Eq. da onda unidimensional

1

Escama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \qquad \begin{array}{ll} n=1: & u(t,x) \\ n=2 & u(t,x,y) \\ n=3 & u(t,x,y,z) \end{array}$$

$n = 1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad u(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}$$

Corda do violão:

$$u(t,0) = 0 = u(t,L)$$

$$c^2 = \frac{T}{\mu}$$ (afinação depende da temperatura)

μ: densidade linear

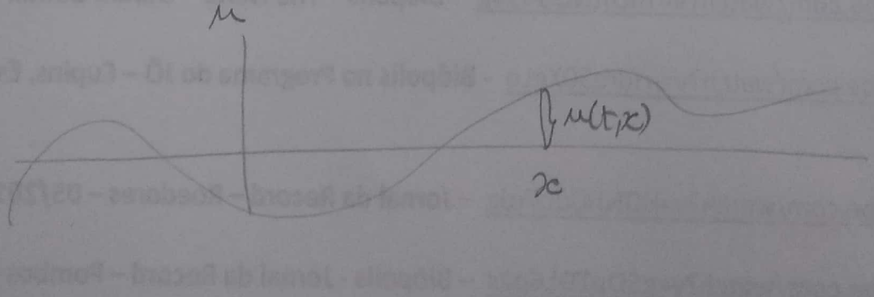
Se ρ é a densidade volumétrica e D é o diametro,

então $\mu = \frac{\rho \pi D^2}{4}$ (cilindro)

densidade variável

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} c^2(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

Inicialmente corda infinita



Eq. do transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$u(t,x) = f(x+ct)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad u(t,x) = g(x-ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - c\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Se $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2

$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$ é solução

Recíproca?

Teorema se u é C^2 e resolve a eq., então $u(t,x)$ é da forma

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

Dem

$$x + ct = \xi \qquad x - ct = \eta$$

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}$$

$$t = \frac{\xi - \eta}{2c}$$

$$u(t,x) = u\left(\frac{\xi-\eta}{2c}, \frac{\xi+\eta}{2}\right) = v(\xi,\eta)$$

Então a eq. fica

$$\frac{\partial^2 v(\xi,\eta)}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0$$

De fato

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta) = u_t\left(\frac{\xi-\eta}{2c}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)\left(-\frac{1}{2c}\right) + u_x\left(\frac{\xi-\eta}{2c}, \frac{\xi+\eta}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) = \left(-\frac{1}{2c}\right)\left[u_{tt}\frac{1}{2c} + \cancel{u_{tx}\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2}\left[\cancel{u_{tx}\frac{1}{2c}} + u_{xx}\frac{1}{2}\right] =$$

$$-\frac{1}{4c^2}u_{tt} + \frac{1}{4}u_{xx} = 0$$

5

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \Rightarrow$$

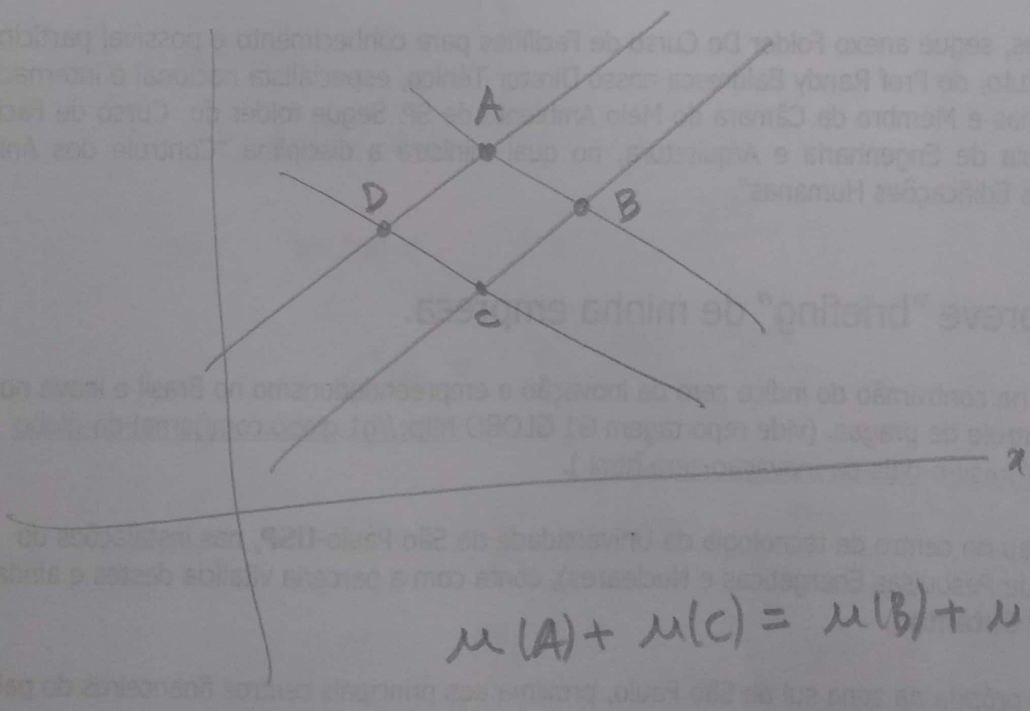
$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = f_1(\eta) \rightarrow$$

