346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

2	3	4	5	$\sum$
/4	/10	/8	/10	/32

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /4)

(a)

Wandle die Formel zunächst in PNF um.

$$\begin{aligned}\varphi &= \forall x \exists y Rxy \wedge (\neg Pz \vee \exists x \neg Rxy)\\ &\equiv \forall x_1 \exists x_2 Rx_1x_2 \wedge (\neg Pz \vee \exists x_3 \neg Rx_3y)\\ &\equiv \forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 (Rx_1x_2 \wedge (\neg Pz \vee \neg Rx_3y)) \in \mathrm{FO}(\{R, P\})\end{aligned}$$

Eliminiere nun schrittweise die Existenzquantoren, dabei entsteht jeweils eine neue Formel ψ_i.

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \forall x_1 \exists x_3 (Rx_1 fx_1 \wedge (\neg Pz \vee \neg Rx_3y)) \in \mathrm{FO}(\{R, P, f\})\\ \psi_2 &= \forall x_1 (Rx_1 fx_1 \wedge (\neg Pz \vee \neg Rgx_3y)) \in \mathrm{FO}(\{R, P, f, g\})\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\vartheta &= \forall x \exists y \forall z (\varphi \wedge \psi)\\ &\equiv \forall x (\varphi \wedge \exists y \forall z \psi)\\ &\equiv \forall x \varphi \wedge \forall x \exists y \forall z \psi\\ &\equiv \forall x \varphi \wedge \exists y \forall z \psi\\ &\equiv \forall x \varphi \wedge \exists y \forall z \forall x \psi\\ &\equiv \exists y \forall z (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi) i\\ &\equiv \exists y \forall z \forall x (\varphi \wedge \psi) i\\ &\equiv \exists y \forall x \forall z (\varphi \wedge \psi)\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Punkte: /10)

(a)

(b)

(c)

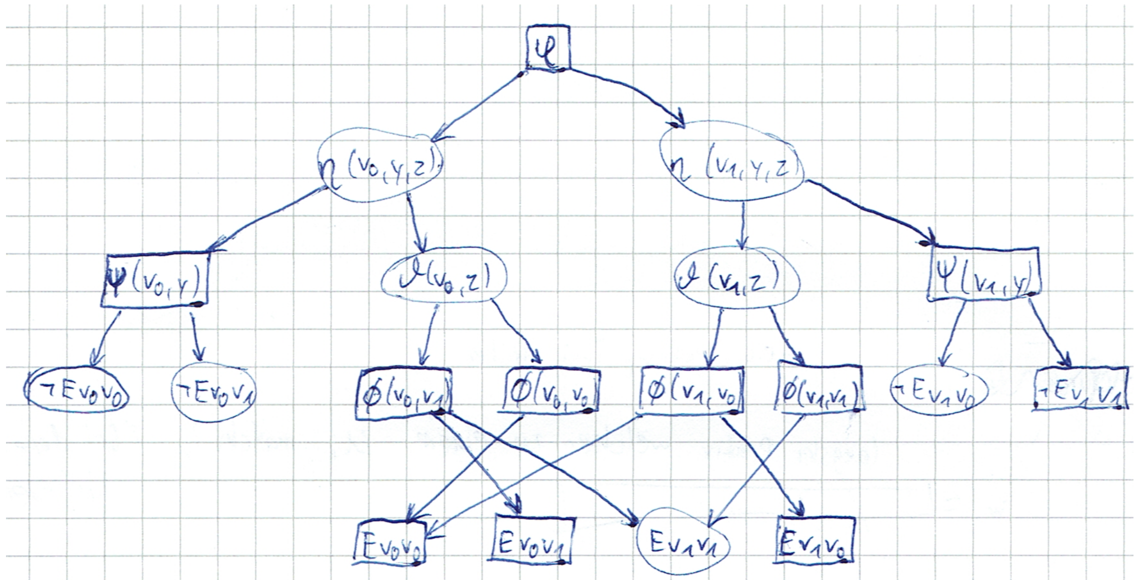
Aufgabe 4 (Punkte: /8)

(a)

$$\begin{aligned}\psi &= \forall x(\exists y Exy \rightarrow \exists z(Exz \wedge Ezz))\\ &\equiv \forall x(\neg(\exists y Exy) \vee \exists z(Exz \wedge Ezz))\\ &\equiv \forall x(\forall y \neg Exy \vee \exists z(Exz \wedge Ezz))\end{aligned}$$

(b)

Seien $\eta = \forall y \neg Exy \vee \exists z(Exz \wedge Ezz)$, $\psi = \forall y \neg Exy$, $\vartheta = \exists z(Exz \wedge Ezz)$ und $\phi = Exz \wedge Ezz$.



