le CNRS.

La recherche de la DRF est multidisciplinaire et transdisciplinaire, s'étendant sur les domaines de la biologie, la chimie, le climat, l'énergie, les instruments et techniques, les nanosciences, la physique, et la santé.

### 0.2.2 L'IPhT

Le Service de Physique Théorique (SPhT) naquit en 1963 à partir de l'équipe de Physique Théorique et Mathématique du Département d'étude des piles, avec un effectif d'une vingtaine d'employés du CEA. En 2008, il fut promu au statut d'Institut (l'IPhT). Il emploie une cinquantaine de physiciens permanents (dont un tiers sont affiliés CNRS) ainsi qu'une trentaine de doctorants et postdoctorants et une dizaine de personnels de support.

Les activités de recherche de l'IPhT se divisent en trois principaux groupes :

- A. physique mathématique et théorie des cordes ;
- B. physique des particules et cosmologie ;
- C. physique statistique, systèmes complexes et états condensés.

Les différents sous-groupes tiennent régulièrement des séminaires pour présenter les développements de leurs sujets. L'IPhT organise également chaque année une série de cours de Physique théorique, dont certains ont donné naissance à des livres de référence.

Le groupe B. étudie la recherche de physique au-delà du Modèle Standard (physique aux collisionneurs, matière noire, physique des saveurs et neutrinos, ...), la physique hadronique à l'aide de la chromodynamique quantique, et des questions de cosmologie (énergie noire et inflation, grandes structures, ...). Le groupe C. étudie les systèmes hors d'équilibre et désordonnés, les phénomènes quantiques en matière condensée et les modèles d'intégrabilité quantique, et la matière molle et les systèmes biologiques. Le groupe A. étudie les systèmes dynamiques en chaos quantique, la physique statistique combinatoire (surfaces aléatoires, matrices aléatoires, ...), les systèmes intégrables et théories conformes (en particulier intégrabilité quantique, chaînes de spins, ...), et la théorie des cordes et gravité quantique (compactifications, trous noirs quantiques, correspondance AdS/CFT, géométrie énumérative, ...).

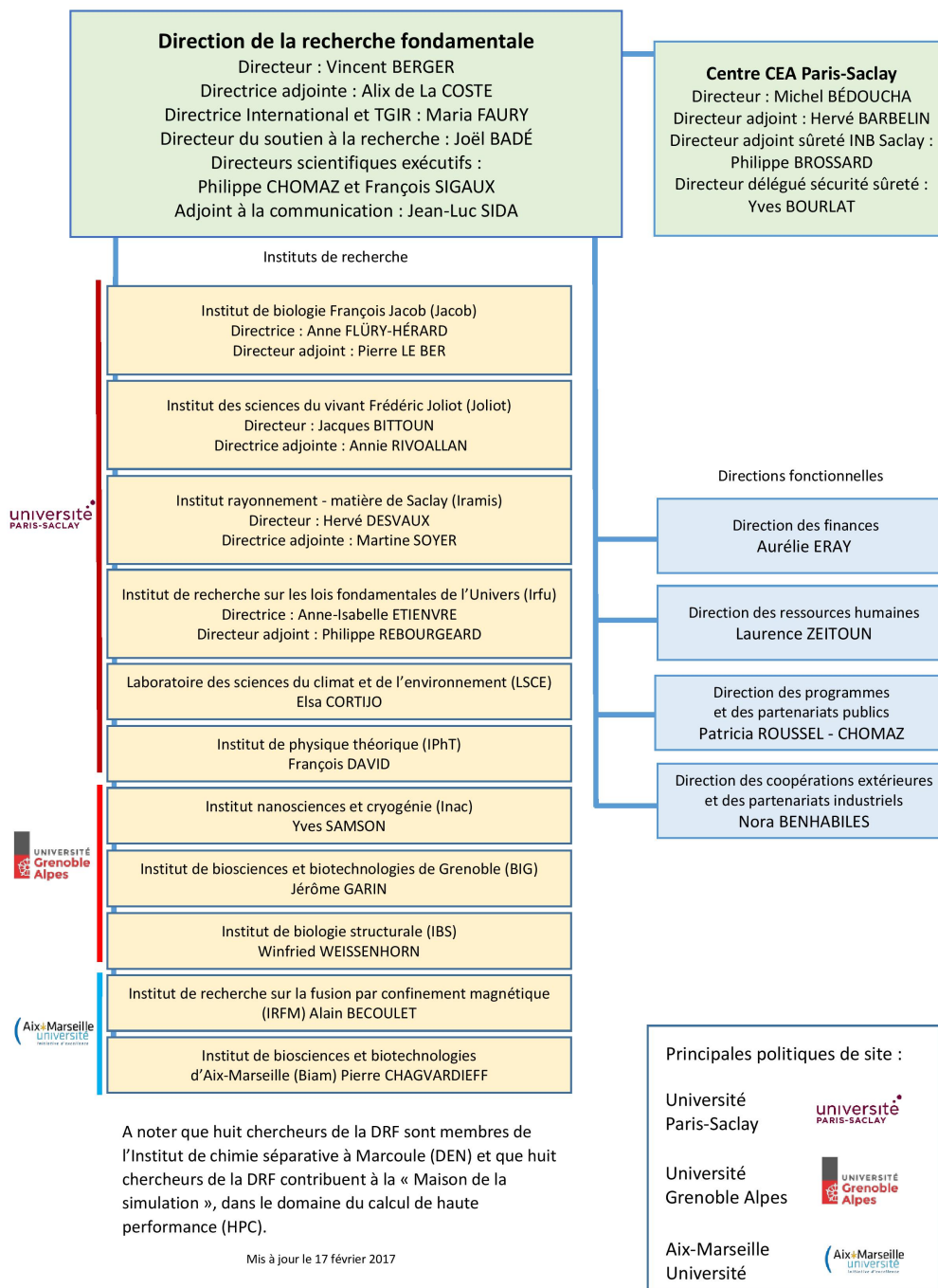


FIGURE 1 – Organigramme de la DRF (de <http://www.cea.fr/drf/Pages/La-DRF/Organisation.aspx>)

## **Première partie**

# **Réurrences topologiques en Physique statistique et théorie des cordes**



# Chapitre 1

## Récurrance topologique en physique statistique : dénombrement de graphes et matrices aléatoires

### 1.1 Nombres de Catalan généralisés

#### 1.1.1 Nombres de Catalan classiques : relations de récurrence et fonctions génératrices

Les nombres de Catalan  $C_k = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!}$  apparaissent comme solution à de nombreux problèmes de combinatoire. Nous allons ici les étudier à partir d'une forme se prêtant le mieux à la généralisation. Considérons un disque sur le bord duquel on place  $2k$  points marqués numérotés, avec  $k \in \mathbb{N}$ . On définit alors le nombre  $C_k$  comme le nombre de façons de relier ces  $2k$  points deux à deux par des arches dans le disque respectant les conditions suivantes :

1. les arches ne se coupent pas ;
2. les arches sont orientées et respectent la numérotation des points (*i.e.* il peut y avoir une arche reliant le point  $i$  au point  $j$  seulement si  $i < j$ ).

On pose  $C_0 = 1$ .

On représente sur la Figure 1.1 les arches pour les petites valeurs de  $k$ , et on en déduit que  $C_1 = 1$  (*c.f.* Figure 1.1a), que  $C_2 = 2$  (voir Figure 1.1b) et que  $C_3 = 5$  (*c.f.* Figure 1.1c).

D'après la condition 2, le point numéroté 1 doit nécessairement être le point de départ d'une arche ; si  $\ell > 1$  est le point d'arrivée de cette arche notons  $n_\ell$  le nombre de façons de relier les points restants, d'où  $C_k = \sum_{\ell=2}^{2k} n_\ell$ . L'arche divise le disque en deux hémicycles indépendants portant respectivement les ensembles de points  $\llbracket 2, \ell-1 \rrbracket$  et  $\llbracket \ell+1, 2k \rrbracket$ . Si l'un de ces deux intervalles est de cardinal impair, c'est-à-dire si  $\ell$  est impair, alors clairement  $n_\ell = 0$ . Sinon, en écrivant  $\ell = 2\ell'$ , l'indépendance donne  $n_\ell = C_{\ell'-1} \cdot C_{k-\ell'}$  avec  $\#\llbracket 2, \ell-1 \rrbracket = \ell-2 = 2(\ell'-1)$  et  $\#\llbracket \ell+1, 2k \rrbracket = 2k-\ell = 2(k-\ell')$ . Ces nombres sont inférieurs à  $k$ , donc le calcul peut être fait par récurrence. La formule de récurrence est donc, pour  $k > 1$  :

$$C_k = \sum_{\ell=1}^k C_{\ell-1} C_{k-\ell} \quad (1.1)$$

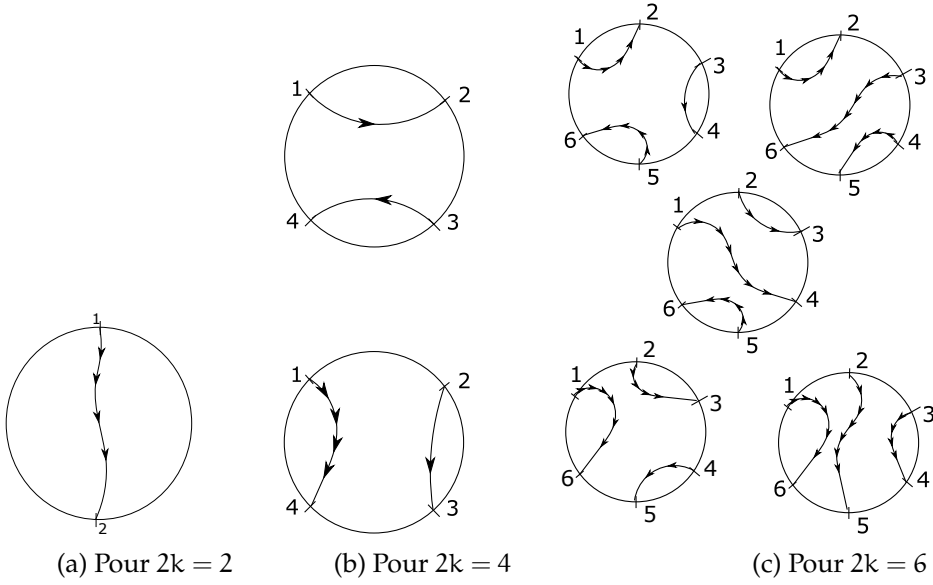


FIGURE 1.1 – Premiers nombres de Catalan

avec la condition initiale  $C_0 = 1$ .

Afin de résoudre cette relation, considérons la **fonction génératrice**

$$\mathcal{C}: x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{x^{2k+1}}. \quad (1.2)$$

La relation de récurrence (1.1) sur les  $C_k$  se traduit en l'équation fonctionnelle

$$\mathcal{C}(x) - \frac{1}{x} = \mathcal{C}(x)^2 \cdot \frac{1}{x}, \quad (1.3)$$

d'où en résolvant  $\mathcal{C}(x)^2 - x \mathcal{C}(x) + 1 = 0$  pour tout  $x$  on obtient

$$\mathcal{C}(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2} = \frac{x}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \right). \quad (1.4)$$

De la définition  $\mathcal{C}(x) = \sum_k C_k x^{-2k-1}$ , on voit que le comportement à l'infini de  $\mathcal{C}$  doit être  $\lim_{x \rightarrow \infty} \mathcal{C}(x) = 0$ , donc la solution qui convient est celle avec le signe négatif devant la racine. En développant en série à l'infini, on obtient

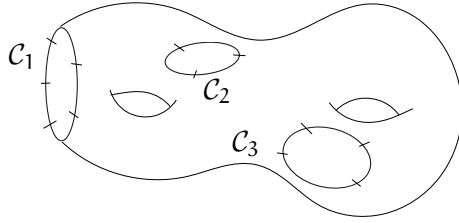
$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{x}{2} \left( 1 - 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \cdots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!} \frac{(-4)^k}{x^{2k}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!x^{2k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} \cdot \frac{1}{x^{2k+1}} \end{aligned} \quad (1.5)$$

d'où on extrait bien les nombres de Catalan  $C_k = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!}$ .

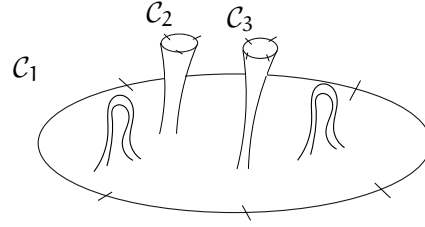
### 1.1.2 Récurrence pour les nombres de Catalan généralisés

Plaçons-nous maintenant sur une surface  $\Sigma_g$  de genre  $g$ , c'est-à-dire une surface qui peut rester connexe après  $g$  coupures (voir Figure 1.2a pour un exemple avec  $g = 2$ ,

la topologie des surfaces étant déterminée par leur genre). On ajoute un nombre  $n$  de bords à  $\Sigma_g$ , ce qui correspond à lui retirer  $n$  disques qui laissent leurs bords circulaires, que par facilité d'écriture on numérotera  $\mathcal{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Sur chaque bord  $\mathcal{C}_i$  on place  $k_i$  points. Un exemple est représenté en Figure 1.2.



(a) Représentation conventionnelle de la surface de genre  $g$



(b) Représentation aplatie sur le premier cercle

FIGURE 1.2 – Surface de genre  $g$  avec  $n$  bords décorés (ici  $g = 2$  et  $n = 3$ , et  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 3$  et  $k_3 = 4$ )

Le **nombre de Catalan généralisé**  $C_{g,n}(k_1, \dots, k_n)$  est alors défini comme le nombre de façons de relier deux à deux les points par des arches tracées sur la surface respectant les conditions énoncées précédemment (les arches ne se coupent pas et leur orientation respecte la numérotation). On impose bien sûr  $\sum_{i=1}^n k_i \in 2\mathbb{N}$ . On retrouve les nombres de Catalan classiques par  $C_k = C_{0,1}(2k)$ , puisqu'en perçant un trou dans une sphère  $\Sigma_0$  on obtient bien un disque.

Afin de généraliser la méthode utilisée à la sous-section 1.1.1, fixons le cercle  $\mathcal{C}_1$  (et donc son point 1) comme base pour la première arche. Il est alors utile de voir la surface comme représentée en Figure 1.2b. Il y a trois cas possibles pour l'arche :

- l'arche joint le point  $\ell$  du cercle 1 en traversant un nombre quelconque (non nul) de poignées. Les points restants peuvent toujours tous être reliés par des arcs, mais l'arche découpe le cercle 1 en deux cercles, et le genre diminue de 1. On obtient de cette façon

$$\sum_{\ell=2}^{k_1} C_{g-1,n+1}(\ell-2, k_1-\ell, k_2, \dots, k_n); \quad (1.6)$$

- l'arche entoure  $h$  poignées et un sous ensemble indexé par  $I \subset \llbracket 2, n \rrbracket$  des cercles. Le cercle 1 est découpé en deux cercles, l'un entouré et l'autre non. On obtient ainsi

$$\sum_{\ell=2}^{k_1} \sum_{h=0}^g \sum_{J \subseteq \llbracket 2, n \rrbracket} C_{h,1+\#J}(\ell-2, k_J) \cdot C_{g-h,1+\#(\llbracket 2, n \rrbracket \setminus J)}(k_1-\ell, k_{\llbracket 2, n \rrbracket \setminus J}) \quad (1.7)$$

où  $k_J = (k_{J_1}, k_{J_2}, \dots, k_{J_{\#J}})$ ;

- l'arche joint un point quelconque du cercle  $j$ ; alors les cercles 1 et  $j$  sont recollés en un unique cercle contenant  $k_1 + k_j - 2$  points marqués. Quel que soit le trajet de l'arche vis-à-vis des poignées de  $\Sigma_g$ , le genre reste toujours égal à  $g$ . On obtient donc

$$\sum_{j=2}^n k_j C_{g,n-1}(k_1 + k_j - 2, k_2, \dots, \widehat{k_j}, \dots, k_n) \quad (1.8)$$

où  $\widehat{\bullet}$  indique l'omission.



En définissant également la série génératrice

$$\mathcal{C}_{g,n} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}} \frac{\mathcal{C}_{g,n}(k_1, \dots, k_n)}{x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}}, \quad (1.9)$$

et en extrayant de la somme de (1.7) les termes où apparaissent  $\mathcal{C}_{g,n}$  (c'est-à-dire ceux avec  $(h = 0, J = \emptyset)$  et  $(h = g, J = \llbracket 2, n \rrbracket)$ ), on obtient l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} (x_1 - 2\mathcal{C}_{0,1}(x_1)) &= \mathcal{C}_{g-1,n+1}(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{\substack{\text{préstable} \\ h+h'=g \\ J \sqcup J' = \llbracket 2, n \rrbracket}} \mathcal{C}_{h,1+\#J}(x_1, x_J) \mathcal{C}_{h',1+\#J'}(x_1, x_{J'}) \\ &+ \sum_{j=2}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\mathcal{C}_{g,n-1}(x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n) - \mathcal{C}_{g,n-1}(x_2, \dots, x_n)}{x_1 - x_j} \end{aligned} \quad (1.10)$$

où la somme est dite **préstable** si elle ne contient pas les termes extrêmes  $(h = 0, J = \emptyset)$  et  $(h = g, J = \llbracket 2, n \rrbracket)$ .

Notons  $\chi_{g,n} = 2 - 2g - n$  ; il s'agit de la **caractéristique d'Euler** de la surface de genre  $g$  à  $n$  bords, un invariant topologique. On remarque que le membre de gauche a bien une caractéristique d'Euler de  $\chi_{g,n}$ , mais que tous les termes du membre de droite ont une caractéristique d'Euler de  $\chi_{g,n} + 1$ . La relation est donc une récurrence sur  $(-\chi_{g,n})$ , et l'on parle de **récurrence topologique**.

On dit qu'un couple  $(g, n)$  est stable si  $\chi_{g,n} < 0$ . Nous nous restreignons pour le moment aux cas avec  $n > 0$ . Les seuls couples instables sont alors  $(g = 0, n = 1)$  avec  $(-\chi_{0,1}) = -1$  et  $(g = 0, n = 2)$  avec  $(-\chi_{0,2}) = 0$  : ces couples sont donc les cas de base pour la récurrence topologique. Nous avons déjà traité le cas de  $\mathcal{C}_{0,1}$ , et il reste donc à déterminer  $\mathcal{C}_{0,2}$ .

### 1.1.3 Paramétrisation de Joukovski et courbe spectrale

La forme de  $\mathcal{C}_{0,1}$  suggère un changement de variables de Joukovski : on introduit la paramétrisation  $x_i = x(z_i)$  avec les fonctions

$$x : z \mapsto z + \frac{1}{z}, \quad y : z \mapsto z - \frac{1}{z}. \quad (1.11)$$

Ces deux fonctions méromorphes sont reliées par le polynôme  $P(X, Y) = Y^2 - X^2 + 4$ , c'est-à-dire que pour tout  $z$  on a  $P(x(z), y(z)) = 0$ . Ce polynôme admet pour solutions  $Y = \pm \sqrt{X^2 - 4}$  ; en particulier  $\forall z, \sqrt{x(z)^2 - 4} = z - \frac{1}{z}$ . On remarque que l'involution  $z \mapsto z' = \frac{1}{z}$  laisse  $x$  invariant et échange les deux solutions  $y$ . Le Jacobien de transition pour le changement de variable est  $\partial_z x(z) = \frac{1}{z} (z - \frac{1}{z})$ .

Définissons également la multidifférentielle

$$\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \left( \mathcal{C}_{g,n}(x(z_1), \dots, x(z_n)) + \frac{\delta_{(g,n),(0,2)}}{(x(z_1) - x(z_2))^2} \right) dx(z_1) \boxtimes \dots \boxtimes dx(z_n) \quad (1.12)$$

avec  $dx(z_i) = \partial_z x(z_i) dz_i$ . Ici le produit tensoriel externe  $\boxtimes$  permet d'obtenir une  $n$ -forme (quoique pas antisymétrique, mais en fait symétrique) en les  $n$  variables  $z_\bullet$ .

Un calcul montre que

$$\omega_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 \boxtimes dz_2}{(z_1 - z_2)^2}. \quad (1.13)$$

On a donc que  $\omega_{0,2}$  est une 2-forme en deux variables avec un pôle double sur la diagonale  $\Delta := \{(z_1, z_2) \mid z_1 = z_2\}$ . Il s'agit d'un **noyau de Bergman**, aussi appelé forme fondamentale de deuxième espèce, et on le note  $B(z_1, z_2)$ .

Par suite, en développant (1.10) pour les  $\omega_{g,n}$ , on obtient la formule universelle de récurrence topologique :

$$\begin{aligned} \omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = & \frac{1}{2} \sum_{a=\pm 1} \text{Res}_{z \rightarrow a} \frac{\int_{z'=\frac{1}{z}}^z \omega_{0,2}(z, z')}{\omega_{0,1}(z) - \omega_{0,1}\left(\frac{1}{z}\right)} \\ & \left( \omega_{g-1,n+1}\left(z, \frac{1}{z}, z_2, \dots, z_n\right) + \sum_{h,h',I,I'}^{\text{préstable}} \omega_{h,1+\#I}(z, z_I) \omega_{h',1+\#I'}\left(\frac{1}{z}, z_{I'}\right) \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Les fonctions  $x$  et  $y$  peuvent s'interpréter de façon géométrique, grâce à l'équation algébrique les reliant, comme définissant une courbe algébrique complexe dans le plan. En effet, la variable  $z$  est définie dans la sphère de Riemann  $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ , la droite complexe complétée d'un point à l'infini pour la compactifier, et qui est isomorphe à la 2-sphère. On a alors une fonction  $(x, y) : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^2$  dont les deux composantes sont reliées par le polynôme  $P$ . On voit donc :

$$\Sigma := \{(x(z), y(z)) \mid z \in \overline{\mathbb{C}}\} = \{(X, Y) \in \mathbb{C}^2 \mid P(X, Y) = 0\}. \quad (1.15)$$

Dans les calculs, la coordonnée  $x$  était la variable principale, et  $y$  seulement une coordonnée auxiliaire. On peut donc s'intéresser à une projection  $\mathcal{S} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  qui associe à un point de coordonnée  $x$  la valeur de  $z$  correspondant. Cependant, l'inversion de la paramétrisation de  $x$  donne  $z^2 - zx + 1 = 0$ , soit  $z = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ , et associe donc deux valeurs de  $z$  à chaque valeur de  $x$ . En effet, le polynôme  $P$  est de degré 2 en  $y$ , et donc la projection selon  $x$  définit un **revêtement à deux feuillets** de  $\overline{\mathbb{C}}$  : au-dessus de chaque point  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ , il y a deux points de  $\Sigma$  ayant la même coordonnée  $x$  mais les coordonnées  $y$  conjuguées, l'involution  $z \mapsto z' = \frac{1}{z}$  permettant de passer d'un feuillet à l'autre. Le Jacobien  $\partial_z x$  est nul en  $z = \pm 1$ , qui sont les points correspondants à  $x = \pm 2$  auxquels la fonction  $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$  n'est pas analytique. Il s'agit des **points de branchement** du revêtement double ; le segment réel reliant ces deux points  $x = -2$  et  $x = +2$  donne le cercle unité de  $\overline{\mathbb{C}}$ , et les deux feuillets sont respectivement l'intérieur et l'extérieur du cercle.

## 1.2 Matrices aléatoires

### 1.2.1 Intégrales de matrices

Les matrices aléatoires sont utilisées dans de nombreuses approximations statistiques de phénomènes physiques. Elles apparaissent en particulier dans le cadre de la chromodynamique quantique, où le champ de jauge est à valeurs dans les matrices  $N_c \times N_c$  (où  $N_c$  est le nombre de couleurs, égal à 3 dans le modèle standard), et où

t'Hooft a proposé d'étudier certains phénomènes à partir du cas  $N_c \rightarrow \infty$ . Cette méthode est également utile dans les théories sur réseaux et les triangulations aléatoires, où les différents points discrétisés donnent naissance à un modèle de matrices.

On s'intéresse à l'étude des matrices hermitiennes du groupe

$$H_N = \left\{ M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) \mid M^\dagger = M \right\} \quad (1.16)$$

Ce groupe de Lie, grâce à la décomposition  $H_N = ((U(N)/U(1)^N) \times \mathbb{R}^N) / \mathfrak{S}_N$  (avec  $\mathfrak{S}_N = \text{Aut}[1, N]$  le groupe des permutations de  $N$  éléments), admet la mesure d'intégration :

$$\frac{1}{\sqrt{(\frac{\pi}{N})^{N^2} 2^N}} \int_{H_N} f(\text{Sp } M) dM = \frac{\text{Vol}(U(N))}{N! \text{Vol}(U(1)^N)} \int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{i=1}^N d\lambda_i. \quad (1.17)$$

On reconnaît ici dans le terme  $\prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)$  un déterminant de Vandermonde, que l'on écrit

$$\Delta_N(\lambda) := \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) = \det_{1 \leq i, j \leq N} (\lambda_i^{j-1}), \quad (1.18)$$

ou  $\Delta(\lambda)$  s'il n'y a pas de confusion possible.

Nous cherchons à calculer différents moments pour un poids d'intégration choisi comme  $e^{-N \text{Tr}[V(M)]}$  où  $V$  est un potentiel polynomial. On pourra également remplacer le préfacteur  $N$  dans l'exponentiel par  $\frac{1}{\hbar}$ , où  $N\hbar \in \mathcal{O}(1)$  est appelé le paramètre de t'Hooft. Dans cette écriture, on prendra aussi  $\hbar = 1$ , ce qui correspond de façon équivalente à absorber le facteur  $\hbar^{-1}$  dans l'expression de  $V$ . On prendra souvent le **potentiel gaussien**  $V(M) = \frac{M^2}{2}$ .

