Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel, S. Schalthöfer

SS 2017

3. Übung Mathematische Logik

Abgabe: bis Mittwoch, den 17.05., um 18:00 Uhr im Übungskasten oder in der Vorlesung.
Geben Sie bitte Namen, Matrikelnummer und die Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

10 Punkte

Bearbeiten Sie den eTest im L2P.

Aufgabe 2

2+2+1+4 Punkte

Die folgende Einschränkung des Resolutionsbegriffs heißt *P-Resolution*: Es darf nur dann eine Resolvente aus den Klauseln C_1 und C_2 gebildet werden, wenn eine der beiden Klauseln positiv ist. Dabei heißt eine Klausel *positiv*, falls sie kein negatives Literal enthält.

(a) Zeigen Sie, dass jede Klauselmenge ohne positive Klauseln erfüllbar ist.

(b) Zeigen Sie per P-Resolution, dass die Klauselmenge

$$K = \{\{\neg X, Z, Y\}, \{\neg Y\}, \{\neg X, \neg Z\}, \{X, Y\}\}$$

unerfüllbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül korrekt ist: Wenn aus einer Klauselmenge K die leere Klausel $\Box$ durch P-Resolution abgeleitet werden kann, dann ist K unerfüllbar.

(d) Zeigen Sie, dass der P-Resolutionskalkül vollständig ist: Ist eine Klauselmenge K unerfüllbar ist, so lässt sich $\Box$ aus K durch P-Resolution ableiten.

Der Beweis orientiert sich am Vollständigkeitsbeweis der Resolution aus der Vorlesung. Beschreiben Sie, mit welchen Änderungen der Beweis die Vollständigkeit der P-Resolution zeigt.

Aufgabe 3

2+2 Punkte

Welche der folgenden Sequenzen sind gültig? Begründen Sie Ihre Antworten semantisch, d. h. mit Hilfe von Interpretationen, nicht durch Ableitungen im Sequenzenkalkül.

(a) $\neg X \to (U \lor Z), Z \to Y \;\Rightarrow\; U \to Z, Y \to X$

(b) $(X \land \neg Y \land Z) \lor (X \land U) \;\Rightarrow\; \neg Y \land \neg U, U \land X$

Aufgabe 4 3+3+3 Punkte

(a) Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül Beweise oder falsifizierende Interpretationen für folgende Sequenzen:

(i) $U \vee \neg X, Z \;\Rightarrow\; Y, \neg(X \rightarrow Y) \wedge (\neg U \rightarrow Z)$

(ii) $(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge U) \;\Rightarrow\; \neg Y \wedge \neg U, X \wedge U$

(b) Erläutern, Sie wie sich das Suchverfahren für Beweise im Sequenzenkalkül (Algorithmus 1.3) als Entscheidungsverfahren für das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik verwenden läßt. Ist dies ein effizientes Verfahren?

Aufgabe 5 3+3+2 Punkte

Eine Schlussregel für den Sequenzenkalkül ist *korrekt*, wenn aus der Gültigkeit der Prämissen die Gültigkeit der Konklusion folgt.

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln für den Sequenzenkalkül. Argumentieren Sie semantisch, d.h. mit Hilfe von Interpretationen.

(a)

$$\frac{\Gamma, \varphi \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \qquad \Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta, \vartheta}{\Gamma, \neg\vartheta \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \rightarrow \varphi}$$

(b)

$$\frac{\Gamma, \psi \rightarrow \varphi \;\Rightarrow\; \Delta \qquad \neg\varphi \;\Rightarrow\; \psi, \Delta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}$$

(c)

$$(\Rightarrow \wedge) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$