MATHEMATISCHE LOGIK
Übung 4
13. Mai 2017

346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

| 2 | 3 | 4 | 5 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| /9 | /4 | /9 | /8 | /30 |

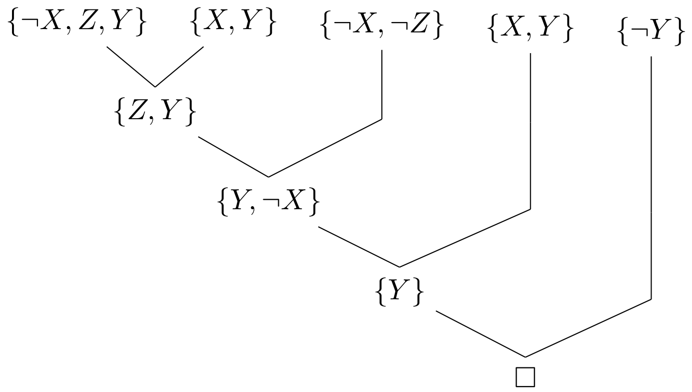
# Gruppe **G**

## Aufgabe 2 (Punkte: /9)

**(a)**

Sei eine Klauselmenge $K$ ohne positive Klauseln gegeben und seien $\{X_1, ..., X_n\}$ die darin vorkommenden Aussagenvariablen. Da $K$ keine positiven Klauseln enthält, folgt, dass jede Klausel mindestens ein negatives Literal enthält. Es ist $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(X_i) = 0$ für $i \in \{1, ..., n\}$ ein Modell jeder Klausel in $K$, da in einer Klausel stets ein negatives Literal auftritt. Somit folgt, dass auch $K$ durch $\mathfrak{I}$ erfüllt wird. Da $K$ eine beliebige Klauselmenge ohne positive Klauseln ist, gilt die Aussage.

**(b)**




Da die leere Klausel mittels P-Resolution ableitbar ist, ist $K$ unerfüllbar.

**(c)**

**(d)**

## Aufgabe 3 (Punkte: /4)

**(a)**

Die Sequenz ist nicht gültig. Betrachte hierzu die Interpretation $\mathfrak{I} : U \mapsto 1, Z \mapsto 0, Y \mapsto 1, X \mapsto 0$, welche beide Formeln auf der rechten Seite der Implikation nicht erfüllt. Da diese Interpretation erfüllend ist für beide Formeln auf der linken Seite der Implikation, ist die Sequenz ungültig, da eine falsifizierende Interpretation existiert.

**(b)**

Angenommen, es existiert eine falsifizierende Interpretation $\mathfrak{I}$ für die gegebene Sequenz, d.h. $\mathfrak{I}$ erfüllt alle Formeln auf der linken Seite der Interpretation und keine auf der rechten Seite. Es muss $\mathfrak{I}(X) = 1$ gelten, da $\mathfrak{I}$ die linke Seite erfüllen muss und $X$ in beiden Konjunktionen innerhalb der Klammern auftritt. Da $\mathfrak{I}$ die rechte Seite nicht erfüllen darf, muss $\mathfrak{I}(U) = 0$ gelten, da sonst $U \wedge X$ erfüllt wäre. Da nun $[\![(X \wedge U)]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$, muss $\mathfrak{I}$ die linke Konjunktion, $(X \wedge \neg Y \wedge Z)$, erfüllen, das

heißt es müsste $\mathfrak{I}(Y) = 0$ und $\mathfrak{I}(Z) = 1$ gelten. Dann ist aber $[\![(\neg Y \wedge \neg U)]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$, und somit ist eine Formel der rechten Seite erfüllt. Dies steht im Widerspruch zur Annahme, dass $\mathfrak{I}$ eine falsifizierende Interpretation ist. $\lightning$
Da also keine falsifizierende Interpretation für die gegebene Sequenz existiert, ist die Sequenz gültig.

