In [469]:
```python
from IPython.display import Image
from IPython.core.display import HTML
```

In [244]:
```python
import numpy as np
import pandas as pd
from math import factorial
import random

random.seed(10)
```

Обозначения

- m – кол-во мест в очереди
- n – кол-во каналов
- α – интенсивность потока заявок
- μ – интенсивность потока обслуживания
- μ – интенсивность потока обслуживания
- ν – параметр распределения времени ожидания в очереди
- $S_i, i \in \overline{0, n+m}$ – i-ое сотстояние системы. При $i <= n$ S_i значит, что у системы пустая очередь и заняты i каналов. При $n < i <= n + m$ S_i означает, что все каналы заняты, а также занято $i - n$ мест в очереди
- $\rho = \frac{\alpha}{\mu}$ – коэффициент загрузки СМО
- $p_{отк}$ – вероятность отказа в обслуживании поступившей в СМО заявки
- $Q = p_{обс} = 1 - p_{отк}$ – вероятность обслуживания поступившей заявки(относительная пропускная способность)
- $A = \alpha Q$ – среднее число заявок, обслуживаемых в СМО в единицу времени (абсолютная пропускная способность СМО)
- $L_{смо}$ - среднее число заявок, находящихся в СМО
- n_3 - среднее число каналов в СМО, занятых обслуживанием заявок

In [245]:
```python
alpha   = 10
mu      = 3
nu      = 6
m       = 4
n       = 3
ro      = alpha / mu
beta    = nu / mu
```

In [246]:
```python
def count_intensity(state):
    # 0 < state < n + m
    r_intensity = alpha
    l_intensity = state * mu if state <= n else n * mu + (state - n) * nu
    return l_intensity, r_intensity
```

In [247]:
```python
def triple_step(left_intensity, right_intensity):
    # step for inner node
    p1 = left_intensity * delta_t
    p2 = right_intensity * delta_t

    rv = np.random.uniform()
    if rv < p1:
        return -1
    elif p1 < rv < p1 + p2:
        return 1
    else:
        return 0

def one_step(intensity, sign):
    #generates step for outer nodes
    p = intensity * delta_t
    rv = np.random.uniform()
    return sign * 1 if rv < p else 0


def make_step(state):
    step = -2

    if state == 0:
        step =  one_step(alpha, 1)
    elif state == n + m:
        step =  one_step(n * mu + m * nu, -1)
    else:
        l_intensity, r_intensity = count_intensity(state)
        step =  triple_step(l_intensity, r_intensity)


    return step
```

Описание работы алгоритма

СМО может находится в $i \in \overline{0, m+n+1}$ состояниях

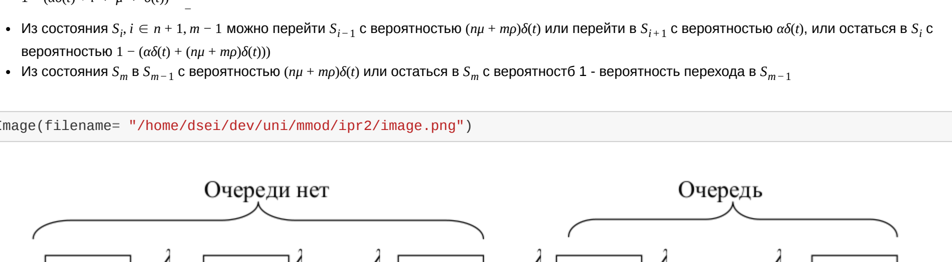
Из состояния i она может перейти только в состояния $i - 1$ или $i + 1$.