$$v(\xi,\eta) = G(\eta) + F(\xi) \rightarrow$$

$$u(t,x) = v(\xi,\eta) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

—//—

Consequência



$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

6

① $u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$ (1)

Condições iniciais $t=0$ mais se caracterizar.

$u(0,x) = f(x)$

$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$ (derivada normal a $t=0$)

$f(x) = u(0,x) = F(x) + G(x)$ ②

$g(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(0,x) = c\,F'(x) - c\,G'(x)$

Derivando a 1ª

$F'(x) + G'(x) = f'(x)$

$\Rightarrow \quad F'(x) = \frac{c\,f'(x) + g(x)}{2c}$

$G'(x) = \frac{c\,f'(x) - g(x)}{2c}$

$\rightarrow \quad F(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + \delta$

$G(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + \varepsilon$

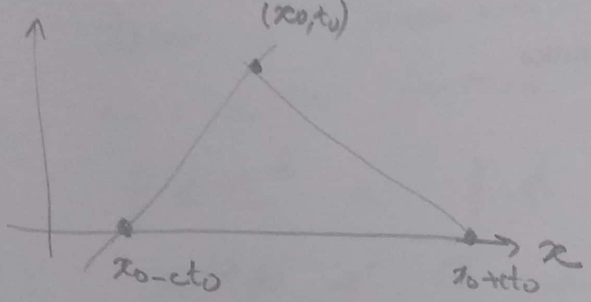
② $\rightarrow \quad \varepsilon + \delta = 0$

Portanto,

$$u(t,x) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

Domínio de depend.

(1) $$= \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) \right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

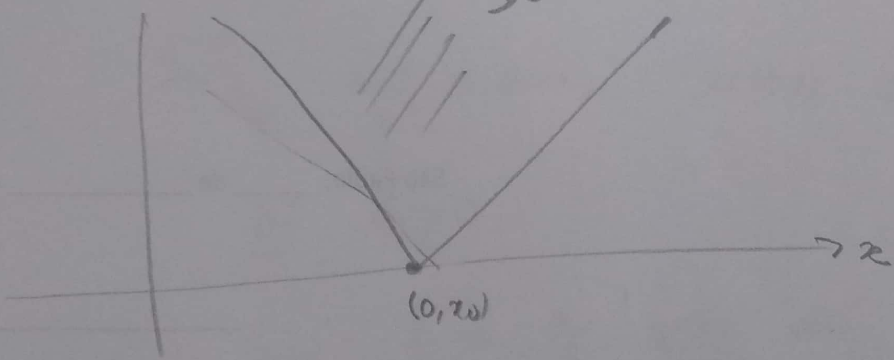


$$x - ct = x_0 \pm c t_0$$

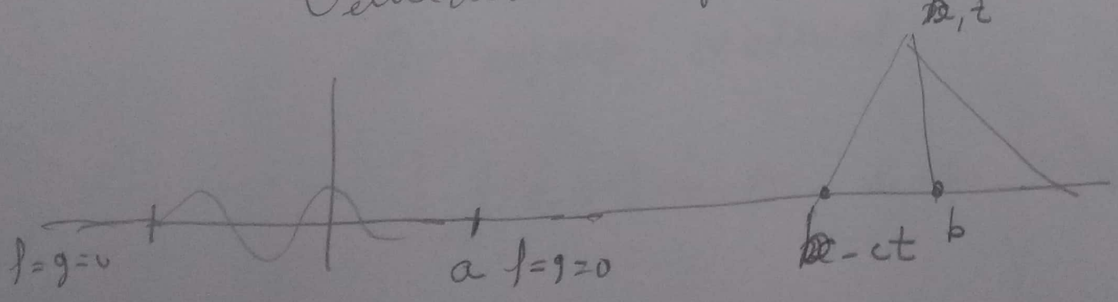
$$t = 0 \qquad x = x_0 \pm c t_0$$

Domínio de dependência

Domínio de influência



Velocidade de propagação:



