

2	3	4	5	$\Sigma$
/7	/5	/8	/6	/26

Gruppe **G**

## Aufgabe 2 (Punkte: /7)

- (a)  
 Es existieren die Redukte  $(\mathbb{N}, +, \cdot, <)$ ,  $(\mathbb{N}, \cdot, <)$ ,  $(\mathbb{N}, +, <)$ ,  $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{N}, <)$ ,  $(\mathbb{N}, +)$ ,  $(\mathbb{N}, \cdot)$  und  $(\mathbb{N})$ .
- (b)  
 Für  $n \subseteq \mathbb{N}$  und  $n \neq \emptyset$  ist  $\mathfrak{N}_n = (n, \leq)$  eine Substruktur von  $\mathfrak{N}_1$ , da sich jede Teilmenge der natürlichen Zahlen auf die selbe Weise ordnen lässt.  
 Sei  $n \subseteq \mathbb{N}$ ,  $n \neq \emptyset$  und sei  $N_n = \{2^i \cdot m \mid m \in n, i \in \mathbb{N}\}$ . Dann ist  $\mathfrak{N}_{N_n} = (N_n, f)$  eine Substruktur von  $\mathfrak{N}_2$ , da man alle Elemente in  $n$  um die Vielfachen mit allen Zweierpotenzen erweitern muss, da die Substruktur sonst nicht  $\{f\}$ -abgeschlossen wäre.
- (c)  
 $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$  besitzt die Substrukturen  $\{0\}$  und  $\{0, 1, 2\}$ , da  $\{0, 1\}$  mit der Addition modulo 3 nicht abgeschlossen ist ( $1+1=2$  liegt nicht in der Menge).  
 $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$  besitzt die Substrukturen  $\{0\}$  und  $\{0, 1, 2, 3\}$  und  $\{0, 2\}$ . ( $\{0, 1\}$  nicht abgeschlossen wie vorher begründet,  $\{0, 1, 2\}$  ebenfalls nicht, da  $1 + 2 = 3$ ,  $\{0, 1, 3\}$  nicht da  $1 + 1 = 2$ ,  $\{0, 2\}$  und  $\{0, 3\}$  analog auch nicht.)

## Aufgabe 3 (Punkte: /5)

- (a)  
 Die Aussage des Satzes ist, dass ein Knoten  $x$  existiert, welcher nicht inzident zu einer Kante ist.  
 Die Aussage trifft nur auf  $\mathcal{G}_2$ , der Knoten oben links ist isoliert.
- (b)  
 Die Aussage des Satzes ist, dass ein Knoten  $x$  existiert, welcher über eine Kante mit zwei anderen, verschiedenen, Knoten  $y, z$  verbunden ist. Dies trifft auf die Graphen  $\mathcal{G}_1$  ( $x$  ist Knoten oben links) und  $\mathcal{G}_4$  ( $x$  ist z.B. der Knoten unten rechts) zu. Der Satz gilt für die restlichen Graphen nicht, da dessen Knoten höchstens Grad 1 haben und somit nicht zu mind. zwei anderen adjazent sind.
- (c)  
 Die Aussage des Satzes ist, dass im Graphen zwei verschiedene Knoten stets durch eine Kante verbunden sein sollen. (Das " $\exists z(\dots)$ " ist redundant, da innerhalb der Klammern  $Exy$  nochmal in einer Konjunktion auftritt.) Dies trifft nur auf den Graphen  $\mathcal{G}_3$ , da in allen anderen graphen Knoten existieren, welche nicht adjazent zueinander sind.

## Aufgabe 4 (Punkte: /8)

Im Index der Bezeichnung der Formel stehen die freien Variablen, die Potenz steht für den Aufgabenteil.

(a)

$$\varphi_{ab}^1 := \exists x(a \cdot x = b)$$

(b)

$$\varphi_a^2 := \neg \exists x \neg \exists y (x \neq 1 \wedge y \neq 1 \wedge x \cdot y = a) \wedge a \neq 1$$

(c)

$$\varphi_{ab}^3 := \neg \exists n \neg \exists c \neg \exists d (n \cdot c = a \wedge n \cdot d = b)$$

(d)

$$\varphi_a^4 :=$$

(e)

$$\varphi_{ab}^5 :=$$

## Aufgabe 5 (Punkte: /6)

(a)

Betrachte für den Induktionsanfang einen Term  $t$ , welcher nur aus einer Variable  $x$  besteht. Dann gilt

$$\llbracket t \rrbracket^{(\mathfrak{A}, \beta)} = \llbracket x \rrbracket^{(\mathfrak{A}, \beta)} = \beta(x) = \llbracket x \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)} = \llbracket t \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)}.$$

Seien nun für den Induktionsschritt  $t_1, \dots, t_n$  Terme für die die Aussage gilt und sei  $f$  ein  $n$ -stelliges Funktionssymbol aus  $\mathfrak{A}$  bzw.  $\mathfrak{B}$ . (Gleiche Signatur, da  $\mathfrak{A}$  eine Substruktur.) Dann gilt

$$\begin{aligned} \llbracket ft_1 \dots t_n \rrbracket^{(\mathfrak{A}, \beta)} &= f^{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{(\mathfrak{A}, \beta)}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{(\mathfrak{A}, \beta)}) \stackrel{IV}{=} f^{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)}) \\ &\stackrel{Def.}{=} f^{\mathfrak{B}}|_{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)}) \\ &= f^{\mathfrak{B}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)}) \\ &= \llbracket ft_1 \dots t_n \rrbracket^{(\mathfrak{B}, \beta)}. \end{aligned}$$

(b)

Sei  $\mathfrak{A}$  eine Substruktur von  $\mathfrak{B}$  und seien  $a_1, \dots, a_k$  aus dem Universum von  $\mathfrak{A}$ . Zeige die Aussage induktiv über den Aufbau von FO Formeln.

*Induktionsanfang:* Seien Terme  $t_i$  mit höchstens den Variablen  $a_1, \dots, a_k$  aus dem Universum von  $\mathfrak{A}$ .

- Sei  $\varphi = (t_1 = t_2)$ . Dann gilt  $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \llbracket t_1 \rrbracket^{\mathfrak{A}} = \llbracket t_2 \rrbracket^{\mathfrak{A}} \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \llbracket t_1 \rrbracket^{\mathfrak{B}} = \llbracket t_2 \rrbracket^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ .
- Sei  $\varphi = (Pt_1 \dots t_n)$ , wobei  $P$  ein  $m$ -stelliges Relationssymbol aus  $\mathfrak{A}$  (und somit aus  $\mathfrak{B}$ , da eine Substruktur die selbe Signatur hat.)  
 Dann gilt  $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow (\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{A}} \stackrel{Def}{\Leftrightarrow} (\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{B}} \cap A^m \Leftrightarrow (\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{B}}$ , da  $a_1, \dots, a_k$  aus dem Universum von  $\mathfrak{A}$ .

*Induktionsschritt:* Die Behauptung gelte für Formeln  $\psi, \varphi$ , dessen Terme höchstens Variablen  $a_1, \dots, a_k$  aus dem Universum von  $\mathfrak{A}$ .

•