2	3	4	5	$\sum$
/4	/10	/8	/10	/32

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /4)

(a)

Wandle die Formel zunächst in PNF um.

$$\begin{aligned}\varphi &= \forall x \exists y Rxy \land (\neg Pz \lor \exists x \neg Rxy)\\ &\equiv \forall x_1 \exists x_2 Rx_1x_2 \land (\neg Pz \lor \exists x_3 \neg Rx_3y)\\ &\equiv \forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 (Rx_1x_2 \land (\neg Pz \lor \neg Rx_3y)) \in \mathrm{FO}(\{R, P\})\end{aligned}$$

Eliminiere nun schrittweise die Existenzquantoren, dabei entsteht jeweils eine neue Formel ψ_i.

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \forall x_1 \exists x_3 (Rx_1fx_1 \land (\neg Pz \lor \neg Rx_3y)) \in \mathrm{FO}(\{R, P, f\})\\ \psi_2 &= \forall x_1 (Rx_1fx_1 \land (\neg Pz \lor \neg Rgx_3y)) \in \mathrm{FO}(\{R, P, f, g\})\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\vartheta &= \forall x \exists y \forall z (\varphi \land \psi)\\ &\equiv \forall x (\varphi \land \exists y \forall z \psi)\\ &\equiv \forall x \varphi \land \forall x \exists y \forall z \psi\\ &\equiv \forall x \varphi \land \exists y \forall z \psi\\ &\equiv \forall x \varphi \land \exists y \forall z \forall x \psi\\ &\equiv \exists y \forall z (\forall x \varphi \land \forall x \psi)\\ &\equiv \exists y \forall z \forall x (\varphi \land \psi)\\ &\equiv \exists y \forall x \forall z (\varphi \land \psi)\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Punkte: /10)

(a)

- $G_1 : W_0 = \{7, 10, 6\}, W_1 = \{8, 9, 4, 5, 2, 3, 1\}$
- $G_2 : W_0 = \{3, 5, 1, \}, W_1 = \{\}$
- $G_3 : W_0 = \{\}, W_1 = \{7, 4, 6, 2, 3, 1, 5\}$

(b)

- Das Spiel G_1 ist fundiert, da der Spielgraph azyklisch und endlich ist und mehrere Endpositionen besitzt. Somit endet jede Partie schließlich in endlich vielen Schritten in einer Endposition, d.h. jede Partie ist endlich. G_1 ist ebenfalls determiniert, da $\{W_0, W_1\}$ eine Partition der Gesamtmenge der Positionen ist, also hat von jeder Position aus einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie.

- Das Spiel G_2 ist nicht fundiert, da zum Beispiel die Partie, welche bei 2 beginnt und in welcher Spieler 1 von 2 aus stets zu 4 zieht, unendlich ist. G_2 ist ebenfalls nicht determiniert, da zum Beispiel die Position 2 in keiner der beiden Gewinnregionen liegt.
- Das Spiel G_3 ist nicht fundiert. Betrachte die Partie, welche als Startposition 2 besitzt und in welcher Spieler 0 von 2 stets zu 4 zieht und Spieler 1 von 4 stets zu 2 zieht. Diese ist offensichtlich unendlich. G_3 ist aber determiniert, da die beiden Gewinnregionen die Menge der Positionen partitionieren, d.h. von jeder Position hat ein Spieler (hier stets Spieler 1) eine Gewinnstrategie.

(c)

Sei ein fundiertes Spiel, dessen Spielgraph G und eine beliebige Position $v \in G$ gegeben. Zeige per Induktion über die minimale Anzahl an Zügen, mit der ein Spieler von v aus gewinnen kann (es kann stets ein Spieler gewinnen, da G fundiert und eine endliche Partie stets einen Gewinner und Verlierer hat), dass einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie von v aus besitzt.
Falls $n = 0$ die minimale Anzahl der benötigten Züge ist, damit Spieler 0 oder 1 gewinnt, handelt es sich bei v um eine Endposition. Falls von v aus Spieler 0 ziehen muss, so hat Spieler 1 automatisch gewonnen und somit auch eine Gewinnstrategie. Falls von v aus Spieler 1 ziehen muss, so hat Spieler 0 automatisch gewonnen und somit eine Gewinnstrategie. Zusammen hat also entweder Spieler 0 oder Spieler 1 eine Gewinnstrategie von v aus.
Sei nun $n > 0$ die minimale Anzahl der benötigten Züge, sodass Spieler 0 oder 1 von v aus gewinnen kann. Es lässt sich nun die Induktionsvoraussetzung auf alle Nachfolger $w \in vE$ von v anwenden, d.h. für diese Positionen ist bekannt, welcher Spieler eine Gewinnstrategie von w aus besitzt. Nun lässt sich auch bestimmen, welcher Spieler eine Gewinnstrategie von v aus besitzt, betrachte hierzu unterschiedliche Fälle:

- Spieler 0 muss bei v ziehen;
  - Es existiert ein Nachfolger $w \in vE$, von welchem aus Spieler 0 eine Gewinnstrategie hat. In dem Fall besitzt Spieler 0 eine Gewinnstrategie von v, nämlich soll von v zu w gezogen werden, dann wird die Strategie von w aus befolgt.
  - Für alle Nachfolger $w \in vE$ hat Spieler 1 eine Gewinnstrategie. In dem Fall hat auch Spieler 1 eine Gewinnstrategie von v aus, da egal wie Spieler 0 zieht, eine Gewinnstrategie für w existiert.
- Spieler 1 muss bei v ziehen;
  - Es existiert ein Nachfolger $w \in vE$, von welchem aus Spieler 1 eine Gewinnstrategie hat. In dem Fall besitzt Spieler 1 eine Gewinnstrategie von v, nämlich soll von v zu w gezogen werden, dann wird die Strategie von w aus befolgt.
  - Für alle Nachfolger $w \in vE$ hat Spieler 0 eine Gewinnstrategie. In dem Fall hat Spieler 0 eine Gewinnstrategie von v aus, da egal wie Spieler 1 zieht, eine Gewinnstrategie für w existiert.

Da v beliebig war, wurde gezeigt, dass für jede Position im fundierten Spiel G einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt. Somit ist G also auch determiniert.

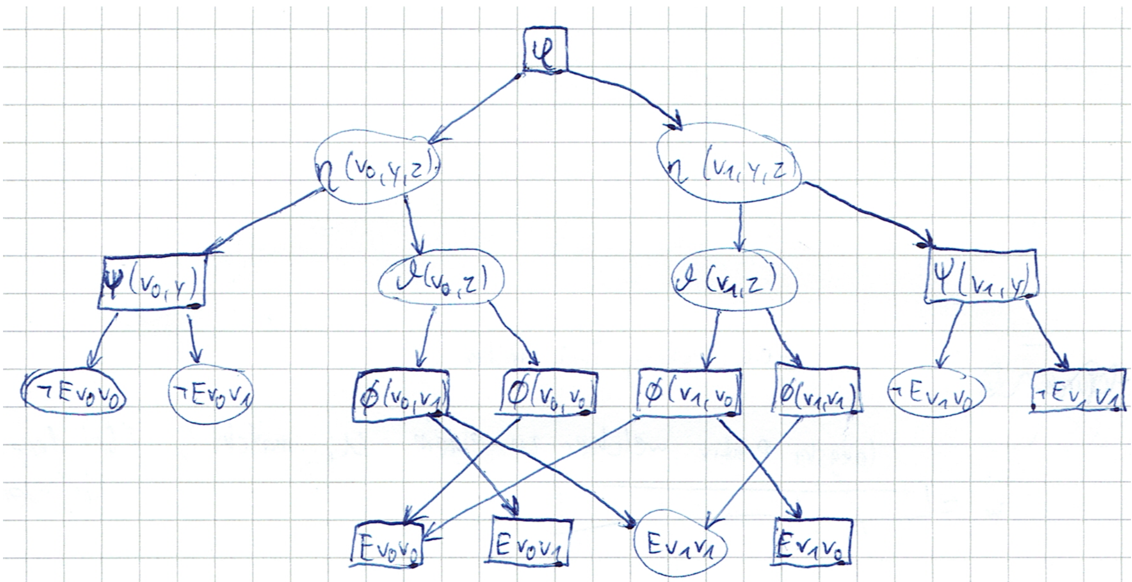
Aufgabe 4 (Punkte: /8)

(a)

$$\begin{aligned}\psi &= \forall x(\exists y Exy \to \exists z(Exz \land Ezz))\\ &\equiv \forall x(\neg(\exists y Exy) \lor \exists z(Exz \land Ezz))\\ &\equiv \forall x(\forall y \neg Exy \lor \exists z(Exz \land Ezz))\end{aligned}$$

(b)

Seien $\eta = \forall y \neg Exy \lor \exists z(Exz \land Ezz)$, $\psi = \forall y \neg Exy$, $\vartheta = \exists z(Exz \land Ezz)$ und $\phi = Exz \land Ezz$.



