346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

2	3	$\sum$
/10	/20	/30

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /10)

(a)

(i)

Zu zeigen: $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ist nicht funktional vollständig.

$X \leftrightarrow Y \equiv (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)$

Zunächst wird der Hinweis überprüft:

$\neg X \leftrightarrow Y \equiv (\neg X \wedge Y) \vee (\neg\neg X \wedge Y) \equiv (\neg X \wedge Y) \vee (\neg\neg X \wedge Y) \equiv \neg((X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)) \equiv \neg(X \leftrightarrow Y)$

Daraus folgt direkt das $\leftrightarrow$ X-alternierend ist. Für $\neg$ folgt diese Aussage direkt aus der Definition von $\neg$.

Mit struktureller Induktion wird nun gezeigt das Formeln bestehend aus $\neg, \leftrightarrow$ entweder X-alternierend oder X-konstant sind.

Seien φ und ϑ Formeln bestehend aus $\neg, \leftrightarrow$, wir nehmen nach Induktionsanfang an, dass die Formeln φ und ϑ entweder X- konstant oder X-alternierend sind.

1. Fall: φ und ϑ sind X-alternierend.

$\varphi(\neg X, \bar{Y}) \leftrightarrow \vartheta(\neg X, \bar{Y}) \equiv \neg\varphi(X, \bar{Y}) \leftrightarrow \neg\vartheta(X, \bar{Y}) \equiv \varphi(X, \bar{Y}) \leftrightarrow \vartheta(X, \bar{Y})$

Somit X-konstant.

2. Fall: φ und ϑ sind X-konstant.

$\varphi(\neg X, \bar{Y}) \leftrightarrow \vartheta(\neg X, \bar{Y}) \equiv \varphi(X, \bar{Y}) \leftrightarrow \vartheta(X, \bar{Y})$

Somit X-konstant.

3. Fall: φ X-alternierend und ϑ X-konstant.

$\varphi(\neg X, \bar{Y}) \leftrightarrow \vartheta(\neg X, \bar{Y}) \equiv \neg\varphi(X, \bar{Y}) \leftrightarrow \vartheta(X, \bar{Y}) \equiv \neg(\varphi(X, \bar{Y}) \leftrightarrow \vartheta(X, \bar{Y}))$

Somit X-alternierend.

Wäre $\neg, \leftrightarrow$ funktional vollständig, wäre es auch möglich $\wedge, \vee$ darzustellen, da diese aber weder X-konstant, noch X-alternierend sind, ergibt sich dadurch ein Widerspruch und somit ist $\neg, \leftrightarrow$ nicht funktional vollständig.

(ii)

Zu zeigen: $\{\downarrow\}$ ist funktional vollständig.

Aus der Vorlesung (Def. 1.10) ist bekannt, $\{\vee, \neg\}$ ist funktional vollständig.

$\neg A \equiv \neg A \wedge \neg A \equiv A \downarrow A$

$A \vee B \equiv \neg\neg(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg(A \downarrow B) \equiv (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$

Somit folgt die zu zeigende Aussage.

(b)

Zu zeigen: $\{f, 0, 1\}$ ist funktional vollständig.

Aus der Vorlesung (Def. 1.10) ist bekannt, $\{\wedge, \neg\}$ ist funktional vollständig.

346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

$\neg A \equiv f(A, 1, 0)$
$A \wedge B \equiv f(A, 0, B)$
Somit folgt die zu zeigende Aussage.

Aufgabe 3 (Punkte: /20)

(a)

Sei $\varphi := (A \wedge C \rightarrow B) \wedge (F \wedge D \rightarrow H) \wedge (D \wedge C \wedge E \rightarrow F) \wedge (B \wedge C \rightarrow E) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (H \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow D)$

Schritt 0: Markiere Variablen A, für welche Klauseln $1 \rightarrow A$ existieren:

$$M = \{A, C\}$$

Schritt 1: Markiere Variablen B und D wegen jeweils $A \wedge C \rightarrow B$ und $A \rightarrow D$ mit $A, C \in M$:

$$M = \{A, B, C, D\}$$

Schritt 2: Markiere Variable E wegen $B \wedge C \rightarrow E$ mit $B, C \in M$:

$$M = \{A, B, C, D, E\}$$

Schritt 3: Markiere Variable F wegen $D \wedge C \wedge E \rightarrow F$ mit $D, C, E \in M$:

$$M = \{A, B, C, D, E, F\}$$

Schritt 4: Markiere Variable H wegen $F \wedge D \rightarrow H$ mit $F, D \in M$:

$$M = \{A, B, C, D, E, F, H\}$$

Wegen Klausel $H \rightarrow 0$ mit $H \in M$ ist die Ausgabe "unerfüllbar".