On définit donc la **fonction de partition**

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_N(V) &= \frac{1}{N! \sqrt{(\frac{\pi}{N})^{N^2} 2^N}} \int_{H_N} dM e^{-N \text{Tr}[V(M)]} \\ &= \frac{1}{N!} \frac{\text{Vol } U(N)}{\text{Vol } U(1)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda)^2 e^{-N \text{Tr}[V(\lambda)]} \prod_{i=1}^N d\lambda_i \end{aligned} \quad (1.19)$$

dont on négligera généralement d'écrire le préfacteur. Pour le potentiel gaussien, on a :

$$\frac{N! \text{Vol } U(1)^N}{\text{Vol } U(N)} \mathcal{Z}_N(V) = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(\lambda)^2 \prod_{i=1}^N e^{-\frac{N}{2} \lambda_i^2} d\lambda_i. \quad (1.20)$$

On s'intéressera au calcul des fonctions de corrélation

$$\left\langle \text{Tr}[M^{k_1}] \dots \text{Tr}[M^{k_n}] \right\rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_N(V)} \int \text{Tr}[M^{k_1}] \dots \text{Tr}[M^{k_n}] e^{-N \text{Tr}[V(M)]} dM. \quad (1.21)$$

### 1.2.2 Équations de boucles

Afin de simplifier les calculs, commençons par considérer l'espérance  $\langle \text{Tr}[M^k] \rangle = \langle \sum_j \lambda_j^k \rangle = \sum_j \langle \lambda_j^k \rangle$ . On écrit le potentiel

$$V(\lambda) = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{t_k}{k} \lambda^k; \quad V'(\lambda) = \sum_{k=0}^d t_{k+1} \lambda^k. \quad (1.22)$$

En décomposant la somme sur les valeurs propres et en dérivant dans l'intégrale, on a par nullité de l'intégrale d'une dérivée totale :

$$\sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} \left( \lambda_j^k \Delta(\lambda)^2 \prod_i e^{-NV(\lambda_i)} \right) \prod_i d\lambda_i = 0. \quad (1.23)$$

En faisant agir la dérivée sur les termes de l'intégrande, la relation se réécrit :

$$\sum_j \left( k \langle \lambda_j^{k-1} \rangle - N \langle V'(\lambda_j) \lambda_j^k \rangle + 2 \sum_{\ell \neq j} \left\langle \frac{\lambda_j^k}{\lambda_j - \lambda_\ell} \right\rangle \right) = 0. \quad (1.24)$$

La dernière somme peut se développer en

$$2 \sum_j \sum_{\ell \neq j} \frac{\lambda_j^k}{\lambda_j - \lambda_\ell} = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_j \lambda_j^m \sum_{\ell} \lambda_\ell^{k-1-m} - k \sum_j \lambda_j^{k-1}, \quad (1.25)$$

et on en déduit l'équation de boucle

$$N \langle \text{Tr} [M^k V'(M)] \rangle = 2 \sum_{m=0}^{k-1} \langle \text{Tr} [M^m] \text{Tr} [M^{k-1-m}] \rangle. \quad (1.26)$$

En suivant le même raisonnement, on peut obtenir pour les fonctions de corrélation à  $n$  points :

$$\begin{aligned} N \langle \text{Tr} [M^{k_1} V'(M)] \text{Tr} [M^{k_2}] \dots \text{Tr} [M^{k_n}] \rangle \\ = 2 \sum_{m=0}^{k_1-1} \langle \text{Tr} [M^m] \text{Tr} [M^{k_1-1-m}] \text{Tr} [M^{k_2}] \dots \text{Tr} [M^{k_n}] \rangle \\ + \sum_{\ell=2}^n k_\ell \langle \text{Tr} [M^{k_1}] \dots \text{Tr} [M^{k_\ell+k_1-1}] \dots \text{Tr} [M^{k_n}] \rangle. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Pour  $n$  opérateurs  $A_1, \dots, A_n$ , on peut plutôt définir la **valeur moyenne connexe**  $\langle A_1 \dots A_n \rangle_c$ , ou **cumulant**, de leur produit, par  $\langle A \rangle_c = \langle A \rangle$  et

$$\langle A_1 \dots A_n \rangle = \sum_{\coprod_{a=1}^n I_a = [1, n]} \langle A_{I_1} \rangle_c \dots \langle A_{I_k} \rangle_c, \quad (1.28)$$

d'où par exemple  $\langle AB \rangle_c = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$ .

Avec le potentiel quadratique  $V(M) = \frac{M^2}{2}$ , les équations de boucle donnent pour les cumulants  $\langle \text{Tr} [M^{k_1}] \dots \text{Tr} [M^{k_n}] \rangle$  les mêmes équations de récurrence que pour

$$C_{\bullet, n} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{\chi_{g,n}} C_{g,n}(k_1, \dots, k_n) \quad (1.29)$$

avec  $C_{g,n}(k_1, \dots, k_n)$  les nombres de Catalan généralisés et  $\chi_{g,n} = 2 - 2g - n$  la caractéristique d'Euler.

### 1.2.3 Formules déterminantales pour les densités de valeurs propres

Intéressons-nous maintenant aux densités de valeurs propres

$$\rho_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\mathcal{Z}_N(V)} \Delta(x)^2 \prod_{i=1}^N e^{-V(x_i)}, \quad (1.30)$$

avec  $\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \int \rho_N(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N$ , qui à une normalisation près représente la probabilité que les  $(x_i)_i$  soient valeurs propres.

Le déterminant  $\Delta(\lambda) = \det_{i,j}(\lambda_i^{j-1})$  étant invariant par combinaisons linéaires de lignes, on peut choisir des polynômes  $(p_i)_{0 \leq i \leq N-1}$  moniques avec  $\deg p_i = i$ , soit  $p_i(\lambda) = \lambda^i + \dots$ , et on a  $\Delta(\lambda) = \det_{i,j}(p_{j-1}(\lambda_i))$ . On introduit sur  $\mathbb{C}[\lambda]$  le produit scalaire

$$\langle p, q \rangle = \int e^{-V(\lambda)} p(\lambda) q(\lambda) d\lambda \quad (1.31)$$

et, en choisissant les familles  $p_\bullet$  et  $\tilde{p}_\bullet$  pour les deux déterminants de  $\Delta(\lambda)^2$ , on peut écrire

$$\mathcal{Z}_N(V) = \det_{1 \leq i,j \leq N} \langle p_{i-1}, \tilde{p}_{j-1} \rangle. \quad (1.32)$$

Si on prend  $p_i = \tilde{p}_i$  dans une famille orthogonale :  $\langle p_i, p_j \rangle = h_i \delta_{i,j}$ , alors  $\mathcal{Z}_N(V) = \prod_i h_i$ . La détermination des polynômes orthogonaux nous amène dans le domaine des systèmes intégrables, et est donc laissée à la section 5.1.

Soit  $H_{i,j} := \langle p_i, \tilde{p}_j \rangle$  la matrice des produits scalaires. On introduit le noyau

$$K_N(x, x') = \sum_{i,j=0}^{N-1} p_i(x) \left( H^{-1} \right)_{j,i} \tilde{p}_j(x') e^{-V(x)/2} e^{-V(x')/2}. \quad (1.33)$$

On peut alors montrer par récurrence décroissante sur  $k$  le **théorème de Dyson–Mehta** :

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{(N-k)!}{N!} \det_{1 \leq i,j \leq k} K_N(x_i, x_j). \quad (1.34)$$

Connaissant les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , on peut également définir la densité

$$\rho_N(x) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - \lambda_i) \right\rangle \quad (1.35)$$

et sa limite  $y(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(x)$ . Il existe alors[EKR15] un polynôme  $P(X, Y)$  donnant une relation  $P(x, y(x)) = 0$ . La courbe algébrique  $P(x, y) = 0$  décrit le spectre de la matrice  $M$  dans la limite de grande taille, et on l'appelle donc la **courbe spectrale** du modèle de matrices.

## Chapitre 2

# Théorie des cordes topologique et géométrie énumérative

### 2.1 Surfaces de Riemann et sigma-modèles topologiques

Les courbes complexes interviennent naturellement en Physique des hautes énergies par le biais de la théorie des cordes, qui est une théorie des champs en deux dimensions. Une **surface de Riemann**, ou courbe complexe, est une **variété différentiable** (un espace localement difféomorphe à l'espace euclidien, *i.e.* dont tout point admet un voisinage paramétré par des vecteurs de l'espace euclidien) de dimension 2, dont les coordonnées peuvent s'assembler en une coordonnée complexe. En notant  $\mathcal{M}$  la variété  $D$ -dimensionnelle représentant l'espace-temps et  $\Sigma$  la feuille d'univers de la corde (le cylindre  $\mathbb{R} \times [0, \pi]$  contenant ses coordonnées propres  $\tau \in \mathbb{R}, \sigma \in [0, \pi]$ ), la propagation d'une corde (bosonique) fermée est donnée dans la formulation classique par un plongement  $\chi: \Sigma \rightarrow \mathcal{M}$ , soit localement par  $D$  fonctions  $\chi^\mu: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que  $\chi^\mu(\tau, 0) = \chi^\mu(\tau, \pi)$ . On parle de  $\sigma$ -modèle non-linéaire, une théorie des champs à valeurs dans une variété différentiable.

La surface de Riemann ici considérée, jouant le rôle de la feuille d'univers (en lui ajoutant deux trous pour les cordes entrante et sortante), est la **sphère de Riemann**  $\overline{\mathbb{C}}$ , qui admet différentes descriptions.

- Topologiquement, il s'agit simplement de la 2-sphère  $S^2$ .
- On peut également la voir comme la compactification  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  du plan complexe, obtenue en lui ajoutant un point à l'infini.
- Finalement, c'est aussi la ligne projective complexe  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , définie comme l'ensemble des directions (c'est-à-dire des lignes passant par l'origine) dans  $\mathbb{C}^2$ , et construite en identifiant tous les points de  $\mathbb{C}^2$  qui diffèrent par multiplication par un scalaire non nul : en écrivant  $(z_0 : z_1)$  pour le point de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  correspondant au vecteur  $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$ , on a  $(z_0 : z_1) = (\lambda z_0 : \lambda z_1)$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

On peut relier ces deux dernières caractérisations en utilisant le plongement  $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1, z \mapsto (z : 1)$  et en posant  $\infty = (1 : 0)$ . En considérant 0 et  $\infty$  comme les pôles nord et sud de la sphère, on peut paramétrer les points de l'hémisphère sud  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0\} = \{(z_0 : z_1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \mid z_0 \neq 0\}$  avec la coordonnée  $z_S = z_1/z_0$  et ceux de l'hémisphère nord  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{\infty\} = \{(z_0 : z_1) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \mid z_1 \neq 0\}$  avec  $z_N = z_0/z_1$  ; sur l'intersection  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, \infty\}$ , la fonction de transition est  $z_N = 1/z_S, z_S = 1/z_N$ .

La topologie (uniquement, mais pas *e.g.* la structure complexe) des autres surfaces de Riemann compactes, est entièrement caractérisée, une orientation étant fixée, par leur **genre**  $g \in \mathbb{N}$ , que l'on peut voir comme le nombre de « poignées » (de trous « extérieurs ») de la surface. La surface de genre 0 est la sphère, celle de genre 1 le tore et on parle ensuite de tore à  $g$  poignées. On notera souvent  $\Sigma_g$  la surface de genre  $g$ . On peut distinguer plus encore les surfaces de Riemann en leur ajoutant des **points marqués**, un choix de  $n$  points que l'on considère fixés, ou qui de façon équivalente sont retirés de la surface, lui laissant simplement des trous avec bords. En particulier, la surface d'univers de la corde classique est une surface de genre 0 munie de 2 points marqués d'orientations opposées, qui représentent les états entrant et sortant.

Les surfaces de Riemann de genre supérieur apparaissent dans la formulation quantique de la théorie des cordes. En effet, on peut voir une surface de Riemann comme un diagramme de Feynmann avec une épaisseur ; plus précisément les  $g$  trous correspondent physiquement à  $g$  interactions dans lesquelles la corde se sépare puis se recolle, et les  $n$  points marqués peuvent correspondre à une corde entrante dans l'état initial et  $n-1$  cordes sortantes dans l'état final. Il s'agit alors, pour obtenir la fonction de partition topologique, de sommer sur les genres possibles :

$$\mathcal{Z} := \int d\Sigma e^{-S(\Sigma)} = \sum_{g \geq 0} \int d\Sigma_g e^{-S(\Sigma_g)}. \quad (2.1)$$

Pour calculer les intégrales de chemin de propagation de cordes dans l'espace-temps, on considère l'ensemble des plongements  $\Sigma \rightarrow X$  où  $\Sigma$  est la surface d'univers d'une corde et  $X$  est généralement décomposé, pour les supercordes, comme le superspace de partie bosonique  $X = \mathcal{M}_{1|3} \times \mathcal{CY}_3$  où l'espace « externe »  $\mathcal{M}_{1|3}$  est un espace de Minkowski étendu, et l'espace « interne »  $\mathcal{CY}_3$  est une variété dite de Calabi–Yau (de fibré canonique trivial, *c.f.* sous-section A.5.3) de dimension complexe 3. L'espace interne  $\mathcal{CY}_3$  est généralement pris compact, avec une longueur caractéristique de l'ordre de la constante de Planck, donc le spectre en énergie des états  $y$  est discret et plus important que dans l'espace étendu. À basse énergie, seul le plongement dans l'espace interne peut être considéré, la propagation dans l'espace externe donnant simplement des ondes planes. On parle dans ce cas de théorie topologique des cordes.

Le cas le plus simple de tels plongements est celui où la variété de Calabi–Yau est de dimension 0, c'est-à-dire un point : la théorie revient à un couplage avec la gravité seule sur la surface d'univers. L'intégration se fait alors sur l'ensemble des structures complexes de la surface d'univers, soit sur l'espace de modules des courbes complexes de même topologie.

## 2.2 Géométrie énumérative et théorie de l'intersection sur l'espace de modules des courbes

### 2.2.1 Espace de modules des courbes stables

Afin de pouvoir calculer les intégrales de chemin du  $\sigma$ -modèle topologique, il faut bénéficier d'un espace d'intégration et d'une forme volume à  $y$  intégrer. On s'intéresse donc à l'**espace de modules**  $\mathcal{M}_{g,n}$  des courbes de genre  $g$  à  $n$  points marqués. Il s'agit de l'espace paramétrant ces courbes à isomorphismes près, c'est-à-dire que l'on considère chaque point de  $\mathcal{M}_{g,n}$  comme une classe d'isomorphisme de courbes et qu'il existe une

famille  $\mathcal{U}_{g,n} \xrightarrow{\tau} \mathcal{M}_{g,n}$  telle que, sur chaque point  $[C] \in \mathcal{M}_{g,n}$  représentant la courbe  $C$  (munie des points marqués  $p_1, \dots, p_n$  sous-entendus dans l'écriture), la fibre  $\tau^{-1}([C]) \subset \mathcal{U}_{g,n}$  soit (isomorphe à) la courbe  $C$  elle-même : on parle donc de courbe tautologique. Il s'agit en outre d'une famille universelle au sens où toute autre famille de courbes de genre  $g$  à  $n$  points marqués sur un espace base quelconque est obtenue à partir de  $\mathcal{U}_{g,n}$  selon un changement de base unique.

Cependant, les espaces  $\mathcal{M}_{g,n}$  ont l'inconvénient de ne pas être compacts ; par exemple l'espace de modules  $\mathcal{M}_{0,4}$  des sphères avec quatre points marqués est  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\} \cong \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ . Afin de pouvoir intégrer des formes, il faut donc considérer une compactification de  $\mathcal{M}_{g,n}$ . On utilise généralement la compactification de Deligne–Mumford  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ , l'espace de modules des courbes dites **stables**. Une courbe stable de genre  $g$  à  $n$  points marqués est une courbe qui peut être constituée de plusieurs composantes reliées par des points nodaux (distincts des  $n$  points marqués), qui est de genre  $g$ , et en appelant points spéciaux les nodes et les points marqués, telle que chaque composante de genre 0 (resp. 1) ait au moins 3 (resp. 1) point(s) marqué(s). Un exemple est représenté sur la Figure 2.1. Ces courbes sont appelées stables car leur groupe d'automorphismes est fini, contrairement aux courbes instables dont le groupe d'automorphismes est nécessairement infini.

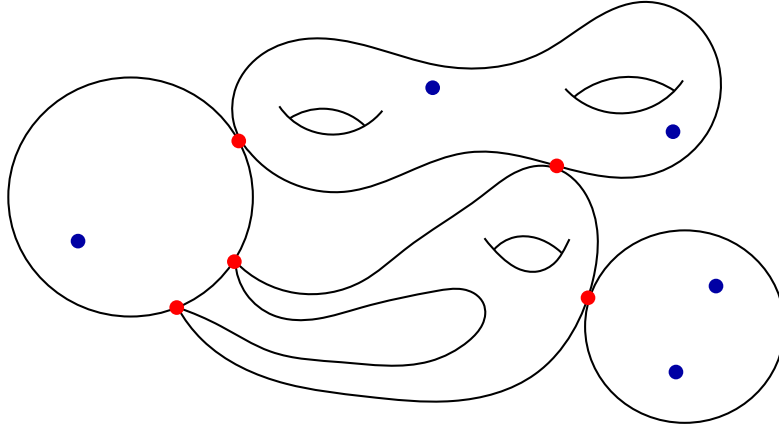


FIGURE 2.1 – Courbe stable de genre 5 avec 5 points marqués (en bleu, les nodes étant en rouge)

L'espace  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est de dimension complexe  $d_{g,n} := 3g - 3 + n$ , ce qui revient à dire qu'une courbe stable est paramétrée par  $d_{g,n}$  modules complexes selon la terminologie de Riemann. Cependant, il n'est pas une variété lisse mais un champ de Deligne–Mumford, pouvant être présenté par une **orbivariété** (ou orbifolde), un espace singulier dont les singularités sont limitées au quotient d'une variété par l'action d'un groupe fini. Ainsi, les points fixés par un sous-groupe de l'action, appelé leur groupe d'isotropie, donnent des points dits orbifolds ou champêtres de l'orbivariété, qui se doivent d'être considérés comme des points « fractionnaires » coefficientés de l'inverse du cardinal de leur groupe d'isotropie :  $\frac{1}{|\text{Aut}(x)|}[x]$ .

### 2.2.2 Couplage avec les classes de Chern

Le calcul des intégrales de chemin de cordes topologiques peut donc se ramener à un décompte de points d'un espace de modules, c'est-à-dire à un problème de géomé-



trie énumérative. Le problème physique est le dénombrement des surfaces d'univers respectant certaines conditions limites. Fixer une condition sur les courbes étudiées revient à sélectionner un sous-espace de l'espace de modules, et la géométrie énumérative consiste donc à calculer les intersections dans  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Pour cela, nous aurons besoin de certains fibrés vectoriels (association lisse de copies d'un certain espace vectoriel au-dessus de chaque point de l'espace de base) sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ .

Les points marqués  $p_i, 1 \leq i \leq n$  d'une courbe  $\Sigma \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  étant par hypothèse distincts des points nodaux, ils sont en particulier lisses et admettent donc des espaces tangents  $T_{p_i}\Sigma$ , espaces des vitesses de courbes passant par  $p_i$  (c.f. sous-section A.2.1), qui sont des espaces vectoriels complexes de dimension  $1 = \dim_{\mathbb{C}} \Sigma$ . Pour  $1 \leq i \leq n$ , on peut donc définir un fibré en droites holomorphe  $\mathcal{L}_i \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  en posant que la fibre au-dessus de  $\Sigma \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  est l'espace cotangent  $T_{p_i}^\vee \Sigma$ , l'espace dual  $(T_{p_i} \Sigma)^\vee$ .

La théorie de l'intersection d'une variété  $X$  de dimension  $d$ , ou celle d'une orbivariété, est étudiée à l'aide de la cohomologie de ses fibrés vectoriels (pour tout fibré  $E \xrightarrow{\pi} X$ , nous noterons  $\Gamma(X, E)$  l'ensemble des **sections** de  $\pi$ , les fonctions associant à tout  $x \in X$  un élément de la fibre  $E_x = \pi^{-1}(x)$  au-dessus de  $x$ ). En effet, une sous-variété fermée  $Z \subset X$  de dimension  $m$  (et codimension  $d - m$ ) et de bord  $\partial Z$  vide (on parle de **cycle**) définit une classe dans le  $m$ -ième groupe d'homologie  $H_m(X, \mathbb{Z})$ , constitué des classes de cycles modulo les bords (c.f. sous-section A.4.2), c'est-à-dire :

$$[Z] = Z \mod \partial C_{m+1}(X, \mathbb{Z}) = \{Z + \partial Y \mid Y \in C_{m+1}(X, \mathbb{Z})\} \in H_m(X, \mathbb{Z}) \quad (2.2)$$

où  $C_{m+1}(X, \mathbb{Z})$  est le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés de  $X$  de dimension  $m + 1$ , c'est-à-dire le groupe des sommes formelles de telles sous-variétés avec coefficients entiers (ou rationnels dans le cas orbifold).

À l'inverse, on considère le fibré cotangent  $T^\vee X$ , de fibres engendrées par les 1-formes différentielles  $dx^i$ , les dérivées des fonctions coordonnées  $x^i$ . On peut prendre des produits tensoriels antisymétrisés de 1-formes,  $\omega \wedge \eta := \omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega$ , pour obtenir des  $k$ -formes  $\frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . On a un espace  $\bigwedge^k T_x^\vee X$ , de dimension  $\binom{d}{k}$ , des  $k$ -formes en  $x$ , ainsi qu'un espace  $\Omega^k(X) := \Gamma(X, \bigwedge^k T^\vee X)$  des champs de  $k$ -formes. La dérivée des fonctions s'étend à une **dérivée extérieure**  $d: \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X)$ ,  $\omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \mapsto \partial_j \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ .

L'opérateur  $d$  est nilpotent,  $d^2 = 0$ , et on définit de la même façon que pour l'homologie le groupe de cohomologie  $H^k(X) = \ker d \mod d\Omega^{k-1}(X)$ , des formes de dérivée nulle modulo les différentielles exactes. Les  $k$ -formes peuvent être intégrées sur les sous-variétés de dimension  $k$ , et l'intégration définit (en restreignant les formes au réseau entier  $H^k(X, \mathbb{Z}) \subset H^k(X)$ ) un accouplement  $\int: H_k(X, \mathbb{Z}) \times H^k(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ , qui exhibe  $H^k(X, \mathbb{Z}) \cong (H_k(X, \mathbb{Z}))^\vee$ .

Il existe également un isomorphisme de dualité de Poincaré  $H^k(X, \mathbb{Z}) \cong H_{d-k}(X, \mathbb{Z})$  faisant correspondre les  $k$ -formes et les sous-variétés de codimension  $k$ . Dans ce cas, l'évaluation par intégration devient un produit d'intersection entre deux sous-variétés de codimensions  $d - k$  et  $k$ , qui donne une sous-variété de codimension  $d - k + k = d$ , i.e. de dimension 0, avec  $H_0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  (si  $X$  est connexe).

Tout fibré vectoriel holomorphe  $E$  sur une variété  $B$  admet un invariant topologique appelé sa première classe de Chern et noté  $c_1(E) \in H^2(B, \mathbb{Z})$  (ou  $H^2(B, \mathbb{Q})$  dans le cas orbifold). Pour construire les classes de Chern  $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(B, \mathbb{Z})$  d'un fibré en droites complexes  $\mathcal{L}$ , on munit  $\mathcal{L}$  d'une **connexion**, un champ de covecteurs  $\mathcal{A}_\mu(x)$  permettant de relier les différentes fibres afin de dériver de façon covariante les sections  $\sigma: B \ni x \mapsto \sigma(x) \in \mathcal{L}_x$  selon  $\mathcal{D}_\mu \sigma = \partial_\mu \sigma + \mathcal{A}_\mu \sigma$ . On peut alors définir la courbure  $\mathcal{F}_{\mu\nu} =$

$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ , qui est une 2-forme. Alors  $c_1(\mathcal{L}) := [\frac{1}{2i\pi} \mathcal{F}_{\mu\nu}] \in H^2(B, \mathbb{Z})$ , et la classe de cohomologie est indépendante du choix de la connexion : il s'agit d'une **classe caractéristique** du fibré.

Afin d'étudier la théorie de l'intersection de l'espace de modules des courbes, nous considérons les classes psi

$$\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i) \quad (2.3)$$

sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Elles correspondent par dualité de Poincaré à des sous-variétés de codimension complexe 1 de  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ . Comme les sections considérées pour la construction de  $\psi_i$  sont inversibles, on peut en normalisant réduire leurs valeurs de  $\mathbb{C}^\times$  à  $U(1)$  (c'est pour cela que les puissances de  $\mathbb{C}^\times$  sont appelées des tores algébriques). On se ramène donc à une connexion  $U(1)$  sur un fibré en cercles, c'est-à-dire un champ de jauge  $U(1)$  ou photon, et la classe de Chern est donc la classe de cohomologie d'un champ électromagnétique.

Le **nombre d'intersection de Kontsevich–Witten** est la fonction de corrélation [Wit91]

$$\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} \rangle_g = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{\wedge d_1} \wedge \cdots \wedge \psi_n^{\wedge d_n}, \quad (2.4)$$

qui est non nulle seulement si  $\deg \bigwedge_i \psi_i^{\wedge d_i} = \dim_{\mathbb{R}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  soit, les  $\psi_\bullet$  étant les classes de 2-formes,  $\sum_{i=1}^n d_i = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = d_{g,n} = 3g - 3 + n$ .

## 2.3 Gravité quantique topologique bidimensionnelle et nombres d'intersection de Kontsevich–Witten

### 2.3.1 Développement combinatoire des fonctions de corrélation

Les nombres d'intersection peuvent être calculés de manière combinatoire [Kon92] comme une somme sur des graphes mesurés. Ces graphes apparaissent comme les trajectoires horizontales (les lignes de parties imaginaires constantes) de certains opérateurs, les différentielles quadratiques de Strebel.

Une **différentielle quadratique** sur une surface de Riemann  $\Sigma$  est une 2-forme symétrique  $\Omega(z) = \underline{\Omega}(z) dz^{\otimes 2}$ . On peut en tirer la fonction  $f: z \mapsto \int_{\bullet}^z \sqrt{\Omega}$  en intégrant hors des zéros et pôles de  $\Omega$ . Une trajectoire horizontale de  $\Omega$  est une courbe sur laquelle  $\Im[f]$  reste constante. Autour d'un pôle, les trajectoires horizontales sont des cercles, et à un zéro simple elles se séparent en trois lignes.

Augmentons l'espace de modules des courbes  $\mathcal{M}_{g,n}$  en ajoutant à chaque point marqué  $p_i$  le choix d'une « longueur »  $L_i \in \mathbb{R}_+$ . Cela nous donne un espace de modules  $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} = \{\Sigma_g, \{p_i\}, \{L_i\}\} / \text{Aut}_{p_i}(\Sigma_g) \cong \mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n$ . Nous nous intéressons alors, pour une courbe décorée dans  $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ , aux différentielles quadratiques ayant à chaque point marqué  $p_i$  un pôle double avec résidu  $-L_i^2$  (et pas d'autre pôle).

Les trajectoires horizontales forment des cercles autour des pôles, ainsi que des lacets non contractiles, par exemple entourant (si  $g > 1$ ) les poignées de la surface, les différentes trajectoires étant séparées par les lignes critiques qui émanent des zéros de la différentielle, comme illustré sur la Figure 2.2 pour le cas de la courbe elliptique  $\in \mathcal{M}_{1,1}$ . Ces lignes critiques forment un graphe en rubans mesuré sur la surface. On appelle différentielle de Strebel une différentielle quadratique n'ayant pas de trajectoire horizontale non contractile ; par le **théorème de Strebel**, pour toute surface décorée de  $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ , il existe une unique différentielle de Strebel ayant les pôles prescrits.

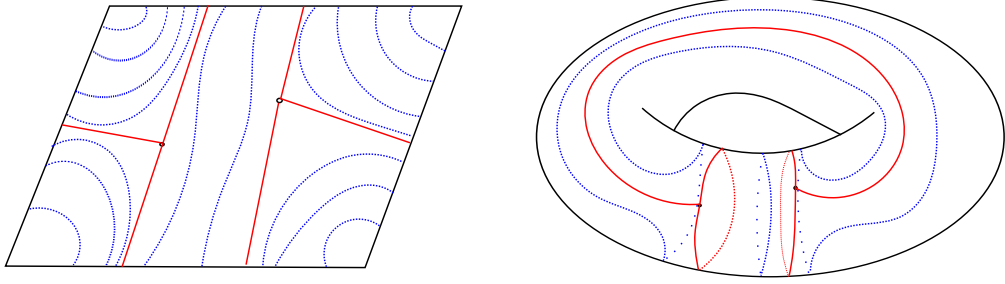


FIGURE 2.2 – Trajectoires horizontales et critique sur une courbe elliptique

À toute surface de genre  $g$  à  $n$  points marqués à laquelle on ajoute la donnée des  $n$  longueurs, on peut donc faire correspondre de façon biunivoque un graphe en rubans mesuré. En d'autres termes, en notant  $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$  l'espace de modules de ces graphes, on a un isomorphisme  $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} \cong \mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$ .

Par construction, les graphes ont une face pour chaque point marqué  $p_i$  de la surface correspondante, et le périmètre de la face est  $L_i$ . Par un calcul de caractéristique d'Euler, on peut montrer que les graphes de  $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$  ont  $2d_{g,n} + n$  arêtes, ce qui est bien la dimension (réelle) de  $\mathcal{M}_{g,n} \times \mathbb{R}_+^n = \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ . On peut utiliser comme coordonnées sur  $\mathcal{M}_{g,n}^{\text{comb}}$  les longueurs  $\ell_i$  des arêtes. On a la relation  $L_i = \sum_{e \text{ autour de } i} \ell_e$ , en comptant les arêtes avec multiplicité.