(Positionen, welche aus verschiedenen Teilformeln entstehen würden, jedoch syntaktisch die gleiche Formel darstellen, wurden als Knoten der Übersichtlichkeit halber zusammengefasst. [Betroffen sind nur Knoten, die Kanten darstellen, auf der untersten "Ebene".])

Es existiert eine Gewinnstrategie f für die Verifiziererin von der Startposition aus, welche wie folgt definiert ist:

- $f(\eta(v_i, y, z)) = \vartheta(v_i, z)$ mit $i \in \{1, 2\}$
- $f(\vartheta(v_i, z)) = \phi(v_i, v_o)$ mit $i \in \{1, 2\}$

Dabei handelt es sich um eine Gewinnstrategie, zunächst kein Knoten ohne Nachfolger existiert, weshalb stets die ϑ-Teilformel gewählt werden muss, und anschließend stets $z = v_0$ gewählt werden kann, da Ev_iv_0 wahr ist und ebenfalls Ev_0v_0 wahr ist.

Aufgabe 5 (Punkte: /10)

Die folgenden FO-Formeln sind über der Signatur $\{V_0, V_1, E\}$ über dem Universum V definiert.

(a)

(i) $\varphi_i(v) := \forall x(Evx \rightarrow \forall y(Exy \rightarrow \neg\exists z Eyz))$

Für alle Nachfolger x von v, falls welche existieren, müssen wiederum alle Nachfolger y von x, falls diese existieren, eine Endposition sein.

(ii) $\varphi_{ii}^{n}(v,w) := \Big((V_1 v \rightarrow \forall x(Evx \rightarrow \varphi_{ii}^{n-1}(x,w))) \wedge (V_0 v \rightarrow \exists y(Evy \rightarrow \varphi_{ii}^{n-1}(y,w)))\Big) \vee v = w$ und definiere noch zusätzlich $\varphi_{ii}^{0}(v,w) := v = w$.
Idee: Falls v in V_1 liegt (und somit Spieler 1 zieht), muss für alle Nachfolger die Formel mit $n-1$ gelten, da V_1 den Nachfolger wählen darf und somit ein Schritt "verbraucht" wird. Ist aber V_0 am Zug, so muss die Formel nur für einen Nachfolger mit $n-1$ gelten, da Spieler 0 wählen kann. Da die Forderung höchstens n Schritte ist, ist die Formel auch erfüllt, falls $v = w$. Für ein festes n lässt sich die Formel aufgrund des eindeutigen Rekursionsschlusses bei 0 komplett ausschreiben, weshalb eine FO-Formel vorliegt. Somit definiert die Formel gerade die geforderte Relation.

(b)

Definiere zunächst die Teilformel $\psi_L(v)$, welche ausdrücken soll, dass Spieler 0 von v aus keine Gewinnstrategie hat:
$\psi_L(v) := \forall x(V_1 x \wedge \neg\exists y Exy \rightarrow \neg\varphi_{ii}^{n}(v,x))$
Die Formel besagt also, dass alle Knoten, bei welchen Spieler 1 ziehen müsste und die keine Nachfolger haben, nicht von v aus von Spieler 0 in höchstens n Schritten erzwungen werden können. Es reicht dabei, Pfade der Länge höchstens n zu betrachten, da der Graph nur aus n Knoten besteht und somit jeder Knoten, welcher von Spieler 0 von v aus erzwungen werden kann, ebenfalls in höchstens n Schritten erzwungen werden kann, da man höchstens den ganzen Graphen traversiert und Kreise im "Pfad" weglassen kann.

Definiere nun die Teilformel $\psi_\infty(v)$, welche ausdrückt, dass Spieler 0 von v aus eine unendliche Partie erzwingen kann:
$\psi_\infty(v) := \exists x(\varphi_{ii}^{n}(v,x) \wedge \exists y(y \neq x \wedge \varphi_{ii}^{n}(x,y) \wedge \varphi_{ii}^{n}(y,x)))$
Die Formel ist wahr, falls ein Knoten x existiert, sodass Spieler 0 diesen Knoten von v aus erzwingen kann und sodass man einen Pfad von x zu x erzwingen kann über einen anderen Knoten y. Dies entspricht gerade der Möglichkeit, eine unendliche Partie zu erzwingen, da Spieler 0 dann unendlich oft x zu x erzwingen kann. Es genügt ebenfalls aus analogen Gründen wie in der ersten Teilformel, erzwungene Pfade der Länge höchstens n zu betrachten. Es ergibt sich nun die Gesamtformel
$\psi_{L\infty}(v) := \psi_L(v) \wedge \psi_\infty(v)$