При $\delta(t) \to 0$

- Из состояние S_0 можно перейти S_1 с вероятностью $\alpha\delta(t)$ или остаться в S_0 с вероятностью $1 - \alpha\delta(t)$
- Из состояние $S_i, i \in \overline{1, n}$ можно перейти S_{i-1} с вероятностью $i\mu\delta(t)$ или перейти в S_{i+1} с вероятностью $\alpha\delta(t)$, или остаться в S_i с вероятностью $1 - (\alpha\delta(t) + i * \mu * \delta(t))$
- Из состояния $S_i, i \in \overline{n+1, m-1}$ можно перейти S_{i-1} с вероятностью $(n\mu + m\rho)\delta(t)$ или перейти в S_{i+1} с вероятностью $\alpha\delta(t)$, или остаться в S_i с вероятностью $1 - (\alpha\delta(t) + (n\mu + m\rho)\delta(t)))$
- Из состояния S_m в S_{m-1} с вероятностью $(n\mu + m\rho)\delta(t)$ или остаться в S_m с вероятностб 1 - вероятность перехода в S_{m-1}

In [470]:
```python
Image(filename= "/home/dsei/dev/uni/mmod/ipr2/image.png")
```

Out[470]:



In [419]:
```python
state = 0
T = 0
num_of_iters = 2 * 10**5
data = pd.DataFrame(columns=['Time', 'State'])
delta_t = 10**-3
for i in range(num_of_iters):
    T += delta_t
    state += make_step(state)
    data.loc[i] = [T, state]
```

Сравнение характеристик СМО, полученных в результате моделирования, с теоретическими характеристиками

1) Сравнение финальных вероятностей

- Вычислим вероятности для модели
- Вычисли эмпирические вероятности
- Сравним их

Вычисление вероятностей исходной модели

Решая ур-ния Эрланга для исходной модели, получим следующие вероятности:

- $p_0 = (\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho^i}{\prod_{l=1}^{i}(n+l\beta)})^{-1}$

In [420]:
```python
p_values = []
```

In [421]:
```python
p_0_1 = 0
for i in range(0,n+1):
    p_0_1 += ro**i / factorial(i)

p_0_2_1 = ro**n / factorial(n)
p_0_2_2 = 0
for i in range(1, m+1):
    p_0_2_3 = 1
    for l in range(1, i+1):
        p_0_2_3 *= n + l * beta

    p_0_2_2 += ro**i / p_0_2_3

p_0 = (p_0_1 + p_0_2_1 * p_0_2_2)**-1
p_values.append(p_0)
```

- $p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \; k \in \overline{1, n}$

In [422]:
```python
for i in range(1, n + 1):
    p_i = ro**i / factorial(i) * p_0
    p_values.append(p_i)
```

- $p_{n+i} = p_n \frac{\rho^i}{\prod_{l=1}^{i}(n+l\beta)}$

In [423]:
```python
from functools import reduce # Valid in Python 2.6+, required in Python 3
import operator
```

In [424]:
```python
p_n = p_values[n]
for i in range(1, m+1):
    p_n_i = p_n * ro**i / reduce(operator.mul, [n + l * beta for l in range(1, i+1)], 1)
    p_values.append(p_n_i)
```

В результате получаем следующие значение для p_i модели

In [425]:
```python
for i in range(len(p_values)):
    print(f'p_{i} \t = \t{p_values[i]}')
```

```
p_0      =      0.0433232164872211
p_1      =      0.14441072162407034
p_2      =      0.24068453604011725
p_3      =      0.267427262266797
p_4      =      0.178284841511198
p_5      =      0.08489754357676095
p_6      =      0.031443534658059616
p_7      =      0.00952834383577564
```

Выведем экспериментальные p_i

In [426]:
```python
empiric_p_values = [len(data[data['State'] == i]) / len(data) for i in range(n+m+1)]
for i in range(len(p_values)):
    print(f'empiric p_{i} \t = \t{empiric_p_values[i]}')
```

```
empiric p_0      =      0.045215
empiric p_1      =      0.1469
empiric p_2      =      0.25062
empiric p_3      =      0.28327
empiric p_4      =      0.17081
empiric p_5      =      0.069215
empiric p_6      =      0.026695
empiric p_7      =      0.007275
```

Выведем абсолютную разницу между эмпирическими и теоретическими значениями

In [427]:
```python
for i in range(len(p_values)):
    print(f'p_i - emp_p_i \t = \t {abs(p_values[i] - empiric_p_values[i])}')
```

```
p_i - emp_p_i    =       0.0018917835127788968
p_i - emp_p_i    =       0.00248927837592966
p_i - emp_p_i    =       0.009935463959882762
p_i - emp_p_i    =       0.01584273773320305
p_i - emp_p_i    =       0.0074748415111980104
p_i - emp_p_i    =       0.01568254357676095
p_i - emp_p_i    =       0.004748534658059616
p_i - emp_p_i    =       0.0022533438357756393
```

