

2	3	$\Sigma$
/10	/20	/30

Gruppe **G**

## Aufgabe 2 (Punkte: /10)

(a)

(i)

TODO: Zu zeigen:  $\{\neg, \leftrightarrow\}$  ist nicht funktional vollständig.

(ii)

Zu zeigen:  $\{\downarrow\}$  ist funktional vollständig.

Aus der Vorlesung (Def. 1.10) ist bekannt,  $\{\vee, \neg\}$  ist funktional vollständig.

$$\neg A \equiv \neg A \wedge \neg A \equiv A \downarrow A$$

$$A \vee B \equiv \neg \neg(A \vee B) \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv \neg(A \downarrow B) \equiv (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$$

Somit folgt die zu zeigende Aussage.

(b)

Zu zeigen:  $\{f, 0, 1\}$  ist funktional vollständig.

Aus der Vorlesung (Def. 1.10) ist bekannt,  $\{\wedge, \neg\}$  ist funktional vollständig.

$$\neg A \equiv f(A, 1, 0)$$

$$A \wedge B \equiv f(A, 0, B)$$

Somit folgt die zu zeigende Aussage.

## Aufgabe 3 (Punkte: /20)

(a)

Sei  $\varphi := (A \wedge C \rightarrow B) \wedge (F \wedge D \rightarrow H) \wedge (D \wedge C \wedge E \rightarrow F) \wedge (B \wedge C \rightarrow E) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (H \rightarrow 0) \wedge (1 \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow D)$

Schritt 0: Markiere Variablen  $A$ , für welche Klauseln  $1 \rightarrow A$  existieren:

$$M = \{A, C\}$$

Schritt 1: Markiere Variablen  $B$  und  $D$  wegen jeweils  $A \wedge C \rightarrow B$  und  $A \rightarrow D$  mit  $A, C \in M$ :

$$M = \{A, B, C, D\}$$

Schritt 2: Markiere Variable  $E$  wegen  $B \wedge C \rightarrow E$  mit  $B, C \in M$ :

$$M = \{A, B, C, D, E\}$$

Schritt 3: Markiere Variable  $F$  wegen  $D \wedge C \wedge E \rightarrow F$  mit  $D, C, E \in M$ :

$$M = \{A, B, C, D, E, F\}$$

Schritt 4: Markiere Variable  $H$  wegen  $F \wedge D \rightarrow H$  mit  $F, D \in M$ :

$$M = \{A, B, C, D, E, F, H\}$$

Wegen Klausel  $H \rightarrow 0$  mit  $H \in M$  ist die Aussage "unerfüllbar".

(b)

(i)

### Schnitt

Die Horn-Formel haben folgenden Gestalt:  $\varphi = \bigwedge_{i=1}^n \psi_i$ , wobei  $\psi_i = (\bigvee_{j=1}^k \neg X_{ij}) \vee X_{i0}$  oder  $\psi_i = (\bigvee_{j=1}^k \neg X_{ij})$

Offenbar gilt für jede Interpretation  $\mathfrak{I}$ :

$$\mathfrak{I} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I} \models \psi_i \text{ für } \forall i \in [1, n]$$

Für zwei Interpretationen  $\mathfrak{I}_1 \models \psi_i$  und  $\mathfrak{I}_2 \models \psi_i$  muss gelten  $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \psi_i$ , falls die Abgeschlossenheit unter der Schnittbildung gilt.

Dazu kann es zwei Fälle für jedes  $i$  geben:

**Fall 1)** Für alle  $j$  gilt:  $\mathfrak{I}_1(X_{ij}) = 1 \wedge \mathfrak{I}_2(X_{ij}) = 1 \Rightarrow (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X_{ij}) = 1$

**Fall 2)** Es existiert ein  $j$  mit  $\mathfrak{I}_1(X_{ij}) = 0 \vee \mathfrak{I}_2(X_{ij}) = 0 \Rightarrow (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X_{ij}) = 0$

Für beide Fälle gilt nach der Definition  $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) = \min(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2)$ : falls  $\mathfrak{I}_1 \models \psi_i$  und  $\mathfrak{I}_2 \models \psi_i$ , dann  $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \psi_i$ .

Damit sind Modelle von Horn-Formeln unter Schnittbildung abgeschlossen.

(ii)

### Vereinigung

Sei  $\varphi(A, B) = \neg A \vee \neg B \equiv A \wedge B \rightarrow 0$  eine Horn-Formel und  $\mathfrak{I}_1$  und  $\mathfrak{I}_2$  Interpretationen mit

$$\mathfrak{I}_1(A) = 0, \mathfrak{I}_1(B) = 1$$

$$\mathfrak{I}_2(A) = 1, \mathfrak{I}_2(B) = 0$$

$$\Rightarrow \mathfrak{I}_1 \models \varphi, \mathfrak{I}_2 \models \varphi$$

Ferner gilt:

$$(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)(A) = \max(\mathfrak{I}_1(A), \mathfrak{I}_2(A)) = \max(0, 1) = 1$$

$$(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)(B) = \max(\mathfrak{I}_1(B), \mathfrak{I}_2(B)) = \max(1, 0) = 1$$

$$\Rightarrow (\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2) \not\models \varphi \quad \text{Widerspruch!}$$

Das  $(\mathfrak{I}_1 \cup \mathfrak{I}_2)$  ist also kein Modell von  $\varphi$ . Damit sind Modelle von Horn-Formeln unter Vereinigung nicht abgeschlossen.

