Mathematische Logik — 346532, Daniel Boschmann
Übung 5 — 348776, Anton Beliankou
21. Mai 2017 — 356092, Daniel Schleiz

2	3	4	5	$\sum$
/7	/5	/8	/6	/26

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /7)

(a)

Es existieren die Redukte $(\mathbb{N}, +, \cdot, <), (\mathbb{N}, \cdot, <), (\mathbb{N}, +, <), (\mathbb{N}, +, \cdot), (\mathbb{N}, <), (\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$ und $(\mathbb{N})$.

(b)

Für $n \subseteq \mathbb{N}$ und $n \neq \emptyset$ ist $\mathfrak{N}_n = (n, \leq)$ eine Substruktur von $\mathfrak{N}_1$, da sich jede Teilmenge der natürlichen Zahlen auf die selbe Weise ordnen lässt. Dies sind alle möglichen Substrukturen.
Sei $n \subseteq \mathbb{N}$, $n \neq \emptyset$ und sei $N_n = \{2^i \cdot m \mid m \in n, i \in \mathbb{N}\}$ sowie $N_k = \{\mathbb{N} \backslash Q \mid Q = \{0, .., k\},\ k \in \mathbb{N}\}$ die Teilmengen von $\mathbb{N}$ ohne Anfangselemente 0 bis k. Ferner sei $N_{nk} := N_2 \ \cup \ N_k$. Dann ist $\mathfrak{N}_{N_n} = (N_n, f)$ eine Substruktur von $\mathfrak{N}_2$, da man alle Elemente in n um die Vielfachen mit allen Zweierpotenzen erweitern muss, da die Substruktur sonst nicht $\{f\}$-abgeschlossen wäre. Ebenfalls ist $\mathfrak{N}_{N_{nk}} = (N_n, f)$ eine Substruktur, da man ab einem gewissen k auch alle Elemente der natürlichen Zahlen nehmen kann, die größer als k sind. Für beliebige $k \in \mathbb{N}$ und $n \subseteq \mathbb{N}$, $n \neq \emptyset$ sind dies alle möglichen Substrukturen.

(c)

$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ besitzt die Substrukturen $\{0\}$ und $\{0, 1, 2\}$, da $\{0, 1\}$ mit der Addition modulo 3 nicht abgeschlossen ist (1+1=2 liegt nicht in der Menge).
$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ besitzt die Substrukturen $\{0\}$ und $\{0, 1, 2, 3\}$ und $\{0, 2\}$. ($\{0, 1\}$ nicht abgeschlossen wie vorher begründet, $\{0, 1, 2\}$ ebenfalls nicht, da $1 + 2 = 3$, $\{0, 1, 3\}$ nicht da $1 + 1 = 2$, $\{0, 2\}$ und $\{0, 3\}$ analog auch nicht.)

Aufgabe 3 (Punkte: /5)

(a)

Die Aussage des Satzes ist, dass ein Knoten x existiert, welcher nicht inzident zu einer Kante ist. Die Aussage trifft nur auf $\mathcal{G}_2$, der Knoten oben links ist isoliert.

(b)

Die Aussage des Satzes ist, dass ein Knoten x existiert, welcher über eine Kante mit zwei anderen, verschiedenen, Knoten y, z verbunden ist. Dies trifft auf die Graphen $\mathcal{G}_1$ (x ist Knoten oben links) und $\mathcal{G}_4$ (x ist z.B. der Knoten unten rechts) zu. Der Satz gilt für die restlichen Graphen nicht, da dessen Knoten höchstens Grad 1 haben und somit nicht zu mind. zwei anderen adjazent sind.

(c)

Die Aussage des Satzes ist, dass im Graphen zwei verschiedene Knoten stets durch eine Kante verbunden sein sollen. (Das "$\exists z(...)$" ist redundant, da innerhalb der Klammern Exy nochmal in einer Konjunktion auftritt.) Dies trifft nur auf den Graphen $\mathcal{G}_3$, da in allen anderen graphen Knoten existieren, welche nicht adjazent zueinander sind.