Из результатов выше мы видим, что вероятности довольно сходны. Максимальная разница состовляет 0.018587543576760956

2) Анализ абсолютной пропускной способности

Напомним, что $A = \alpha Q, \; где \; Q = p_{обс} = 1 - p_{отк}$

Оценим A эмпирической модели исходя из следующих соображений. Если построенная СМО сходится к теоретической, то

- $alpha$ построенной СМО должно сходитбся к $alpha$ исходной модели
- $p_{отк}$ построенной СМО также должно сходиться к $p_{отк}$ исходной модели

Из рассуждений выше можно сделать вывод, что $A_{estimated}$ также должно сходиться к исходной A

Т.к. оценка $p_{отк}$ у нас уже есть, то остается добавить оценку $alpha$.

В качестве оценки $alpha$ возьмем среднее кол-во заявок за единицу времени.

In [428]:
```python
amount_of_applications = 0
previous_state = 0
for state in data['State']:
    if state > previous_state:
        amount_of_applications += 1
    previous_state = state

alpha_est = amount_of_applications / len(data) / delta_t
print(f'Оценочное значение alpha = {alpha_est}')
```

```
Оценочное значение alpha = 9.834999999999999
```

In [429]:
```python
Q_est = empiric_p_values[n + m]
A_est = alpha_est * Q_est

Q     = p_values[n + m]
A     = alpha * Q
```

In [430]:
```python
print(f'Теоретическое значение A \t\t=\t {A}')
print(f'Эмпирическое значение A \t\t=\t {A_est}')
print(f'Абсолютная разница между значениями \t=\t {abs(A - A_est)}')
```

```
Теоретическое значение A                =       0.09528343835775639
Эмпирическое значение A                 =       0.07154962499999999
Абсолютная разница между значениями     =       0.0237338135577564
```

3) Вероятности отказа

In [431]:
```python
print(f'Теоретическое значение Q \t\t=\t {Q}')
print(f'Эмпирическое значение Q \t\t=\t {Q_est}')
print(f'Абсолютная разница между значениями \t=\t {abs(Q - Q_est)}')
```

```
Теоретическое значение Q                =       0.00952834383577564
Эмпирическое значение Q                 =       0.007275
Абсолютная разница между значениями     =       0.0022533438357756393
```

4) Средние число заявок в СМО

$L_{обс} = \sum_{k=1}^{n} k p_k + \sum_{i=1}^{m} n p_{n+i}$

In [432]:
```python
L_served = sum(k * p_values[k] for k in range(n+1))
+ sum([n * p_values[n + i] for i in range(1, m + 1)])

L_served_est = sum(k * empiric_p_values[k] for k in range(n+1))

print(f'Теоретическое значение L_served\t\t=\t {L_served}')
print(f'Эмпирическое значение L_served \t\t=\t {L_served_est}')
print(f'Абсолютная разница между значениями \t=\t {abs(L_served - L_served_est)}')
```

```
Теоретическое значение L_served         =       1.4280615805046957
Эмпирическое значение L_served          =       1.4979500000000001
Абсолютная разница между значениями     =       0.06988841949530444
```

5) Среднее число заявок в очереди

$L_{оч} = \sum_{i=1}^{m} i p_{n+i}$

In [433]:
```python
L_queue = sum(i * p_values[n + i] for i in range(1, m + 1))
L_queue_est = sum(i * empiric_p_values[n + i] for i in range(1, m + 1))

print(f'Теоретическое значение L_queue\t\t=\t {L_queue}')
print(f'Эмпирическое значение L_queue \t\t=\t {L_queue_est}')
print(f'Абсолютная разница между значениями \t=\t {abs(L_queue - L_queue_est)}')
```

```
Теоретическое значение L_queue          =       0.48052390798200134
Эмпирическое значение L_queue           =       0.418425
Абсолютная разница между значениями     =       0.06209890798200135
```