(iii)

### Komplement

Sei  $\varphi(A) = A$  eine Horn-Formel sowie eine Interpretation  $\mathfrak{I}(A) = 1$ .

Es gilt offensichtlich  $\mathfrak{I} \models \varphi$ . Betrachte nun das Komplement von  $\mathfrak{I}$ :

$$\neg \mathfrak{I}(A) \equiv 1 - \mathfrak{I}(A) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \neg \mathfrak{I} \not\models \varphi \quad \text{Widerspruch!}$$

Das  $\neg \mathfrak{I}$  ist also kein Modell von  $\varphi$ . Damit sind Modelle von Horn-Formeln unter Komplement nicht abgeschlossen.

(c)

Die Umkehrung gilt nicht.

Betrachte  $\varphi := \neg A \vee B \vee C$ .

Das eindeutige kleinste Modell von  $\varphi$  ist  $\mathfrak{I}_1$  mit  $\mathfrak{I}_1(X) = 0, \mathfrak{I}_1(Y) = 0, \mathfrak{I}_1(Z) = 0$

Sei  $\mathfrak{I}_2$  mit  $\mathfrak{I}_2(A) = 1, \mathfrak{I}_2(B) = 0, \mathfrak{I}_2(C) = 1$

sowie  $\mathfrak{I}_3$  mit  $\mathfrak{I}_3(A) = 1, \mathfrak{I}_3(B) = 1, \mathfrak{I}_3(C) = 0$

zwei weitere Interpretationen.

$$(\mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{I}_3)(A) = 1, (\mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{I}_3)(B) = 0, (\mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{I}_3)(C) = 0$$

Es gilt  $\mathfrak{I}_2 \models \varphi, \mathfrak{I}_3 \models \varphi$ , aber dennoch  $(\mathfrak{I}_2 \cap \mathfrak{I}_3) \not\models \varphi$ . Somit ist  $\varphi$  nicht äquivalent zu einer Horn-Formel nach Teilaufgabe b).

(d)

(i)

$$(Z \rightarrow (X \vee \neg Y)) \wedge (X \rightarrow (\neg Y \vee \neg Z)) \wedge \neg(X \rightarrow (\neg Y \wedge U))$$

$$\equiv (\neg Z \vee (X \vee \neg Y)) \wedge (\neg X \vee (\neg Y \vee \neg Z)) \wedge \neg(\neg X \vee (\neg Y \wedge U))$$

$$\equiv (\neg Z \vee X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \wedge X \wedge (Y \vee \neg U)$$

Die Formel ist äquivalent zu einer Horn-Formel.

(ii)

$$(((\neg U \wedge (Y \vee \neg X)) \rightarrow Z) \vee (X \wedge (\neg U \rightarrow U)))$$

$$\equiv (\neg((\neg U \wedge (Y \vee \neg X)) \rightarrow Z) \vee (X \wedge U))$$

$$\equiv (U \vee (\neg Y \wedge X) \vee Z) \vee (X \wedge U)$$

Wähle nun  $\mathfrak{I}_1$  mit  $\mathfrak{I}_1(U) = 1, \mathfrak{I}_1(X) = \mathfrak{I}_1(Y) = \mathfrak{I}_1(Z) = 0$

sowie  $\mathfrak{I}_2$  mit  $\mathfrak{I}_2(Z) = 1, \mathfrak{I}_2(X) = \mathfrak{I}_2(Y) = \mathfrak{I}_1(U) = 0$

Beide Interpretationen sind Modelle für die gegebene Formel.

Nach Teilaufgabe (b) sind die Modelle der Horn-Formeln unter Schnittbildung abgeschlossen.

$$(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(U) = (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) = (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(Y) = (\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(Z) = 0$$

Setze nun die neue Belegung in die Formel ein:

$$(0 \vee (\neg 0 \wedge 0) \vee 0) \vee (0 \wedge 0) \equiv (1 \wedge 0) \vee 0 \equiv 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

Das  $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)$  ist also kein Modell von der gegebenen Formel. Dies widerspricht der Abgeschlossenheit unter Schnittbildung.

Die Formel ist somit nicht äquivalent zu einer Horn-Formel.

(iii)

$$\begin{aligned} & X \wedge \neg(\neg Y \rightarrow (\neg Y \wedge X)) \wedge ((X \wedge Y) \rightarrow (Y \vee \neg Z)) \\ & \equiv X \wedge \neg(Y \vee (\neg Y \wedge X)) \wedge (\neg(X \wedge Y) \vee (Y \vee \neg Z)) \\ & \equiv X \wedge \neg(Y \vee X) \wedge (\neg(X \wedge Y) \vee (Y \vee \neg Z)) \\ & \equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg X \wedge (\neg X \vee \neg Y) \vee (Y \vee \neg Z) \\ & \equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg X \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Y \vee \neg Z) \\ & \equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg X \wedge 1 \\ & \equiv X \wedge \neg Y \wedge \neg X \end{aligned}$$

Die Formel ist äquivalent zu einer Horn-Formel.