

Rozwiązywanie układów równań liniowych - rozkład LU

Mamy układ równań w postaci macierzowej:

$$A \times X = B \quad (1)$$

Rozkładamy macierz kwadratową A na iloczyn macierzy trójkątnych, dolnej L o wyrazach przekątnej głównej równych 1 oraz górnej U :

$$A = L \times U \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{1,0} & 1 & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & 0 & u_{2,2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Podstawiamy równanie (2) do (1):

$$L \times (U \times X) = B \quad (4)$$

Za $U \times X$ wstawiamy Y :

$$L \times Y = B \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{1,0} & 1 & 0 \\ l_{2,0} & l_{2,1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Obliczamy wektor Y podstawiając w przód:

$$y_0 = b_0 \quad (7)$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} l_{i,j} y_j \quad (8)$$

Znając wektor Y i pamiętając, że $U \times X = Y$ obliczamy wektor X podstawiając wstecz, który jest rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{bmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} \\ 0 & u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & 0 & u_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \quad (10)$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} (y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{i,j} x_j) \text{ dla } i = n-1, \dots, 0 \quad (11)$$

To podejście jest przydatne w przypadku konieczności rozwiązywania wielu układów równań, które różnią się jedynie wektorem wyrazów wolnych B . W takim przypadku dokonujemy jednokrotnie rozkładu LU macierzy współczynników A , a następnie wymieniając jedynie wektor B rozwiązujemy kolejne układy przy pomocy wyliczonych wcześniej macierzy L i U .

Rozkład LU - algorytm Doolittle'a

- 1) Utwórz dwie macierze L i U o stopniu macierzy A
- 2) Wyzeruj macierze L i U
- 3) W macierzy L elementom na głównej przekątnej przypisz wartości 1
- 4) Oblicz:

- Macierz U gdy $i \leq j$

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=0}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \quad (12)$$

- Macierz L (gdy $i > j$):

$$l_{i,j} = \frac{1}{u_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right) \quad (13)$$

Przykład

$$\begin{cases} 2x_0 + 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 10 \\ 2x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_0 + 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 6 \\ 0x_0 + 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 4 \end{cases}$$

Macierz A :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

gdy $i \leq j$:

$$u_{0,0} = a_{0,0} - \sum_{k=0}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} = a_{0,0} = 2$$

$$u_{0,1} = a_{0,1} - \sum_{k=0}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} = a_{0,1} = 4$$

$$u_{0,2} = 2$$

$$u_{0,3} = 1$$

gdy $i > j$:

$$l_{1,0} = \frac{1}{u_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right) = \frac{1}{u_{0,0}} a_{1,0} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

gdy $i \leq j$:

$$u_{1,1} = a_{1,1} - \sum_{k=0}^{i-1} l_{i,k} \times u_{k,j} = a_{1,1} - \sum_{k=0}^0 l_{1,0} \times u_{0,1} = 2 - 1 \times 4 = -2$$

$$u_{1,2} = a_{1,2} - \sum_{k=0}^0 l_{1,0} \times u_{0,2} = 3 - 1 \times 2 = 1$$

$$u_{1,3} = a_{1,3} - \sum_{k=0}^0 l_{1,0} \times u_{0,3} = 3 - 1 \times 1 = 2$$

gdy $i > j$:

$$l_{2,0} = \frac{1}{u_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right) = \frac{1}{u_{0,0}} a_{2,0} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$l_{2,1} = \frac{1}{u_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=0}^{j-1} l_{i,k} \times u_{k,j} \right) = \frac{1}{u_{1,1}} \left(a_{2,1} - \sum_{k=0}^0 l_{2,k} \times u_{k,1} \right) = \frac{1}{-2} (2 - 2 \times 4) = 3$$

itd...

```
Macierz U:
2      4      2      1
0      -2     1      2
0      0     -5     -7
0      0      0     0.2

Macierz L:
1      0      0      0
1      1      0      0
2      3      1      0
0     -1    -0.4     1
```

Zadanie:

Napisz program, który będzie rozwiązywał układ n równań liniowych o n niewiadomych z zastosowaniem rozkładu LU (algorytm Doolittle'a).

Wymagania:

- a) Dane pobierane są z pliku.
- b) W przypadku wystąpienia 0 na przekątnej macierzy, program wypisze stosowny komunikat.
- c) W wyniku działania program wypisuje:
 - Macierz rozszerzoną (przed obliczeniami)
 - Macierze L i U
 - Wektor Y
 - Rozwiązanie układu równań ($x_0 - x_n$)

Poprawność działania programu zweryfikować danymi, które podano w przykładzie wyżej.

W sprawozdaniu zamieścić wyniki rozwiązania układu równań podanego w plikach tekstowych: RURL_dane1.txt, RURL_dane2.txt

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-5 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-5).