6) Среднее время пребывания заявки в СМО

$\overline{t}_{смо} = \frac{Q}{\mu} + t_{ожидания}$

In [434]:
```python
amount_of_served_applications = 0
previous_state = 0
for state in data['State']:
    if state < previous_state:
        amount_of_served_applications += 1
    previous_state = state

mu_est = (amount_of_served_applications / len(data) - Q) / delta_t
print(f'Оценочное значение mu = {mu_est}')
```

```
Оценочное значение mu = 0.28665616422436124
```

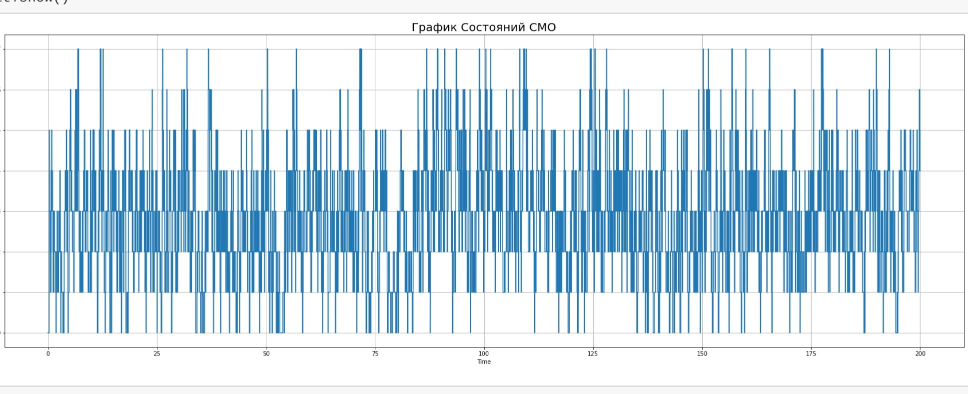
In [435]:
```python
print(f'Теоретическое значение avg_t_смо\t\t=\t {Q / mu + 1 / nu}')
print(f'Эмпирическое значение avg_t_смо \t\t=\t {Q_est / mu_est + 1 / nu}')
print(f'Абсолютная разница между значениями \t=\t {abs(Q / mu + 1 / nu - Q_est / mu_est + 1 / nu)}')
```

```
Теоретическое значение avg_t_смо                =       0.16984278127859187
Эмпирическое значение avg_t_смо                 =       0.19204550343330243
Абсолютная разница между значениями     =       0.31113061117862273
```

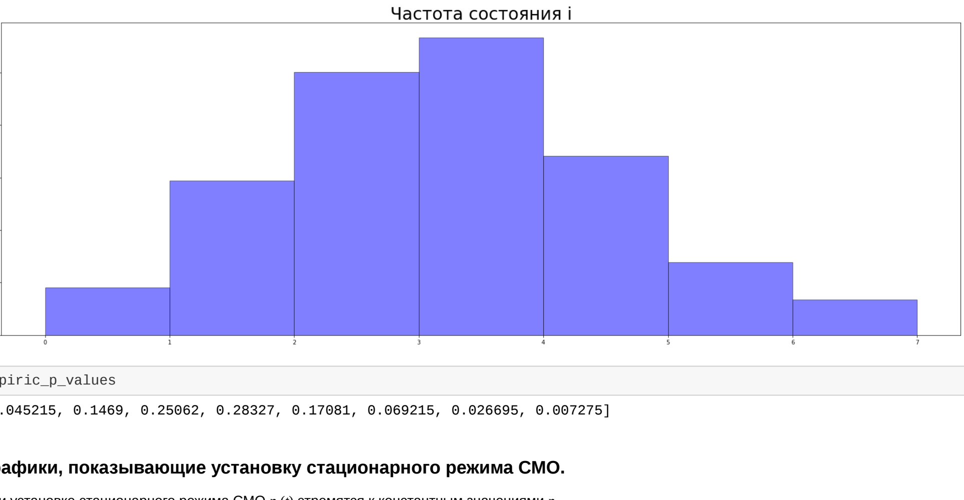
Демонстрация работоспособности с помощью графиков