$$b - ct = a$$

$$t = \frac{b-a}{c}$$ (velocidade de propaga. das perturba.

Regularidade das soluções:

Se f é C^2 e $g \in C^1 \Rightarrow u(t,x)$ é C^2
e é solução.

Por exemplo, tomando $g \equiv 0$,
$u(t,x) = f(x+ct) + f(x-ct)$
tem a mesma regularidade de f
e não mais. Por exemplo, se
$f \in C^2$ e $f \notin C^3 \Rightarrow$
$u(t,x)$ é C^2 e não é C^3.

Mais tarde:
se $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$ num aberto
u é C^∞.

Se $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, $u(t,x)$ é C^∞

p/ $t > 0$.

Se f e g são só
contínuas $\Rightarrow$ distribuições

O espaço natural:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2 + c^2 u_x^2)\,dx < \infty$$

Corda vibrante na semi-reta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad 0 < x < \infty$$

$u(0,x) = \varphi(x)$ $\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x)$ $\quad 0 < x < \infty$

Tem ∞'s soluções (extensão φ e ψ)

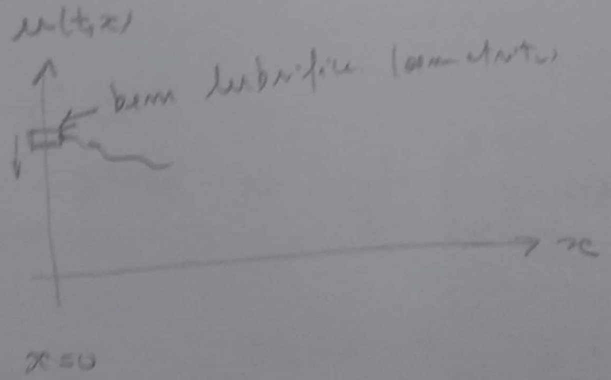
Fisicamente, condições de fronteira:

fronteira de $(0,\infty)$ é $x=0$

Dirichlet: corda presa

$u(t,0) = 0 \quad \underline{\forall t}$ $\qquad$ presa de um lado

Neumann $\frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = 0$ $\qquad$ corda livre na vertical



$$u(t,x) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

Teorema a) Se f e g são ímpares $\Rightarrow$ $u(t,x)$ é ímpar em x

b) Idem p/ pares.

Dem. a)

$$\frac{f(-x+ct)+f(-x-ct)}{2} =$$

$$\frac{-f(x-ct)-f(x+ct)}{2} = -\frac{[f(x+ct)+f(x-ct)]}{2}$$

$$\frac{1}{2c}\int_{-x-ct}^{-x+ct} g(s)\,ds \overset{?}{=} -\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$

$s = -\tau$ $\quad$ $s = -x+ct$ $\quad \tau = x-ct$

$s = -x-ct$ $\quad \tau = x+ct$

$ds = -d\tau$

$$-\frac{1}{2c}\int_{x+ct}^{x-ct} g(-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2c}\int_{x+ct}^{x-ct} g(\tau)\,d\tau = -\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau$$

Eq. da corda vibrante presa na semireta $x>0$:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad x>0 \quad t\in\mathbb{R}$$

$$u(0,x) = f(x) \qquad u_t(0,x) = g(x)$$

$$f(0) = 0 = g(0)$$ (condição de compatibilidade).

