346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

2	3	4	5	$\sum$
/7	/5	/8	/6	/26

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /7)

(a)

Es existieren die Redukte $(\mathbb{N}, +, \cdot, <), (\mathbb{N}, \cdot, <), (\mathbb{N}, +, <), (\mathbb{N}, +, \cdot, <), (\mathbb{N}, +, \cdot), (\mathbb{N}, <), (\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot)$ und $(\mathbb{N})$.

(b)

Für $n \subseteq \mathbb{N}$ und $n \neq \emptyset$ ist $\mathfrak{N}_n = (n, \leq)$ eine Substruktur von $\mathfrak{N}_1$, da sich jede Teilmenge der natürlichen Zahlen auf die selbe Weise ordnen lässt.

Sei $n \subseteq \mathbb{N}$, $n \neq \emptyset$ und sei $N_n = \{2^i \cdot m \mid m \in n, i \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathfrak{N}_{N_n} = (N_n, f)$ eine Substruktur von $\mathfrak{N}_2$, da man alle Elemente in n um die Vielfachen mit allen Zweierpotenzen erweitern muss, da die Substruktur sonst nicht $\{f\}$-abgeschlossen wäre.

(c)

$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ besitzt die Substrukturen $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}, +) = \{0\}$, sich die Addition modulo problemlos einschränken lässt. (Für $(\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}, +)$ klar, da $0 + 0 = 0 \in (\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}, +)$, für $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ auch klar, bis auf $1 + 1 = 2 \equiv_2 0 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, also doch abegschlossen.)

$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ besitzt die Substrukturen $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}, +)$ (aus analogen Gründen zu vorher), nicht aber $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$. (Betrachte bei der Einschränkung des Definitionsbereichs auf $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$, nach Vorschrift von $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$: $2 + 2 = 0 \not\equiv_3 1$.)

Aufgabe 3 (Punkte: /5)

(a)

Die Aussage des Satzes ist, dass ein Knoten x existiert, welcher nicht inzident zu einer Kante ist. Die Aussage trifft nur auf $\mathcal{G}_2$, der Knoten oben links ist isoliert.

(b)

Die Aussage des Satzes ist, dass ein Knoten x existiert, welcher über eine Kante mit zwei anderen, verschiedenen, Knoten y, z verbunden ist. Dies trifft auf die Graphen $\mathcal{G}_1$ (x ist Knoten oben links) und $\mathcal{G}_4$ (x ist z.B. der Knoten unten rechts) zu. Der Satz gilt für die restlichen Graphen nicht, da dessen Knoten höchstens Grad 1 haben und somit nicht zu mind. zwei anderen adjazent sind.

(c)

Die Aussage des Satzes ist, dass im Graphen zwei verschiedene Knoten stets durch eine Kante verbunden sein sollen. (Das "$\exists$(...)" ist redundant, da innerhalb der Klammern Exy nochmal in einer Konjunktion auftritt.) Dies trifft nur auf den Graphen $\mathcal{G}_3$, da in allen anderen graphen Knoten existieren, welche nicht adjazent zueinander sind.

346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

Aufgabe 4 (Punkte: /8)

(a)

$\varphi_a \coloneqq \exists x(a \cdot x = b)$

(b)

$\varphi_b \coloneqq \neg\exists x \neg\exists y(x \neq 1 \wedge y \neq 1 \wedge x \cdot y = a) \wedge a \neq 1$

(c)

$\varphi_c \coloneqq$

(d)

$\varphi_d \coloneqq$

(e)

$\varphi_e \coloneqq$

Aufgabe 5 (Punkte: /6)

(a)

(b)