1. Interpolacja

1.1. Sformułowanie zadania

Mamy dane $n + 1$ punktów x_i , ($i = 0,2, \dots , n$) (tzw. węzłów interpolacji). W każdym punkcie znamy wartość pewnej funkcji $f(x_i)$. Naszym zadaniem jest obliczenie przybliżonych wartości funkcji $f(x)$ w punktach nie będących węzłami interpolacyjnymi. W praktyce należy zatem wyznaczyć funkcję interpolującą $F(x)$, która przyjmuje w węzłach te same wartości, co dana funkcja $f(x)$.

Dane:

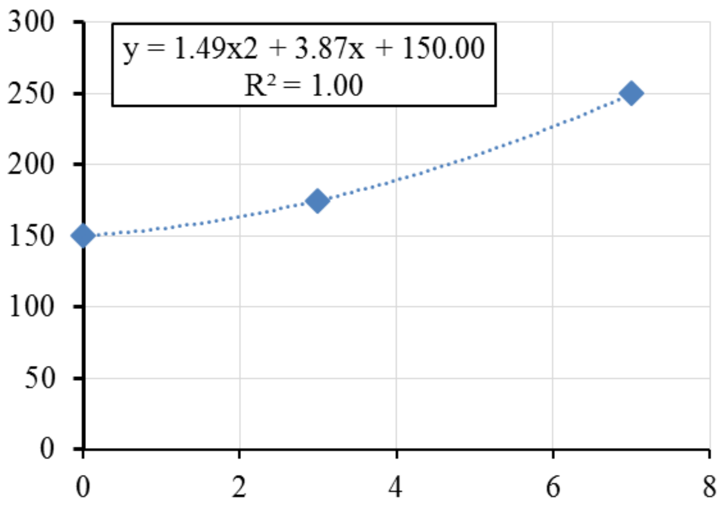
- Węzły interpolacji: $x_0, x_1, \dots , x_n$
- Wartości interpolowanej funkcji w węzłach: $f(x_0), f(x_1), \dots , f(x_n)$

Poszukujemy:

- Funkcji interpolującej $F(x)$, takiej by: $F(x_i) = f(x_i), \forall i \in \langle 0, n \rangle$

Przykład:

x_i	$f(x_i)$
0	150
3	175
7	250



Rys. 1. Interpolacja

1.2. Interpolacja wielomianowa Lagrange'a

Interpolacja wielomianowa Lagrange'a polega na wyznaczeniu funkcji interpolującej w postaci wielomianu stopnia nie wyższego niż n, którego wartości w $n + 1$ punktach x_i są takie same jak wartości interpolowanej funkcji, tzn.: $L_n(x_i) = f(x_i)$, $\forall i \in \langle 0, n\rangle$, przy założeniu że $x_i \neq x_j$, $\forall i \neq j$.

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a:

1) Znajdujemy wielomian, który przyjmuje w pierwszym węźle wartość 1, a w pozostałych węzłach przyjmuje wartość 0. Postępujemy tak dla każdego węzła. Wielomian ten napisany dla węzła o indeksie *i* będzie miał postać:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1}$$

2) Suma znalezionych w pierwszym kroku wielomianów pomnożonych przez odpowiednie wartości funkcji interpolowanej w węzłach daje wielomian, który w węzłach będzie przyjmował interesujące nas wartości:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x) \tag{2}$$

Przykład obliczeń:

W tabeli dane są węzły interpolacji oraz wartości funkcji w danych węzłach. Znajdź wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

i	0	1	2	3
x_i	-4	-3	1	2
$f(x_i)$	5	2	5	2

Zgodnie ze wzorem 1:

$$l_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$l_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$l_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

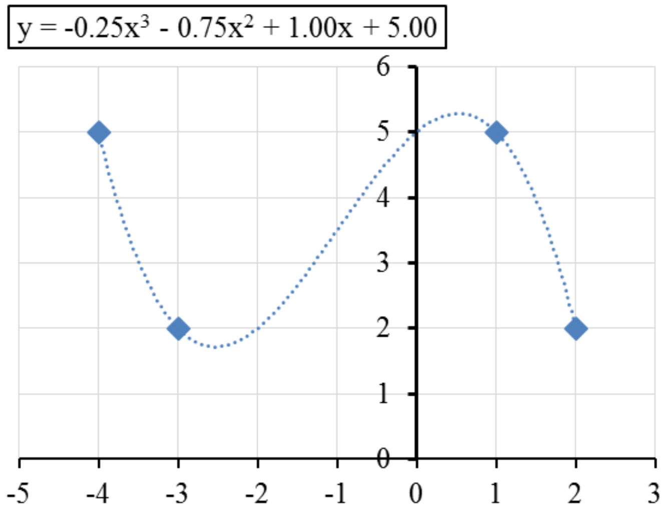
$$l_3 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

Uwzględniając wzór 2:

$$L_3(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$
$$+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$
$$= 5\frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{(-4+3)(-4-1)(-4-2)} + 2\frac{(x+4)(x-1)(x-2)}{(-3+4)(-3-1)(-3-2)}$$
$$+ 5\frac{(x+4)(x+3)(x-2)}{(1+4)(1+3)(1-2)} + 2\frac{(x+4)(x+3)(x-1)}{(2+4)(2+3)(2-1)}$$
$$= -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x + 5$$

W punkcie $x = -1$ wartość wielomianu interpolacyjnego wynosi:

$$L_3(-1) = -\frac{1}{4}(-1)^3 - \frac{3}{4}(-1)^2 + (-1) + 5 = 3{,}5$$



Rys. 2. Weryfikacja otrzymanej funkcji interpolującej Lagrange’a przy wykorzystaniu programu excel

Zad 1. Napisz program, który będzie obliczał wartość wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a w dowolnym punkcie. Założenia:

a) Węzły interpolacji i wartości funkcji w węzłach oraz liczba węzłów są zmiennymi pobieranymi z pliku tekstowego.
b) Punkt, w którym obliczamy wartość wielomianu jest parametrem podawanym z klawiatury przez użytkownika.
c) W wyniku działania program wypisuje:
   - Liczbę węzłów
   - Dane: węzły interpolacji i wartości funkcji w węzłach
   - Punkt, w którym liczymy wartość wielomianu
   - Wartość wielomianu Lagrange'a w danym punkcie

Na UPEL należy przesłać plik *.cpp opracowanego programu oraz wyniki obliczeń w formie krótkiego sprawozdania (dodać zrzuty ekranu) dla przykładu przedstawionego w niniejszej instrukcji. Obliczyć wartość wielomianu dla x = -1 oraz x = 0,5 (7p).

Zad 2. Oblicz wartość $\sqrt[3]{50}$ za pomocą wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a dla funkcji $y = \sqrt[3]{x}$ i węzłów interpolacji $x_0 = 27, x_1 = 64, x_2 = 125, x_3 = 216$. W sprawozdaniu opisz procedurę obliczania szukanej wartości (3p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-1 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-1).

Zadanie można oddać na kolejnych zajęciach.