

Metody rozwiązywania układów równań liniowych

Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego jest iteracyjną metodą rozwiązywania układu równań liniowych. Metody iteracyjne polegają na konstruowaniu ciągu przybliżeń wektora rozwiązań $x^{(0)}, x^{(1)} \dots x^{(i)}$ określonego wzorem:

$$x^{(i+1)} = Mx^{(i)} + w \quad (1)$$

gdzie: $i = 0, 1 \dots, M$ – macierz kwadratowa, w – wektor.

Rozważmy układ równań:

$$Ax = b \quad (2)$$

Macierz A rozkładamy na 3 macierze:

$$A = L + D + U \quad (3)$$

gdzie: L – macierz trójkątna dolna, D – macierz diagonalna, U – macierz trójkątna górna.

Wstawiając równanie (3) do (2) możemy przekształcić kolejno:

$$(L + D + U)x = b \quad (4)$$

$$Dx = -(L + U)x + b \quad (5)$$

$$x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \quad (6)$$

Ciąg przybliżeń rozwiązania przyjmuje następującą postać:

$$x^{(i+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(i)} + D^{-1}b \quad (7)$$

Metoda Jacobiego jest zbieżna dla macierzy nieredukowalnych i diagonalnie słabo dominujących.

Macierz $A = (a_{ij})$ nazywamy diagonalnie słabo dominującą jeśli dla $i = 0, 1 \dots n$ spełnione są warunki:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (8)$$

oraz spełniony jest co najmniej jeden warunek dla dowolnego i :

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad (9)$$

Przykład 1

```
Układ rownan:
8      2      2      4      5
2      5      1      1     -4
0      3      4      1      2
-1     -2      1      5      7

Macierz L+U:
0      2      2      4
2      0      1      1
0      3      0      1
-1     -2      1      0

Macierz diagonalna odwrotna:
0.125  0      0      0
0      0.2    0      0
0      0      0.25  0
0      0      0      0.2

Rozwiązanie po 5 iteracjach:
x[0]: 0.28535
x[1]: -1.2878
x[2]: 1.28868
x[3]: 0.692447
```

Zad 1. Napisz program, który będzie rozwiązywał układ n równań liniowych o n niewiadomych metodą Jacobiego (7 pkt). Wymagania:

- Dane pobierane są z pliku.
- Program wypisze układ równań (macierz rozszerzoną), sprawdzi czy macierz jest diagonalnie słabo dominująca i wyświetli stosowny komunikat.
- Napisać kod do przemnażania macierzy.
- Warunkiem zatrzymania algorytmu jest podana przez użytkownika ilość iteracji.
- Program wypisze macierze: $L + U$ oraz D^{-1} .
- Program wypisze zadaną ilość iteracji i rozwiązanie układu równań.

W sprawozdaniu należy zamieścić rozwiązanie układu równań przedstawionego w przykładzie dla 5 iteracji. Za początkowe wartości wektora x przyjąć 0. Porównaj wyniki uzyskane metodą Jacobiego i Gaussa.

Zad 2. Zaimplementować warunek stopu w postaci (3 pkt):

$$|x^{(i+1)} - x^{(i)}| < \varepsilon$$

Wymagania:

- Warunek musi być spełniony dla każdego x .
- Ustalić maksymalną ilość iteracji, aby w przypadku braku rozwiązania z zadaną dokładnością program nie liczył w nieskończoność.
- Program wypisze przyjętą wartość błędu ε , ilość wykonanych iteracji, rozwiązanie układu równań i obliczoną wartość błędu dla każdego x . Obliczenia wykonać dla $\varepsilon = 0.001$ oraz $\varepsilon = 0.000001$.

Zadania należy oddać na zajęciach (10p).

Sprawozdanie i plik z kodem *.cpp przesyłamy do odpowiednio zdefiniowanego zadania na platformie UPEL (np. MN-6 - gr1).

Plik z kodem *.cpp przesyłamy również do wirtualnego laboratorium (np. WL-6).