346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

2	3	4	5	$\sum$
/10	/7	/15	/11*	/32

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /10)

(a)

(b)

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur, sodass jedes Element elementar definierbar ist. Sei außerdem π ein beliebiger Automorphismus von $\mathfrak{A}$ und $a \in A$ beliebig. Aus der elementaren Definierbarkeit von a folgt, dass eine Formel $\varphi_a(x)$ existiert, sodass $\mathfrak{A} \models \varphi_a(a)$ und $\mathfrak{A} \not\models \varphi_a(b)$ für alle $b \in A$ mit $b \neq a$. Da π als Automorphismus auch insbesondere ein Isomorphismus ist, gilt mit dem Isomorphielemma, dass $\mathfrak{A} \models \varphi_a(x)$ gdw. $\mathfrak{A} \models \varphi_a(\pi(x))$. Nun muss aber $\pi(a) = a$ sein, da sonst das Isomorphielemma verletzt wäre. ($\mathfrak{A} \models \varphi_a(a)$, aber $\mathfrak{A} \not\models \varphi_a(\pi(a))$, falls $\pi(a) \neq a$.)
Da a beliebig gewählt war, gilt für alle $a \in A$, dass $\pi(a) = a$ und somit $\pi = 1_{\mathfrak{A}}$, obwohl auch π beliebig gewählt war. Es folgt also, dass nur $1_{\mathfrak{A}}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$ ist, also ist $\mathfrak{A}$ starr.

(c)

Eine unendliche Struktur mit dieser Eigenschaft ist zum Beispiel durch $(\mathbb{N}, 0, 1, +)$ gegeben, da jedes Element elementar definierbar ist. (Sogar termdefinierbar durch $1 + ... + 1$ für Zahlen größer als 1., 0 und 1 bereits in der Signatur.)

Aufgabe 3 (Punkte: /7)

(a)

(b)

(c)

Aufgabe 4 (Punkte: /15)

(a)

(b)

(c)

(d)

346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

(e)

(f)

Aufgabe 5 (Punkte: /11*)

(a)

(b)

(c)