Nous décrivons le calcul de la classe de Chern sur  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$ , qui se généralise directement pour les autres espaces. Sur une courbe  $(\Sigma, p_1, L_1) \in \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ , le graphe correspondant a la forme indiquée en Figure 2.3, avec  $L_1 = 2\ell_1 + 2\ell_2 + 2\ell_3$ . La surface peut être découpée selon le graphe pour obtenir le polygone de la Figure 2.3, qui redonne le tore décoré en recollant (*i.e.* en identifiant) les côtés opposés. Remarquons que le graphe exhibe une symétrie par  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(6)$ , et aura donc un facteur  $\frac{1}{6}$  dans l'orbivariété  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$ . Nous cherchons à exprimer la classe de Chern d'un fibré en cercles  $\widetilde{\mathcal{L}}_1$  sur  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$ ; identifions le cercle fibre en  $(\Sigma, p_1, L_1)$  avec l'hexagone obtenu.

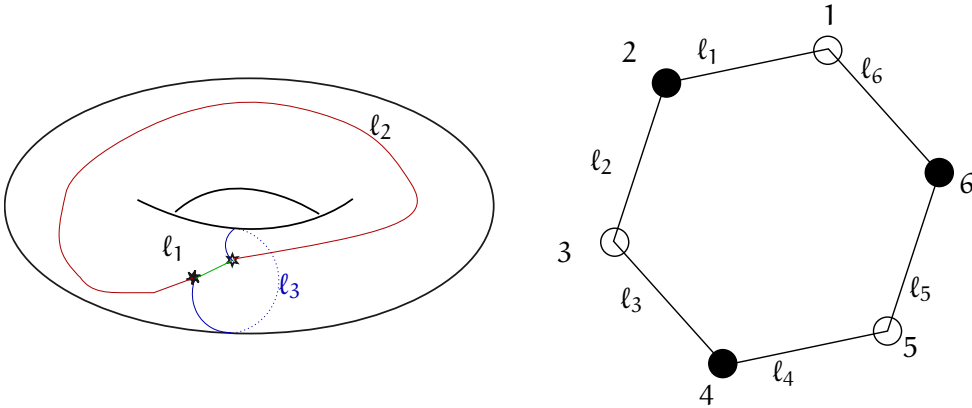


FIGURE 2.3 – Graphe à un point marqué : les points de même couleur sont identifiés, ce qui permet de recoller les faces opposées (de même longueur)

Le choix d'une valeur d'une section du fibré en cercles correspond à celui d'un point dans le graphe. Fixons un point de base parmi les sommets du graphe décomposé, par

exemple de telle sorte que le point marqué pour la section soit sur l'arête entre le dernier et celui numéroté 1. En notant  $\phi_j$  la distance entre le point distingué et le sommet  $j$  selon l'orientation induite par la numérotation, on a  $\phi_j = \phi_1 + \sum_{1 < k < j} \ell_k$  et on peut donc utiliser  $\phi_1$  comme coordonnées sur une fibre. Cependant, la définition de  $\phi_1$  demande un choix arbitraire de numérotation et ne peut donc pas être étendu au fibré, et nous utilisons plutôt une combinaison symétrique pour définir la 1-forme

$$\alpha_1 = \sum_{\substack{e \text{ arête} \\ \text{autour de } p_1}} \frac{\ell_e}{L_1} d\frac{\phi_e}{L_1} \quad (2.5)$$

donnant la classe de Chern

$$\psi_1 = c_1(\widetilde{\mathcal{L}}_1) = d\alpha_1 = \sum_e \sum_{e' < e} d\left(\frac{\ell_e}{L_1}\right) \wedge d\left(\frac{\ell_{e'}}{L_1}\right). \quad (2.6)$$

Cette définition se généralise immédiatement au cas général avec  $\psi_i = d\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

L'intégrale immédiate sur  $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$  de la classe pour la courbe elliptique (ainsi que dans le cas général) diverge, et on calcule donc plutôt la transformée de Laplace

$$\int_{\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}} L_1^2 \psi_1 \wedge e^{-\lambda L_1} dL_1 = \int_{\mathcal{M}_{1,1}} \psi_1 \int_{\mathbb{R}_+} L_1^2 e^{-\lambda L_1} dL_1 = \frac{2\langle \tau_1 \rangle_1}{\lambda^3}, \quad (2.7)$$

ou dans le cas général

$$\int_{\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}} \bigwedge_{i=1}^n \frac{(L_i^2 \psi_i)^{\wedge d_i}}{2^{d_i} d_i!} \bigwedge_{i=1}^n e^{-\lambda_i L_i} dL_i = \left\langle \prod_{i=1}^n \tau_{d_i} \right\rangle_g \cdot \prod_{i=1}^n \frac{(2d_i - 1)!!}{\lambda_i^{2d_i+1}}. \quad (2.8)$$

On peut alors utiliser l'isomorphisme avec l'espace de modules de graphes pour calculer complètement l'intégrale en fonction de  $\lambda$  (ou des  $\lambda_i$ ), et lire la valeur des nombres d'intersection par comparaison, c'est-à-dire ici

$$\frac{1}{12} \frac{1}{\lambda^3} = \frac{2\langle \tau_1 \rangle_1}{\lambda^3}. \quad (2.9)$$

De façon générale, on obtient

$$\sum_{d_1, \dots, d_n} \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle_g \cdot \left( \prod_{i=1}^n \frac{(2d_i - 1)!!}{\lambda_i^{2d_i+1}} \right) = \frac{1}{d_{g,n}!} 2^{d_{g,n} - \chi_{g,n}} \sum_{G \text{ graphe}} \frac{1}{\text{Aut } G} \prod_e \frac{1}{\lambda_{e_+} + \lambda_{e_-}}, \quad (2.10)$$

où  $\lambda_{e_{\pm}}$  indiquent les variables de Laplace  $\lambda_i$  associées aux deux faces adjacentes à l'arête  $e$ .

### 2.3.2 Le modèle B

La courbe d'Airy est définie par le polynôme  $P(x, y) = y^2 - x$ . On peut donc paramétrer la courbe spectrale avec les fonctions  $x: z \mapsto z^2$  et  $y: z \mapsto z$ . La fonction  $x$  a un point de branchement en 0 et on a l'involution locale  $z \mapsto -z$ , qui laisse bien  $x$  invariante. On définit alors, en reproduisant (1.14), les formes  $\omega_{0,1} = y dx$  et  $\omega_{0,2}(z_1, z_2) = \frac{dz_1 dz_2}{(z_1 - z_2)^2}$ , le noyau de récurrence  $K(z_1, z) = \frac{dz_1}{4(z_1^2 - z^2)z dz}$ , et les autres invariants  $\omega_{g,n}$  de la récurrence topologique.

Définissons ensuite les fonctions d'onde

$$\Psi_{\pm}(x) = \exp \left( \sum_{g,n} \frac{\hbar^{2g-2+n}}{n!} (\pm 1)^n F_{g,n}(\sqrt{x}, \dots, \sqrt{x}) \right) \quad (2.11)$$

où  $F_{g,n}$  est une primitive de  $\omega_{g,n}$ , soit  $\int_{\infty}^{z_1} \dots \int_{\infty}^{z_n} \omega_{g,n} = F_{g,n}$ . Les invariants  $\omega_{g,n}$  de la courbe d'Airy étant des fractions rationnelles impaires avec tous leurs pôles en 0, on peut écrire

$$F_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = 2^{X_{g,n}} \sum_{d_1, \dots, d_n} C_{g,n}(d_1, \dots, d_n) \prod_{i=1}^n \frac{(2d_i - 1)!!}{z_i^{2d_i - 1}} \quad (2.12)$$

pour certains coefficients  $C_{g,n}(d_1, \dots, d_n)$ .

On peut regrouper les termes de la somme dans l'exponentielle par « caractéristique d'Euler » afin d'obtenir un développement en puissances de  $\hbar$ . Les termes semi-classiques en  $\hbar^{-1}$  et  $\hbar^0$  sont donnés à partir des invariants  $\omega_{0,1}$  et  $\omega_{0,2}$ , qui du point de vue de la géométrie énumérative sont instables. Pour la première correction quantique en  $\hbar^1$ , on obtient

$$F_{1,1}(z) + \frac{1}{6} F_{0,3}(z, z, z) = \frac{1}{z^3} \left( \frac{1}{48} + \frac{4}{48} \right), \quad (2.13)$$

où l'on reconnaît en particulier dans le premier terme l'invariant  $2^{X_{1,1}} \langle \tau_1 \rangle_1 = \frac{1}{2 \times 24}$ . De façon générale, nous verrons dans la sous-section 3.2.4 que les coefficients  $C_{g,n}(d_1, \dots, d_n)$  calculent les nombres d'intersection  $\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle_g$ .

## Chapitre 3

# Courbes spectrales et récurrence topologique

### 3.1 Invariants de la récurrence topologique

#### 3.1.1 Surfaces de Riemann et courbes spectrales

Nous allons définir de façon universelle une suite d'invariants donnés par une formule de récursion topologique similaire à (1.10). Cette définition doit être universelle au sens où elle donne des invariants pour toute courbe spectrale. Commençons donc par définir les courbes spectrales.

Considérons donc une surface de Riemann  $\Sigma$ . On se donne deux fonctions holomorphes  $x, y: \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ . La courbe complexe  $\Sigma$  étant de dimension 1, toute paire de fonctions méromorphes est reliée par une relation algébrique, et il existe donc un polynôme  $P \in \mathbb{C}[x, y]$  tel que  $P(x, y) = 0$ , c'est-à-dire  $\forall z \in \Sigma, P(x(z), y(z)) = 0$ . La fonction  $\iota := (x, y)$  donne alors un plongement de  $\Sigma$  dans le plan  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  dont l'image est la courbe algébrique découpée par  $P$  :

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \supset \text{im } \iota = V(P) =: \{(X, Y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid P(X, Y) = 0\}. \quad (3.1)$$

Les courbes sont définies modulo les reparamétrisations, c'est-à-dire la précomposition de  $x$  et  $y$  par un automorphisme de  $\Sigma$ .

On choisit de considérer  $x$  comme la fonction donnant une bonne paramétrisation vis-à-vis de  $z$ . Comme  $x$  est une fonction holomorphe, il s'agit d'un revêtement de  $\mathbb{C}$  à  $r$  feuillets ( $r > 1$ ), c'est-à-dire qu'un point générique  $(X, Y) \in \iota(\Sigma)$  admet  $r$  antécédents  $z$  par  $x$ , différant par leurs valeurs de  $y$ . Les points  $a \in \Sigma$  où  $\partial_z x(a) = 0$  sont appelés les **points de branchement** du revêtement, auxquels les feuillets se rejoignent. Nous considérerons des courbes avec des points de branchement doubles, et pour chaque point de branchement  $a$  il existe une **involution locale de Galois**  $\sigma_a$  définie sur un voisinage, telle que  $x \circ \sigma_a = x$ , et qui permet de passer d'un feuillet à l'autre : si  $x^{-1}(X, Y) = \{z_0, z_1\}$  alors  $\sigma_a(z_i) = z_{i+1 \bmod 2}$ . On imposera généralement la condition de **régularité**, que les points de branchement sont des zéros simples de  $dx$ , et que  $dy$  ne s'y annule pas, d'où  $y$  se comporte localement comme une racine carrée (au premier ordre).

Il est utile de voir l'espace ambiant  $\mathbb{C}^2$  comme le fibré cotangent  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong T^\vee \mathbb{C}$ . Il s'agit d'un espace symplectique (voir sous-section 4.1.1 ou sous-section A.5.2) muni, dans les coordonnées  $(X, Y)$ , de la forme canonique  $\omega = d(Y dX) = -dX \wedge dY$ . Pour  $(X, Y) \in \iota(\Sigma)$ , grâce à la relation algébrique on peut paramétrer  $X = x(z), Y = y(z)$

et donc  $\omega|_{\Sigma}(X, Y) = -\partial_z x \partial_{\bar{z}} y \, dz \wedge d\bar{z} = 0$ , donc (l'image de)  $\Sigma$  est une sous-variété lagrangienne de  $T^{\vee}\mathbb{C}$ .

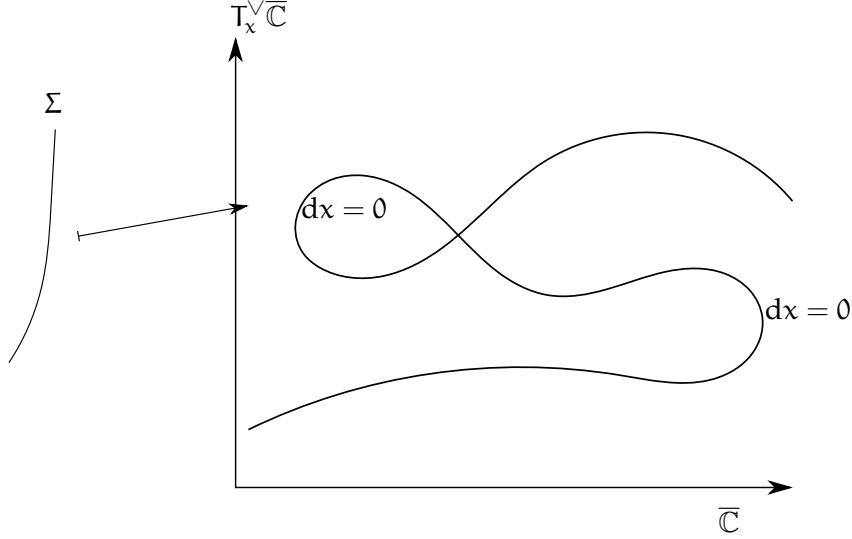


FIGURE 3.1 – Plongement à trois feuillets d'une surface de Riemann

Une variété complexe  $X$  de dimension  $n$  admet un **fibré canonique**  $K_X := \det(T^{\vee}X) = \bigwedge^n T^{\vee}X$  des  $n$ -formes holomorphes, c'est-à-dire des formes volume (les déterminants sur les espaces tangents) holomorphes. Si  $X$  est une surface de Riemann, on a  $K_X = T^{\vee}\Sigma$  : les 1-formes peuvent être intégrées. On a en particulier sur  $\Sigma$  la 1-forme

$$\omega_{0,1}(z) = \iota^*(Y \, dX)(z) = y(z) \, dx(z). \quad (3.2)$$

Pour définir une courbe spectrale sur laquelle on peut donner une formule de récurrence topologique, il faut ajouter aux données de  $(\Sigma, x, y)$  un noyau de Bergman, une 2-forme symétrique  $B \in \Gamma(\Sigma \times \Sigma, \text{Sym}(K_{\Sigma} \boxtimes K_{\Sigma})(2\Delta))$ . Ici, le produit tensoriel externe  $\boxtimes$  permet d'obtenir une 2-forme non antisymétrique (une 1-forme à valeurs de 1-forme) en deux variables sur  $\Sigma^2$ , et  $2\Delta$  indique un pôle d'ordre 2 sur la diagonale  $\Delta \subset \Sigma^2$ . En d'autres termes,  $B$  s'écrit localement dans tout système de coordonnées

$$B(z, z') \underset{z \rightarrow z'}{\sim} \frac{dz \boxtimes dz'}{(z - z')^2} + (\text{analytique sur } \Delta). \quad (3.3)$$

On le note aussi  $B =: \omega_{0,2}$ .

### 3.1.2 Récurrence topologique

On définit donc une **courbe spectrale**  $\mathcal{S}$  comme la donnée d'un quadruplet  $\mathcal{S} = (\Sigma, x, y, B)$  où  $\Sigma$  est une surface de Riemann,  $x$  et  $y$  sont des fonctions analytiques  $\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ , et  $B \in \Gamma(\Sigma^2, \text{Sym}^{\boxtimes 2}(K_{\Sigma})(2\Delta))$ . Les données de départ de la récurrence topologique sont

$$\omega_{0,1} = y \, dx, \quad \omega_{0,2} = B. \quad (3.4)$$

On définit ensuite récursivement une suite d'invariants  $\omega_{g,n}$ ,  $g \geq 0$ ,  $n \geq 1$  (les invariants  $n = 0$  seront définis plus tard en sous-section 3.2.2) par la formule :

$$\omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \sum_a \operatorname{Res}_{z \rightarrow a} K_a(z_1, z) \left( \omega_{g-1, n+1}(z, \sigma_a(z), z_2, \dots, z_n) + \sum_{\substack{\text{prétable} \\ h, h', l, l'}} \omega_{h, 1+\#l}(z, z_l) \omega_{h', 1+\#l'}(\sigma_a(z), z_{l'}) \right). \quad (3.5)$$

avec le **noyau d'intégration**  $K_a(z_1, z) := \frac{\frac{1}{2} \int_{z'= \sigma_a(z)}^z \omega_{0,2}(z_1, z')}{\omega_{0,1}(z) - \omega_{0,1}(\sigma_a(z))}$ . La relation (3.5) est, comme en sous-section 1.1.3, une récurrence sur la « caractéristique d'Euler »  $-\chi_{g,n} = 2g - 2 + n$  associée à  $\omega_{g,n}$ .

Les invariants de la récurrence topologique satisfont plusieurs propriétés, montrées dans [EO07]. Ils sont symétriques en toutes les variables (donc l'asymétrie apparente de  $z_1$  dans la formule de récurrence n'est qu'un problème d'écriture), et ont des pôles uniquement aux points de branchement. On écrit donc  $\omega_{g,n} \in \Gamma(\Sigma^n, \operatorname{Sym}^{\boxtimes n}(K_\Sigma(\mathbb{N}[\operatorname{brch}])))$  où  $(\mathbb{N}[\operatorname{brch}])$  indique des pôles de degré quelconque (en fait  $< 6g - 6 + 2n + 2 = 2(d_{g,n+1})$ ) sur le diviseur correspondant aux points de branchement. En outre, leurs primitives sont invariantes par symplectomorphismes (respectant la forme  $dy \wedge dx$ ), ils ont des propriétés modulaires, et ils sont homogènes de degré  $\chi_{g,n}$  par rapport aux remises à l'échelle de la courbe (*i.e.* pour une homothétie de  $y \mapsto \lambda y$ , les invariants deviennent  $\lambda^{\chi_{g,n}} \omega_{g,n}$ ).

La récurrence topologique admet aussi une traduction en termes de somme sur des graphes. À l'invariant  $\omega_{g,n}$ , on associe une surface abstraite de genre  $g$  avec  $n$  bords orientés, le premier entrant et les  $n-1$  autres sortants (certaines représentations les aplatissent, donnant des lignes entrantes et sortantes). À chacun de ces bords, on associe les variables  $z_1, \dots, z_n$ . En particulier, le noyau de Bergman  $B(z_1, z_2)$  est simplement représenté comme un cylindre (ou une ligne) entre les cercles (ou points)  $z_1$  et  $z_2$ . Le noyau d'intégration  $K(z', z)$  est représenté par un cylindre *orienté* joignant  $z'$  à un « sommet » trivalent (il s'agit de la surface « pantalon », brique élémentaire dont les recollements de bords permettent de construire les surfaces de Riemann) dont les bords sortants sont  $z$  et le conjugué  $\sigma(z)$ .

Aidés par cette représentation graphique, nous définissons pour des variables  $z, z_1, \dots, z_n$  un ensemble  $\mathcal{G}_{g,n+1}(z, z_1, \dots, z_n)$  de graphes connexes avec

- $2g + n - 1$  sommets trivalents, un sommet monovalent portant la variable  $z$  et  $n$  sommets monovalents portant les variables  $z_1, \dots, z_n$  ;
- $3g + 2n - 1$  arêtes dont  $2g + n - 1$  orientées ( $y$  compris celui partant de  $z$ ) et  $n + g$  non orientées ( $y$  compris les  $n$  portant les sommets  $z_1, \dots, z_n$ )

respectant d'autres conditions permettant d'avoir le bon « genre », etc. On associe à tout graphe  $G \in \mathcal{G}_{g,n+1}(z, z_1, \dots, z_n)$  son **poids**  $w(G)$  en munissant chaque sommet trivalent  $i$  d'une variable  $s_i$ , et en associant à chaque arête orientée de  $s'$  à  $s$  un facteur  $K(s', s)$ , à chaque arête non orientée entre  $s'$  et  $s$  un facteur  $B(s', s)$ , et en prenant la somme des résidus aux points de branchement sur ces sommets en suivant les orientations à l'envers. On étend ces poids par linéarité aux sommes de graphes.

La réécriture graphique de la récurrence topologique permet alors de voir que

$$\omega_{g,n+1}(z, z_1, \dots, z_n) = \sum_{G \in \mathcal{G}_{g,n+1}(z, z_1, \dots, z_n)} w(G) = w \left( \sum_{G \in \mathcal{G}_{g,n+1}(z, z_1, \dots, z_n)} G \right). \quad (3.6)$$



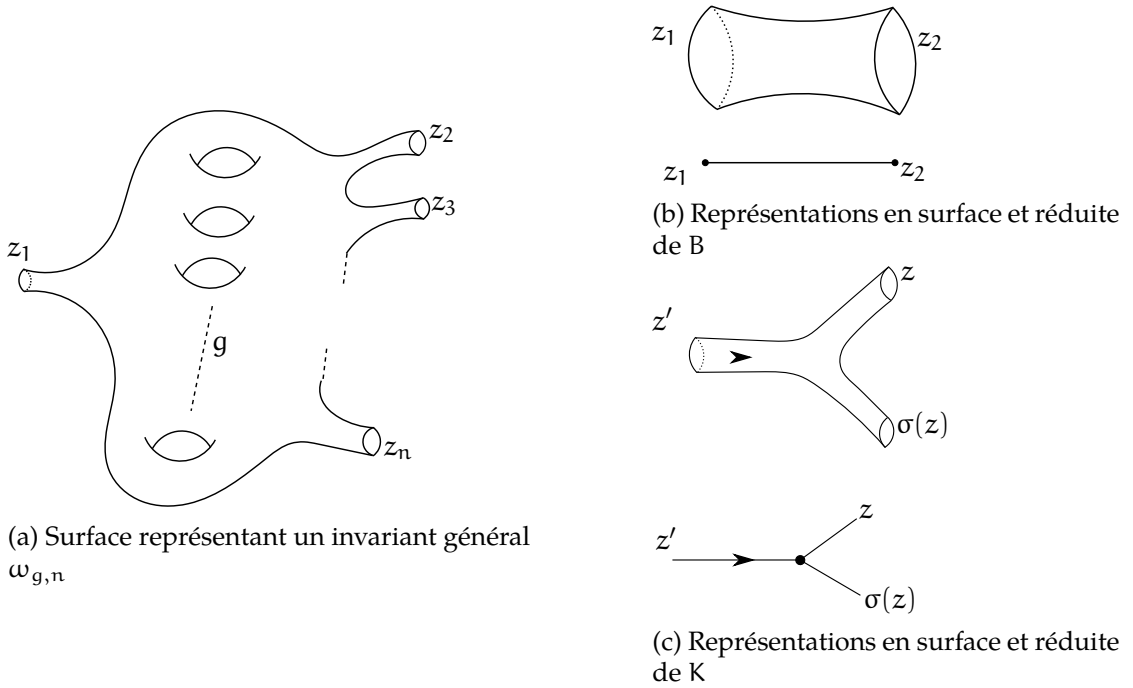


FIGURE 3.2 – Représentation des invariants

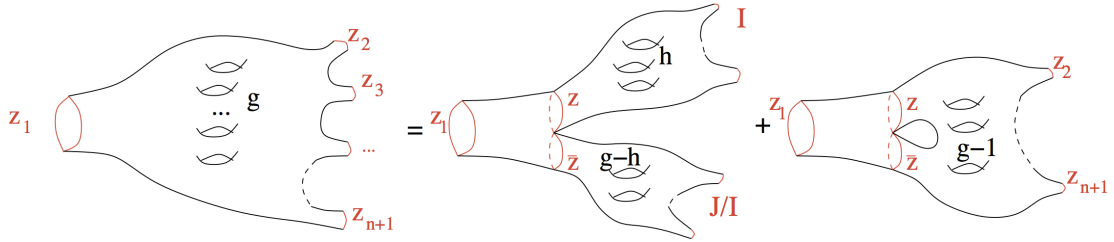


FIGURE 3.3 – Forme graphique de la récurrence topologique (d'après Bertrand Eynard)

Cette expression comme une somme sur des graphes permet de faire un lien avec les problèmes qui admettent des décompositions en termes de graphes, tels que la décomposition de Kontsevich des nombres d'intersection de la gravité topologique bidimensionnelle de la sous-section 2.3.1 ou les invariants de Gromov–Witten de 3-variétés de Calabi–Yau toriques[EO15].

### 3.1.3 Structures d'Airy et quantification de Lagrangiennes

La récurrence topologique a été reformulée de façon algébrique par Kontsevich et Soibelman[KS17] avec les structures d'Airy quantiques, qui sont la quantification de Lagrangiens quadratiques définissant des sous-variétés dans un fibré cotangent ou espace vectoriel symplectique. Ce formalisme est principalement motivé par les idées de la section 3.2 et de la section 5.2, et nous ferons librement des références et analogies avec ces notions. Nous considérons un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$  et son fibré cotangent  $W = T^*V \cong V \oplus V^\vee$  muni de sa structure symplectique canonique : avec un choix de base sur  $V$  et de la base duale sur  $V^\vee$ , on notera  $u_i$  les coordonnées sur  $V^\vee$  et  $t^i$  celles sur  $V$ , et  $\langle u_j, t^i \rangle = \delta_j^i$ .

On considère des lagrangiens quadratiques généraux

$$\mathcal{L}_i = -u_i + \sum_{j,k} a_{ijk} t^j t^k + 2 \sum_{j,k} b_{ij}^k t^j u_k + \sum_{j,k} c_i^{jk} u_j u_k. \quad (3.7)$$

On dit qu'ils forment une structure d'Airy classique si ils sont fermés par le crochet de Poisson.

On arrive à la notion de structure d'Airy quantique en considérant la quantification qui associe à  $t^i$  la multiplication par  $t^i$  et à  $u_i$  l'opérateur  $\hbar \partial_i = \hbar \partial / \partial t^i$  de dérivée selon  $t^i$ , les crochets de Poisson laissant donc place à des commutateurs  $[\hbar \partial_i, t^j] = \hbar \delta_i^j$ . Une structure d'Airy quantique est donnée par un ensemble d'opérateurs quadratiques

$$L_i = -\hbar \partial_i + \sum_{j,k} a_{ijk} t^j t^k + 2 \hbar \sum_{j,k} b_{ij}^k t^j \partial_k + \hbar^2 \sum_{j,k} c_i^{jk} \partial_j \partial_k + \hbar \varepsilon_i \mathbb{1} \quad (3.8)$$

qui est fermé par le commutateur, *i.e.* engendre une algèbre de Lie : il doit exister des constantes de structure  $f_{ij}^k$  telles que  $[L_i, L_j] = \sum_k f_{ij}^k L_k$ . Notons qu'il faut ici (contrairement à (3.7)) faire attention à l'ordre des termes dans  $b_{ij}^k t^j \partial_k$ , et le terme constant  $\hbar \varepsilon_i$  apparaît donc pour tenir compte des commutateurs. Les coefficients des opérateurs peuvent s'assembler en des tenseurs  $A \in (V^\vee)^{\otimes 3} \cong (V^{\otimes 3})^\vee = \text{hom}(V^{\otimes 3}, \mathbb{C})$ ,  $B \in V^{\otimes 2} \otimes V^\vee \cong \text{hom}(V^{\otimes 2}, V)$ ,  $C \in V \otimes (V^{\otimes 2})^\vee \cong \text{hom}(V, V^{\otimes 2})$  et  $\varepsilon \in V^\vee = \text{hom}(V, \mathbb{C})$ . La condition de fermeture donne alors des contraintes sur les coefficients (qui définissent en fait un système surdéterminé pour les valeurs non petites de  $n$ ).