## Aufgabe 4 (Punkte: /9)

**(a)**

**(b)**

## Aufgabe 5 (Punkte: /8)

**(a)**

Die Schlussregel ist korrekt. Seien $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi$ und $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta$ gültig, und sei $\mathfrak{I}$ ein Modell von $\Gamma, \neg\vartheta$. (Falls $\Gamma, \neg\vartheta$ unerfüllbar, gilt die zu zeigende Aussage sofort.) Insbesondere ist $\mathfrak{I}$ Modell von $\Gamma$. Betrachte nun zwei Fäle:

- $\mathfrak{I} \not\models \psi$. Dann ist $\Gamma, \neg\vartheta \Rightarrow \Delta, \psi \to \varphi$ gültig, da in dem Fall $\mathfrak{I}$ Modell von $\psi \to \varphi$ ist.
- $\mathfrak{I} \models \psi$. Da angenommen, dass $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta$ gültig ist und in dem Fall $\mathfrak{I}$ Modell von $\Gamma, \psi$ ist, muss $\mathfrak{I}$ Modell von einer Formel $\delta \in \Delta$ oder von $\vartheta$. Da aber $\mathfrak{I}$ aber als Modell von $\Gamma, \neg\vartheta$ gewählt war, kann $\mathfrak{I}$ kein Modell von $\vartheta$ sein. Also ist $\mathfrak{I}$ Modell einer Formel $\delta \in \Delta$. Damit ist die Sequenz $\Gamma, \neg\vartheta \Rightarrow \Delta, \psi \to \varphi$ gültig.

Da also $\Gamma, \neg\vartheta \Rightarrow \Delta, \psi \to \varphi$ stets gültig ist unter den gegebenen Bedingungen, ist die Korrektheit dieser Schlussregel gezeigt.

**(b)**

Die Schlussregel ist nicht korrekt. Seien $\Gamma = \emptyset, \Delta = \emptyset, \psi = 1, \varphi = 0$. Dann ist die Sequenz $(\Gamma, \psi \to \varphi \Rightarrow \Gamma) \equiv (\emptyset, 1 \to 0 \Rightarrow \emptyset)$ gültig, da die linke Seite unerfüllbar ist (aufgrund der Formel $1 \to 0$). Außerdem ist die Sequenz $(\neg\varphi \Rightarrow \psi, \Delta) \equiv (1 \Rightarrow 1, \Delta)$ gültig, da jede Interpretation die linke Seite (bestehend aus 1) erfüllt und dabei stets die erste Formel der rechten Seite, ebenfalls 1, stets erfüllt ist.
Mithilfe Der Schlussregel müsste dann auch die Sequenz $(\Gamma \Rightarrow \Delta) \equiv (\emptyset \Rightarrow \emptyset)$ gültig sein, dies ist aber nicht der Fall, da jedes Modell der linken Seite (also jede Interpretation) nicht Modell von mindestens einer Formel der rechten Seite ist, da $\emptyset$ keine Formeln enthält. Es folgt also, dass die Schlussregel nicht korrekt ist.

**(c)**

Die Schlussregel ist korrekt. Seien $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ und $\Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta$ gültig. Falls $\Gamma$ unerfüllbar ist, so ist auch die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta$ gültig, da jedes Modell der linken Seite, welches nicht existiert, auch Modell einer Formel der rechten Seite ist. Sei nun $\Gamma$ erfüllbar und sei $\mathfrak{I}$ ein beliebiges Modell von $\Gamma$. Betrachte zwei Fälle:

- $\mathfrak{I}$ ist Modell von mindestens einer Formel aus $\Delta$. Dies genügt bereits für die nachfolgende Argumentation.
- $\mathfrak{I}$ ist Modell von keiner Formel aus $\Delta$. Es folgt nun, dass $\mathfrak{I} \models \psi$ und $\mathfrak{I} \models \vartheta$ gelten muss, da sonst entgegen der Annahme $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ und $\Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta$ nicht gültig wären. Damit gilt auch $\mathfrak{I} \models (\psi \wedge \vartheta)$.

Somit ist jedes Modell von $\Gamma$ auch Modell einer Formel aus $\Delta$ oder Modell von $\psi \wedge \vartheta$. Es folgt die Gültigkeit von $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta$, dies war zu zeigen. Die Schlussregel ist damit korrekt.