Metody rozwiązywania układów równań liniowych

Metoda eliminacji Gaussa

Układ n równań liniowych można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n &= b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{1}$$

W metodzie tej wyróżnia się dwa etapy:

- postępowanie proste (etap eliminacji),
- postępowanie odwrotne.

Postępowanie proste polega na sprowadzeniu układu do postaci górnie trójkątnej. W tym celu odejmujemy od i-tego wiersza, wiersz zerowy pomnożony przez mnożnik:

$$m_{i0} = \frac{a_{i0}}{a_{00}} \tag{2}$$

Po wykonaniu tego kroku otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n &= b_0 \\
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{3}$$

W kolejnym kroku odejmujemy od i-tego wiersza, wiersz pierwszy pomnożony przez mnożnik:

$$m_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}} \tag{4}$$

Postępujemy tak, aż do uzyskania macierzy w postaci:

$$\begin{aligned}
a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \cdots + a_{0n}x_n &= b_0 \\
a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{5}$$

W drugim etapie (postępowanie odwrotne) w celu znalezienia rozwiązania układu równań, korzysta się z uzyskanej macierzy trójkątnej górnej i wzorów:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \tag{6}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\, x_k}{a_{ii}} \quad dla\ i = n-1, \dots 0$$

Przykład

$$\begin{cases} 2x_0 + 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 10 \\ 2x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_0 + 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \\ 0x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 4 \end{cases} \tag{7}$$

Układ równań dany wzorem (7) przedstawiamy w formie macierzy rozszerzonej (na czerwono oznaczono numerację wierszy i kolumn, ostatnia kolumna reprezentuje wektor prawej strony układu):

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \tag{8}$$

W pierwszym etapie obliczamy mnożnik:

$$m_{10} = \frac{a_{10}}{a_{00}} = \frac{2}{2} = 1 \tag{9}$$

Następnie odejmujemy od pierwszego wiersza wiersz zerowy pomnożony przez m_{10}. Analogiczne postępujemy dla drugiego wiersza: obliczamy $m_{20} = 2$ i odejmujemy od wiersza drugiego wiersz zerowy pomnożony przez mnożnik m_{20}. To samo liczymy dla trzeciego wiersza. Ostatecznie otrzymujemy same zera pod przekątną dla zerowej kolumny:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -1 & -14 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{10}$$

W kolejnym kroku zerujemy pod przekątną kolejną kolumnę (pierwszą). Obliczamy:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{-6}{-2} = 3 \tag{11}$$

Odejmujemy od drugiego wiersza, wiersz pierwszy pomnożony przez m_{21}. Powtarzamy kroki dla ostatniego wiersza (trzeciego). Otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Analogicznie kroki wykonujemy dla ostatniego wiersza w celu wyzerowania drugiej kolumny. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & -0.8 \end{bmatrix} \tag{13}$$

W drugim etapie (postępowanie odwrotne) w celu znalezienia rozwiązania układu równań, korzystamy ze wzorów:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{-0.8}{0.2} = -4$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\, x_k}{a_{ii}} \quad dla\ i = n-1, \dots 0$$

$$x_2 = \frac{b_2 - \sum_{k=2+1}^{3} a_{23}\, x_3}{a_{22}} = \frac{-2 - (-7) * (-4)}{-5} = 6 \tag{14}$$

$$x_1 = \frac{-4 - [1 * 6 + 2 * (-4)]}{-2} = 1$$

$$x_0 = \frac{10 - [4 * 1 + 2 * 6 + 1 * (-4)]}{2} = -1$$

Zadanie:

Napisz program, który będzie rozwiązywał układ n równań liniowych o n niewiadomych metodą Gaussa. Wymagania:

a) Dane pobierane są z pliku.
b) W przypadku wystąpienia 0 na przekątnej macierzy, program wypisze stosowny komunikat.
c) W wyniku działania program wypisuje:
   - Macierz rozszerzoną (przed obliczeniami)
   - Macierz rozszerzoną (po pierwszym etapie obliczeń – postępowanie proste)
   - Rozwiązanie układu równań ($x_0 - x_n$)

Poprawność działania programu zweryfikować danymi, które podano w przykładzie wyżej.

W sprawozdaniu zamieścić wyniki rozwiązania układu równań podanego w plikach tekstowych: RURL_dane1.txt, RURL_dane2.txt

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-3 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-3).