Nous nous intéressons au système d'équations

$$L_i \tau = 0 \quad \forall i \in [1, n] \quad (3.9)$$

On remarque que si une solution  $\tau$  est annihilée par deux opérateurs  $L_i, L_j$ , alors elle l'est aussi par leur commutateur, ce qui est pourquoi l'on impose la condition de fermeture. En outre, le commutateur de deux opérateurs quadratiques en est un également, ce qui explique la restriction aux opérateurs quadratiques. Dans le langage des sections qui suivent, les  $t^i$  sont des coordonnées sur l'espace des courbes spectrales, par exemple des périodes, et la fonction recherchée est une fonction tau, analogue de la fonction de partition dans les systèmes intégrables.

On écrit la fonction solution comme  $\tau = \exp(F)$ , où  $F$  peut être développée comme un polynôme

$$\sum_{g \geq 0, n \geq 1} \frac{\hbar^{g-1}}{n!} \sum_{i_1, \dots, i_n} F_{g,n}[i_1, \dots, i_n] t_{i_1} \dots t_{i_n} \quad (3.10)$$

(où l'on écrit maintenant les numérotations des variables  $t_i$  comme des indices pour éviter la confusion avec des puissances). Si l'on impose que  $F_{0,1} = F_{0,2} = 0$ , alors  $F$  est déterminée de façon unique par (3.9). Plus précisément, la condition de cohérence pour que  $e^F$  soit solution se traduit par la récurrence :  $F_{0,3}[i_1, i_2, i_3] = a_{i_1 i_2 i_3}$ ,  $F_{1,1}[i_1] = \varepsilon_{i_1}$  et, pour  $2g - 2 + n = -\chi_{g,n} \geq 2$  :

$$\begin{aligned} F_{g,n}[i_1, i_2, \dots, i_n] &= \sum_{j=2}^n \sum_{\ell=1}^n b_{i_1 i_j}^\ell F_{g,n-1}[\ell, i_2, \dots, \widehat{i_j}, \dots, i_n] \\ &+ \sum_{k,\ell} \frac{c_{i_1}^{k,\ell}}{2} \left( F_{g-1,n+1}[k, \ell, i_2, \dots, i_n] + \sum_{\substack{I_1 \sqcup I_2 = \{i_2, \dots, i_n\} \\ h_1 + h_2 = g}} F_{h_1, 1 + \#I_1}[k, I_1] F_{h_2, 1 + \#I_2}[\ell, I_2] \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

qui est bien une récurrence sur  $-\chi_{g,n}$ , une récurrence topologique.

## 3.2 Déformations de courbes spectrales et des invariants

### 3.2.1 Espace de déformations et cohomologie méromorphe

Nous cherchons à étudier la façon dont les invariants de la récurrence topologique varient en fonction des courbes spectrales sur lesquelles ils sont définis. Pour ce faire, nous devons pouvoir déformer les courbes spectrales, c'est-à-dire suivre des chemins dans un espace putatif  $\mathfrak{S}$  des courbes spectrales. Cependant, la collection des courbes spectrales est trop grande<sup>1</sup> pour qu'un tel espace existe et puisse être étudié globalement. Nous devons donc nous restreindre à une étude locale correspondant à des déformations du premier ordre : ayant fixé une courbe spectrale  $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$ , l'espace tangent  $T_{\mathcal{S}}\mathfrak{S}$  classe les déformations infinitésimales (dont le flot engendrerait les chemins voulus). Il existe bien une sous-variété  $\mathfrak{S}_{\mathcal{S}}$  de  $\mathfrak{S}$  correspondant aux courbes spectrales ainsi accessibles à partir de  $\mathcal{S}$ .

Les déformations de  $\mathcal{S} = (\Sigma, x, y, B)$  seront des déformations des fonctions  $x$  et  $y$  ; la surface de Riemann sous-jacente  $\Sigma$  doit rester fixée (et les déformations de  $B = \omega_{0,2}$  découleront de celles de  $x$  et  $y$ ). Pour les exprimer, rendons explicite la dépendance de  $x$  et  $y$  en un vecteur de paramètres  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\infty}$  (parfois appelés des « temps ») : la courbe  $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$  est définie par les fonctions  $z \mapsto x(z; \mathbf{t}), y(z; \mathbf{t})$ . Les vecteurs tangents de déformation que nous cherchons à construire doivent donc moralement correspondre à des  $\frac{\partial}{\partial t_k}$ . On impose  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ .

Pour déformer une courbe  $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$ , on peut modifier ses paramètres par une variation infinitésimale  $\mathbf{t} \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} + \delta \mathbf{t}$ , ce qui revient à modifier les fonctions  $x$  et  $y$  en leur ajoutant un nombre fini de fonctions méromorphes :

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{t}} = \mathcal{S}_{\mathbf{t}} + \delta \mathcal{S} : \begin{cases} \tilde{x}(z; \tilde{\mathbf{t}}) = x(z; \mathbf{t}) + \overbrace{x(z; \delta \mathbf{t})}^{\delta x(z)} \\ \tilde{y}(z; \tilde{\mathbf{t}}) = y(z; \mathbf{t}) + \underbrace{y(z; \delta \mathbf{t})}_{\delta y(z)}. \end{cases} \quad (3.12)$$

On note  $\mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$  l'espace des formes méromorphes sur une surface de Riemann  $\Sigma$ .

Le déplacement  $\delta$  doit agir sur un vecteur de l'espace tangent (*i.e.* de déformation) pour donner les fonctions méromorphes  $\delta x, \delta y$  ; ainsi il est dual aux formes méromorphes de  $\mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$ . L'espace cotangent  $T_{\mathcal{S}}^{\vee}\mathfrak{S}$  doit donc être un quotient de  $\mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C}) \times \mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$ . Les courbes spectrales étant définies en quotientant par les reparamétrisations, ce qui permet de fixer une variable lorsque l'on effectue des déformations. En effet, dans (3.12), nous avons naïvement gardé la même variable  $z$  pour les deux courbes, mais nous aurions pu passer par un automorphisme  $z \mapsto \tilde{z}$ . Afin de comparer de manière canonique les deux courbes  $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$  et  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{t}}$ , nous calculerons plutôt  $\delta y$  à  $x$  constant, c'est-à-dire que l'on projette les coordonnées de  $\mathcal{S}_{\mathbf{t}}$  sur la première  $x$ , on applique la reparamétrisation  $z \mapsto \tilde{z}$  et on exprime finalement  $(\tilde{x}(\tilde{z}), \tilde{y}(\tilde{z}))$  sur  $\tilde{\mathcal{S}}_{\mathbf{t}}$  en imposant que  $\tilde{x}(\tilde{z}) - x(z) = 0$ . Dans ces conditions, la forme

$$\Omega_{\delta} := \delta(y(z) dx(z)) = dx(z) \delta y(z) - dy(z) \delta x(z) \quad (3.13)$$

1. Il s'agit plutôt de la classe d'objets de la catégorie des courbes spectrales.

qui est invariante par reparamétrisations suffit à définir le représentant canonique  $(0, \frac{\Omega_\delta}{dx})$  pour la déformation  $(\delta x, \delta y)$ , qui ne dépend donc que d'une unique forme méromorphe.

L'espace cotangent est finalement  $T_S^\vee \mathfrak{S} \cong \mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$  (dont le dual est cependant trop grand pour être un bon espace tangent), et l'espace tangent  $T_S \mathfrak{S}$  doit être un espace  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) \subset (\mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C}))^\vee$ , donc une version méromorphe de l'espace de cycles  $H_1(\Sigma, \mathbb{C})$ . On appelle ses éléments des **cycles généralisés**.

### 3.2.2 Cycles généralisés de déformation et polarisation

Un cycle généralisé est la donnée d'un cycle  $\gamma$  et d'une fonction  $f$ ; on note la paire  $\Gamma = \gamma \cdot f$ . Un tel cycle peut agir sur une 1-forme  $\omega \in \mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$  par  $\int_\Gamma \omega = \int_\gamma f \omega$ . On peut donc interpréter la fonction  $f$  comme un « jacobien » qui pondère le cycle  $\gamma$  pour les intégrations. En particulier, pour le noyau de Bergmann  $B$ , on peut définir la 1-forme

$$\widehat{B}(\Gamma)(z_1) = \int_\Gamma B = \int_{z_2 \in \gamma} f(z_2) B(z_1, z_2) \quad (3.14)$$

obtenue par intégration partielle de  $B$ . L'espace  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  est alors défini comme l'espace des paires  $\Gamma = \gamma \cdot f$  telles que  $\widehat{B}(\Gamma)$  est une forme méromorphe. L'on dira par la suite « cycle généralisé » pour se référer aux cycles de  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  exclusivement, et on écrira simplement  $\widehat{B}: \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$  pour l'application  $\widehat{B}|_{\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})}$ .

La condition de méromorphie permet de classer deux types de cycles de  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$ . Tout d'abord, si  $\gamma$  est un chemin quelconque, en raison des singularités apparaissant en croisant le chemin, il faut que  $f$  soit une fonction constante. Pour considérer des fonctions plus générales, on peut prendre pour  $\gamma$  un cycle infinitésimal  $\mathcal{C}_p$  autour de  $p \in \Sigma$ , et alors  $f$  peut être une fonction holomorphe avec en outre des pôles en  $p$ . On appelle ces types de cycles les cycles respectivement de première et de deuxième espèce, les cycles de première espèce étant donc classifiés par  $\mathbb{C} \times H_1(\Sigma, \mathbb{C})$  (et nous qualifierons parfois ceux de deuxième espèce de cycles « méromorphes »).

On peut définir une forme d'intersection sur  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$ . Sur deux cycles standards  $\gamma_1 \cdot f_1, \gamma_2 \cdot f_2$  où  $\gamma_i \in H_1(\Sigma, \mathbb{C})$  et  $f_i$  constante, on pose  $(\gamma_1 \cdot f_1) \cap (\gamma_2 \cdot f_2) = f_1 f_2 \cdot \gamma_1 \cap \gamma_2$ . Si  $\Gamma_i = \mathcal{C}_{p_i} \cdot f_i$ , on définit  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \delta_{p_1, p_2} \oint_{\mathcal{C}_{p_1}} f_1 df_2$ . Pour le cas mixte, on pose  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = 0$ . Pour tous cycles généralisés  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , on a alors

$$\int_{\Gamma_1} \widehat{B}(\Gamma_2) - \int_{\Gamma_2} \widehat{B}(\Gamma_1) = 2i\pi \cdot \Gamma_1 \cap \Gamma_2. \quad (3.15)$$

Le sous-espace  $\ker \widehat{B}$  est une sous-variété lagrangienne de  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  par rapport à cette forme symplectique.

L'application  $\widehat{B}$  est surjective, mais elle n'est pas un isomorphisme car son noyau est non trivial. On a la suite exacte

$$0 \rightarrow \ker \widehat{B} \hookrightarrow \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) \xrightarrow{\widehat{B}} \mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C}) \rightarrow 0, \quad (3.16)$$

donc on a une décomposition  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) = \ker \widehat{B} \oplus \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})/\ker \widehat{B}$  avec  $\mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})/\ker \widehat{B}$ .

Il faut donc choisir un représentant pour chaque classe du quotient  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})/\ker \widehat{B}$ , c'est-à-dire un complémentaire lagrangien  $\mathcal{L}$  de  $\ker \widehat{B}$  dans  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$ , ce que l'on appelle

une **polarisation** de l'espace symplectique  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$ . Nous voulons pouvoir assembler les différents espaces tangents en un *fibré* tangent sur  $\mathfrak{S}_S$ . Comme nous le verrons dans la sous-section 3.2.3, la forme  $B$  se déforme avec les courbes, donc c'est également le cas de  $\ker \hat{B}$  et de son complémentaire  $\mathcal{L}$ , mais nous allons montrer que  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  a une structure rigide qui donne un fibré trivial sur  $\mathfrak{S}_S$ , donnant donc un moyen de suivre  $\mathcal{L}$ .

L'espace  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  contient un sous-groupe  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  constitué des cycles dits **entiers** de la forme

$$\gamma_{p,k} = \begin{cases} \mathcal{C}_p \cdot x^*(x - x(p))^k & k \geq 0 \\ \frac{-1}{2i\pi} \cdot x^*\left(\frac{1}{k}(x - x(p))^k\right) & k < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Ce sous-groupe abélien est un réseau, c'est-à-dire que  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) = \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ . En outre, la forme d'intersection s'y restreint bien à des valeurs entières uniquement. Les entiers ne se déforment pas, donc le fibré des  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  est nécessairement trivial, d'où celui des  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  l'est aussi.

Sur  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$ , on peut décomposer  $\Gamma \in \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  comme  $\sum_k \alpha_k(\mathcal{S}_0) \Gamma_k$  avec  $\Gamma_k \in \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  et  $\alpha_k(\mathcal{S}_0) \in \mathbb{C}$ . On définit une connexion sur le fibré des  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  sur  $\mathfrak{S}_S$  en imposant que les  $\alpha_k$  soient indépendants de la courbe spectrale, et l'on peut donc bien étendre un vecteur tangent en  $\mathcal{S}_0$  à un champ de vecteurs tangents sur  $\mathfrak{S}_S$ .

### 3.2.3 Formules variationnelles pour les invariants

Nous avons vu que chaque déformation (associée à un covecteur)  $\delta$  est caractérisée par la forme  $\Omega_\delta = \delta\omega_{0,1} \in \mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$  de (3.13). Nous pouvons donc utiliser cette forme pour expliciter l'isomorphisme entre vecteurs de déformation et cycles généralisés. Nous dirons qu'un vecteur de déformation  $\delta$  a un cycle généralisé dual  $\Gamma_\delta \in \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  si  $\hat{B}(\Gamma_\delta) = \Omega_\delta$ . En terme des invariants de la récurrence topologique, cela se traduit donc par  $\delta\omega_{0,1} = \int_{\Gamma_\delta} \omega_{0,2}$ . De façon générale,

$$\delta\omega_{g,n} = \int_{\Gamma_\delta} \omega_{g,n+1}. \quad (3.18)$$

La dualité entre cycles généralisés et vecteurs de déformation utilise la forme  $B = \omega_{0,2}$ , dont nous devons donc connaître précisément les déformations. En écrivant  $B$  dans les coordonnées  $x$  localement à la diagonale, on voit que  $\delta B$  est analytique sur la diagonale lorsque l'on déforme à  $x$  constant. Ses pôles proviennent aux points de branchement  $a$ , et on a la **formule de Rauch**

$$\delta B(z_1, z_2) = \sum_a \operatorname{Res}_{z' \rightarrow a} \frac{B(z_1, z') B(z_2, z')}{dx(z')^2} \frac{\Omega_\delta(z')}{dy(z')}. \quad (3.19)$$

Avec le cycle dual à  $\delta$ , on la réécrit

$$\delta B(z_1, z_2) = \int_{z'' \in \Gamma_\delta} \sum_a \operatorname{Res}_{z' \rightarrow a} \frac{B(z_1, z') B(z_2, z') B(z', z'')}{dx(z') dy(z')}. \quad (3.20)$$

La règle de polarisation de l'espace des cycles va également nous permettre d'étendre la collection des invariants de la récurrence topologique par des invariants  $\mathcal{F}_g = \omega_{g,0}$ , aussi appelés **énergies libres**, devant être des 0-formes en 0 variable, c'est-à-dire des scalaires associés à leur courbe spectrale. Ils se devront de respecter

$$\delta \mathcal{F}_g = \int_{\Gamma_\delta} \omega_{g,1}. \quad (3.21)$$

L'équation (3.21), si elle est bien définie, suffit à caractériser les  $\mathcal{F}_g$ . À partir de la série d'invariants  $\omega_{g,n}(\mathcal{S}; z_1, \dots, z_n)$  d'une courbe spectrale  $\mathcal{S}$ , nous pouvons définir des fonctions primitives  $F_{g,n} = \int \cdots \int \omega_{g,n}$  respectant  $d_{z_1} \boxtimes \cdots \boxtimes d_{z_n} F_{g,n} = \omega_{g,n}$ , où  $d_z f = \partial_z f dz$ . Alors, pour  $g \geq 2$ , la forme explicite

$$\mathcal{F}_g = \frac{1}{2-2g} \sum_{\substack{\text{a point de} \\ \text{branchement}}} \text{Res}_a \omega_{g,1} F_{0,1} \quad (3.22)$$

respecte bien la condition demandée.

Dans les équations (3.18) et (3.21), le cycle  $\Gamma_\delta$  est dans  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) / \ker \widehat{B}$ ; il n'est défini qu'à éléments de  $\ker \widehat{B}$  près, et l'intégrale doit être compatible avec ce quotient. Pour  $(g, n) \neq (0, 1)$ , on a que  $\Gamma \in \ker \widehat{B} \implies \int_\Gamma \omega_{g,n} = 0$ , donc on peut bien effectuer les intégrales voulues sur  $\Gamma_\delta \bmod \ker \widehat{B}$  dans tous les cas sauf le calcul de  $\mathcal{F}_0$ . En effet, la structure symplectique (3.15) et le lien entre  $\omega_{0,1}$  et  $B$  par déformations font que, si un  $\mathcal{F}_0$  respectait (3.21) pour tous cycles de déformation, les commutateurs de ses dérivées seraient alors donnés par  $\delta_1 \delta_2 \mathcal{F}_0 - \delta_2 \delta_1 \mathcal{F}_0 = 2i\pi \cdot \Gamma_{\delta_1} \cap \Gamma_{\delta_2}$ , et donc nuls seulement dans un sous-espace lagrangien des déformations. L'invariant  $\mathcal{F}_0$  nécessite donc afin d'être défini de fixer la polarisation  $\mathcal{L}$  pour choisir des représentants de  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) / \ker \widehat{B}$ , et on l'écrira donc  $\mathcal{F}_{0,\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ .

### 3.2.4 Exemple des déformations de la courbe d'Airy

Nous allons déformer la courbe d'Airy de la sous-section 2.3.2 en considérant la famille de courbes spectrales sur  $\mathbb{C}$  données par les fonctions

$$\left( x(z) = z^2 + \check{t}_1, y(z) = z - \frac{1}{2} \sum_k \check{t}_{k+2} z^k \right) \quad (3.23)$$

où les  $\check{t}_k$  sont définis à partir des variables de Laplace  $\lambda_i$  de l'équation (2.8). Notons  $\Lambda = \text{diag}((\lambda_i)_{1 \leq i \leq N})$ , et  $t_k = \frac{1}{N} \text{Tr}[\Lambda^{-k}]$ . On définit alors  $\check{\Lambda}$  par  $\check{\Lambda}^2 = \Lambda^2 - \check{t}_1$ , soit  $\check{\Lambda} = \text{diag}(\check{\lambda}_i)$ , et finalement  $\check{t}_k = \frac{1}{N} \text{Tr}[\check{\Lambda}^{-k}]$ . Cette formulation correspond au **modèle B**, qui dépend de la géométrie complexe de la courbe spectrale.

Dans le **modèle A**, qui dépend de la théorie de l'intersection sur l'espace de modules miroir, les énergies libres, les primitives des invariants de récurrence topologique associés nombres d'intersection, deviennent

$$F_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = (-1)^n 2^{2-2g-n} \sum_{d_1, \dots, d_n} \prod_i \frac{(2d_i - 1)!!}{x(z_i)^{d_i+1/2}} \left\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} e^{\sum_k \hat{t}_k \kappa_k} \right\rangle_g \quad (3.24)$$

avec  $e^{\sum_k \hat{t}_k \kappa_k} = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_d (2d-1)!! t_{2d+1} \tau_d\right)$  (les classes kappa sont les tirés-arrière des classes psi selon le morphisme oubliant le(s) dernier(s) point(s) marqué(s)). Ici l'exponentielle s'interprète comme un développement :

$$\begin{aligned} \left\langle \tau_{d_1} \cdots \tau_{d_n} e^{\frac{1}{2} \sum_d (2d-1)!! t_{2d+1} \tau_d} \right\rangle_g &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{2 \cdot m!} \sum_{k_1, \dots, k_m} (2k_1 - 1)!! t_{2k_1+1} \cdots (2k_m - 1)!! t_{2k_m+1} \\ &\quad \cdot \int_{\mathcal{M}_{n+m}} \psi_1^{\wedge d_1} \wedge \cdots \wedge \psi_n^{\wedge d_n} \wedge \psi_{n+1}^{\wedge k_1+1} \wedge \cdots \wedge \psi_{n+m}^{\wedge k_m+1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La courbe déformée  $S + \delta S$  s'écrit donc  $\delta x(z) = \delta \check{t}_1$  et  $\delta y(z) = -\frac{1}{2} \sum_k \delta \check{t}_{k+2} z^k$ .

Les paramètres  $\check{t}_k$  du modèle B sont ceux d'un développement de Taylor de  $y$  donnant

$$y \, dx = z^2 \, dz - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{z \, dz}{\check{\lambda}_i(\check{\lambda}_i - z)}. \quad (3.26)$$

En tenant compte des propriétés des paramètres on a également  $y \, dx \underset{z \rightarrow \check{\lambda}_i}{\sim} \frac{1}{N} \frac{dx}{x - \check{\lambda}_i^2}$ . Seuls les paramètres du modèle A sont alors utilisés, et ceux-ci apparaissent comme des périodes (*i.e.* des intégrales le long de cycles distingués) du modèle B. L'application  $t \rightarrow \check{t}$  est l'application miroir qui fait correspondre les paramètres des modèles A et B.

Les coefficients des invariants du modèle A et du modèle B ont les mêmes formules de déformation, et on obtient des fonctions de corrélation similaires à celles du modèle A en développant les coefficients de modèle B. On en déduit que les invariants de la courbe d'Airy calculent bien les nombres d'intersection de Kontsevich–Witten.

## **Deuxième partie**

# **Géométrie des systèmes intégrables et quantification perturbative**





## Chapitre 4

# Systèmes intégrables et développements semi-classiques

### 4.1 Intégrabilité classique, paires de Lax et reconstruction géométrique par les courbes spectrales

#### 4.1.1 Systèmes intégrables classiques et courbes spectrales

Un système classique à  $N$  degrés de libertés est un espace des phases de dimension  $2N$ , paramétré par les coordonnées généralisées  $q^i$  et les impulsions généralisées  $p_i$ , avec un crochet de Poisson  $\{, \}$  sur l'algèbre des fonctions et une fonction hamiltonienne  $H$  donnant l'évolution temporelle d'une fonction quelconque par  $\dot{f} = \{H, f\}$ .

Un tel système est dit **intégrable** si il a  $N$  quantités conservées  $f_i$  (*i.e.*  $\{H, f_i\} = 0$ ) qui sont en involution ( $\{f_i, f_j\} = 0$ ). Dans ce cas, il existe un changement de coordonnées canonique (*i.e.* préservant le crochet de Poisson)  $(q^i, p_i)_i \rightarrow (\theta^i, f_i)_i$  vers les coordonnées dites d'angle-action, où par les équations de Hamilton on a  $\dot{\theta}^i = \frac{\partial H}{\partial f_i} = \text{cst}$ . En d'autres termes, dans ces nouvelles coordonnées le mouvement est uniforme. Cependant, les coordonnées ne sont plus nécessairement à valeurs dans un espace plat mais dans un certain  $n$ -tore.

Géométriquement, l'espace des phases est une variété symplectique (*c.f.* sous-section A.5.2), c'est-à-dire une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $2N$  munie d'une forme symplectique  $\omega$ , un champ de formes bilinéaires  $\omega(x) = \omega_{i,j}(x) dx^i \otimes dx^j : T_x \mathcal{M}^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{R}$  antisymétriques ( $\omega_{i,j}(x) = -\omega_{j,i}(x)$ , et donc  $\omega(x) = \omega_{i,j}(x) dx^i \wedge dx^j$ ) et inversibles (d'inverse  $\omega^{i,j}(x)$ ), qui est fermé :  $d\omega = \partial_k \omega_{i,j}(x) dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j = 0$ . Cette variété peut s'écrire  $\mathcal{M} = T^* \mathcal{N}$ . En écrivant  $q^i$  les coordonnées sur  $\mathcal{N}$  et  $p_i(x)$  les coordonnées sur l'espace cotangent  $T_x^* \mathcal{N}$ , on peut écrire  $\omega = d(p_i dq^i) = -dq^i \wedge dp_i$ . Une fonction  $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$  détermine un champ de vecteurs hamiltonien  $(X_H)^i = \omega^{i,j} \partial_j H$  et les trajectoires classiques pour le Hamiltonien  $H$  sont données par le flot de  $X_H$ . Le crochet de Poisson est  $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = X_f(g) = \langle \omega, df \wedge dg \rangle = \omega^{i,j} \partial_i f \partial_j g$ . Dans les coordonnées cotangentes, on retrouve  $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i}$ , et le flot hamiltonien donne les équations canoniques de Hamilton.

On peut également formuler les systèmes intégrables en terme d'une paire de matrices appelée **paire de Lax**. En se donnant une variable supplémentaire  $x \in \mathbb{C}$  appelée paramètre spectral, qui permettra de séparer les équations, une paire de Lax est une paire de matrices  $L(q(t), p(t), x), M(q(t), p(t), x)$ , avec une dépendance polynomiale

en  $x$ , respectant pour tout  $x$  l'équation d'évolution dite de Lax ou isospectrale :

$$\frac{dL}{dt}(q(t), p(t), x) = [M(q(t), p(t), x), L(q(t), p(t), x)]. \quad (4.1)$$

On écrira par la suite simplement  $L(x)$  et  $M(x)$ , la dépendance en  $t$  étant sous-entendue. Cette équation apparaît comme la condition de compatibilité pour avoir l'équation d'évolution des vecteurs propres

$$\frac{dv}{dt} = M \cdot v \quad (4.2)$$

où  $L \cdot v = \lambda v$ . Si  $L$  et  $M$  sont de taille  $r \times r$  et que la dépendance en  $x$  est polynomiale de degrés  $\leq d$ , on a alors jusqu'à  $d \cdot r^2$  équations, qui ne sont pas toutes indépendantes car l'équation de Lax impose des relations entre les composantes des matrices.

L'équation de Lax implique que le spectre de  $L$  est conservé dans le temps (d'où son nom d'équation isospectral) et donc les combinaisons symétriques de valeurs propres de  $L$  donnent des quantités conservées, ce qui permet donc bien de reconstruire un système intégrable à partir d'une paire de Lax. On peut par exemple considérer les quantités  $\text{Tr}[L^k]$ . Le spectre de  $L$  étant conservé, l'équation du polynôme caractéristique est également invariante dans le temps :

$$P(x, y) = \det(y1_r - L(x)) = 0. \quad (4.3)$$

Cette équation algébrique définit une courbe spectrale qui décrit le lieu du spectre de  $L$  lorsque  $x$  varie. Une paire de Lax donne donc naissance à une courbe spectrale. La donnée d'une courbe spectrale permet-elle alors, à l'inverse, de reconstruire un système intégrable ?