Sejam $\tilde{f}(x)$ e $\tilde{g}(x)$ extensões ímpares.

e

$$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}\left[\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s)\,ds$$

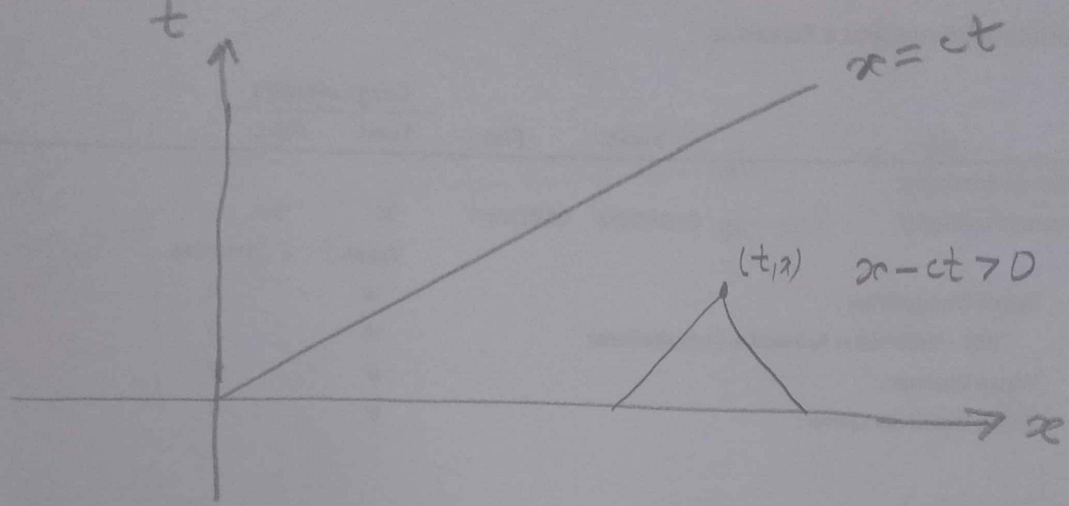
é solução da eq. da onda com condições iniciais $\tilde{f}(x)$ e $\tilde{g}(x)$ e

$\tilde{u}(t,0) = 0$ (porque $\tilde{u}(t,x)$ é ímpar em x)

Portanto, se $u(t,x)$ é a restrição de $\tilde{u}(t,x)$ à região $x\geq 0$, $u(t,x)$ é solução.

Resta escrever em termos dos dados iniciais p/ $x\geq 0$.

Vamos tomar $t > 0$ (se $t < 0$ é a mesma coisa).