(b)

(i)

Schnitt

Die Horn-Formel haben folgende Gestalt (KNF): $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i$, wobei $\psi_i = (\bigvee_{j=1}^{k} \neg X_{ij}) \vee X_{i0}$ oder $\psi_i = (\bigvee_{j=1}^{k} \neg X_{ij})$.

Da die Teilformeln ψ_i in Konjunktion stehen, gilt für jede Interpretation $\mathfrak{I}$:

$$\mathfrak{I} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \psi_i \text{ für } \forall i \in [1, n]$$

Für zwei Interpretationen $\mathfrak{I}_1 \models \psi_i$ und $\mathfrak{I}_2 \models \psi_i$ muss gelten $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \psi_i$, falls die Abgeschlossenheit unter der Schnittbildung gilt.

Sei nun i beliebig aber fest und betrachte ψ_i. Es kann zwischen zwei Fällen unterschieden werden:
Fall 1) Für alle j gilt: $\mathfrak{I}_1(X_{ij}) = 1 \wedge \mathfrak{I}_2(X_{ij}) = 1 \qquad \Rightarrow (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X_{ij}) = 1$
Es muss ψ_i der Form $\psi_i = (\bigvee_{j=1}^{k} \neg X_{ij}) \vee X_{i0}$ sein, da ansonsten entgegen der Annahme $\mathfrak{I}_1 \not\models \psi_i$ und $\mathfrak{I}_2 \not\models \psi_i$ gelten würde. Insbesondere gilt für $j = 0$, dass $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X_{i0}) = 1$, also folgt $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \psi_i$.

Fall 2) Es existiert ein j mit $\mathfrak{I}_1(X_{ij}) = 0 \vee \mathfrak{I}_2(X_{ij}) = 0 \qquad \Rightarrow (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X_{ij}) = 0$
Es ist entweder ψ_i der Form $\psi_i = (\bigvee_{j=1}^{k} \neg X_{ij})$, d.h. es existiert kein positives Literal, oder es enthält das positive Literal X_{i0}, dann ist aber $j \neq 0$ oder es existiert ein $k \neq 0$ mit $\mathfrak{I}_1(X_{ij}) = 0 \vee \mathfrak{I}_2(X_{ij}) = 0$, da sonst $\mathfrak{I}_1 \not\models \psi_i$ und $\mathfrak{I}_2 \not\models \psi_i$ gelten würde. Da also X_{ij} negiert auftritt, folgt, dass $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \psi_i$.

Da i beliebig gewählt war, gilt für alle i, dass $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \psi_i$. Daraus folgt $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \varphi$.
Damit sind Modelle von Horn-Formeln unter Schnittbildung abgeschlossen.

(ii)
Vereinigung
Sei $\varphi(A, B) = \neg A \vee \neg B \equiv A \wedge B \to 0$ eine Horn-Formel und $\mathfrak{I}_1$ und $\mathfrak{I}_2$ Interpretationen mit
$\mathfrak{I}_1(A) = 0$, $\mathfrak{I}_1(B) = 1$
$\mathfrak{I}_2(A) = 1$, $\mathfrak{I}_2(B) = 0$
$\Rightarrow \mathfrak{I}_1 \models \varphi, \mathfrak{I}_2 \models \varphi$

Ferner gilt:
$(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)(A) = \max(\mathfrak{I}_1(A), \mathfrak{I}_2(A)) = \max(0, 1) = 1$
$(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)(B) = \max(\mathfrak{I}_1(B), \mathfrak{I}_2(B)) = \max(1, 0) = 1$
$\Rightarrow (\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2) \not\models \varphi$

Also ist $(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)$ kein Modell von φ. Damit sind Modelle von Horn-Formeln unter Vereinigung nicht abgeschlossen.

(iii)
Komplement
Sei $\varphi(A) = A$ eine Horn-Formel sowie eine Interpretation $\mathfrak{I}(A) = 1$.
Es gilt offensichtlich $\mathfrak{I} \models \varphi$. Betrachte nun das Komplement von $\mathfrak{I}$:
$\neg\mathfrak{I}(A) \equiv 1 - \mathfrak{I}(A) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \neg\mathfrak{I} \not\models \varphi$

Also ist $\neg\mathfrak{I}$ kein Modell von φ. Damit sind Modelle von Horn-Formeln unter Komplement nicht abgeschlossen.