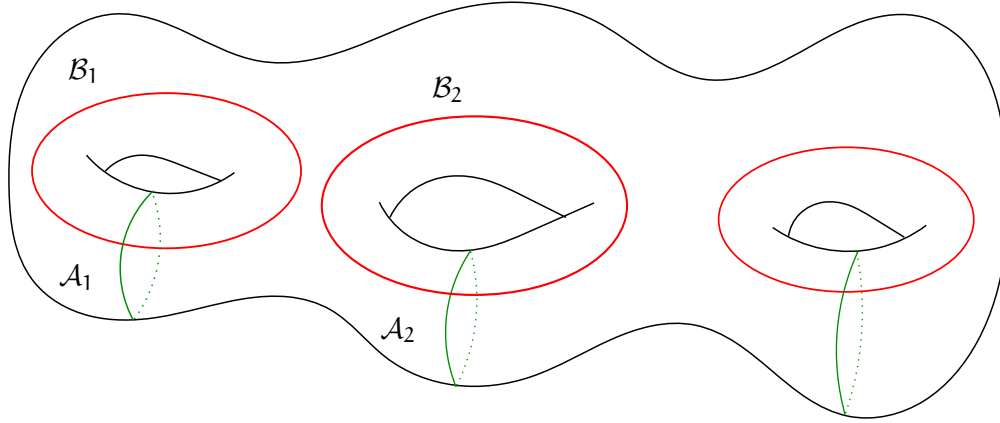
Partant d'une courbe spectrale  $\mathcal{S} = (\Sigma, x, y)$  donnée par un polynôme  $P(x, y)$ , on interprète  $x := x(z)$  comme le paramètre spectral, et les  $r$  points  $y_i(x)$  dans la fibre (où  $x$  donne en revêtement d'ordre  $r$  de  $\mathbb{C}$ ) comme les valeurs propres conservées (l'équation  $P(x, y) = \det(y - L(x)) = 0$  l'étant). Il suffit alors de reconstruire une matrice de changement de base  $V(x)$  pour passer de la forme diagonale  $\text{diag}(y_i)_i$  à la matrice  $L(x)$ . En d'autres termes, on cherche un fibré en vecteurs propres  $\ker(P(x, y))$  sur  $\overline{\mathbb{C}}$ .

#### 4.1.2 Reconstruction géométrique

Pour chaque valeur du paramètre spectral  $x$ , nous voulons construire une matrice  $V(x)$  de taille  $r \times r$ , c'est-à-dire  $r$  vecteurs de taille  $r$  qui sont les différents vecteurs propres de  $L(x)$ . Le point  $(x, y_i(x))$ ,  $1 \leq i \leq r$  a pour valeur de  $y$  la  $i$ -ième valeur propre de  $r$ , donc on peut lui associer le  $i$ -ième vecteur propre : nous avons donc ramené le problème à celui de construire un champ de vecteurs propres sur la courbe spectrale.

Soit  $g$  le genre de la surface  $\Sigma$ . On a alors  $\dim H_1(\Sigma) = 2g$  et  $\dim H^1(\Sigma, \mathbb{C}) = g$ . Le groupe d'homologie  $H_1$  admet une base dite symplectique, dont un exemple (pour  $g = 3$ ) est représenté en Figure 4.1, constituée des  $\mathcal{A}$ -cycles et des  $\mathcal{B}$ -cycles, déterminés par les intersection  $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}_j = \delta_{i,j} = -\mathcal{B}_j \cap \mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = 0$ . Une base  $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq g}$  de  $H^1(\Sigma, \mathbb{C})$  est donnée par  $\oint_{\mathcal{A}_i} \omega_j = \delta_{i,j}$ . On en tire la **matrice de périodes**  $\tau_{i,j} = \oint_{\mathcal{B}_i} \omega_j$ , de partie imaginaire positive (pour une surface de genre 1, un tore de paramètre  $\tau$ , l'unique composante de la matrice de périodes est  $\tau$ ).

En considérant le vecteur  $\omega := (\omega_1, \dots, \omega_g)^\top \in (H^1(\Sigma, \mathbb{C}))^g$ , l'intégrale  $\int_{z_0}^z \omega$ , pour un point  $z_0 \in \Sigma$  fixé, dépend du chemin d'intégration  $z_0 \rightsquigarrow z$  choisi (c'est-à-dire des cycles de  $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$  parcourus) à  $\mathbb{Z}^g + \tau \cdot \mathbb{Z}^g$  près, où  $\tau \cdot \mathbb{Z}^g$  indique la matrice de périodes

FIGURE 4.1 – Base symplectique de cycles d'homologie d'une surface de genre  $g$ 

$\tau$  ayant agi sur les points du réseau  $\mathbb{Z}^g \subset \mathbb{C}^g$ . Le  $g$ -tore complexe  $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau \cdot \mathbb{Z}^g)$  est dénoté  $\mathbb{J}\text{ac}(\Sigma)$  et appelé la variété **jacobienne** de  $\Sigma$ . Nous avons donc construit une application, appelée **application d'Abel**,

$$\mathbf{a}: \Sigma \ni z \mapsto \int_{z_0}^z \omega \in \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau \cdot \mathbb{Z}^g) = \mathbb{J}\text{ac}(\Sigma) \quad (4.4)$$

(qui dépend également du choix de  $z_0$ , mais la dépendance disparaît dans les différences que nous considérerons).

Un **diviseur** sur la courbe complexe  $\Sigma$  est une somme formelle de points de  $\Sigma$  avec coefficients entiers, s'écrivant  $\sum n_z[z]$ . Le degré d'un tel diviseur est  $\sum n_z$ , et les classes d'équivalence de diviseurs sont en bijection avec les sections méromorphes de fibrés en droites en associant à chaque section  $f$  son diviseur  $\text{div } f$  dont les points sont les zéros et pôles de  $f$  pondérés par leurs ordres. Le diviseur des points de branchement de la courbe spectrale (*i.e.* où les valeurs propres sont réordonnées) a un mouvement constant dans le tore  $\mathbb{J}\text{ac}(\Sigma)$ .

Nous allons décomposer les fonctions  $\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  que nous souhaitons construire en les compositions de fonctions  $\mathbb{J}\text{ac}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{C}$  par<sup>1</sup>  $\mathbf{a}: \mathbb{J}\text{ac}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{C}$ .

Les fonctions sur un  $g$ -tore  $\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau \mathbb{Z}^g)$  sont les fonctions sur  $\mathbb{C}^g$  qui passent au quotient par le réseau, *i.e.* qui sont invariantes par l'action du réseau par translation. Cette condition est très restrictive, et on utilise la plus générale **fonction thêta**

$$\vartheta(\mathbf{u}; \tau) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} e^{2i\pi \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle} e^{i\pi \langle \mathbf{n}, \tau \mathbf{n} \rangle} \quad (4.5)$$

qui est bien périodique pour la translation selon  $\mathbb{Z}^g$  mais ne l'est qu'à une phase près pour  $\tau \mathbb{Z}^g$ , soit  $\vartheta(\mathbf{u} + \tau \mathbf{m}) = \vartheta(\mathbf{u}) e^{-i\pi(2\langle \mathbf{m}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{m}, \tau \mathbf{m} \rangle)}$ .

On peut construire, en choisissant une caractéristique  $\chi = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \tau \mathbf{b})$  (où  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in 2\mathbb{Z} + 1$  pour que  $\chi$  soit racine de  $\vartheta$ ) ainsi qu'une forme méromorphe  $\Omega \in \mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$ , une fonction bi-spinorielle  $\Psi_\chi(\Omega, z, z') \in K_\Sigma^{\otimes 1/2} \boxtimes K_\Sigma^{\otimes 1/2}$ . Alors la matrice  $V(\Omega, x, x')$  définie par  $V_{i,j}(\Omega, x, x') = \Psi(\Omega, z^j(x), z^i(x'))$  est inversible, et l'on peut poser

$$L(\Omega, x, x') = (\Omega, x, x') Y(x) (\Omega, x, x')^{-1}. \quad (4.6)$$

La paire de Lax se complète avec la matrice  $M = \frac{\partial V}{\partial t} V^{-1}$ .

1. La jacobienne  $\mathbb{J}\text{ac}(\Sigma)$  est en fait l'espace de modules des fibrés en droite (ou des diviseurs) de degré 0 sur  $\Sigma$ , donc une fonction sur  $\Sigma$  se prolonge bien par  $\mathbb{J}\text{ac}(\Sigma)$ .

## 4.2 Quantification et correspondance de Riemann–Hilbert

### 4.2.1 Géométrisation de systèmes différentiels : courbes quantiques et fibrés adjoints

Les caractéristiques d'un système intégrable sont encodées dans l'équation aux valeurs propres  $(y - L(x))v = 0$  et son équation d'évolution  $\dot{v} = Mv$ . On peut s'intéresser à la **quantification** de l'équation aux valeurs propres, obtenue en remplaçant formellement la variable  $x$  par l'opérateur de multiplication par  $x$  et  $y$  par l'opérateur de dérivée selon  $x$  multiplié par un paramètre formel  $\hbar$  :

$$\left( \hbar \frac{d}{dx} - L(x) \right) \psi(x) = 0, \quad (4.7)$$

ce qui donne des opérateurs avec un spectre de dimension infinie. De telles équations différentielles, appelées **courbes quantiques**, interviennent lors de l'étude d'équations de Schrödinger.

Considérons une équation différentielle du deuxième ordre  $A\hbar^2\psi'' + B\hbar\psi' + C\psi = 0$ , quantification de la courbe classique  $A(x)y^2 + B(x)y + C(x) = 0$ . Quitte à remplacer  $\psi \rightsquigarrow \psi e^{\int \frac{-B}{2A\hbar}}$  pour éliminer le terme en  $B$  et à diviser par  $A$  pour normaliser le polynôme, on peut se ramener à une équation de Schrödinger dans un potentiel :  $\hbar^2\psi'' - V\psi = 0$ .

L'équation étant du second degré, elle admet deux solutions indépendantes que l'on note  $\psi_1$  et  $\psi_2$ , et on peut la linéariser avec la matrice

$$\Psi(x) := \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \hbar\psi_1'(x) & \hbar\psi_2'(x) \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}). \quad (4.8)$$

On se ramène alors à une équation matricielle  $\left( \hbar \frac{d}{dx} - \mathcal{D}(x) \right) \Psi(x) = 0$  avec  $\mathcal{D}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ V & 0 \end{pmatrix}$ . En tensorisant avec la forme  $dx$  pour se ramener dans le fibré canonique de  $\Sigma_0 = \overline{\mathbb{C}} \ni x$ , on a

$$\left( d - \frac{1}{\hbar} \mathcal{D}(x) dx \right) \Psi(x) = 0, \quad (4.9)$$

ce que l'on peut interpréter comme l'équation d'une section  $\Psi$  covariamment constante pour la connexion  $\nabla = d - \mathcal{D} dx$ . Par la suite, le  $dx$  sera absorbé dans l'écriture de  $\mathcal{D}$ .

Ici, la matrice  $\Psi(x)$  est un élément du groupe de Lie  $G := GL_2(\mathbb{C})$  pour tout  $x \in \Sigma_0$  ; on la voit donc comme une section d'un fibré  $G$ -principal  $\mathcal{P}$  sur  $\Sigma_0$ . La matrice  $\mathcal{D}(x)$  est de trace nulle, donc elle est dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$  du groupe  $G$ . Il s'agit alors d'une section du fibré adjoint  $\mathfrak{g} \otimes K_{\Sigma_0}$ , le fibré vectoriel donné par la représentation adjointe de  $G$  sur son algèbre de Lie (et tensorisé avec  $K_{\Sigma_0}$ ).

### 4.2.2 Problème de Riemann–Hilbert

Les courbes quantiques sont donc classifiées par l'espace de modules des connexions  $G$ -principales sur des fibrés principaux. Il faut dans cet espace identifier les fibrés isomorphes, mais aussi identifier les connexions qui ne diffèrent que d'une transformation de jauge. On le note alors

$$\mathcal{M}_{\text{de Rham}} := \{(\mathcal{P}, \nabla)\} / \{\text{isom.}, \text{tr. de jauge}\}, \quad (4.10)$$

où  $\mathcal{P} \rightarrow \Sigma_0$  est un fibré  $G$ -principal et  $\nabla$  une connexion  $G$ -principale sur  $\mathcal{P}$ .

Si l'on fixe un fibré  $\mathcal{P}$  et une connexion  $\nabla_0$  sur  $\mathcal{P}$ , alors pour toute connexion  $\nabla$  sur  $\mathcal{P}$  on a  $\nabla - \nabla_0 \in \Gamma(\Sigma_0, \mathfrak{g} \otimes K_{\Sigma_0})$ ; autrement dit l'espace des connexions sur un fibré fixé  $\mathcal{P}$  est un espace affine modelé sur l'espace vectoriel  $\Gamma(\Sigma_0, \mathfrak{g} \otimes K_{\Sigma_0})$ . De fait, l'espace  $\mathfrak{g}$  tangent à  $G$  donne les déformations d'une fibre à l'autre. On y voit que l'espace tangent standard à  $\mathcal{M}_{\text{de Rham}}$  sera donné par  $\Gamma(\Sigma_0, \mathfrak{g} \otimes K_{\Sigma_0})$ . On appelle **champ de Higgs** une section de ce fibré  $\mathfrak{g} \otimes K_{\Sigma_0}$ , et on définit l'espace de modules des champs de Higgs

$$\mathcal{M}_{\text{Hitchin}} := \{(\mathcal{P}, \phi)\} / \{\text{isom.}, \text{tr. jauge}\} \quad (4.11)$$

où  $\mathcal{P}$  est un fibré  $G$ -principal et  $\phi \in \Gamma(\Sigma_0, \mathfrak{g} \otimes K_{\Sigma_0})$  un champ de Higgs. On a un isomorphisme évident (mais pas canonique)  $\mathcal{M}_{\text{de Rham}} \cong \mathcal{M}_{\text{Hitchin}}$  donné par le choix d'une connexion de base pour chaque fibré.

Les sections plates  $\Psi$  (solutions de  $\hbar \nabla \Psi = 0$ ) ne sont pas bien définies aux pôles de  $\mathcal{D}$ , donc ces fonctions ne voient pas  $\Sigma_0$  mais la surface  $\Sigma_{\mathcal{D}} := \Sigma_0 \setminus \{\text{pôles de } \mathcal{D}\}$  de groupe fondamental non trivial engendré par les cycles non contractiles qui entourent les pôles. Une section  $\Psi$  sur cet espace peut donc avoir des monodromies non triviales selon ces cycles, comme illustré en Figure 4.2. Si  $x \in \Sigma_{\mathcal{D}}$  et  $\gamma$  est un cycle entourant une singularité de  $\mathcal{D}$ , alors on a  $\Psi(x + \gamma) = \Psi(x) \cdot S_{\gamma}$ , où la matrice

$$S_{\gamma} := \Psi(x)^{-1} \Psi(x + \gamma) \quad (4.12)$$

est appelée **matrice de monodromie**. Ainsi,  $\Psi$  n'est pas une fonction bien définie sur  $\Sigma_{\mathcal{D}}$  mais sur son revêtement universel  $\widetilde{\Sigma}_{\mathcal{D}}$  qui est simplement connexe.

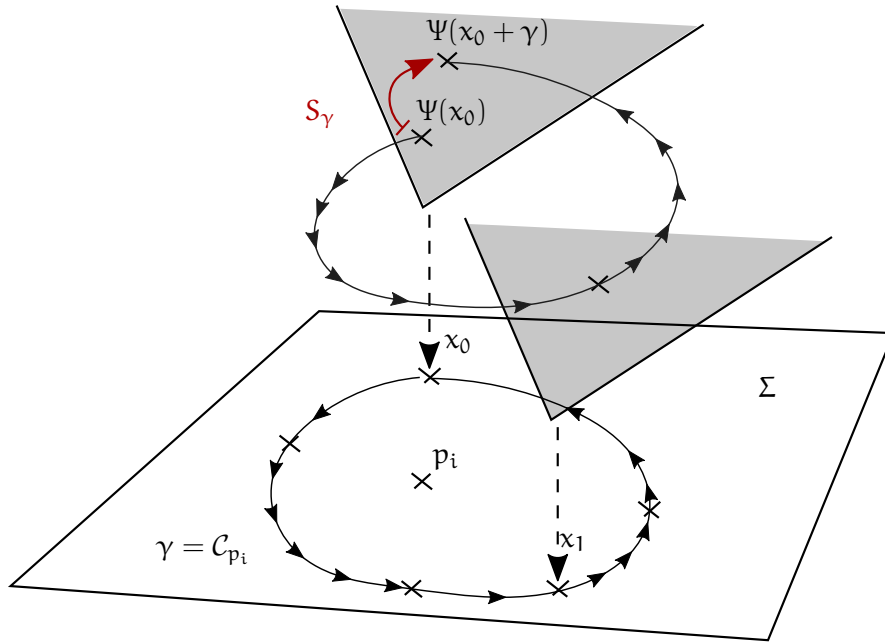


FIGURE 4.2 – Monodromie selon  $\gamma$  autour de  $p_i$  : déplacement dans l'espace des valeurs de  $\Psi$  en  $x_0$

Les matrices de monodromie en  $x$  fournissent une représentation du groupe fondamental basé en  $x$ , soit  $S_{\gamma} \cdot S_{\gamma'} = S_{\gamma\gamma'}$ . En outre, ces matrices sont bien indépendantes de  $x$  (i.e.  $dS_{\gamma} = 0$ ), et on parle donc de **système isomonodromique**. Définissons l'espace de modules  $\mathcal{M}_{\text{Betti}}$  des représentations de monodromie du groupe fondamental de  $\Sigma_{\mathcal{D}}$ . Le

problème de **Riemann–Hilbert** consiste à établir un triplet d'isomorphismes

$$\mathcal{M}_{\text{Hitchin}} \cong \mathcal{M}_{\text{de Rham}} \cong \mathcal{M}_{\text{Betti}}. \quad (4.13)$$

Chacun de ces espaces de modules possède une structure hyperkählérienne (trois structures kählériennes compatible de façon quaternionique), et chaque isomorphisme respecte l'une des trois structures complexes.

Nous pouvons expliciter l'isomorphisme entre  $\mathcal{M}_{\text{de Rham}}$  et  $\mathcal{M}_{\text{Betti}}$  dans le cas des systèmes dits **Fuchsien**, où tous les pôles de la matrice  $\mathcal{D}$  sont simples. On peut alors écrire

$$\mathcal{D}(x) \underset{x \rightarrow p_i}{\sim} \phi_i \frac{dx}{x - p_i} + \text{analytique}, \quad (4.14)$$

et diagonaliser  $\mathcal{D}$  revient à diagonaliser les  $\phi_i$ . Si  $\text{Sp}(\phi_i) = (\alpha_{i,j})_j$ , alors le spectre de la matrice de monodromie  $S_{C_{p_i}}$  pour un cycle entourant  $p_i$  est constitué des  $e^{2i\pi\alpha_{i,j}/\hbar}$ , ce qui donne l'isomorphisme.

De façon générale, en considérant  $\mathfrak{g}$  comme une algèbre de Lie abstraite sans représentation matricielle pour  $\mathcal{D} \in \Gamma(\Sigma_0, \mathfrak{g} \otimes K_{\Sigma_0})$ , le processus de diagonalisation de matrice correspond à la recherche d'invariants de  $\mathcal{D}$ . On peut représenter le crochet de Lie abstrait de  $\mathfrak{g}$  comme le commutateur d'un produit en passant à l'algèbre enveloppante

$$\mathfrak{U} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes i} / (a \otimes b - b \otimes a \sim [a, b]). \quad (4.15)$$

On appelle ensemble d'**invariants** de  $\mathcal{D}$  un ensemble d'éléments indépendants du centre  $Z(\mathfrak{U})$ , les éléments de  $\mathfrak{U}$  commutant avec tous les autres. On a bien  $\dim Z(\mathfrak{U}) = \dim \mathfrak{h}$  où  $\mathfrak{h}$  est la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , de dimension égale au nombre de valeurs propres de  $\mathcal{D}$ , ici  $r$ .

On peut alors définir un espace  $\mathcal{B}_{\text{Hitchin}} := \Gamma(\Sigma_0, Z(\mathfrak{U})) \subset \bigoplus_k K_{\Sigma_0}^{\otimes k}$  appelé la **base de Hitchin**. La procédure décrite précédemment donne une application dite **fibration de Hitchin**  $\mathcal{M}_{\text{Hitchin}} \rightarrow \mathcal{B}_{\text{Hitchin}}$ , qui à un champ de Higgs associe ses invariants. Cette application est bijective sur son image, notée  $\widehat{\mathcal{M}}$ , qui est l'espace de modules des courbes spectrales.

## 4.3 Résolution perturbative en développement semi-classique

### 4.3.1 Asymptotiques WKB

L'objet est encore ici l'étude d'une équation de Schrödinger  $\hbar^2 \psi'' - V\psi = 0$ . Nous allons effectuer l'étude dans le cadre semi-classique  $\hbar \rightarrow 0$ .

Soit

$$u = \hbar(\ln \psi)' = \hbar \frac{\psi'}{\psi} \quad (4.16)$$

la dérivée logarithmique de  $\psi$ ; alors l'équation de Schrödinger pour  $\psi$  peut se réécrire en une équation de Riccati  $\hbar u' + u^2 = V$ . Écrivons  $u$  en développement semi-classique  $u(x) \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \sum_{k \geq 0} \hbar^k u_k(x)$ . On peut alors voir que  $u_0(x)$  est la solution classique  $y(x)$  de la courbe  $P(x, y) = y^2 - V(x)$ , et obtenir une suite de relations sur les  $u_k$ , explicitement  $u_k = \frac{-1}{2u_0} \left( u_{k-1}' + \sum_{\ell=1}^{k-1} u_\ell u_{k-\ell} \right)$ .

Le développement de  $u$  suggère pour  $\psi$  le développement, dit d'approximation WKB,

$$\psi(x) \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} e^{\frac{1}{\hbar} \int^x y(\xi) d\xi} \psi_0(x) \left( 1 + \sum_{k \geq 1} \hbar^k \psi_k(x) \right). \quad (4.17)$$

En termes de la dérivée logarithmique, on a  $u = y + \hbar \frac{\psi'_0}{\psi_0} + \hbar^2 \psi'_1 + \hbar^3 (\psi'_2 - \psi_1 \psi'_1) + \hbar^4 (\dots)$  et on peut donc obtenir les  $\psi_k$  par intégrations successives des  $u_k$ ; en particulier  $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{y}}$ . Plus précisément, l'équation étant d'ordre 2, elle admet deux solutions indépendantes

$$\psi_{\pm} \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} e^{\pm \hbar^{-1} \int \sqrt{V}} V^{-1/4} (1 \pm \hbar \psi_1 + \hbar^2 \psi_2 \pm \dots). \quad (4.18)$$

On peut donc choisir l'ansatz  $\psi(x) = \sqrt{f(x)} e^{\frac{1}{\hbar} \int^x \frac{1}{f(\xi)} d\xi}$ , et donc  $u = \frac{1}{f} + \frac{\hbar}{2} \frac{f'}{f}$ , et étudier la fonction  $f$ . L'équation de Riccati implique que  $f$  respecte l'équation de type KdV (Korteweg–de Vries)

$$V'f + 2Vf' = \frac{\hbar^2}{2} f'''. \quad (4.19)$$

La présence du facteur  $\hbar^2$  indique que le développement semi-classique de  $f$  se fait en puissances paires de  $\hbar$ , soit  $f(x) \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \sum_{k \geq 0} \hbar^{2k} f_k(x)$ . L'équation KdV est alors  $V'f_k + 2Vf'_k = \frac{1}{2} f'''_{k-1}$ , d'où  $f_k = \frac{1}{\sqrt{V}} \int \frac{1}{4\sqrt{V}} f'''_{k-1}$ .

### 4.3.2 Conditions de validité et phénomènes de croisements de murs

Au vu de l'existence des deux solutions indépendantes (4.18) engendrant l'espace des solutions à la courbe quantique, une fonction solution quelconque pourra avoir différents régimes dans lesquelles l'une ou l'autre de  $\psi_{\pm}$  est dominante. Outre les asymptotiques WKB,  $\hbar \rightarrow 0$ , vues précédemment, il convient donc d'étudier également les asymptotiques  $x \rightarrow \infty$  et le comportement des solutions dans différents secteurs de l'espace de définition  $\Sigma_0 = \overline{\mathbb{C}} \ni x$ .

Au premier ordre, une solution s'écrit  $C_+ e^{\frac{1}{\hbar} \int \sqrt{V}} + C_- e^{-\frac{1}{\hbar} \int \sqrt{V}}$ . Lorsqu'une solution est dominante, on a  $\left| e^{\frac{1}{\hbar} \int \sqrt{V}} \right| \gg \left| e^{-\frac{1}{\hbar} \int \sqrt{V}} \right|$  ou le contraire. Le passage d'un régime à l'autre s'effectue donc sur la ligne  $\Re \left[ \int^x \sqrt{V} \right] = 0$ , appelée **rayon de Stokes** ou plus généralement mur. Dans une zone entre deux telles lignes, l'une des deux solutions est dominante. Si l'on parcourt un lacet autour d'un point de départ d'un nombre impair de rayon de Stokes, on change de secteur un nombre impair de fois et le signe dominant de la racine est donc changé. Les coefficients  $C_{\pm}$  ne peuvent alors pas tout à fait constants, et sont en fait seulement constants par secteurs.

En utilisant l'approximation de la phase stationnaire, une solution sera dominante là où sa phase varie le moins, c'est-à-dire lorsque  $\text{im} \left[ \int \sqrt{V} \right] = 0$ . On appelle ces trajectoires horizontales les anti-Stokes. Les coefficients  $C_{\pm}$  changent lorsque l'on traverse une ligne anti-Stokes; plus précisément, une solution étant très fortement dominante, le coefficient de l'autre peut être modifié. La transformation s'effectue donc par le biais d'une matrice qui est la somme de l'identité et d'une matrice strictement triangulaire.

Les domaines de validité de l'analyse WKB peuvent donc être comparés à ceux des asymptotiques semi-classiques, et les développements WKB doivent être faits avec des coefficients différents dans les différents secteurs de Stokes. Les développements WKB sont valables pour des  $x$  génériques dans un secteur donné, loin des pôles et des points



de branchement; l'asymptotique en  $x$  est valable dans un voisinage de pôle, dans un secteur donné.

### 4.3.3 Asymptotiques matricielles

On peut également reprendre l'analyse de la sous-section 4.3.1 dans la formulation matricielle de la section 4.2. Nous considérons toujours une équation  $(\hbar d - \mathcal{D})\Psi = 0$ , où  $\Psi(x) \in G$  et  $\mathcal{D}(x) \in \mathfrak{g}$ . On peut diagonaliser  $\mathcal{D}(x)$  (de façon non unique) comme  $W(x)Y(x)W(x)^{-1}$  où  $Y(x) \in \mathfrak{h}$  la sous-algèbre de Cartan, *i.e.* ici  $Y(x)$  est une matrice diagonale, et  $W(x)$  est une matrice de passage dont les colonnes sont les vecteurs propres des valeurs propres dans  $Y(x)$ . La matrice  $\mathcal{D}$  a des pôles  $p_i$ , et la section solution formelle  $y$  a pour comportement

$$\Psi(x) \underset{x \rightarrow p_i}{\sim} W(x) \hat{\Psi}(x) e^{\frac{1}{\hbar} \int^x Y(\xi) d\xi} C \quad (4.20)$$

où  $C$  est une matrice constante et  $\hat{\Psi}$  analytique dans un voisinage de  $p_i$ , avec un développement en  $\hat{\Psi}(x) \underset{p_i}{\sim} \mathbb{1} + \sum_{k \geq 0} \hat{\Psi}_k \cdot (x - p_i)^{k/d_i}$  où  $\hat{\Psi}_k$  peuvent avoir une dépendance en  $\hbar$ .

De façon similaire, le développement semi-classique est

$$\Psi(x) \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} W \hat{\Psi}^{\text{WKB}} e^{\frac{1}{\hbar} \int^x Y} \quad (4.21)$$

où  $\hat{\Psi}^{\text{WKB}}$  se développe dans un secteur de Stokes  $\ell$  comme  $\hat{\Psi}^{\text{WKB}}(x; \hbar) \sim \mathbb{1} + \sum_{k \geq 0} \hat{\Psi}_{\ell,k}^{\text{WKB}}(x)$ . L'expression (4.21) correspond en outre à un choix de  $C = \mathbb{1}$  (pour la multiplication à droite) dans un secteur donné, ce qui revient à un choix d'ordre pour les valeurs propres.