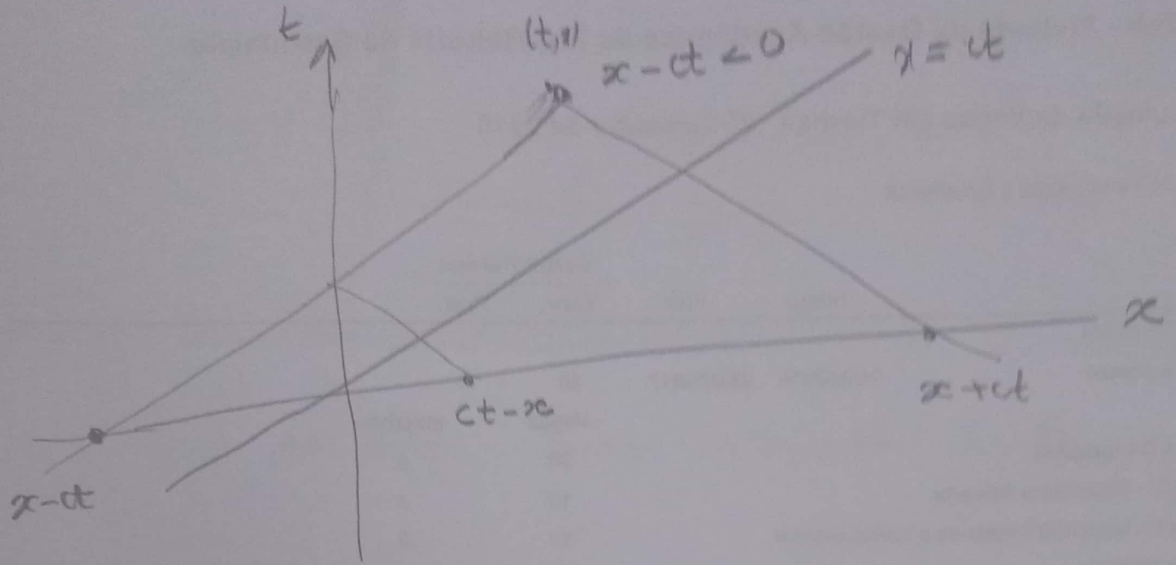


$x \geq 0$, $t \geq 0$ e $x - ct \geq 0 \Rightarrow x + ct > 0$

$\Rightarrow \tilde{f}(x-ct) = f(x-ct)$

e $\tilde{g}(s) = g(s) \Rightarrow$

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$$



Se $x-ct<0$, com $x+ct>0$, tem

$$\tilde{f}(x+ct)+\tilde{f}(x-ct)=f(x+ct)-f(ct-x)$$

$$\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds = \underbrace{\int_{x-ct}^{ct-x}\tilde{g}(s)ds}_{=0} + \int_{ct-x}^{x+ct}\tilde{g}(s)\,ds =$$

$$= \int_{ct-x}^{x+ct} g(s)ds$$

Portanto: $x-ct<0$

$$u(t,x) = f(x+ct)-f(ct-x)+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} g(s)ds$$

Idem p/ $t\leq 0$:

as formulas valem p/ $0\leq x\leq c|t|$ ou $c|t|\leq x$

Condição de Neumann: extensão par

—— // ——

Eq. da onda num intervalo finito:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < l$$

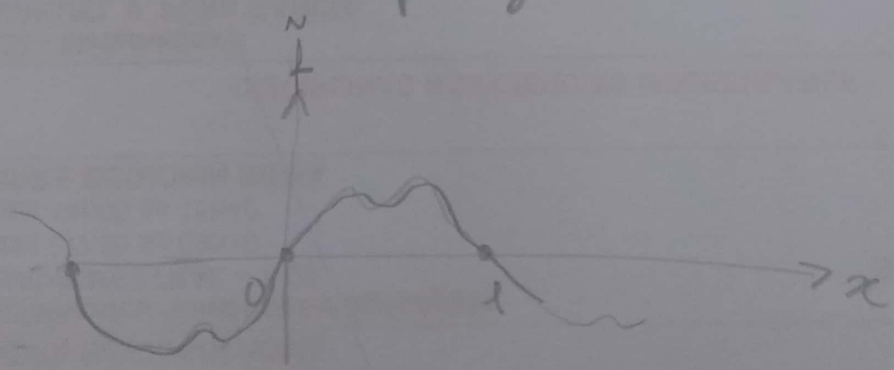
$$u(0,x) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \qquad + BC$$

Dirichlet dos dois lados:

$$u(t,0) = 0 = u(t,l) \qquad \forall t$$

supondo $f(0) = g(0) = 0$
$f(l) = g(l) = 0$



$\tilde{f}$ é a extensão ímpar p/ $-l \leq x \leq 0$

15

Em seguida $\tilde{f}$ é definida em $\mathbb{R}$ por extensão periódica de período $2l$.

Essa extensão é ímpar em relação a $x=0$ e $x=l$.

De fato, $\tilde{f}(-x) = \tilde{f}(\underbrace{-x+2nl}_{\in [-l,l]}) =$

$- \tilde{f}(x-2nl) = -\tilde{f}(x)$

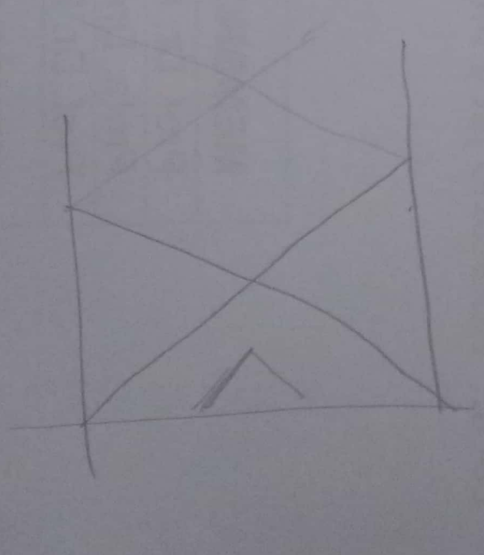
Idem p/ $x=l$.

Definindo:

$\tilde{u}(t,x) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+ct)+ \dots]$

é solução em $[0,l]$ e satisfaz B.C.

Como escrever $\tilde{u}(t,x)$ em $[0,l]$? em termos de f e g



Outra estratégia:

$$\mu(A)+\mu(C)=\mu(B)+\mu(D)$$