In [437]:
```python
from matplotlib.pyplot import figure

# figure(figsize=(15, 10), dpi=80)
```

In [438]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt


plt.step(data['Time'], data['State'])
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('State')
plt.grid(True)
plt.rcParams["figure.figsize"] = (30,10)
plt.title('График Состояний СМО', fontsize=20)
plt.show()
```



In [439]:
```python
plt.hist(data['State'], density=True, bins=7, facecolor='blue', alpha=0.5, histtype='bar', ec='black')
plt.rcParams["figure.figsize"] = (20,15)
plt.title('Частота состояния i', fontsize=30)
plt.show()
```



In [440]:
```python
empiric_p_values
```

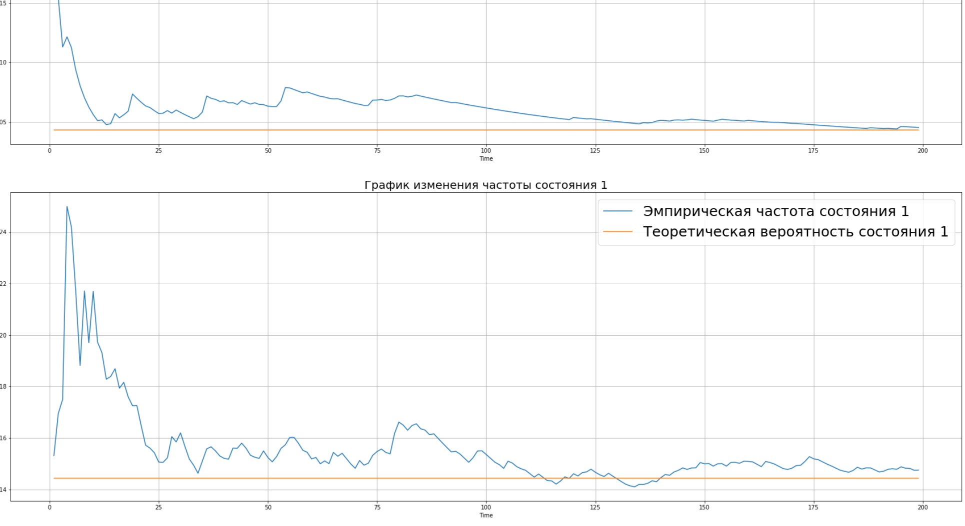
Out[440]:
```
[0.045215, 0.1469, 0.25062, 0.28327, 0.17081, 0.069215, 0.026695, 0.007275]
```

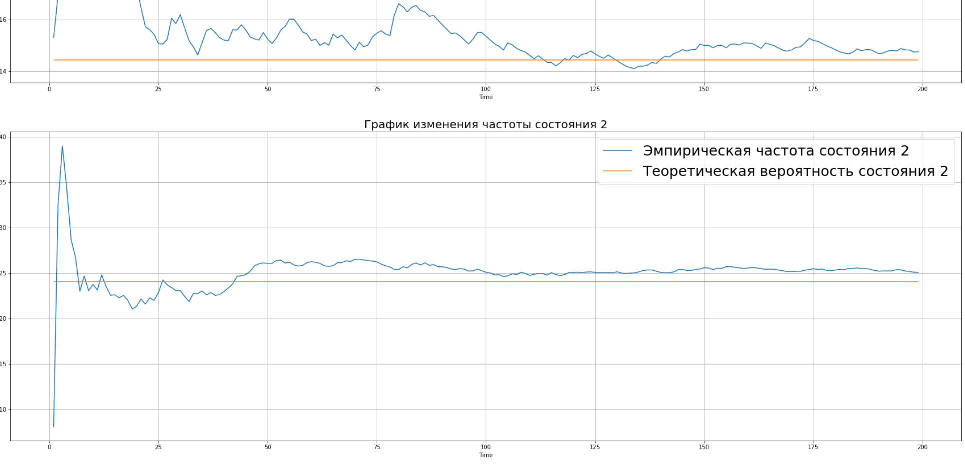
Графики, показывающие установку стационарного режима СМО.

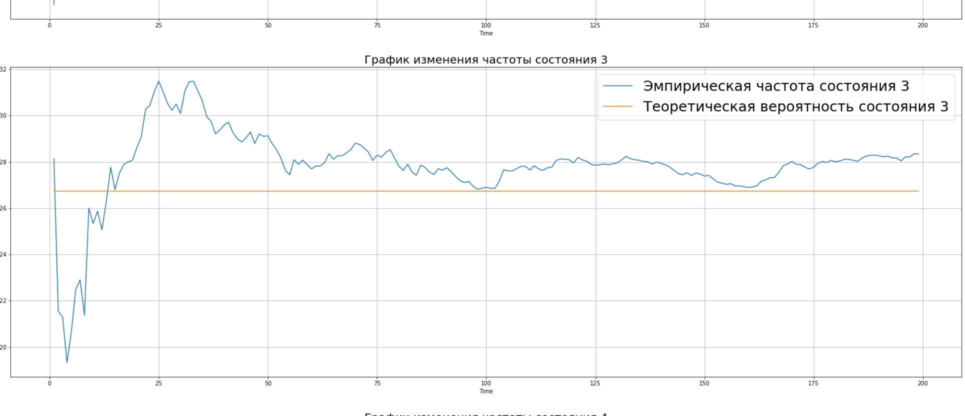
При установке стационарного режима СМО $p_i(t)$ стремятся к константным значениями p_i

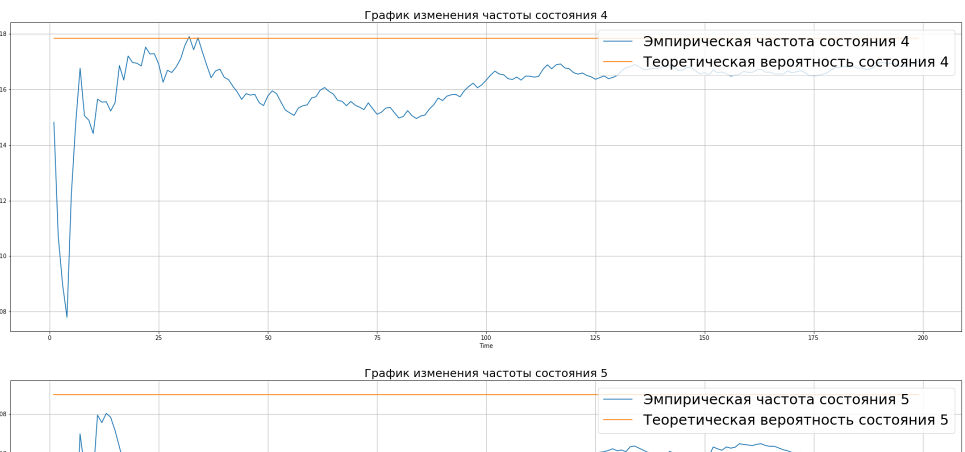
In [441]:
```python
def count_p(i, t):
    tdata = data[data['Time'] <= t]
    return len(tdata[tdata['State'] == i]) / len(tdata)
```

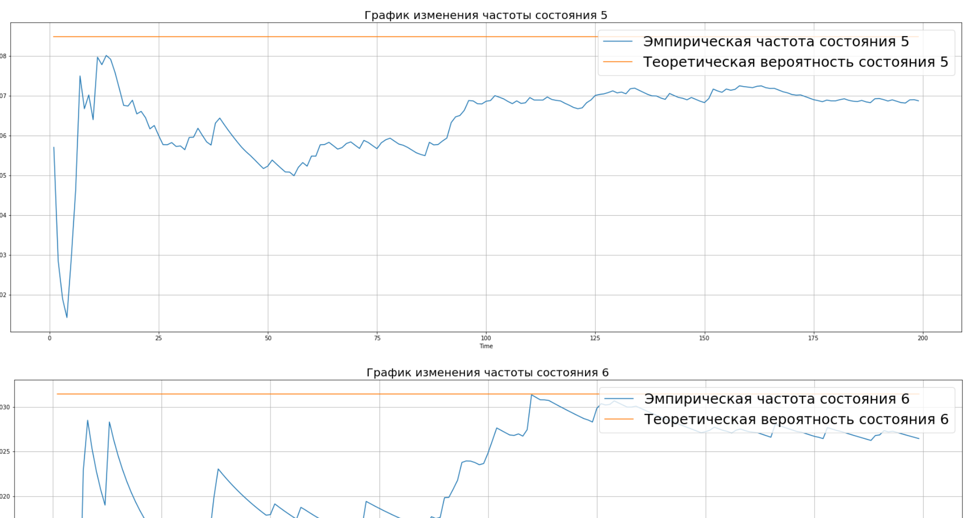
In [466]:
```python
for i in range(0, m + n + 1):