Aufgabe 4 (Punkte: /8)

(a)

$\varphi_a(a,b) := \exists x(a \cdot x = b)$

(b)

$\varphi_b(a) := \neg\exists x \neg\exists y(x \neq 1 \land y \neq 1 \land x \cdot y = a) \land a \neq 1$

(c)

$\varphi_c(a,b) := \neg\exists n \neg\exists c \neg\exists d(n \cdot c = a \land n \cdot d = b)$

(d)

$\varphi_d(a) := (a = 1) \lor \forall x(\varphi_a(x,a) \land \varphi_b(x) \to 1 + 1 = x)$

(e)

$\varphi_e(a,b) := \forall x(\varphi_d(x) \to \forall y \forall z(((x + z \neq b) \to (x + y \neq a)) \land ((x + y \neq a) \to (x + z \neq b)))$

Aufgabe 5 (Punkte: /6)

(a)

Betrachte für den Induktionsanfang einen Term t, welcher nur aus einer Variable x besteht. Dann gilt

$$[\![t]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)} = [\![x]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)} = \beta(x) = [\![x]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)} = [\![t]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}.$$

Seien nun für den Induktionsschritt $t_1, ..., t_n$ Terme für die die Aussage gilt und sei f ein $n-$stelliges Funktionssymbol aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. (Gleiche Signatur, da $\mathfrak{A}$ eine Substruktur.) Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\![ft_1...t_n]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)} = f^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)}, ..., [\![t_n]\!]^{(\mathfrak{A},\beta)}) &\overset{IV}{=} f^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}, ..., [\![t_n]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}) \\
&\overset{Def.}{=} f^{\mathfrak{B}}|_A([\![t_1]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}, ..., [\![t_n]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}) \\
&= f^{\mathfrak{B}}([\![t_1]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}, ..., [\![t_n]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}) \\
&= [\![ft_1...t_n]\!]^{(\mathfrak{B},\beta)}.
\end{aligned}$$

(b)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ und seien $a_1, ..., a_k$ aus dem Universum von $\mathfrak{A}$. Zeige die Aussage induktiv über den Aufbau von FO Formeln.

Induktionsanfang: Seien Terme t_i mit höchstens den Variablen $a_1, ..., a_k$ aus dem Universum von $\mathfrak{A}$.

- Sei $\varphi = (t_1 = t_2)$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow [\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}} = [\![t_2]\!]^{\mathfrak{A}} \overset{(a)}{\Leftrightarrow} [\![t_1]\!]^{\mathfrak{B}} = [\![t_2]\!]^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$.
- Sei $\varphi = (Pt_1...t_n)$, wobei P ein m-stelliges Relationssymbol aus $\mathfrak{A}$ (und somit aus $\mathfrak{B}$, da eine Substruktur die selbe Signatur hat.)
  Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow ([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}, ..., [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{A}} \overset{Def}{\Leftrightarrow} ([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}, ..., [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{B}} \cap A^m \overset{(*)}{\Leftrightarrow} ([\![t_1]\!]^{\mathfrak{A}}, ..., [\![t_n]\!]^{\mathfrak{A}}) \in P^{\mathfrak{B}} \overset{(a)}{\Leftrightarrow} ([\![t_1]\!]^{\mathfrak{B}}, ..., [\![t_n]\!]^{\mathfrak{B}}) \in P^{\mathfrak{B}} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ [(*) Da $a_1, ..., a_k$ aus dem Universum von $\mathfrak{A}$].

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für Formeln ψ, φ, dessen Terme höchstens Variablen $a_1, ..., a_k$ aus dem Universum von $\mathfrak{A}$ enthalten.

- $\mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \overset{IV}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \not\models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi$
- $\mathfrak{A} \models (\varphi \lor \psi) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \lor \mathfrak{A} \models \psi \overset{IV}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \models \varphi \lor \mathfrak{B} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi \lor \psi)$

- $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi \wedge \mathfrak{A} \models \psi \overset{IV}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \models \varphi \wedge \mathfrak{B} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi \wedge \psi)$
- $\mathfrak{A} \models (\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi \vee \mathfrak{A} \models \psi \overset{IV}{\Leftrightarrow} \mathfrak{B} \not\models \varphi \vee \mathfrak{B} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Somit ist die Aussage für beliebige quantorenfreie FO-Formeln gezeigt. Es folgt insbesondere, da die Substruktur $\mathfrak{A}$ beliebig gewählt war, dass jede Substruktur von $\mathfrak{B}$ die gleichen quantorenfreien Sätze erfüllt, da dies gerade die Rückrichtung der gezeigten Aussage ist.