Les deux développements présentent donc des dépendances croisées : les coefficients  $\hat{\Psi}_{\ell,k}$  du développement en  $x$  dépendent de  $\hbar$ , et les  $\hat{\Psi}_{\ell,k}^{\text{WKB}}$  du développement en  $\hbar$  dépendent de  $x$ . Ces deux développements ne commutent pas *a priori*, et on ajoute des conditions limite en demandant qu'ils se recollent en une unique section  $\Psi$  analytique.

## Chapitre 5

# Construction de fonctions tau

### 5.1 Polynômes orthogonaux pour les modèles de matrices : la fonction tau comme fonction de partition

#### 5.1.1 Polynômes orthogonaux

Nous cherchons ici à déterminer une famille  $p_\bullet$  de polynômes moniques orthogonaux pour le produit scalaire de (1.31), c'est-à-dire tels que  $\langle p_n, p_m \rangle = h_n \delta_{n,m}$ . On peut aussi, en abandonnant la condition d'avoir des polynômes moniques, obtenir une famille orthonormale (pour un produit scalaire neutre correspondant à un  $V = 0$ ) en définissant

$$\omega_n = \frac{p_n}{\sqrt{h_n}} e^{-V/2}, \quad (5.1)$$

qui respectent bien  $\int \omega_n \omega_m = \delta_{n,m}$ . Dans cette base, pour (1.33), on a  $K_N(x, x') = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n(x) \omega_n(x')$ .

Les opérations de multiplication par  $x$  et de dérivation selon  $x$  donnent des relations de récurrence sur les  $p_n$  et donc sur les  $\omega_n$ . En particulier, on a la récurrence à trois termes

$$x \omega_n = \sum_m Q_{n,m} \omega_m = \gamma_{n+1} \omega_{n+1} + Q_{n,n} \omega_n + \gamma_n \omega_{n-1} \quad (5.2)$$

où  $Q$  est une matrice symétrique dont les seuls coefficients non nuls sont la diagonale et les deux bandes l'entourant, et avec  $\gamma_{n+1} = Q_{n,n+1} = Q_{n+1,n} = \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}}$ . De même,  $\omega'_n = \sum_m P_{n,m} \omega_m$  où  $P + \frac{1}{2}V'(Q)$  (respectivement  $-P + \frac{1}{2}V'(Q)$ ) est triangulaire inférieure (respectivement supérieure) stricte, d'où  $P$  a  $2k+1$  bandes non nulles de part et d'autre de la diagonale (*i.e.* les  $k$  plus proches de la diagonale de chaque côté).

Notons tout d'abord que ces polynômes peuvent s'interpréter comme valeurs moyennes de polynômes caractéristiques par les formules de Heine :

$$p_n(x) = \left\langle \det_{N \times N} (x - M) \right\rangle_{n \times n}, \quad (5.3)$$

ainsi que  $p_n(x) = \det_{n \times n} (x - Q_n)$  où  $Q_n$  est le bloc  $n \times n$  de la matrice infinie  $Q$ .

Il vient de (5.2) le théorème de Christoffel–Darboux :

$$K_N(x, x') = \gamma_N \frac{\omega_N(x) \omega_{N-1}(x') - \omega_{N-1}(x) \omega_N(x')}{x - x'}, \quad (5.4)$$

que l'on peut voir comme une analogie avec une mer de Fermi : en interprétant le terme  $\det_{i,j}(\omega_{j-1}(\lambda_i))$  dans  $\mathcal{Z}_N$  comme un déterminant de Slater et  $K_N$  comme un projecteur sur les états de  $|0\rangle$  à  $|N-1\rangle$  de fermions (avec  $|n\rangle = \omega_n(x)$ ), il suffit de connaître les états au niveau de Fermi.

Nous pouvons donc limiter l'étude au niveau de  $\omega_N$ , et le système différentiel  $\frac{d}{dx}\omega_n = \sum_{m=n-d}^{n+d} P_{n,m}\omega_m$  se ramène à  $\frac{d}{dx}\Psi(x) = \mathcal{D}_N(x)\Psi(x)$  avec  $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \omega_{N-1}(x) & \phi_{N-1}(x) \\ \omega_N(x) & \phi_N(x) \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \phi_{N-1}(x) \\ \phi_N(x) \end{pmatrix}$  est la deuxième solution indépendante de l'équation d'ordre 2.

Les fonctions  $\omega_N$  sont définies par une relation de récurrence, d'où elles sont entièrement déterminées par les conditions initiales. Afin d'obtenir une autre solution  $\phi_N$ , il faut changer les conditions initiales, ou de façon équivalente modifier les équations pour des petites valeurs de  $N$ . On peut choisir la transformée de Hilbert

$$\phi_n(x) = e^{V(x)/2} \int_{\gamma} \frac{\omega_n(x') e^{-V(x')/2}}{x - x'} dx' \quad (5.5)$$

qui respecte bien  $x\phi_n(x) = \delta_{n,0}\sqrt{h_0}e^{V(x)/2} + \sum_m Q_{n,m}\phi_m(x)$ , c'est-à-dire la même équation de récurrence à trois termes que (5.2) à l'exception du premier terme  $n = 0$  (ce que l'on peut aussi absorber dans la définition de  $\phi_{-1}$ ). En écrivant la chaîne d'intégration  $\gamma = \sum_i c_i \gamma_i$ , l'intégrale définissant  $\phi_n$  n'est pas bien définie si  $x \in \gamma_i$ , et la discontinuité sur ce cycle est alors

$$\Psi_N(x + i0) = \Psi_N(x - i0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i\pi c_i & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

où l'on utilise la notation  $\pm i0$  pour indiquer des déplacements infinitésimaux de part et d'autre du cycle  $\gamma_i$ .

### 5.1.2 Noyau matriciel

Notons  $\psi_i$ ,  $i = 1, 2$  les deux vecteurs colonne de la matrice  $\Psi$ . Nous pouvons alors généraliser le noyau  $K(x', x)$  construit à partir de  $\psi_1$  en introduisant le noyau matriciel

$$\mathbb{K}(x', x) = \frac{1}{x - x'} \Psi_N(x')^{-1} \Psi_N(x) \quad (5.7)$$

dont les composantes respectent  $(x - x')\mathbb{K}(x', x)_{i,j} = -\psi_{\bar{i}}(x')^\top A_N \psi_j(x)$  où  $\bar{1} = 2, \bar{2} = 1$  et  $A_N = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_N \\ -\gamma_N & 0 \end{pmatrix}$  est la **matrice de Christoffel-Darboux**. En particulier,  $K(x', x) = \mathbb{K}(x', x)_{2,1}$ .

Considérons la résolvante  $W_1(x) := \langle \text{Tr} \left[ \frac{1}{x - M} \right] \rangle$  (où  $\frac{1}{x - M}$  est défini comme une série  $\sum_k \frac{M^k}{x^{k+1}}$ ), qui est égale à  $W_1(x) = N \int_{\gamma} \frac{\rho(x') dx'}{x - x'}$  où  $\rho(x') = \frac{1}{N} \mathbb{K}(x', x')_{2,1}$ . En comparant les discontinuités le long des cycles  $\gamma_i$ , il apparaît que  $W_1(x) = \lim_{x' \rightarrow x} (\mathbb{K}(x', x)_{2,2} - \frac{1}{x - x'})$ . De façon générale, le noyau  $\mathbb{K}(x', x)_{2,2}$  est l'objet fondamental qui permet d'obtenir tous les  $\mathbb{K}(x', x)_{i,j}$ . Soit le projecteur  $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; alors

$$\mathbb{K}(x', x)_{2,2} - \frac{1}{x - x'} = \text{Tr} \left[ E \frac{\Psi(x')^{-1} \Psi(x) - \mathbb{1}}{x - x'} \right]. \quad (5.8)$$

En écrivant  $x = x' + \epsilon$  au premier ordre et en passant à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , on obtient

$$\mathbb{K}(x', x)_{2,2} - \frac{1}{x - x'} = \text{Tr} [\Psi(x) E \Psi(x)^{-1} \mathcal{D}_N(x)] =: \text{Tr} [M(x \cdot E) \mathcal{D}_N(x)] \quad (5.9)$$

où l'on définit  $M(x \cdot E) = \Psi(x)E\Psi(x)^{-1}$ . Cette matrice étant simplement une conjuguée de  $E$  elle partage ses invariants, et en particulier n'a qu'une composante indépendante parmi ses quatre, que l'on peut choisir comme étant  $-\gamma_N \varpi_N \phi_N$ .

On a plus généralement, pour la résolvante  $W_n(x_1, \dots, x_n) = \left\langle \frac{1}{x_1 - M} \cdots \frac{1}{x_n - M} \right\rangle_c$ , que

$$\begin{aligned} W_n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{\text{circ}}} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^n \mathbb{K}(x_i, x_{\sigma(i)})_{2,2} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n^{\text{circ}}} (-1)^\sigma \frac{\text{Tr} \left[ \prod_i M(x_{\sigma^i(1)} \cdot E) \right]}{\prod_i (x_i - x_{\sigma(i)})} \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $\mathfrak{S}_n^{\text{circ}}$  indique les permutations circulaires uniquement. L'étude est faite à partir des discontinuités de  $W_n$ , qui doit donc être considérée comme une fonction multivaluée, c'est-à-dire bien définie non pas sur  $\Sigma_0$  mais sur un espace plus grand.

À cette fin, définissons les paires  $X = (x \cdot E)$  avec  $x$  dans le revêtement universel  $\widetilde{\Sigma}_0$  et  $E \in \mathfrak{g} := \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$  (la matrice  $E$  peut en fait varier, ce qui doit revenir à changer de feuillet pour  $x$ ), ainsi que la projection  $\pi: X \mapsto x$ . On peut donc plutôt parler de  $W_1(X) = \text{Tr} [M(X)\mathcal{D}_N(\pi(X))]$  et de  $W_n(X_1, \dots, X_n)$  avec  $X_i = (x_i \cdot E_i)$ . Si l'on calcule la monodromie  $S(\gamma)\Psi(x + \gamma)\Psi(x)^{-1}$  le long d'un cycle  $\gamma$  entourant un pôle, on obtient  $M((x + \gamma) \cdot E) = M(x \cdot (S(\gamma)ES(\gamma)^{-1}))$ , et donc il nous faut travailler dans le quotient

$$\widehat{\Sigma}_0 := \frac{\widetilde{\Sigma}_0 \times \mathfrak{g}}{\left( (x + \gamma) \cdot E \right) \equiv \left( x \cdot (S(\gamma)ES(\gamma)^{-1}) \right)}. \quad (5.11)$$

Dans la limite classique  $N \rightarrow \infty$ , ce fibré se localise sur certaines sections et se comporte alors comme un revêtement [BER17]. Sa géométrie régit les systèmes différentiels Fuchsien, et les objets définis sur les surfaces de Riemann s'y généralisent.

### 5.1.3 Fonction de partition et équation de Hirota

On peut écrire le développement

$$\Psi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \widehat{\Psi}(x) e^{\sigma_3 T(x)} \quad (5.12)$$

où  $T(x) = \frac{-V(x)}{2} + N \ln(x)$  et  $\sigma_3$  est la matrice de Pauli, et où  $\widehat{\Psi}(x) \underset{\infty}{\sim} \mathbb{1} \pmod{\mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}$ . Par comparaison des comportements asymptotiques, il en vient

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x') \mathbb{K}(x', x) e^{-\sigma_3 T(x)} &= \Psi(x')^{-1} \\ \lim_{x' \rightarrow \infty} (x - x') \mathbb{K}(x', x) e^{\sigma_3 T(x')} &= \Psi(x), \end{aligned} \quad (5.13)$$

d'où en particulier «  $\mathbb{K}(\infty, x)_{2,2}$  » donne  $\varpi_N(x)$  et «  $\mathbb{K}(x', \infty)_{2,2}$  » donne  $\phi_{N-1}(x')$ .

Nous avons interprété par la formule de Heine (5.3) les polynômes orthogonaux comme des valeurs moyennes de polynômes caractéristiques. Nous pouvons de façon similaire interpréter le noyau

$$\mathbb{K}(x', x)_{2,2} = \frac{e^{(V(x') - V(x))/2}}{x - x'} \left\langle \frac{\det(x - M)}{\det(x' - M)} \right\rangle_{n \times n}, \quad (5.14)$$

d'où

$$(x - x')\mathbb{K}(x', x)_{2,2} = \frac{1}{\mathcal{Z}_N(V)} \int dM e^{-\text{Tr}[V(M) - \ln(x-M) + \ln(x'-M)]}. \quad (5.15)$$

Écrivons  $V(M) = \sum_k \frac{v_k}{k} M^k$  et explicitement  $\mathcal{Z}_N(\mathbf{v})$  avec le vecteur de paramètres  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$ ; alors

$$(x - x')\mathbb{K}(x', x)_{2,2} = \frac{1}{\mathcal{Z}_N(\mathbf{v})} \frac{x^N}{(x')^N} \int dM \exp \left( -\text{Tr} \left[ \sum_k \frac{1}{k} (v_k - x^{-k} + (x')^k) M^k \right] \right). \quad (5.16)$$

Introduisons la notation de Sato  $[x] = (\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots)$  et posons  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - [x] + [x']$ ; les équations précédentes se réécrivent alors comme la formule de Sato

$$\mathbb{K}(x', x)_{2,2} = \frac{1}{x - x'} \frac{x^N}{(x')^N} e^{(V(x') - V(x))/2} \frac{\mathcal{Z}_N(\tilde{\mathbf{v}})}{\mathcal{Z}_N(\mathbf{v})} \quad (5.17)$$

où le préfacteur vient de ce que  $\mathcal{Z}$  n'est pas bien normalisée (et la fonction tau correcte tient compte de ces préfacteurs).

On en tire des équations similaires pour  $\omega_N$  et  $\phi_N$ , et on réécrit la condition d'orthogonalité en terme de résidu formel à l'infini,  $\text{Res}_\infty \omega_N \phi_M = \delta_{N,M}$ . Ici, l'intégrale de contour étant rendue impossible par la présence de  $\phi_M$  qui est discontinue sur le contour, nous devons définir le résidu de façon appropriée, c'est-à-dire comme le coefficient de  $x^{-1}$  dans le développement formel à l'infini. On pose  $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}}{2}$  et  $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}}{2}$ , et l'on obtient l'équation de Hirota

$$\text{Res}_\infty e^{\sum u_k x^k/k} \frac{x^N}{x^{M+1}} \mathcal{Z}_N(\mathbf{t} + \mathbf{u} - [x]) \mathcal{Z}_{M+1}(\mathbf{t} - \mathbf{u} + [x]) = \delta_{N,M} \mathcal{Z}_N(\mathbf{t} + \mathbf{u}) \mathcal{Z}_{M+1}(\mathbf{t} - \mathbf{u}) \frac{\sqrt{h_N}}{\sqrt{\tilde{h}_N}} \quad (5.18)$$

(où  $\tilde{h}_N$  se réfère au potentiel de coefficients  $\tilde{v}_k$ ).

Cette équation permet de retrouver des systèmes intégrables bien connus. En posant  $\zeta = 2 \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \ln \mathcal{Z}$ , et en prenant dans l'équation  $M = N - 1$  le coefficient de  $u_1^3$ , l'on retrouve l'équation KP  $\frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \zeta + \frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{1}{12} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t_1^3} - \frac{1}{2} \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t_1} - \frac{\partial \zeta}{\partial t_3} \right) = 0$ . Si en outre la dépendance est uniquement en les temps impairs, i.e.  $\partial/\partial t_2 = 0$  on obtient l'équation de KdV.

Finalement, on obtient en utilisant les asymptotiques de  $\Psi$  pour calculer le résidu et en posant  $\hat{T}(x) := \sigma_3 T(x)$  que

$$\frac{\partial \ln \mathcal{Z}_N(\mathbf{t})}{\partial t_k} = \text{Res}_{x \rightarrow \infty} \text{Tr} \left[ \hat{\Psi}(x)^{-1} \mathcal{D}_N(x) \frac{\partial \hat{T}(x)}{\partial t_k} \right]. \quad (5.19)$$

Cette équation définit  $\ln \mathcal{Z}$  comme la fonction tau dans le cadre de Miwa-Jimbo : si l'on a une matrice  $\Psi$  telle que  $\partial_x \Psi = \mathcal{D} \Psi$  et  $\Psi \sim \hat{\Psi} e^{\hat{T}}$  avec  $\hat{\Psi}$  analytique à l'infini et  $\hat{T}$  diagonale, alors le formalisme de Miwa-Jimbo définit la fonction  $\tau$  par les conditions

$$\frac{\partial \tau}{\partial t_k} = \text{Res}_\infty \text{Tr} \left[ \hat{\Psi}^{-1} \mathcal{D} \hat{\Psi} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t_k} \right]. \quad (5.20)$$

## 5.2 Définition perturbative de fonctions tau

### 5.2.1 Opérateur de Hirota

Pour une déformation de la courbe  $\mathcal{S}_t$  selon un paramètre  $t$ , on a  $\partial_t(y dx(z)) = \frac{B(p,z)}{v(p)}$  où la forme  $v$  compense la dépendance en  $p$  de  $B$ . Si  $v$  est la forme  $dx$ , alors la déformation  $\partial_t$  est donnée par le cycle généralisé entier  $\gamma_{p,-1}$ . On peut alors définir l'**opérateur de Hirota**

$$\Delta_p = dx(p) \boxtimes \gamma_{p,-1}. \quad (5.21)$$

On a par définition  $\Delta_p \omega_{0,1}(z) = \omega_{0,2}(p, z)$ , et en fait plus généralement  $\Delta_p \omega_{g,n}(z_1, \dots, z_n) = \omega_{g,n+1}(p, z_1, \dots, z_n)$ . Avec (3.18), il en vient que pour tout cycle généralisé de déformation  $\Gamma$  on a  $\partial_\Gamma = \langle \Gamma, \Delta \rangle$ , soit  $\partial_\Gamma(\bullet) = \int_{p \in \Gamma} \Delta_p(\bullet)$  : l'opérateur de Hirota engendre toutes les déformations.

Avec un choix de polarisation, nous avons pu définir en sous-section 3.2.3 une énergie libre  $\mathcal{F}_{0,\mathcal{L}}(\mathcal{S}_t)$  telle que  $\Delta_p \mathcal{F}_{0,\mathcal{L}}(\mathcal{S}_t) = \omega_{0,1}(p)$ . Nous cherchons alors à définir une fonction  $\tau_\hbar$  sur  $\mathfrak{S}_\mathcal{S}$  (ou plutôt une famille de fonctions indexée par le paramètre  $\hbar$ ) admettant  $\mathcal{F}_{0,\mathcal{L}}$  comme limite classique (et il faudra donc écrire plus précisément  $\tau_{\hbar,\mathcal{L}}(\mathcal{S}_t)$ ), soit telle que

$$\hbar \Delta_p \ln \tau_{\hbar,\mathcal{L}}(\mathcal{S}_t) = \sum_g \hbar^{2g-2} \omega_{g,1}(p). \quad (5.22)$$

Posons  $\widehat{\omega}_n := \sum_g \hbar^{-\chi_{g,n}} \omega_{g,n}$  ; l'équation définissant la fonction tau s'écrit alors

$$\hbar \Delta_p \ln \tau_{\hbar,\mathcal{L}}(\mathcal{S}_t) = \widehat{\omega}_1(p), \quad (5.23)$$

ou de façon équivalente

$$\forall \Gamma \in \mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}), \hbar \partial_\Gamma \ln \tau = \int_\Gamma \widehat{\omega}_1. \quad (5.24)$$

Si  $\Gamma$  est un cycle méromorphe (*i.e.* de deuxième espèce) autour de l'infini, il s'agit bien de l'équation de Miwa–Jimbo.

L'existence d'une telle fonction tau requière la condition de courbure nulle,  $\partial_{t_k} \ln \tau_\hbar = \partial_{t_j} \ln \tau_\hbar$  en terme des paramètres ou plutôt  $\hbar \Delta_{p_1} \Delta_{p_2} \ln \tau_\hbar = \hbar \Delta_{p_2} \Delta_{p_1} \ln \tau_\hbar$ , ce qui est garanti par la symétrie des invariants  $\omega_{g,n}$  et donc de  $\widehat{\omega}_2$ .

### 5.2.2 Fonction tau

On peut définir la fonction tau perturbativement comme

$$\tau_{\hbar,\mathcal{L}}(\mathcal{S}_t) = e^{\widehat{\omega}_0(\mathcal{S}_t)} = e^{\sum_{g \geq 0} \hbar^{-\chi_{g,0}} \mathcal{F}_{g,\mathcal{L}}(\mathcal{S}_t)} = e^{\frac{1}{\hbar^2} \mathcal{F}_{0,\mathcal{L}}(\mathcal{S}_t)} e^{\sum_{g \geq 1} \hbar^{2g-2} \mathcal{F}_g(\mathcal{S}_t)}. \quad (5.25)$$

Comme dans le cadre de l'analyse WKB, la partie en  $\hbar^{-2}$  est la partie classique et celle en puissances non négatives (paires) de  $\hbar$  est constituée des corrections quantiques. En général, les énergies libres ont un comportement asymptotique  $\mathcal{F}_g \sim g!$ , donc  $\tau_{\hbar,\mathcal{L}}$  n'est qu'une série formelle (de rayon de convergence nul).

Pour une petite déformation de  $\mathcal{S}$  dans la direction d'un cycle tangent  $\Gamma$  selon un temps  $t$  (où  $|t|$  est suffisamment infinitésimal), on peut développer les  $\omega_{g,n}$  en série de

Taylor  $\omega_{g,n}(\mathcal{S} + t\gamma) = \sum_k \frac{t^k}{k!} \partial_\Gamma^k$  en  $t$ , et comme leurs « dérivées » selon le cycle ne sont que des intégrales d'invariants supérieurs, on peut écrire

$$\omega_{g,n}(\mathcal{S} + t\Gamma) = \sum_k \frac{t^k}{k!} \underbrace{\int_\Gamma \cdots \int_\Gamma}_{k \text{ fois}} \omega_{g,n+k}(\mathcal{S}). \quad (5.26)$$

En particulier, on a ici

$$\sum_g \hbar^{-\chi_{g,0}} \mathcal{F}_g(\mathcal{S} + \hbar\Gamma) = \sum_{g,n} \frac{\hbar^{-\chi_{g,n}}}{n!} \int_\Gamma \cdots \int_\Gamma \omega_{g,n}, \quad (5.27)$$

ce qui peut converger car  $\hbar$  est très petit.

Nous avons caractérisé l'espace des déformations  $\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C}) \supset T_{\mathcal{S}} \mathfrak{S}_{\mathcal{S}}$  comme constitué des cycles généralisés de première et de deuxième espèce. On peut l'étendre de chaînes dites de troisième espèce, qui ne sont pas des cycles mais des arcs reliant deux points ordonnés, et l'action sur les formes n'ayant pas de pôles en ces points est définie de manière évidente comme l'intégrale de chemin. Leur bord n'est donc pas vide, mais doit être un diviseur de degré 0 :  $\partial\gamma = [z_2] - [z_1]$ . On écrira un tel cycle généralisé  $[z_1, z_2]$ . On a  $\widehat{B}([z_1, z_2])(z) = \left(\frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{z-z_1}\right) dz$ , qui a donc deux pôles de résidus  $\pm 1$ . Son diviseur associé est donc  $\text{div } \widehat{B}([z_1, z_2]) = [z_2] - [z_1] = \partial[z_1, z_2]$ .

Si l'on calcule la fonction tau à l'aide de (5.27) en prenant pour  $\gamma$  un cycle de troisième espèce  $[z', z]$  (et en normalisant par  $\tau(\mathcal{S})$ , le terme  $n = 0$ ), on obtient la fonction d'onde

$$\Psi(z', z) = \exp \left( \sum_{\substack{g,n \\ n \geq 1}} \frac{\hbar^{-\chi_{g,n}}}{n!} \int_{z'}^z \cdots \int_{z'}^z \omega_{g,n} \right). \quad (5.28)$$

Les invariants de la récurrence topologique sont homogènes de degré  $-\chi_{g,n}$  par rapport à la courbe spectrale. Spécifiquement, pour la remise à l'échelle  $\hbar^{-1}\mathcal{S} := (\Sigma, x, \hbar^{-1}y, B)$  les invariants deviennent  $\hbar^{+\chi_{g,n}} \omega_{g,n}$ . Par suite,  $\tau_{\hbar}(\mathcal{S}) = \tau(\hbar^{-1}\mathcal{S})$ . On peut donc se ramener dans l'écriture de  $\Psi$  à une notation de Sato

$$\Psi(z', z) = \frac{\tau_{\hbar}(\mathcal{S} + \hbar[z, z'])}{\tau_{\hbar}(\mathcal{S})} = \frac{\tau_{\hbar}(\mathcal{S} + \hbar[z'] - \hbar[z])}{\tau_{\hbar}(\mathcal{S})} = \frac{\tau(\hbar^{-1}\mathcal{S} + [z'] - [z])}{\tau(\hbar^{-1}\mathcal{S})}. \quad (5.29)$$

### 5.2.3 Expression en fonction des temps

Nous pouvons nous ramener à une expression en coordonnées similaire à celle de la sous-section 5.1.3 en travaillant sur le plan tangent à l'infini (en supposant que  $x$  y est une bonne coordonnée, c'est-à-dire a un pôle simple à l'infini). Nous allons donc exprimer la fonction  $\tau$  en fonction des coordonnées  $t_i$  sur l'espace des courbes spectrales. Les coordonnées naïves caractérisant une courbe pourraient être les coefficients du polynôme  $P(x, y)$  qui la définit, cependant des petites variations de ces coefficients peuvent correspondre à des variations brutales de la courbe (telles qu'un changement de genre). De meilleures coordonnées sont données par les périodes des courbes, les intégrales de formes (méromorphes) sur des cycles (généralisés).

En écrivant la série de Laurent à l'infini de  $y \, dx$ , on obtient que l'opérateur de Hirota admet le développement

$$\Delta_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \, dx(p)}{x(p)^{k+1}} \frac{\partial}{\partial t_k}. \quad (5.30)$$

On a un développement similaire en  $z$  :

$$y \, dx(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} - \sum_{k=0}^{d_\infty} t_{\infty,k} x^{k-1} \, dx \mod \mathcal{O}(x^{-2}) \quad (5.31)$$

avec le vecteur de temps  $\mathbf{t}_\infty = (t_{\infty,0}, \dots, t_{\infty,d_\infty}, 0, 0, \dots)$  (et en particulier  $t_{\infty,0} = \text{Res}_\infty y \, dx$ ). Cependant, alors qu'il n'y avait bien qu'un unique point à l'infini sur  $\overline{\mathbb{C}}$  pour  $x$ , ce point a plusieurs antécédents  $\infty_i$  sur la courbe spectrale, et le développement en  $z$  à l'infini doit donc être fait à ces différents points.

Si l'on l'on perturbe la courbe par  $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} + \hbar[z_1, z_2]$ , alors  $y \, dx$  devient

$$y \, dx + \hbar \left( \frac{1}{x - x_2} - \frac{1}{x - x_1} \right) dx + \text{analytique en } (\infty, z_1, z_2). \quad (5.32)$$

Les tempes ont donc été perturbés selon  $t_{\infty,k} \rightarrow t_{\infty,k} + \hbar \frac{1}{z_2^k} - \hbar \frac{1}{z_1^k}$ . En utilisant la notation de Sato  $[x] = (1, x^{-1}, x^{-2}, \dots)$  on peut donc écrire là encore

$$\Psi(x_2, x_1) = \frac{\tau(\hbar^{-1} \mathbf{t}_\infty + [x_2] - [x_1])}{\tau(\hbar^{-1} \mathbf{t}_\infty)}. \quad (5.33)$$





# Conclusion

La récurrence topologique propose une réponse au problème de la quantification : partant d'une courbe spectrale, un polynôme  $P(x, y)$  et ses solutions, les solutions du polynôme non commutatif quantifié, la courbe quantique  $P\left(\hbar \frac{d}{dx}, x\right)$ , sont données perturbativement par la récurrence topologique. En effet, la fonction d'onde dont l'expansion en le paramètre  $\hbar$  est donnée par les primitives des invariants de la récurrence topologique est bien solution de l'équation de Schrödinger correspondant au système différentiel quantifié. De cette façon, on peut reconstruire des systèmes intégrables et obtenir leurs quantités conservées.