(c)

Die Umkehrung gilt nicht.

Betrachte $\varphi := \neg A \vee B \vee C$.
Das eindeutig kleinste Modell von φ ist $\mathfrak{I}_1$ mit $\mathfrak{I}_1(X) = 0, \mathfrak{I}_1(Y) = 0, \mathfrak{I}_1(Z) = 0$

Seien $\mathfrak{I}_2$ mit $\mathfrak{I}_2(A) = 1, \mathfrak{I}_2(B) = 0, \mathfrak{I}_2(C) = 1$
sowie $\mathfrak{I}_3$ mit $\mathfrak{I}_3(A) = 1, \mathfrak{I}_3(B) = 1, \mathfrak{I}_3(C) = 0$
zwei weitere Interpretationen. Stelle fest, dass

$$(\mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{I}_3)(A) = 1, (\mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{I}_3)(B) = 0, \mathfrak{I}_3)(C) = 0$$

Es gilt $\mathfrak{I}_2 \models \varphi, \mathfrak{I}_3 \models \varphi$, aber dennoch $(\mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{I}_3) \not\models \varphi$. Somit ist φ nicht äquivalent zu einer Horn-Formel nach Teilaufgabe b), obwohl φ ein eindeutig kleinstes Modell hat. Damit ist die Behauptung widerlegt.

(d)

(i)
$(Z \rightarrow (X \vee \neg Y)) \wedge (X \rightarrow (\neg Y \vee \neg Z)) \wedge \neg(X \rightarrow (\neg Y \wedge U))$
$\equiv (\neg Z \vee (X \vee \neg Y)) \wedge (\neg X \vee (\neg Y \vee \neg Z)) \wedge \neg(\neg X \vee (\neg Y \wedge U))$
$\equiv (\neg Z \vee X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge X \wedge (Y \vee \neg U)$

Die Formel ist äquivalent zu einer Horn-Formel.

(ii)
$(((\neg U \wedge (Y \vee \neg X)) \rightarrow Z) \vee (X \wedge (\neg U \rightarrow U))$
$\equiv (\neg((\neg U \wedge (Y \vee \neg X)) \vee Z) \vee (X \wedge U)$
$\equiv (U \vee (\neg Y \wedge X) \vee Z) \vee (X \wedge U)$

Wähle nun $\mathfrak{I}_1$ mit $\mathfrak{I}_1(U) = 1$, $\mathfrak{I}_1(X) = \mathfrak{I}_1(Y) = \mathfrak{I}_1(Z) = 0$
sowie $\mathfrak{I}_2$ mit $\mathfrak{I}_2(Z) = 1$, $\mathfrak{I}_2(X) = \mathfrak{I}_2(Y) = \mathfrak{I}_1(U) = 0$
Beide Interpretationen sind Modelle für die gegebene Formel.
Nach Teilaufgabe (b) sind die Modelle der Horn-Formeln unter Schnittbildung abgeschlossen.
$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(U) = (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) = (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(Y) = (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(Z) = 0$

Setze nun die neue Belegung in die Formel ein:

$$(0 \vee (\neg 0 \wedge 0) \vee 0) \vee (0 \wedge 0) \equiv (1 \wedge 0) \vee 0 \equiv 0 \qquad \text{Widerspruch!}$$

Das $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)$ ist also kein Modell von der gegebenen Formel. Dies widerspricht der Abgeschlossenheit unter Schnittbildung von Horn-Formeln.
Die Formel ist somit nicht äquivalent zu einer Horn-Formel.

(iii)
$X \wedge \neg(\neg Y \rightarrow (\neg Y \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y) \rightarrow (Y \vee \neg Z))$
$\equiv X \wedge \neg(Y \vee (\neg Y \wedge X)) \wedge (\neg(X \wedge Y) \vee (Y \vee \neg Z))$

$$
\begin{aligned}
&\equiv X \wedge \neg(Y \vee X) \wedge (\neg(X \wedge Y) \vee (Y \vee \neg Z)) \\
&\equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg X \wedge (\neg X \vee \neg Y) \vee (Y \vee \neg Z) \\
&\equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg X \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Y \vee \neg Z) \\
&\equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg X \wedge 1 \\
&\equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg X
\end{aligned}
$$

Die Formel ist äquivalent zu einer Horn-Formel.