    t_values = list(range(1, 200))
    p_i_values = [count_p(i, t) for t in t_values]
    plt.xlabel('Time')
    plt.ylabel('Probability')
    plt.grid(True)
    plt.rcParams["figure.figsize"] = (30,10)
    plt.title(f'График изменения частоты состояния {i}', fontsize=20)
    plt.plot(t_values, p_i_values, label=f'Эмпирическая частота состояния {i}')
    plt.plot(t_values, [p_values[i] for _ in t_values], label=f'Теоретическая вероятность состояния {i}')
    plt.legend(loc="upper right", prop={'size': 25})
    plt.show()
```

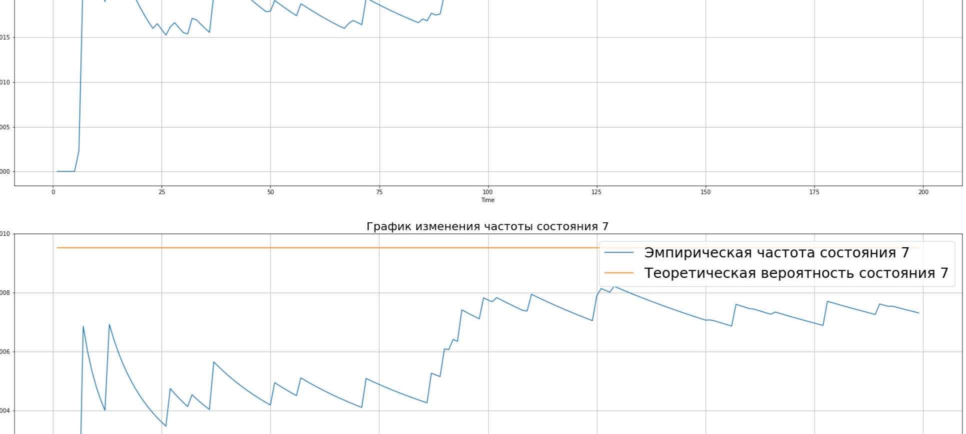


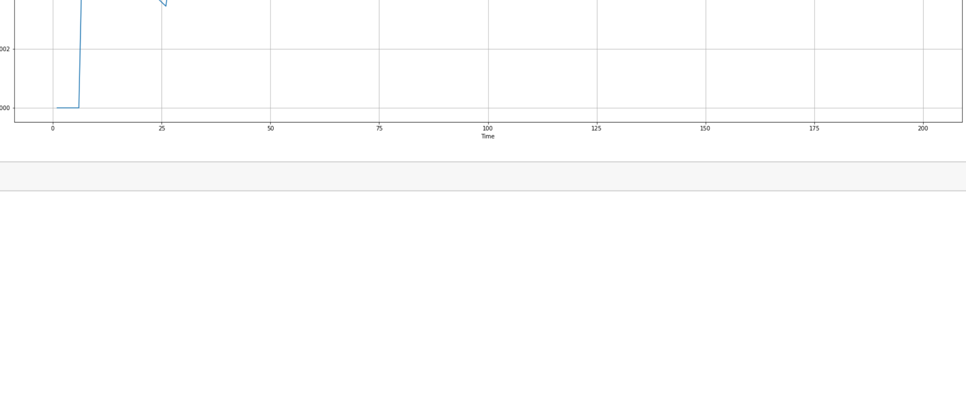












In [ ]: