1. Interpolacja wielomianowa Newtona

Zakładamy, że funkcja *f(x)* dana jest za pomocą tablicy wartości: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (węzłów interpolacji) oraz wartości funkcji w tych punktach: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Zakładamy, że $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zakładamy także, że węzły nie są równoodległe.

Wielomian interpolacyjny w postaci Newtona ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k\,(x) \tag{1}$$

gdzie:

$$p_0 = 1 \tag{2}$$

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})\ dla\ k = 1,2,\ldots,n \tag{3}$$

$$b_0 = f(x_0) \tag{4}$$

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,\, j\neq i}^{k}(x_i - x_j)} \tag{5}$$

gdzie: b_k – ilorazy różnicowe funkcji f (oparte na węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_k$), które w tabeli ilorazów różnicowych znajdują się na przekątnej.

Ilorazy różnicowe rzędu zerowego i pierwszego:

$$f[x_0] = f(x_0) \tag{6}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{7}$$

Ogólnie:

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{8}$$

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{9}$$

Ilorazy różnicowe rzędu drugiego są równe:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ f[x_1, x_2, x_3] &= \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} \\ &\ldots \\ f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] &= \frac{f[x_{n-1}, x_n] - f[x_{n-2}, x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}} \end{aligned} \tag{10}$$

Ogólnie iloraz różnicowy rzędu $n-1$ przyjmuje postać:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i} \tag{11}$$

Tablica ilorazów różnicowych jest następująca:

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe					
		Rzędu 0	Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4	Rzędu 5
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0]$					
			$f[x_0,x_1]$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$			
			$f[x_1,x_2]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]$	
			$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$
x_3	$f(x_3)$	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$	
			$f[x_3,x_4]$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$		
x_4	$f(x_4)$	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]$			
			$f[x_4,x_5]$				
x_5	$f(x_5)$	$f[x_5]$					

Przykład obliczeń:

Dane są wartości funkcji: $f(1)=1, f(2)=4, f(3)=9, f(4)=16, f(5)=25$

Tablica ilorazów różnicowych wygląda następująco:

x_i	Ilorazy różnicowe				
	Rzędu 0	Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4
$x_0=1$	$f[x_0]=1$				
		$f[x_0,x_1]=\frac{4-1}{2-1}=3$			
$x_1=2$	$f[x_1]=4$		$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{5-3}{3-1}=1$		
		$f[x_1,x_2]=\frac{9-4}{3-2}=5$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{1-1}{4-1}=0$	
$x_2=3$	$f[x_2]=9$		$f[x_1,x_2,x_3]=\frac{7-5}{4-2}=1$		$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]=0$
		$f[x_2,x_3]=\frac{16-9}{4-3}=7$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=\frac{1-1}{5-2}=0$	
$x_3=4$	$f[x_3]=16$		$f[x_2,x_3,x_4]=\frac{9-7}{5-3}=1$		
		$f[x_3,x_4]=\frac{25-16}{5-4}=9$			
$x_4=5$	$f[x_4]=25$				

$$b_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,\ j\neq i}^{k}(x_i - x_j)}$$

$$\begin{aligned} b_2 = \sum_{i=0}^{2} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0,\ j\neq i}^{2}(x_i - x_j)} &= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &+ \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{1}{(1-2)(1-3)} + \frac{4}{(2-1)(2-3)} + \frac{9}{(3-1)(3-2)} \\ &= 0.5 - 4 + 4.5 = 1 \end{aligned}$$

$$p_k = \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})\ dla\ k = 1,2,\ldots,n$$

$$p_2 = \prod_{i=0}^{1}(x - x_i) = (x - x_0)(x - x_1) = (x - 1)(x - 2)$$

Wielomian interpolacyjny dla przykładu powyżej ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k\,(x)$$

$W_n(x) = 1 + 3(x - 1) + 1(x - 1)(x - 2) + 0(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 0(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

Wartości tego wielomianu w węzłach:

$W_n(1) = 1$

$W_n(2) = 1 + 3(2 - 1) = 4$

$W_n(3) = 1 + 3(3 - 1) + 1(3 - 1)(3 - 2) = 1 + 6 + 2 = 9$

$W_n(4) = 1 + 3(4 - 1) + 1(4 - 1)(4 - 2) = 1 + 9 + 6 = 16$

$W_n(5) = 1 + 3(5 - 1) + 1(5 - 1)(5 - 2) = 1 + 12 + 12 = 25$

Wartość tego wielomianu w punkcie $x = 2{,}5$:

$W_n(2{,}5) = 1 + 3(2{,}5 - 1) + 1(2{,}5 - 1)(2{,}5 - 2) = 1 + 4{,}5 + 0{,}75 = 6{,}25$

<u>Zadanie:</u>

Napisz program, który będzie obliczał wartość wielomianu interpolacyjnego Newtona w dowolnym punkcie. Założenia:

a) Węzły interpolacji i wartości funkcji w węzłach oraz liczba węzłów są zmiennymi pobieranymi z pliku tekstowego.
b) Punkt, w którym obliczamy wartość wielomianu jest parametrem podawanym z klawiatury przez użytkownika.
c) W wyniku działania program wypisuje:
   - Liczbę węzłów
   - Dane: Węzły interpolacji i wartości funkcji w węzłach
   - Punkt, w którym liczymy wartość wielomianu
   - Wartość wielomianu Newtona w danym punkcie
   - Współczynniki wielomianu Newtona (b_k)

Obliczyć wartość wielomianu dla x = 2.5 oraz x = 3.5 dla przykładu podanego w instrukcji (MN-2-p1.txt).

Obliczyć wartość wielomianu dla x = -1 oraz x = 2 dla danych zamieszczonych w pliku tekstowym (MN-2-p2.txt).

W sprawozdaniu zamieścić wyniki w postaci zrzutów ekranu z konsoli.

Zadanie należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-2 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-2).