Les invariants de la récurrence topologique ont également une interprétation énumérative, où ils apparaissent comme les fonctions génératrices de problèmes de géométrie énumérative. On peut donc calculer des nombres d'intersections sur des espaces de modules en étudiant la courbe spectrale qui est le pendant du modèle A énumératif. De façon générale, à partir d'un problème de géométrie énumérative, on obtient des fonctions génératrices dont la spécialisation principale donne une certaine « fonction d'onde ». Cette fonction est solution d'une équation de Schrödinger, ou courbe quantique, et la correspondance de Riemann–Hilbert associe à l'opérateur différentiel sa représentation de monodromie, et la courbe spectrale qui lui correspond. En appliquant alors la récurrence topologique à la courbe spectrale ainsi construite, on obtient une série d'invariants qui calculent les coefficients des fonctions génératrices originales, c'est-à-dire les volumes des espaces de modules d'intérêt.

Une question est de suivre la procédure dans l'autre sens : étant donnée une courbe spectrale quelconque et ses invariants de récurrence topologique, c'est-à-dire le modèle B, il s'agit de remodeler le problème de géométrie énumérative résolu par ces invariants, c'est-à-dire le modèle A, ce qui est fait dans[Eyn14b] à partir d'un espace de modules de courbes « colorées » par le profil de branchement de la courbe spectrale du modèle B étudié. Ces outils donnent alors une correspondance complètement biunivoque entre le modèle A, qui est la théorie de l'intersection et donc la géométrie symplectique d'un espace de modules, et le modèle B, la géométrie complexe des fibrés vectoriels sur la courbe associée : on a donc une situation correspondant au cadre de la symétrie miroir, et on peut donc parler de courbe miroir du problème, une transformée de Laplace jouant alors le rôle d'application miroir qui fait correspondre les paramètres du modèle A à ceux du modèle B (les coefficients du polynôme de la courbe spectrale).

La récurrence topologique éclaire donc deux grands problèmes de la Physique actuelle. Le premier est la symétrie miroir, la relation entre deux formulations des théories de cordes topologiques associées à des variétés dites miroirs, et qui est généralisé à un paradigme plus général de dualités entre les modèles A (de théories d'intersection) et B (de géométrie complexe). Le second est la quantification, en particulier dans le cadre des systèmes intégrables où la récurrence topologique permet de calculer les fonctions-tau.

Il existe dans la littérature des systèmes différentiels intégrables plusieurs définitions de la fonction-tau (de Miwa–Jimbo, Hirota, ...) qui sont équivalentes dans les exemples connus, mais il n’y a pas de notion générale englobant ces définitions et prouvant leur équivalence. La reformulation à partir de la récurrence topologique permet d’étudier la géométrie liée aux fonctions-tau et donc d’en donner une nouvelle vision intrinsèque, fondée sur l’homologie des courbes spectrales, qui peut ensuite être étendu à des versions non perturbatives et non commutatives.

# Bibliographie

- [BBT03] Olivier BABELON, Denis BERNARD et Michel TALON. *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [BER17] R. BELLIARD, B. EYNARD et S. RIBAUT. “The geometry of Casimir W-algebras”. In : *ArXiv e-prints* (juil. 2017). arXiv : 1707.05120 [math-ph].
- [Bor17] G. BOROT. “Lecture notes on topological recursion and geometry”. In : *ArXiv e-prints* (mai 2017). arXiv : 1705.09986 [math-ph].
- [BW97] S. BATES et A. WEINSTEIN. *Lectures on the Geometry of Quantization*. Berkeley mathematics lecture notes. American Mathematical Society, 1997. ISBN : 9780821807989. URL : <https://math.berkeley.edu/~alanw/GofQ.pdf>.
- [DM15] O. DUMITRESCU et M. MULASE. “Lectures on the topological recursion for Higgs bundles and quantum curves”. In : *ArXiv e-prints* (sept. 2015). arXiv : 1509.09007 [math.AG].
- [DM95] R. DONAGI et E. MARKMAN. “Spectral curves, algebraically completely integrable Hamiltonian systems, and moduli of bundles”. In : *eprint arXiv :alg-geom/9507017*. Juil. 1995. arXiv : 9507017 [alg-geom].
- [EKR15] B. EYNARD, T. KIMURA et S. RIBAUT. “Random matrices”. In : *ArXiv e-prints* (oct. 2015). arXiv : 1510.04430 [math-ph].
- [Ell+17] J. ELLEGAARD ANDERSEN et al. “The ABCD of topological recursion”. In : *ArXiv e-prints* (mar. 2017). arXiv : 1703.03307 [math-ph].
- [EO07] Bertrand EYNARD et Nicolas ORANTIN. “Invariants of algebraic curves and topological expansion”. In : *Commun. Num. Theor. Phys.* 1 (2007), p. 347–452. DOI : 10.4310/CNTP.2007.v1.n2.a4. arXiv : math-ph/0702045 [math-ph].
- [EO08] B. EYNARD et N. ORANTIN. “Algebraic methods in random matrices and enumerative geometry”. In : *ArXiv e-prints* (nov. 2008). arXiv : 0811.3531 [math-ph].
- [EO15] Bertrand EYNARD et Nicolas ORANTIN. “Computation of Open Gromov–Witten Invariants for Toric Calabi–Yau 3-Folds by Topological Recursion, a Proof of the BKMP Conjecture”. In : *Commun. Math. Phys.* 337.2 (2015), p. 483–567. DOI : 10.1007/s00220-015-2361-5. arXiv : 1205.1103 [math-ph].
- [Eyn14a] B. EYNARD. “A short overview of the “Topological recursion””. In : *ArXiv e-prints* (déc. 2014). arXiv : 1412.3286 [math-ph].
- [Eyn14b] B. EYNARD. “Invariants of spectral curves and intersection theory of moduli spaces of complex curves”. In : *Commun. Num. Theor. Phys.* 08 (2014), p. 541–588. DOI : 10.4310/CNTP.2014.v8.n3.a4. arXiv : 1110.2949 [math-ph].

- [Eyn16] B EYNARD. *Counting Surfaces*. Progress in Mathematical Physics 70. Springer – Birkhäuser, 2016.
- [Eyn17] B. EYNARD. “The Geometry of integrable systems. Tau functions and homology of Spectral curves. Perturbative definition”. In : *ArXiv e-prints* (juin 2017). arXiv : 1706.04938 [math-ph].
- [Fay06] J.D. FAY. *Theta Functions on Riemann Surfaces*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN : 9783540378150. URL : <https://books.google.fr/books?id=SJ57CwAAQBAJ>.
- [Hor+03] Kentaro HORI et al. *Mirror Symmetry*. Clay Mathematics Monographs. American Mathematical Society, 2003.
- [Kon92] Maxim KONTSEVICH. “Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function”. In : *Comm. Math. Phys.* 147.1 (1992), p. 1–23. URL : <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104250524>.
- [KS17] M. KONTSEVICH et Y. SOIBELMAN. “Airy structures and symplectic geometry of topological recursion”. In : *ArXiv e-prints* (jan. 2017). arXiv : 1701.09137 [math.AG].
- [Mum83] David MUMFORD. *Tata Lectures on Theta*. T. I,II. 2 t. Birkhäuser, 1983.
- [Str84] K. STREBEL. *Quadratic Differentials*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 1984. ISBN : 9783540130352. URL : <https://books.google.fr/books?id=hiI96XVWdb0C>.
- [Wit91] Edward WITTEN. “Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space”. In : *Surveys in Diff. Geom* 1.243 (1991), p. 74.

# Liste de symboles

$\boxtimes$  Produit tensoriel externe ; si  $E_1 \rightarrow X_1$  et  $E_2 \rightarrow X_2$  sont deux fibrés vectoriels, alors  $(E_1 \boxtimes E_2) \rightarrow (X_1 \times X_2)$  est le fibré  $p_1^*E_1 \otimes p_2^*E_2$  où  $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$

$\coprod$  Union disjointe

$\langle \bullet \rangle$  Fonction de corrélation, valeur moyenne

$\langle \bullet \rangle_c$  Cumulant ou valeur moyenne connexe

$\wedge$  Produit extérieur, produit tensoriel antisymétrisé

$\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_i$  Cycles de la base symplectique de  $H_1(\Sigma)$

$\text{Aut}(X)$  Groupe d'automorphismes de  $X$

$\overline{\mathbb{C}}$  Sphère de Riemann, compactifié à un point  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  de  $\mathbb{C}$

$\mathcal{C}_p$  Contour infinitésimal entourant  $p$

$\chi_{g,n}$  Caractéristique d'Euler d'une surface de genre  $g$  à  $n$  bords :  $\chi_{g,n} = 2 - 2g - n$

$d$  Dérivée extérieure des formes différentielles

$d_{z_i}$  Dérivée extérieure « partielle » :  $d_{z_i} f = \partial_{z_i} f dz_i$

$d_{g,n}$  Dimension (complexe) de  $\mathcal{M}_{g,n}$  :  $d_{g,n} = 3g - 3 + n$

$\delta$  Variation due à une déformation

$\Delta_p$  Opérateur de Hirota

$\mathcal{F}_g$  « Énergie libre »  $\omega_{g,0}$

$F_{g,n}$  Primitive de  $\omega_{g,n}$  :  $F_{g,n} = \int_{\infty}^{z_1} \cdots \int_{\infty}^{z_n} \omega_{g,n}$  telle que  $\omega_{g,n} = d_{z_1} \boxtimes \cdots \boxtimes d_{z_n} F_{g,n}$

$\mathfrak{g}$  Algèbre de Lie du groupe de Lie  $G$

$\gamma \cdot f$  Cycle généralisé, paire du cycle  $\gamma$  et de la fonction  $f$

$\Gamma(X, E)$  Ensemble des sections globales du fibré  $E \rightarrow X$ , fonctions  $s: X \rightarrow E$  telles que  $s(x) \in E_x$

$K_X$  Fibré canonique de la variété complexe  $X$

$\mathcal{M}_{g,n}$  Espace de modules des surfaces de genre  $g$  à  $n$  points marqués

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$  Compactification de Deligne–Mumford de  $\mathcal{M}_{g,n}$  ; espace de modules des courbes stables

$\mathfrak{M}^1(\Sigma, \mathbb{C})$  Espace des 1-formes méromorphes sur  $\Sigma$

$\mathfrak{M}_1(\Sigma, \mathbb{C})$  Espace des cycles généralisés sur  $\Sigma$

$\omega_{g,n}$  Invariant de la récurrence topologique

$\text{Res}_p$  Résidu en  $p$  ; pour  $\omega$  une 1-forme méromorphe,  $\text{Res}_p \omega = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}_p} \omega$ . Si  $\omega(z) = f(z) dz$  avec la série de Laurent  $f(z) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$  alors  $\text{Res}_p \omega = a_{-1}$

$\mathcal{S}$  Courbe spectrale

$\mathfrak{S}$  « Espace » des courbes spectrales

$\mathfrak{S}_{\mathcal{S}}$  Espace des courbes spectrales autour de  $\mathcal{S}$

$\sigma_a$  Involution locale de Galois au voisinage du point de branchement  $a$

$\Sigma_g$  Surface de Riemann de genre  $g$

$T^{\vee}X$  Fibré cotangent de  $X$

$Z_N$  Fonction de partition

## **Troisième partie**

### **Annexes**





## Annexe A

# Géométrie complexe, différentielle et algébrique

### A.1 Algèbre : quotients, modules

**Définition A.1** (Relation d'équivalence). Une **relation d'équivalence** sur un ensemble  $X$  est une relation  $\sim$  sur  $X$  qui est :

**réflexive** :  $\forall x \in X, x \sim x$  ;

**symétrique** :  $x \sim y$  si et seulement si  $y \sim x$  ;

**transitive** : si  $x \sim y$  et  $y \sim z$  alors  $x \sim z$ .

Pour tout  $x \in X$ , on note  $[x]$  et on appelle **classe d'équivalence de  $x$**  l'ensemble  $\{y \in X \mid x \sim y\}$  des éléments de  $X$  équivalents à  $x$ .

Il découle de la définition que  $[x] = [y]$  ssi  $x \sim y$ . Pour toute relation  $\sim$  sur un ensemble  $X$ , l'ensemble de ses classes d'équivalence partitionne  $X$  : tout  $x \in X$  est dans la classe  $[x]$ , et si  $x \in c_1$  et  $x \in c_2$  alors  $c_1 = c_2$ . On note  $X/\sim$  cet ensemble de classes d'équivalence, et il y a une surjection naturelle  $q: X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x]$ . Une fonction  $f: X \rightarrow Y$  sur  $X$  définit une fonction  $[f]: X/\sim \rightarrow Y$  ssi elle est constante sur chaque classe d'équivalence ; on dit aussi qu'elle passe au quotient.

En particulier, si  $G$  est un groupe opérant (par exemple à gauche) sur un ensemble  $X$ , on note  $X/G$  le quotient par la relation :  $x \sim y$  ssi  $\exists g \in G \mid y = g \cdot x$ , c'est-à-dire si  $x$  et  $y$  sont dans la même orbite sous l'action de  $G$ . On appelle  $X/G$  l'espace des orbites par  $G$ .

**Définition A.2** (Sous-groupe distingué). Un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  est dit **distingué** ou **normal** si il est invariant par conjugaison :  $\forall g \in G, g^{-1}Hg = H$ , où de façon équivalente si ses classes à gauche et à droite sont les mêmes :  $\forall g \in G, gH = Hg$ .

Dans ce cas, le quotient  $G/H$  (où  $H$  opère par translation) bénéficie d'une structure de groupe avec  $[g_1] \cdot [g_2] = [g_1 g_2]$ . On peut identifier cet espace à l'ensemble des classes de  $H$  et écrire aussi  $[g] = g \cdot H = g \bmod H$ . Tout élément de  $H$  est trivialement équivalent à  $0$ , et la réciproque est également vraie : le noyau de la projection  $q$  est  $H$ .

**Définition A.3** (Anneau). Un **anneau**  $(A, +, \cdot)$  est un ensemble  $A$  muni de deux lois binaires  $+$  et  $\cdot$  telles que :

- $(A, +)$  soit un groupe abélien, d'identité notée  $0$  ;

- $(A, \cdot)$  soit un monoïde :
  - $A$  est stable par  $\cdot$ , ou  $a, b \in A \implies a \cdot b \in A$ ;
  - la multiplication  $\cdot$  est associative;
  - il existe une identité  $1$  pour  $\cdot$ ;
- la multiplication se distribue sur l'addition :  $a(b+c) = ab+ac$ ,  $(a+b)c = ac+bc$ .

Nous considérerons uniquement des anneaux *commutatifs*, c'est-à-dire pour lesquels la multiplication est commutative.

On note  $A^*$  l'ensemble des éléments non nuls de  $A$  et  $A^\times$  l'ensemble des éléments inversibles de  $A$ , c'est-à-dire les  $a \in A$  admettant un  $a^{-1}$  tel que  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ . Si  $A^* = A^\times$ , on dit que  $A$  est un **corps**.

Soit  $A$  un anneau. Un **A-module** est un groupe abélien  $(M, +)$  muni d'une action de  $A$  sur  $M$  distributive sur les additions dans  $A$  et dans  $M$ . Autrement dit :

- $\forall m \in M, 1 \cdot m = m$ ;
- $\forall m \in M, a, b \in A, (ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ ;
- $\forall m \in M, a, b \in A, (a+b)m = am + bm$ ;
- $\forall m, n \in M, a \in A, a(m+n) = am + an$ .

Un sous- $A$ -module de  $M$  est un sous-groupe abélien qui est un  $A$ -module. Si  $A$  est un corps, un  $A$ -module est un  $A$ -espace vectoriel. Pour  $A = \mathbb{Z}$ , un  $\mathbb{Z}$ -module est simplement un groupe abélien. L'anneau  $A$  lui-même est trivialement un  $A$ -module.

**Définition A.4** (Idéal). Un **idéal** de  $A$  est un sous- $A$ -module  $i$  de  $A$ . En d'autres termes,  $\forall r \in i, \forall s \in A, sr \in i$ .

Si  $i$  est un idéal de  $A$ , alors le quotient de groupe  $A/i$  a également une structure d'anneau, et on retrouve  $i = \ker q$ . On distingue en particulier les anneaux  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = (\{0, 1, \dots, p-1\}, + \text{ mod } p)$ .

Un anneau  $A$  est dit  $G$ -gradués, où  $G$  est un groupe abélien discret, si il admet une décomposition  $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$  telle que  $A_g A_h = A_{g+h}$ . On appelle les éléments de  $A_g$  les éléments homogènes de degré  $g$ . On s'intéresse en général aux anneaux  $\mathbb{Z}$ -gradués, où aux anneaux  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradués, appelés super-anneaux. De même, un  $A$ -module  $M$  est gradué si il se décompose  $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$  avec  $A_g M_h = M_{g+h}$ .

Un morphisme d'anneaux  $A \rightarrow B$  donne une action de  $A$  sur  $B$  qui fait de  $B$  un  $A$ -module; on dit que  $B$  est une **A-algèbre**. Étant donné un  $A$ -module  $M$ , l'algèbre tensorielle de  $M$  est  $T(M) = \bigoplus_{k \geq 0} M^{\otimes k}$  avec pour produit le produit tensoriel. Elle admet une  $\mathbb{Z}$ -gradation naturelle. L'algèbre extérieure sur  $M$  est  $\bigwedge(M) = T(M)/I$  où  $I$  est l'idéal de  $T(M)$  engendré par tous les  $m \otimes m$ ; l'image dans  $\bigwedge(M)$  du produit tensoriel, appelée **produit extérieur** et notée  $\wedge$ , est alors un produit *antisymétrique*. Si  $M$  est de rang  $n$ , alors la composante  $\bigwedge^k M$ , engendrée par les  $m_{i_1} \wedge \dots \wedge m_{i_k}$ , est de dimension  $\binom{n}{k}$ .

Fixons un anneau  $A$ . Une suite

$$\dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} C_{-1} \rightarrow \dots$$

est un **complexe** en  $n \in \mathbb{Z}$  si  $d_n \circ d_{n+1} = 0$ , soit  $\text{im } d_{n+1} \subset \ker d_n$ . On dit que  $C_\bullet$  est un complexe de chaînes si elle est un complexe en tout  $n$ . On dit en outre que le complexe est **exact** en  $n$  si  $\text{im } d_{n+1} = \ker d_n$ , et exact s'il l'est en tout  $n$ . On définit le  $n$ -ième **groupe**

**d'homologie**  $H_n(C_\bullet)$  comme  $H_n(C_\bullet) = \ker d_n / \operatorname{im} d_{n+1}$ . Le complexe est exact en  $n$  ssi son  $n$ -ième groupe d'homologie est trivial. Si les opérateurs vont dans l'autre sens, on écrit plutôt  $C^\bullet$ , soit  $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$  et on parle de complexe de cochaînes. Le groupe  $H^n(C^\bullet) = \ker d^n / \operatorname{im} d^{n-1}$  est appelé  $n$ -ième groupe de **cohomologie**.

## A.2 Variétés différentiables réelles

### A.2.1 Variétés et espaces tangents

**Définition A.5** (Variété lisse). Soit  $X = (|X|, \tau)$  un espace topologique Hausdorff. Un **atlas de cartes de classe  $C^k$**  sur  $X$  est un ensemble de couples  $(U_\alpha \in \tau, \phi_\alpha: U_\alpha \rightarrow B_\alpha \subset \mathbb{R}^n)$  où  $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ , soit  $\{U_\alpha\}_\alpha$  est un recouvrement ouvert de  $X$  est  $\phi_\alpha$  un homéomorphisme de  $U_\alpha$  sur une boule ouverte  $B_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$ , tels que pour toute intersection non triviale  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , la fonction de transition

$$\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: B_\alpha \rightarrow B_\beta$$

soit un  $C^k$ -difféomorphisme. Deux atlas  $C^k$  sont dits équivalents si leur union est également un atlas  $C^k$ .

Une **variété différentiable de classe  $C^k$**  est un espace Hausdorff  $\mathcal{M}$  muni d'une classe d'équivalence d'atlas  $C^k$ . Si  $k = \infty$ , on parle de **variété lisse**.

On définit de même une **variété complexe** en remplaçant  $\mathbb{R}^n$  par  $\mathbb{C}^n$  et  $C^k$ -difféomorphisme par biholomorphisme.

*Remarque A.1.* — La dimension du  $\mathbb{R}^n$  est localement constante sur  $\mathcal{M}$ , et en particulier constante sur chaque composante connexe de  $\mathcal{M}$ . Si toutes les composantes connexes ont la même dimension  $n$ , on dit que  $\mathcal{M}$  est de pure dimension  $n$ . On parlera de  $n$ -variété. Nous supposons par la suite que les variétés sont connexes, et donc de dimension pure.

- Une variété complexe de dimension (complexe)  $n$  a naturellement une structure de variété réelle de dimension  $2n$ .
- Les fonctions de transition respectent la condition de cocycle

$$\phi_{\beta\gamma} \circ \phi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\gamma}$$

sur toute intersection  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ .

Soient  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux variétés lisses de dimensions respectives  $m$  et  $n$ . Une application continue  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  est dite **lisse** si, pour tout point  $x$  de  $\mathcal{M}$ , la fonction  $\psi_\alpha \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$  est lisse pour une (et donc pour toute) carte  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  voisinage de  $x$  et pour une (et donc pour toute) carte  $(V_\alpha, \psi_\alpha)$  voisinage de  $f(x)$ . Si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont complexes, on définit de même une application holomorphe.

En particulier, une application lisse  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou holomorphe  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$  si  $\mathcal{M}$  est complexe) est appelée une **fonction lisse** (resp. holomorphe) sur  $\mathcal{M}$ , et une application lisse  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$  (ou de façon équivalente  $] - 1, 1[ \rightarrow \mathcal{M}$ ) est appelée une **courbe** passant par  $\gamma(0)$  dans  $\mathcal{M}$ . On note  $\mathcal{O}_\mathcal{M}(U)$  l'ensemble des fonctions lisses (resp. holomorphes) définie sur un ouvert  $U$ .

Supposons pour le moment que les variétés que nous considérons sont réelles.

Dans la suite, sauf indication contraire, nous considérerons une  $n$ -variété lisse  $\mathcal{M}$ , et nous placerons pour de bon dans une carte  $(U, \phi)$  en notant  $x^1, \dots, x^n$  les composantes de  $\phi$ , que nous appellerons **fonctions de coordonnées locales**.

On dit que deux courbes  $c$  et  $\gamma$  passant par  $p$  sont équivalentes si elles ont les mêmes dérivées premières :  $\forall i \in [1, n], \frac{d}{dt}(x^i \circ c)(0) = \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma)(0)$ . Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée un **vecteur tangent à  $p$** , et l'espace quotient est noté  $T_p\mathcal{M}$  et appelé **espace tangent à  $p$** . On note de plus  $T\mathcal{M} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$ , que l'on appelle le **fibré tangent de  $\mathcal{M}$** .

Soit  $\gamma$  une courbe représentant le vecteur tangent  $[\gamma]$  à  $p$ . On peut alors définir un opérateur différentiel  $\partial_\gamma$  sur l'ensemble  $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(p) = \bigcup_{U \ni p} \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U)$  des fonctions définies au voisinage de  $p$  par  $\partial_\gamma f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0)$  pour toute  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(p)$ , ce qui ne dépend bien que de la classe de  $\gamma$ . En particulier, si  $\gamma(t) = \phi^{-1}(te_i)$ , on obtient la  $i$ -ème dérivée directionnelle de  $f$ , et on voit que  $T_p\mathcal{M}$  est un espace vectoriel de dimension  $n$  engendré par les opérateurs  $\partial_{x^i}$ , que l'on notera plutôt  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  ou  $\partial_i$ . Un vecteur  $X$  de  $T_p\mathcal{M}$  s'écrit  $X = X^i \partial_i$  (la convention de sommation d'Einstein est, et sera toujours, sous-entendue), et son action sur une fonction  $f$  est  $X[f] = X^i \partial_i f|_p$ . La base  $\{\partial_i\}$  est dite holonôme; les coordonnées du vecteur tangent  $[\gamma]$  sont  $[\gamma]^i = \frac{d}{dt}(x^i \circ \gamma)(0)$  et on écrit donc généralement  $\gamma'$  pour le vecteur tangent  $[\gamma]$ .

On dit que deux fonctions  $(U, f: U \rightarrow \mathbb{R}), (V, g: V \rightarrow \mathbb{R}) \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(p)$  définissent la même **germe** en  $p$  si il existe  $W \subset U \cap V$  contenant  $p$  tel que  $f|_W = g|_W$ . Il s'agit d'une relation d'équivalence dont les classes sont appelées germes de fonctions en  $p$ , leur espace est noté  $\mathcal{O}_{\mathcal{M},p}$  et a une structure d'anneau. L'ensemble des germes s'annulant en  $p$  forme un idéal  $\mathfrak{i}_p$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{M},p}$ , et le quotient  $\mathfrak{i}_p/\mathfrak{i}_p^2$  est l'espace dual de  $T_p\mathcal{M}$ . On le note  $T_p^\vee\mathcal{M}$  et on l'appelle **espace cotangent**; on définit également le fibré cotangent  $T^\vee\mathcal{M} = \bigsqcup_p T_p^\vee\mathcal{M}$ .

Soit  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application lisse. Elle définit alors une application  $T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$  dite de poussée-avant, application tangente ou différentielle et notée  $f_*$ ,  $Tf$  ou  $df$  (les trois noms et notations ayant des interprétations selon le contexte) par  $(f_{*,p}X)[g] = X[g \circ f]$  pour  $X \in T_p\mathcal{M}$  et  $g: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , soit en composantes  $(f_{*,p}X)^i = \partial_j f^i(p) X^j$  ou encore  $(df)^j_i = \partial_i f^j$ . À l'inverse,  $f$  définit également une application de tiré-arrière  $f^*: T^\vee\mathcal{N} \rightarrow T^\vee\mathcal{M}$  par  $f_p^* \omega = \omega \circ f_{*,p}$  pour  $\omega \in T_p^\vee\mathcal{M}$ .

Si  $f$  est une fonction  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ , et  $df(p)$  est une forme linéaire sur  $T_p\mathcal{M}$ , soit un élément de  $T_p^\vee\mathcal{M}$ . En particulier, les  $dx^i(p)$ ,  $i = 1, \dots, n$  fournissent une base de  $T_p^\vee(\mathcal{M})$ .

Si  $p \in U \cap \tilde{U}$ , avec coordonnées  $x^i$  sur  $U$  et  $\tilde{x}^i$  sur  $\tilde{U}$ , et en notant  $\tilde{\partial}_i = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}$ , on a

$$\tilde{\partial}_i = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \partial_j \text{ et } dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} d\tilde{x}^j.$$

### A.2.2 Champs de vecteurs

Les fibrés tangent et cotangent sont munis de projections naturelles  $\pi$  à valeurs dans  $\mathcal{M}$  telles que l'image de l'espace (co)tangent en  $p$  soit  $p$ . On appelle de façon **section** d'une application  $f: X \rightarrow Y$  un inverse à droite de  $f$ , i.e. une application  $s: Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ s = 1_Y$ . Un champ de vecteurs (resp. de covecteurs) est une section du fibré tangent (resp. cotangent), c'est-à-dire une application  $s: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{M} \rightarrow T^\vee\mathcal{M}$ ) telle que, pour tout  $p \in \mathcal{M}$ ,  $s(p) \in T_p\mathcal{M}$  (resp.  $s(p) \in T_p^\vee\mathcal{M}$ ). On note  $\Gamma(U, T\mathcal{M})$  l'ensemble des champs vectoriels définis sur l'ouvert  $U$ .

