346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

2	3	4	5	$\sum$
/14	/3	/7	/6	/30

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /14)

(a)

$\Phi_{\mathcal{K}_1} := \{\forall x(Sx \to \exists y(Ty \wedge Rxy \wedge \forall z(Tz \wedge Rxz \to y = z))), \forall x\forall y\forall z(Rxz \wedge Ryz \to x = z), \forall y(Ty \to \exists x(Sx \wedge Rxy))\}$

(b)

Definiere $\varphi_n := \exists x_1 ... \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1,...,n}(\exists y(fx_i = y)) \wedge \bigwedge_{1\le i\le j\le n} x_i \neq x_j\right)$.
Dann ist $\Phi_{\mathcal{K}_2} := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c)

Definiere $\psi_n := \exists x_1, ..., \exists x_n(\bigwedge_{i=1,...,n-1}(Rx_ix_{i+1}) \wedge Rx_nx_1)$. Dies ist erfüllt, wenn ein Kreis der Länge n existiert. Dann ist das gesuchte Axiomensystem gegeben durch:
$\Phi_{\mathcal{K}_3} := \{\neg\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. (Nach Skript sind für gerichteten Graphen Schlingen erlaubt.)

(d)

Definiere $\varphi_n := \exists x_1, ...\exists x_n(\bigwedge_{i=1,...,n-1}(Rx_ix_{i+1} \wedge x_n = fx_1 \wedge Sx_1))$. (Es ex. ein Pfad der Länge n von einem $s \in S$ zu $f(s)$).
$\Phi_{\mathcal{K}_4} := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(e)

$\Phi_{\mathcal{K}_5} := \{\forall a(\neg Raa), \forall a\forall b\forall c(Rab \wedge Rbc \to Rac), \forall a\forall b(Rab \vee a = b \vee Rba), \forall x(Rxfx)\}$

(f)

Definiere $\psi_n := \forall x(Tx \to (\exists y(Ty \wedge f^n = x)))$. (Für ein festes n ist dies eine FO-Formeln, f^n als Kurzschreibweise.)
$\Phi_{\mathcal{K}_6} := \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(g)

$\Phi_{\mathcal{K}_7} := \{\forall x\forall y(Rxy \to Ty \wedge \exists s(Ss \wedge fs = x)), \forall x\forall y(Sx \wedge Ty \to Rfxy)\}$

Aufgabe 3 (Punkte: /3)

Definiere $\phi_\infty := \exists a(\forall b(fb \neq a)) \wedge \forall x\forall y(fx = fy \to x = y)$. Die Formel sagt aus, dass einerseits ein Element existiert, worauf f nicht abbildet, und dass das die Funktion injektiv sein soll.
Für die Formel existiert kein endliches Modell, denn: Angenommen, es existiert ein endliches Modell. Da f vom Universum auf das Universum abbildet, und weil die Funktion injektiv ist, da ein Modell vorliegt, folgt, dass f dann bijektiv ist, da Definitionsbereich und Zielbereich endlich und gleichmächtig sind. Somit ist f insbesondere auch surjektiv, dies steht aber zum Widerspruch, dass ein element existiert, worauf nicht abgebildet wird. Somit kann kein endliches Modell existieren.
Die Formel hat aber ein Modell, z.B. $(\mathbb{N}, f)$ mit $f(n) = n + 1$. Offensichtlich ist $\mathbb{N}$ unendlich, es existiert kein $m \in \mathbb{N}$, sodass $f(m) = 0$, und die Funktion ist injektiv.

Aufgabe 4 (Punkte: /7)

(a)

Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

Sei $\varphi \coloneqq x = x$ und $\psi \coloneqq y = y$. Dann gilt $\varphi \equiv \psi$, obwohl $\text{frei}(\varphi) \neq \text{frei}(\psi)$.

(b)

Die Aussage ist wahr, da es nach VL zu jeder beliebigen Formel φ unendlich viele äquivalente Formeln gibt, da man die Formel erweitern kann.

(c)

Die Aussage ist falsch. Sei $\varphi \coloneqq x_1 \neq x_2$. Dann ist φ erfüllbar, jedoch nicht $\forall x_1 \forall x_2 \varphi$.

(d)

Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel :

Sei $\varphi \coloneqq x \neq y$ und $\psi \coloneqq x \neq x$. Dann ist $\forall x\varphi$ und $\forall x\psi$ unerfüllbar, also $\forall x\varphi \equiv \forall x\psi$, jedoch $\exists x\varphi$ erfüllbar und $\exists x\psi$ nicht, also $\exists x\varphi \not\equiv \exists x\psi$.

(e)

TODO

Aufgabe 5 (Punkte: /6)

(a)

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \forall x\forall y\forall z(Rxy \wedge Ryz \wedge \neg Rzx) \rightarrow (\forall xPx \rightarrow \exists x\forall y\neg(Rxy \wedge Rcx)) \\
&\equiv \neg(\forall x\forall y\forall z(Rxy \wedge Ryz \wedge \neg Rzx)) \vee (\neg(\forall xPx) \vee \exists x\forall y\neg(Rxy \wedge Rcx)) \\
&\equiv \exists x\exists y\exists z(\neg Rxy \vee \neg Ryz \vee Rzx) \vee (\neg(\forall xPx) \vee \exists x\forall y\neg(Rxy \wedge Rcx)) \\
&\equiv \exists x\exists y\exists z(\neg Rxy \vee \neg Ryz \vee Rzx) \vee (\exists x\neg Px \vee \exists x\forall y(\neg Rxy \vee \neg Rcx)) && [NNF] \\
&\equiv \exists x_1\exists x_2\exists x_3(\neg Rx_1x_2 \vee \neg Rx_2x_3 \vee Rx_3x_1) \vee (\exists x_4\neg Px_4 \vee \exists x_5\forall x_6(\neg Rx_5x_6 \vee \neg Rcx_5)) \\
&\equiv \exists x_1\exists x_2\exists x_3\exists x_4\exists x_5\forall x_6(\neg Rx_1x_2 \vee \neg Rx_2x_3 \vee Rx_3x_1 \vee \neg Px_4 \vee \neg Rx_5x_6 \vee \neg Rcx_5) && [PNF]
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\psi &= \exists yRxy \leftrightarrow \forall xRxx \\
&\equiv (\exists yRxy \rightarrow \forall xRxx) \wedge (\forall xRxx \rightarrow \exists yRxy) \\
&\equiv (\neg\exists yRxy \vee \forall xRxx) \wedge (\neg\forall xRxx \vee \exists yRxy) \\
&\equiv (\forall y\neg Rxy \vee \forall xRxx) \wedge (\exists x\neg Rxx \vee \exists yRxy) && [NNF] \\
&\equiv (\forall x_1\neg Rxx_1 \vee \forall x_2Rx_2x_2) \wedge (\exists x_3\neg Rx_3x_3 \vee \exists x_4Rxx_4) \\
&\equiv \forall x_1\forall x_2\exists x_3\exists x_4((\neg Rxx_1 \vee Rx_2x_2) \wedge (\neg Rx_3x_3 \vee Rxx_4)) && [PNF]
\end{aligned}
$$