Mathematische Logik
Übung 6
29. Mai 2017

346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

2	3	4	5	$\sum$
/14	/3	/7	/6	/30

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /14)

(a)

$\Phi_{\mathcal{K}_1} := \{\forall x(Sx \to \exists y(Ty \wedge Rxy \wedge \forall z(Tz \wedge Rxz \to y = z))), \forall x \forall y \forall z(Rxz \wedge Ryz \to x = z), \forall y(Ty \to \exists x(Sx \wedge Rxy))\}$

(b)

Definiere $\varphi_n := \exists x_1 ... \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1,\dots,n} (\exists y(fx_i = y)) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i \neq x_j \right)$.
Dann ist $\Phi_{\mathcal{K}_2} := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c)

Definiere $\psi_n := \exists x_1, ..., \exists x_n (\bigwedge_{i=1,\dots,n-1} (Rx_i x_{i+1}) \wedge Rx_n x_1)$. Dies ist erfüllt, wenn ein Kreis der Länge n existiert. Dann ist das gesuchte Axiomensystem gegeben durch:
$\Phi_{\mathcal{K}_3} := \{\neg \varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (Nach Skript sind für gerichteten Graphen Schlingen erlaubt.)

(d)

$\Phi_{\mathcal{K}_4} := \{\forall x_0 \dots \forall x_n \left(x_0 \wedge Sx_n = f(x_n) \to \left(\bigvee_{i<n} \neg Rx_i x_{i+1} \right) \right)\}$

(e)

$\Phi_{\mathcal{K}_5} := \{\forall a(\neg Raa), \forall a \forall b \forall c(Rab \wedge Rbc \to Rac), \forall a \forall b(Rab \vee a = b \vee Rba), \forall x(Rxfx)\}$

(f)

$\Phi_{\mathcal{K}_6} := \{\forall x(Tx \to \exists y(Ty \wedge fy = x))\}$

(g)

$\Phi_{\mathcal{K}_7} := \{\forall x \forall y(Rxy \to \exists z(Sz \wedge fz = x \wedge Ty))\}$

Aufgabe 3 (Punkte: /3)

(a)

Aufgabe 4 (Punkte: /7)

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe 5 (Punkte: /6)

(a)

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \forall x \forall y \forall z (Rxy \land Ryz \land \neg Rzx) \to (\forall x Px \to \exists x \forall y \neg (Rxy \land Rcx)) \\
&\equiv \neg(\forall x \forall y \forall z (Rxy \land Ryz \land \neg Rzx)) \lor (\neg(\forall x Px) \lor \exists x \forall y \neg (Rxy \land Rcx)) \\
&\equiv \exists x \exists y \exists z (\neg Rxy \lor \neg Ryz \lor Rzx) \lor (\neg(\forall x Px) \lor \exists x \forall y \neg (Rxy \land Rcx)) \\
&\equiv \exists x \exists y \exists z (\neg Rxy \lor \neg Ryz \lor Rzx) \lor (\exists x \neg Px \lor \exists x \forall y (\neg Rxy \lor \neg Rcx)) && [NNF] \\
&\equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg Rx_1x_2 \lor \neg Rx_2x_3 \lor Rx_3x_1) \lor (\exists x_4 \neg Px_4 \lor \exists x_5 \forall x_6 (\neg Rx_5x_6 \lor \neg Rcx_5)) \\
&\equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \forall x_6 (\neg Rx_1x_2 \lor \neg Rx_2x_3 \lor Rx_3x_1 \lor \neg Px_4 \lor \neg Rx_5x_6 \lor \neg Rcx_5) && [PNF]
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\psi &= \exists y Rxy \leftrightarrow \forall x Rxx \\
&\equiv (\exists y Rxy \to \forall x Rxx) \land (\forall x Rxx \to \exists y Rxy) \\
&\equiv (\neg \exists y Rxy \lor \forall x Rxx) \land (\neg \forall x Rxx \lor \exists y Rxy) \\
&\equiv (\forall y \neg Rxy \lor \forall x Rxx) \land (\exists x \neg Rxx \lor \exists y Rxy) && [NNF] \\
&\equiv (\forall x_1 \neg Rxx_1 \lor \forall x_2 Rx_2x_2) \land (\exists x_3 \neg Rx_3x_3 \lor \exists x_4 Rxx_4) \\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 ((\neg Rxx_1 \lor Rx_2x_2) \land (\neg Rx_3x_3 \lor Rxx_4)) && [PNF]
\end{aligned}
$$