(Positionen, welche aus verschiedenen Teilformeln entstehen würden, jedoch syntaktisch die gleiche Formel darstellen, wurden als Knoten der Übersichtlichkeit halber zusammengefasst. [Betroffen sind nur Knoten, die Kanten darstellen, auf der untersten "Ebene".])

Es existiert eine Gewinnstrategie f für die Verifiziererin von der Startposition aus, welche wie folgt definiert ist:

- $f(\eta(v_i, y, z)) = \vartheta(v_i, z)$ mit $i \in \{1, 2\}$
- $f(\vartheta(v_i, z)) = \phi(v_i, v_o)$ mit $i \in \{1, 2\}$

Dabei handelt es sich um eine Gewinnstrategie, zunächst kein Knoten ohne Nachfolger existiert, weshalb stets die ϑ-Teilformel gewählt werden muss, und anschließend stets $z = v_0$ gewählt werden kann, da Ev_iv_0 wahr ist und ebenfalls Ev_0v_0 wahr ist.

346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

Aufgabe 5 (Punkte: /10)

Die folgenden FO-Formeln sind über der Signatur $\{V_0, V_1, E\}$ über dem Universum V definiert.

(a)

(i) $\varphi_i(v) := \forall x(Evx \to \forall y(Exy \to \neg\exists z Eyz))$

Für alle Nachfolger x von v, falls welche existieren, müssen wiederum alle Nachfolger y von x, falls diese existieren, eine Endposition sein.

(ii) $\varphi_{ii}^n(v,w) := \Big((V_1 v \to \forall x(Evx \to \varphi_{ii}^{n-1}(x,w))) \wedge (V_0 v \to \exists y(Evy \to \varphi_{ii}^{n-1}(y,w)))\Big) \vee v = w$ und definiere noch zusätzlich $\varphi_{ii}^0(v,w) := v = w$.

Idee: Falls v in V_1 liegt (und somit Spieler 1 zieht), muss für alle Nachfolger die Formel mit $n-1$ gelten, da V_1 den Nachfolger wählen darf und somit ein Schritt "verbraucht" wird. Ist aber V_0 am Zug, so muss die Formel nur für einen Nachfolger mit $n-1$ gelten, da Spieler 0 wählen kann. Da die Forderung höchstens n Schritte ist, ist die Formel auch erfüllt, falls $v = w$. Für ein festes n lässt sich die Formel aufgrund des eindeutigen Rekursionsschlusses bei 0 komplett ausschreiben, weshalb eine FO-Formel vorliegt. Somit definiert die Formel gerade die geforderte Relation.

(b)

Definiere zunächst die Teilformel $\psi_L(v)$, welche ausdrücken soll, dass Spieler 0 von v aus keine Gewinnstrategie hat:

$\psi_L(v) := \forall x(V_1 x \wedge \neg\exists y Exy \to \neg\varphi_{ii}^n(v,x))$

Die Formel besagt also, dass alle Knoten, bei welchen Spieler 1 ziehen müsste und die keine Nachfolger haben, nicht von v aus von Spieler 0 in höchstens n Schritten erzwungen werden können. Es reicht dabei, Pfade der Länge höchstens n zu betrachten, da der Graph nur aus n Knoten besteht und somit jeder Knoten, welcher von Spieler 0 von v aus erzwungen werden kann, ebenfalls in höchstens n Schritten erzwungen werden kann, da man höchstens den ganzen Graphen traversiert und Kreise im "Pfad" weglassen kann.

Definiere nun die Teilformel $\psi_\infty(v)$, welche ausdrückt, dass Spieler 0 von v aus eine unendliche Partie erzwingen kann:

$\psi_\infty(v) := \exists x(\varphi_{ii}^n(v,x) \wedge \exists y(y \neq x \wedge \varphi_{ii}^n(x,y) \wedge \varphi_{ii}^n(y,x)))$

Die Formel ist wahr, falls ein Knoten x existiert, sodass Spieler 0 diesen Knoten von v aus erzwingen kann und sodass man einen Pfad von x zu x erzwingen kann über einen anderen Knoten y. Dies entspricht gerade der Möglichkeit, eine unendliche Partie zu erzwingen, da Spieler 0 dann unendlich oft x zu x erzwingen kann. Es genügt ebenfalls aus analogen Gründen wie in der ersten Teilformel, erzwungene Pfade der Länge höchstens n zu betrachten. Es ergibt sich nun die Gesamtformel

$\psi_{L\infty}(v) := \psi_L(v) \wedge \psi_\infty(v)$