346532, Daniel Boschmann
348776, Anton Beliankou
356092, Daniel Schleiz

2	3	4	5	$\sum$
/8	/5	/8	/7	/28

Gruppe **G**

Aufgabe 2 (Punkte: /8)

(a)

(i)

Die Aussage ist falsch. Seien $\varphi = 0, \psi = 1$. Dann gilt $\varphi \to \psi \models \varphi$ nicht, da $\varphi \to \psi$ eine Tautologie ist und insbesondere jede Interpretation dazu passt, während φ unerfüllbar ist und ebenfalls jede Interpretation dazu passt.

(ii)

Die Aussage ist wahr. Zeige dazu beide Richtungen der Aussage:

- " $\Rightarrow$ ":
  Es gelte $\Phi \models \psi$. Dann gilt für alle Modelle $\mathfrak{I}$ von Φ, dass $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$. Da somit $[\![\neg\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$ für alle Modelle $\mathfrak{I}$ von Φ , existiert kein Modell für $\Phi \cup \{\neg\psi\}$, also unerfüllbar.
- " $\Leftarrow$ ":
  Sei $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar. Betrachte zwei Fälle: Ist Φ unerfüllbar, so gilt $\Phi \models \psi$, da für alle Modelle von Φ, welche nicht existieren, gilt, dass diese auch Modell von ψ sind. Ist aber Φ erfüllbar, so besitzt Φ mindestens ein Modell. Da angenommen wurde, dass $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist, gilt für alle Modelle $\mathfrak{I}$ von Φ, dass $[\![\neg\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 0.$, da sonst $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ erfüllbar wäre. Somit gilt für diese Modelle auch $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ und damit folgt $\Phi \models \psi$.

(iii)

Die Aussage ist wahr. Da $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \Psi$ gilt, ist jedes (zu $\Phi \cup \Psi$ passende) Modell von Φ ebenfalls Modell von Ψ. Gilt nun $\Psi \models \varphi$, so ist jedes der eben erwähnten Modelle ebenfalls Modell von φ. Also gilt auch $\Phi \models \varphi$.

(b)

Mit (a)(ii) ist die Gültigkeit der gegebenen Folgerungsbeziehung äquivalent zur Unerfüllbarkeit von

$$\begin{aligned}&\{Y \vee \neg Z \vee Q, \neg Y \vee \neg Z, U \vee Y \vee \neg Q, U \vee X, \neg X \vee Y \vee \neg Z\} \cup \{\neg(Z \to (U \wedge Q))\}\\ \equiv&\{Y \vee \neg Z \vee Q, \neg Y \vee \neg Z, U \vee Y \vee \neg Q, U \vee X, \neg X \vee Y \vee \neg Z\} \cup \{Z \wedge (\neg U \vee \neg Q)\}\end{aligned}$$

Überführe die Formelmenge in die Klauselmenge

$$K = \{\{Y, \neg Z, Q\}, \{\neg Y, \neg Z\}, \{U, Y, \neg Q\}, \{U, X\}, \{\neg X, Y, \neg Z\}, \{Z\}, \{\neg U, \neg Q\}\}.$$

Resolviere $\{Y, \neg Z, Q\}$ mit $\{\neg Y, \neg Z\}$ und erhalte die Resolvente $C_1 := \{\neg Z, Q\}$. Resolviere C_1 mit $\{\neg U, \neg Q\}$ und erhalte die Resolvente $C_2 := \{\neg Z, \neg U\}$. Resolviere C_2 mit $\{U, X\}$, erhalte

die Resolvente $C_3 :=\{\neg Z, X\}$. Resolviere C_3 mit $\{\neg X, Y, \neg Z\}$ und erhalte die Resolvente $C_4 :=\{\neg Z, Y\}$. Resolviere C_4 mit $\{\neg Y, \neg Z\}$ und erhalte die Resolvente $C_5 := \{\neg Z\}$. Resolviere nun noch $C_5 = \{\neg Z\}$ mit $\{Z\}$ und erhalte schließlich die leere Klausel $\square$.
Da die leere Klausel ableitbar ist, ist die Klauselmenge K unerfüllbar. Somit folgt die Gültgkeit der Folgerungsbeziehung.

Aufgabe 3 (Punkte: /5)

Beobachte, dass bei einer Resolution von zwei Klauseln mit höchstens 2 Literalen die Resolvente wieder höchstens zwei Literale enthält. Da in den beiden Klauseln das gleiche Literal einmal negativ und einmal positiv auftreten muss, damit eine Resolvente existiert, können in der Resolvente höchstens zwei Literale enthalten sein, falls die jeweils anderen Literale der Klauseln ungleich waren, ansonsten enthält die Resolvente nur ein Literal.

In einer gegebenen Klauselmenge mit n Variablen treten höchstens $2n$ Literale auf (positiv und negativ). Es existieren maximal

$$\binom{2n}{2} + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{0} = \frac{2n(2n-1)}{2} + 2n + 1 = 2n^2 + n + 1 \in \mathcal{O}(n^2)$$

Klauseln mit höchstens 2 Literalen. Mithilfe der Resolution bricht man in maximal so vielen Schritten ab, das heißt das Problem ist mithilfe der Resolution in polynomieller Zeit lösbar.

Für Klauselmengen mit höchstens 3 Literalen klappt diese Überlegung nicht, da bei einem Resolutionsschritt eine Resolvente mit 4 Literalen entstehen kann, danach könnten immer größere Resolventen entstehen. Die Anzahl der möglichen verschiedenen Klauseln wäre wieder nur durch 2^{2n} beschränkt, d.h. im Worst-Case exponentielle Laufzeit.

Aufgabe 4 (Punkte: /8)

(a)

(b)

Aufgabe 5 (Punkte: /7)