Les fibrés tangent et cotangent admettent les différentes opérations sur les espaces vectoriels en chaque point. Une section de  $T\mathcal{M}^{\otimes r_1} \otimes T^\vee\mathcal{M}^{\otimes r_2}$  est appelée un champ tensoriel. En particulier, un élément du produit extérieur  $\bigwedge^k T^\vee\mathcal{M}$  est appelé une  $k$ -forme

différentielle. On note  $\Omega^k(\mathcal{M}) = \Gamma(\mathcal{M}, \bigwedge^k T^\vee \mathcal{M})$  l'espace des  $k$ -formes sur  $\mathcal{M}$ .

Une  $k$ -forme  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$  s'écrit en  $p \in \mathcal{M}$  sous la forme  $\omega(p) = \frac{\omega_{i_1 \dots i_k}(p)}{k!} dx^{i_1}(p) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(p)$  ou encore  $\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(p) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . L'opérateur  $d: \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(U) = \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$ ,  $f \mapsto df$  s'étend à

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U), \omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \mapsto d\omega = \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^\ell} dx^\ell \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

En tout point  $p$ , l'espace  $\bigwedge^n T_p^\vee \mathcal{M}$  (où  $n = \dim \mathcal{M}$ ) est de dimension 1 (il est engendré par le déterminant). Si  $U$  est un voisinage de  $p$ , une  $n$ -forme  $\omega = \omega(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  est appelée une **forme volume**; on peut en prendre l'intégrale sur  $U$ . Si  $\mathcal{M}$  a une métrique  $g$ , la forme volume canonique est  $\sqrt{\det g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ , qui a la même expression dans tout système de coordonnées.

Soit  $X \in \Gamma(\mathcal{M}, T\mathcal{M})$  un champ de vecteurs; pour tout point  $p \in \mathcal{M}$  il existe une unique courbe  $\Phi^X(p)$  dont la dérivée en  $p$  est  $X$ ; on l'appelle l'ensemble de ces courbes **flot** de  $X$  et on note  $\Phi_t^X(p)$  pour  $p \in \mathcal{M}$  et  $t \in \mathbb{R}$ . On a  $\Phi_t^X \circ \Phi_{t'}^X = \Phi_{t+t'}^X$  et on écrit donc aussi  $e^{tX} \cdot p$  pour  $\Phi_t^X(p)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux champs de vecteurs, la **dérivée de Lie** de  $Y$  selon  $X$ , notée  $\mathcal{L}_X Y$ , est la dérivée de  $Y$  en suivant le flot de  $X$ :

$$\mathcal{L}_X Y(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( e^{-\varepsilon X} * Y(e^{\varepsilon X} \cdot p) - Y(p) \right)$$

où la poussée-avant selon le flot inverse permet de ramener les deux vecteurs dans le même espace tangent. On a toujours, pour toute fonction  $f$  définie en  $p$ ,  $\mathcal{L}_X Y(p)[f] = X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X, Y](f)$  où  $[X, Y]$  est le **crochet de Lie** de  $X$  et  $Y$  donné en composantes par

$$[X^i \partial_i, Y^j \partial_j] = (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j.$$

### A.2.3 Groupes et algèbres de Lie

Un **groupe de Lie**  $(\mathcal{G}, e, \cdot, \bullet^{-1})$  est une variété lisse  $\mathcal{G}$  munie d'une structure de groupe avec produit  $\cdot$ , identité  $e$  et inversion  $\bullet^{-1}$  de sorte que l'application  $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$  soit lisse. Pour tout  $g \in \mathcal{G}$ , on note  $\rho_g: x \mapsto x \cdot g$  et  $\lambda_g: x \mapsto g \cdot x$  les applications de translation respectivement à droite et à gauche.

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $\mathcal{G}$  est dit invariant à gauche si pour tous  $g, h \in \mathcal{G}$ ,  $\lambda_{g,*} X(h) = X(\lambda_g(h))$  (on définit de manière similaire les champs invariants à droite). Un champ de vecteurs invariant à gauche est entièrement déterminé par sa valeur à l'identité, donc l'ensemble des champs invariants est isomorphe à  $T_e \mathcal{G}$ . On le note  $\mathfrak{g}$ , appelé **algèbre de Lie** du groupe de Lie  $\mathcal{G}$ .

**Définition A.6.** Une **algèbre de Lie** sur un anneau  $A$  est une  $A$ -algèbre  $\mathfrak{L}$  de multiplication notée  $[\cdot, \cdot]$  telle que

- la multiplication soit antisymétrique :  $[y, x] = -[x, y]$ ;
- le crochet respecte l'identité de Jacobi :  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ .

Le crochet de Lie pour les champs de vecteurs donne une structure d'algèbre de Lie à  $\Gamma(\mathcal{G}, T\mathcal{G})$  (si  $\mathcal{G}$  est une variété  $\mathcal{C}^1$  quelconque), et le crochet de Lie de deux champs invariants étant également invariant,  $\mathfrak{g}$  en est bien une sous-algèbre de Lie.

### A.3 Fibrés et connexions

#### A.3.1 Fibrés vectoriels et principaux

**Définition A.7** (Fibré). Soit  $\pi: E \rightarrow B$  une surjection lisse. Une **structure de fibré** avec fibre  $F$  sur  $E$  est un recouvrement ouvert  $B = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  avec, pour chaque  $U_{\alpha}$ , un difféomorphisme  $\phi_{\alpha}: \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times F$  tel que, en notant  $\text{pr}_1: U_{\alpha} \times F \rightarrow U_{\alpha}$  la projection naturelle, on ait  $\pi|_{\pi^{-1}(U_{\alpha})} = \text{pr}_1 \circ \phi_{\alpha}$ .

Il en vient que, pour tout  $b \in B$ , on a  $\pi^{-1}(b) \cong \{b\} \times F \cong F$ . On note  $E_b = \pi^{-1}(b)$ , et on l'appelle la **fibre** en  $b$ .

Si en tout  $b$  la fibre  $E_b$  a une structure d'espace vectoriel de dimension  $r$ , on parle de **fibré vectoriel** de rang  $r$ . Un fibré vectoriel de rang 1 est aussi appelé un fibré en droites.

Revenons au cas général d'une fibration  $\pi: E \rightarrow B$  de fibre typique  $F$ . Soient  $U_{\alpha}, U_{\beta}$  deux ouverts de  $B$  avec  $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ . On a alors un difféomorphisme  $\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\beta} \circ \phi_{\alpha}^{-1}: U_{\alpha}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}} \times F \rightarrow U_{\beta}|_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}} \times F$  qui peut s'écrire  $(x, f) \mapsto (x, \psi_{\alpha\beta}(x) \cdot f)$ .

**Définition A.8** (G-fibrés). On appelle les  $\psi_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow \text{Aut}(F)$  les **fonctions de transition** du fibré. Soit  $G$  un groupe de Lie; alors  $E$  est un  $G$ -fibré si toutes ses fonctions de transition sont dans  $G$ . On parle aussi de  $G$ -structure.

Un fibré **G-principal** est un  $G$ -fibré  $\pi: E \rightarrow B$  tel que chaque fibre  $E_b$  soit homéomorphe à  $G$  (i.e. soit un  $G$ -torseur, c'est-à-dire qu'en choisissant une « identité » dans  $E_b$  on a un isomorphisme de groupes avec  $G$ ).

#### A.3.2 Connexions de Ehresmann

Soit  $\pi: E \rightarrow B$  un fibré lisse. Pour tout  $b \in B$  et tout  $\tilde{b} \in \pi^{-1}(b)$ , l'application tangente  $d\pi(\tilde{b})$  est  $T_{\tilde{b}}E \rightarrow T_bB$ . Son noyau est constitué des vecteurs de  $T_{\tilde{b}}E$  tangents à la fibre  $E_b$  uniquement, et pas à l'espace de base. On définit donc le **fibré vertical**  $VE \subset TE$  par  $V_xE = \ker(\pi_{*,x})$ .

Une **connexion de Ehresmann** est un choix de **fibré horizontal**  $HE$  complémentaire de  $VE$  dans le fibré tangent :  $\forall x \in E, T_xE = V_xE \oplus H_xE$ . On représente généralement la connexion par la forme de projection sur le fibré vertical  $\omega \in \Gamma(T^{\vee}E \times VE)$ , soit une 1-forme à valeurs dans le fibré tangent  $\omega(x) = \omega_j^i(x) dx^j \otimes \partial_i \in T_x^{\vee}E \otimes T_xE$  telle que  $\omega^2 = 0$  et  $\ker \omega(x) = H_xE$ .

Une forme de connexion  $\omega$  sur un fibré  $\mathcal{G}$ -principal définit une **connexion principale** si elle est  $\mathcal{G}$ -équivariante :  $\omega(d\rho_g(p) \cdot X_p) = g^{-1}\omega(X_p)g$ . Il s'agit d'une 1-forme à valeurs dans  $\mathfrak{g}$ .

Sur un fibré vectoriel  $E \rightarrow B$  de fibres  $V$ , une connexion linéaire, ou de Koszul, est une application linéaire  $\nabla: \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \otimes T^{\vee}B)$  respectant la règle de Leibniz :  $\nabla(f\sigma) = f\nabla\sigma + \sigma \otimes df$  pour toutes fonction  $f$  et section  $\sigma$ . On peut la contracter avec un champ de vecteurs tangents à  $B$  pour obtenir la dérivée covariante  $\nabla_X\sigma = \langle \nabla\sigma, X \rangle = (\nabla\sigma)_i X^i$ , qui respecte

- $\nabla_{fX+gY}\sigma = f\nabla_X\sigma + g\nabla_Y\sigma$ ;
- $\nabla_X(f\sigma + g\tau) = f\nabla_X\sigma + \sigma \langle df, X \rangle + g\nabla_X\tau + \tau \langle dg, X \rangle$ .

En particulier, en écrivant  $\nabla_i = \nabla_{\partial_i}$  et en décomposant  $\sigma = \sigma^i v_i$  dans une base de  $V$ , on obtient  $(\nabla_X\sigma)^j = X^i(\partial_i\sigma^j + \sigma^k \Gamma_{ik}^j)$  en définissant les coefficients de connexion par  $\Gamma_{jk}^i v_i = \nabla_j v_k$ .

## A.4 Homologie et cohomologie

### A.4.1 Le groupe fondamental

On rappelle qu'un chemin dans un espace topologique  $X$  est une application continue  $[0, 1] \rightarrow X$ . Une **homotopie** est un chemin dans un espace de fonctions  $\text{hom}(X, Y)$ . Plus précisément, si  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ , une homotopie de  $f_0$  à  $f_1$ , notée  $F: f \Rightarrow g$ , est une fonction  $F: [0, 1] \times X \rightarrow Y, (s, x) \mapsto F_s(x)$  telle que  $F_0(x) = f_0(x)$  et  $F_1(x) = f_1(x)$  pour tout  $x$ .

Un lacet basé en  $x \in X$  est un chemin  $c$  dans  $X$  tel que  $c(0) = c(1) = x$ . Une homotopie de chemins  $c_0 \Rightarrow c_1$  est une homotopie  $H: c_0 \Rightarrow c_1$  telle que  $H_s(0) = H_s(1) = x$  pour tout  $s$ . Si  $c_0$  et  $c_1$  sont deux lacets en  $x$ , on définit leur multiplication  $c_0 * c_1$  comme le lacet parcourant  $c_0$  puis  $c_1$  à vitesse doublée :

$$(c_0 * c_1)(t) = \begin{cases} c_0(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c_1(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Si  $c$  est un lacet, le lacet inverse est  $\bar{c}(t) = c(1 - t)$ . Le lacet constant en  $x$  est noté  $c_x$  :  $\forall t \in [0, 1], c_x(t) = x$ .

Si il existe une homotopie de lacets  $c_0 \Rightarrow c_1$ , on dit que  $c_0$  et  $c_1$  sont homotopes ; c'est une relation d'équivalence. Pour  $x \in X$  un point base, le **groupe fondamental**  $\pi_1(X, x)$  est l'ensemble des classes d'homotopie de lacets en  $x$ . La loi de groupe est donnée par  $[c_0] \cdot [c_1] = [c_0 * c_1]$ , l'identité par  $1 = [c_x]$  et l'inversion par  $[c]^{-1} = [\bar{c}]$  : c'est bien un groupe. Si  $X$  est connexe par arcs,  $\pi_1(X, x)$  est indépendant de  $x$ .

Un **revêtement** de  $X$  est une fibration  $\pi: E \rightarrow X$  de fibres discrètes ; en d'autres termes une application  $\pi: E \rightarrow X$  telle que, pour tout  $U \subset X$ ,  $\pi^{-1}(U)$  soit une union disjointe d'ouverts. On dit que  $\pi$  est un revêtement universel si  $E$  est simplement connexe, c'est-à-dire connexe par arcs ( $\pi_0(E) = 0$ ) et  $\pi_1(E) = 0$ . Si  $X$  et  $E$  sont connexes par arcs et localement connexes par arcs, en tout point  $x \in X$  le groupe fondamental  $\pi_1(X, x)$  opère sur la fibre discrète  $\pi^{-1}(x)$  par une action dite de **monodromie** : pour toute classe d'homotopie de lacets  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  et tout  $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ , il existe un unique relèvement  $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  de  $\gamma$  basé en  $\tilde{x}$  (c'est-à-dire  $\pi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}} = \gamma$ ). L'action est alors  $\gamma \cdot \tilde{x} = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}(1)$  : il s'agit du « transport parallèle » de  $\tilde{x}$  selon le relèvement de  $\gamma$ .

### A.4.2 Homologie singulière

Le  $n$ -simplexe singulier  $\Delta_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , est l'enveloppe convexe dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  des points donnés par les vecteurs de base  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ , soit

$$\Delta_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}.$$

On peut le voir comme construit récursivement à partir du 0-simplexe, le point, en ajoutant au  $(n-1)$ -simplexe un 0-simplexe qui en est indépendant et en remplissant l'espace ainsi délimité. On note  $\Delta_n = \langle \sigma_1 \cdots \sigma_{n+1} \rangle$  où les  $\sigma_i$  sont les 0-simplexes, ce qui implique le choix d'un *ordre* de ces 0-simplexes. On supposera toujours un tel choix fait. La  $i$ -ième face de  $\Delta_n$ , pour  $i \leq n+1$ , est le  $n-1$ -simplexe  $\Delta_{n,i} = \langle \sigma_1 \cdots \hat{\sigma}_i \cdots \sigma_{n+1} \rangle$ .

Soit  $X$  un espace topologique ; un  **$n$ -simplexe singulier** de  $X$  est une application  $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$ . On note  $C_n(X)$  le groupe abélien libre engendré par les  $n$ -simplexes de  $X$ ,



c'est-à-dire qu'un élément  $c$  de  $C_n(X)$  s'écrit  $c = \sum_{\sigma} c_{\sigma} \sigma$  où on somme sur un nombre fini de  $\sigma: \Delta_n \rightarrow X$ , avec  $c_{\sigma} \in \mathbb{Z}$ . Le **bord** d'un  $n$ -simplexe  $\sigma$  est le  $(n-1)$ -simplexe

$$\partial \sigma = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i \sigma_i$$

où  $\sigma_i$  est la  $i$ -ième face  $\sigma|_{\Delta_{n,i}}$ . On étend cette construction à un opérateur  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ .

Par compensation des sommes, on a toujours  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ ; en d'autres termes « un bord n'a pas de bord ». Donc  $(C_{\bullet}(X), \partial_{\bullet})$  est un complexe de chaînes. On note  $\partial$  pour l'ensemble des  $\partial_i$  agissant sur  $C_{\infty}(X) = \bigoplus_k C_k(X)$ ; il s'agit d'une dérivation  $C_{\infty}(X) \rightarrow C_{\infty}(X)$  de degré  $-1$ , qui est nilpotent :  $\partial^2 = 0$ .

On appelle  $H_k(X)$  le  $k$ -ième groupe d'homologie du complexe. Explicitement, on appelle les éléments de  $B_k(X) = \text{im } \partial_{k+1}$  les  **$k$ -bords** et ceux de  $Z_k(X) = \ker \partial_k$  les  **$k$ -cycles**, les simplexes de bord nul, et  $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$  est constitué des classes de  $k$ -cycles modulo les  $k$ -bords, appelées des classes d'homologie.

#### A.4.3 Cohomologie de de Rham

Pour les mêmes raisons combinatoires qu'avec  $\partial$ , en raison de l'antisymétrie des formes différentielles, la dérivée extérieure  $d$  sur une variété  $\mathcal{M}$  est nilpotente :  $d \circ d = 0$ . L'espace des formes différentielles s'écrit  $\bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(\mathcal{M})$  et on a  $d^k: \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{k+1}(\mathcal{M})$ , donc les formes différentielles s'assemblent en un complexe de cochaînes, appelé complexe de de Rham.

Une  $k$ -forme  $\omega \in \Omega^k(\mathcal{M})$  est dite **fermée** (ou un  $k$ -cocycle) si  $d\omega = 0$  (on pourrait plutôt écrire  $d^k \omega = 0$ ). L'espace des  $k$ -formes fermées est noté  $Z^k(\mathcal{M}) = \ker d^k$ . Une  $k$ -forme  $\omega$  est dite **exacte** (ou un  $k$ -cobord) si il existe une  $(k-1)$ -forme  $\eta$  telle que  $\omega = d\eta$  (ou plutôt  $\omega = d^{k-1} \eta$ ). On note  $B^k(\mathcal{M}) = d^{k-1} \Omega^{k-1}(\mathcal{M})$  l'espace des  $k$ -formes exactes.

Le  $k$ -ième groupe de cohomologie de de Rham  $H^k(\mathcal{M})$  ou  $H_{\text{de Rham}}^k(\mathcal{M})$  est alors le  $k$ -ième groupe de cohomologie du complexe de de Rham, soit  $H^k \mathcal{M} = Z^k(\mathcal{M})/B^k(\mathcal{M})$ . Les éléments de  $H^k(\mathcal{M})$  sont les classes d'homologie, les classes de formes fermées modulo les formes exactes :  $H^k(\mathcal{M}) \ni [\omega] = \omega \mod d\Omega^{k-1}(\mathcal{M})$ .

Le théorème de Stokes dit que, pour tout  $k+1$ -simplexe  $\sigma$  et toute  $k$ -forme  $\omega$ , on a

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial \sigma} \omega,$$

donc l'intégrale d'une forme fermée sur un cycle ne dépend que de leurs classes de cohomologie et d'homologie :  $\int_{\sigma + \partial \tau} (\omega + d\eta) = \int_{\sigma} \omega + \int_{\tau} d\omega + \int_{\partial \sigma} \eta + \int_{\partial \tau} d\eta$  ou les deuxième et troisième termes sont nuls par définition et le dernier l'est par nilpotence de  $d$  ou partial.

On a donc bien un accouplement  $H_k(\mathcal{M}) \times H^k(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $([\sigma], [\omega]) \mapsto \langle [\sigma], [\omega] \rangle = \int_{\sigma} \omega$ . La dualité de Poincaré dit que cet accouplement est non dégénéré, soit  $H^k(\mathcal{M}) = (H_k(\mathcal{M}))^{\vee}$ . Le théorème de Stokes revient alors simplement à dire que les opérateurs  $d$  et  $\partial$  sont adjoints :  $\langle \partial \sigma, \omega \rangle = \langle \sigma, d\omega \rangle$ .

## A.5 Variétés de Calabi-Yau

### A.5.1 Variétés complexes

Une **structure presque complexe** sur une variété (réelle)  $\mathcal{M}$  est un champ  $\mathcal{J}$  d'endomorphismes de  $T\mathcal{M}$  tel que  $\mathcal{J}^2 = -\mathbb{1}$  globalement définie. Si  $\mathcal{M}$  admet une telle structure, on dit que c'est une **variété presque complexe** et il en vient que sa dimension  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}$  doit être paire.

On note  $T\mathcal{M}^{\mathbb{C}} := T\mathcal{M} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$  la **complexification** du fibré tangent. On note, en tout point  $x$ ,  $T_x \mathcal{M}^{\pm}$  pour le sous-espace propre de  $\mathcal{J}(x)$  de valeur propre  $\pm i$ . On appelle leurs vecteurs respectivement holomorphes et anti-holomorphes. La structure complexe est dite intégrable si le crochet de Lie de deux champs de vecteurs holomorphes est également holomorphe. Par le théorème de Newlander–Nirenberg, une variété presque complexe est complexe si et seulement si sa structure presque complexe est intégrable. De façon équivalente, le tenseur de Nijenhuis  $N(X, Y) = [X, Y] + \mathcal{J}[\mathcal{J}X, Y] + \mathcal{J}[X, \mathcal{J}Y] - [\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y]$  est nul.

Si  $\mathcal{M}$  est une variété complexe de dimension  $n$ , on peut choisir un système de coordonnées réelles  $(x_i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$  et on a les coordonnées complexes  $z_i = x_i + iy_i$ . Une base de  $T_x \mathcal{M}^+$  est donnée par les  $\frac{\partial}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - i \frac{\partial}{\partial y_i}$  et une base de  $T_x \mathcal{M}^-$  par les  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + i \frac{\partial}{\partial y_i}$ . Pour les espaces cotangents holomorphe et anti-holomorphe, les bases sont  $dz_i$  et  $d\bar{z}_i$ . On appelle  $K_{\mathcal{M}} = \bigwedge^n T^{\vee} \mathcal{M}^+$  le fibré canonique.

Une métrique pseudo-riemannienne  $h$  sur  $\mathcal{M}$  est dite **hermitienne** si  $h(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = h(X, Y)$  pour tous champs de vecteurs  $X, Y$ . Deux champs de vecteurs holomorphes (ou anti-holomorphes) sont toujours orthogonaux pour une métrique hermitienne. La connexion de Levi–Civita  $\nabla$  pour une métrique hermitienne a pour seuls coefficients non nuls (en coordonnées complexes)  $\Gamma_{jk}^i = h^{\bar{i}i} \partial_j h_{k\bar{i}}$  et  $\bar{\Gamma}_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} = \bar{\Gamma}_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}}$ .

Sa courbure  $R: (X, Y, Z) \mapsto \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$  a pour coefficients non nuls  $R_{j\bar{k}\ell}^i = -R_{k\bar{j}\ell}^i = \partial_{\bar{j}} \Gamma_{k\ell}^i$  et  $\bar{R}_{\bar{j}\bar{k}\bar{\ell}}^{\bar{i}} = \bar{R}_{\bar{j}\bar{k}\bar{\ell}}^{\bar{i}}$ . La courbure de Ricci  $\mathcal{R} = i \mathcal{R}_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$  avec  $\mathcal{R}_{k\bar{j}} = R_{j\bar{i}k}^i$  respecte  $\mathcal{R} = i \partial \bar{\partial} \ln \sqrt{\det h}$ , soit  $\mathcal{R}_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \ln \sqrt{\det h}$ . La courbure de Riemann  $R$  est une 2-forme à valeurs de matrices, donc on peut prendre son polynôme caractéristique  $\det(\mathbb{1} + i \frac{R}{2\pi}) = c(\mathcal{M})$  que l'on appelle classe de Chern totale de  $\mathcal{M}$ . Il s'agit d'une somme de  $2i$ -formes  $c_i(\mathcal{M})$ , qui sont toutes des invariants de  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire indépendantes de la métrique. Ce sont des formes fermées, et la classe de cohomologie de de Rham de  $[c_i(\mathcal{M})]$  est appelée  $i$ -ième classe de Chern. En particulier, la **première classe de Chern** est  $c_1(\mathcal{M}) = [\frac{1}{2\pi} \text{Tr}[R]] = [\frac{1}{2\pi} \mathcal{R}]$ .

### A.5.2 Géométrie symplectique

Une **variété symplectique**  $(\mathcal{M}, \omega)$  est une variété réelle  $\mathcal{M}$  munie d'une 2-forme fermée non dégénérée  $\omega = \omega_{ij} dx^i dx^j$ , appelée forme symplectique. La condition de non dégénérescence équivaut à  $\omega^{\wedge n} \neq 0$ , et il en vient que  $\mathcal{M}$  doit être de dimension paire  $2n$ . La forme symplectique admet également une matrice inverse  $\omega^{ij} \partial_i \partial_j$ .

Une sous-variété  $L \subset \mathcal{M}$  est dite isotrope si la forme symplectique s'y restreint à zéro, et **Lagrangienne** si en plus elle est de la dimension maximale  $n$ .

Un **symplectomorphisme**  $(\mathcal{M}_1, \omega_1) \rightarrow (\mathcal{M}_2, \omega_2)$  est une fonction lisse  $f: \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  telle que  $\omega_1 = f^* \omega_2$ .

Une fonction  $H: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  sur une variété symplectique est généralement appelée un hamiltonien. Elle donne un champ de vecteurs hamiltonien  $X_H$  défini par  $dH =$

$-\omega(X_H, \bullet)$ , soit en coordonnées  $(X_H)^i = \omega^{ij}\partial_j H$ . On peut alors définir un crochet de Poisson sur  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  par

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g) = X_f(g) = \langle \omega, df \wedge dg \rangle.$$

En coordonnées,  $\{f, g\} = \omega^{ij}\partial_i f \partial_j g$ .

Par le théorème de Darboux, il existe toujours un système de coordonnées *locales*  $(x^i, y_i)_{1 \leq i \leq n}$  telles que  $\omega = d(y_i dx^i) = dy_i \wedge dx^i$  : on appelle cette écriture la forme canonique de Liouville. Dans ce cas, le voisinage local dans  $\mathcal{M}$  est symplectomorphe à un voisinage local dans un fibré cotangent  $T^\vee \mathcal{N}$  avec sa structure canonique standard. On peut choisir un système de coordonnées  $(q^i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $\mathcal{N}$ , et en tout point  $q$  des coordonnées  $(p_i)_i$  sur  $T_q^\vee \mathcal{N}$ , et le théorème de Darboux est trivialement respecté sur un fibré cotangent.

Avec cette écriture, le crochet de Poisson devient simplement  $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial f}{\partial x^i}$ . Les coordonnées du flot du champ de vecteur hamiltonien  $X_H$  d'une fonction  $H$  respectent les équations canoniques de Hamilton.

### A.5.3 Structures kählériennes et variétés de Calabi-Yau

Une forme symplectique  $\omega$  est dite **compatible** avec la structure presque complexe  $\mathcal{J}$  si  $\omega(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = \omega(X, Y)$  pour tous champs  $X, Y$ . Sur une variété hermitienne  $(\mathcal{M}, h)$  on appelle forme fondamentale la forme bilinéaire  $\omega : (X, Y) \mapsto h(\mathcal{J}X, Y)$ . Il s'agit d'une forme anitilinéaire non-dégénérée compatible avec  $\mathcal{J}$ .

Une variété kählérienne est une variété symplectique avec une structure presque complexe intégrable et une métrique hermitienne compatibles. Pour une variété hermitienne, il suffit que la forme fondamentale, alors appelée forme de Kähler, soit fermée. De façon équivalente, une variété hermitienne est kählérienne si et seulement si la structure complexe est covariamment constante :  $\nabla \mathcal{J} = 0$ , ou si la forme de Kähler l'est :  $\nabla \omega = 0$  avec  $\nabla$  la connexion de Levi-Civita.

Une variété de Calabi-Yau est une variété kählérienne  $(\mathcal{M}, \omega)$  dont le fibré canonique est trivial. Si elle est compacte, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $K_{\mathcal{M}}$  est trivial ;
- il existe une  $n$ -forme holomorphe  $\Omega \in \Gamma(K_{\mathcal{M}})$  globalement définie ;
- $c_1(\mathcal{M}) = 0$  ;
- le groupe d'holonomie de la connexion de Levi-Civita se restreint à  $SU(n)$  ;
- $\mathcal{M}$  admet une métrique Ricci-plate dont la forme fondamentale est dans la même classe d'homologie que  $\omega$ .