 ISSN 2237-7166

Resolução de uma Equação Diferencial Parcial pelo Método de Separação de Variáveis no problema de Condução de Calor em uma Barra

Carlos FriedrichLoeffler, Bruno Ramos Gonzaga

PPGEM - Universidade Federal do Espírito Santo

Av. Fernando Ferrari 514–Goiabeiras – Vitória – ES – Brasil – CEP 29075 910

E-mail: carlosloeffler@bol.com.br, bgonzaga.mat@gmail.com

Palavras-Chave: *Método de Separação de Variáveis, Problemas Não Homogêneos, Respostada Temperatura.*

Resumo: *O objetivo deste trabalho é gerar uma solução analítica de um problema não homogêneo de Condução de Calor numa Barra que possa servir de referência para outras aplicações científicas. Em geral, as Equações Diferenciais Parciais com condições de contorno não homogêneas se resolvem pela redução das mesmas a problemas com condições de contorno homogêneas. Uma posterior avaliação com recursos computacionais, ou até mesmo estimativa de convergência, são extremamente uteis em alguns modelos. Então, o método da separação de variáveis quando aplicado na condução de calor, na equação da onda ou na equação do potencial, e posteriormente analisados de forma numérica ou gráfica, gera soluções com melhor qualidade na interpretação de dados nos diversos segmentos da ciência, devido a sua composição em séries de autofunções, que podem ser interpretadas como componentes modais da resposta em problemas de mecânica, transmissão de calor e eletromagnetismo. .*

Equação de Governo

O problema consiste na condução de calor em uma barra, feita com material homogêneo, conforme ilustra a Fig. 1. Suponha que a barra tenha 30 cm de comprimento para a qual $\propto^2 = 1$, onde α^2 é a constante de difusividade térmica. A distribuição inicial de temperatura é dada por $u(x,0) = 60 - 2x$ e que as condições de contorno são $u(0,t) = 20$ e $u(30,t) = 50$. É esperado que depois de muito tempo, quando $t \to \infty$, seja alcançada uma temperatura estacionária $v(x)$, que é independente do tempo t e das condições iniciais. Então, se expressa $u(x,t)$ como a soma da distribuição de temperatura no estado estacionário comum e outra referente à distribuição transiente $w(x,t)$. A demonstração da equação diferencial (1) como equação de governo do fenômeno físico em questão [2] foge ao escopo deste trabalho, mas pode-se afirmar que tal modelo encontra grande aplicabilidade e coerência com resultados experimentais, atestando a procedência das hipóteses consideradas no modelo em questão.

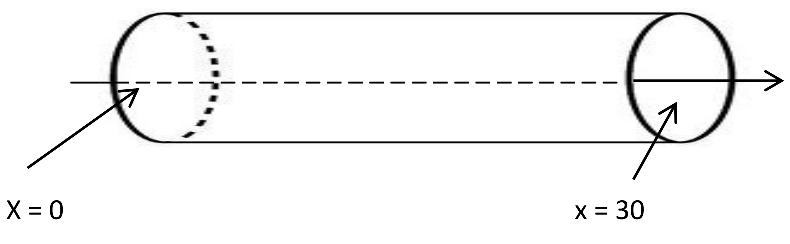

Figura 1: Uma Barra sólida condutora de calor

 ISSN 2237-7166

Considera-se, portanto, a equação de governo do problema como sendo dada por:

$\alpha^2 u_{xx} = u_t$ (1)

Aplicação do Método de Separação de Variáveis

De acordo com a estratégia do Método de Separação de Variáveis para problemas nos quais as condições de contorno não são homogêneas, é necessário supor uma solução do tipo:

$u(x,t) = v(x) + w(x,t)$ (2)

Como $v(x)$ tem que satisfazer a equação do calor (1), tem-se que $v''(x) = 0$. Ao mesmo tempo, esta solução obedece às condições de contorno não homogêneas que são impostas so problems. Assim, considerando as condições de contorno como:

$v(0) = 20$ e $v(30) = 50$,

Logo, $v(x) = 20 + x$. A solução transiente é dada por:

$w_{xx} = w_t$ (3)

Admitem-se as seguintes condições de contorno homogêneas e condição inicial modificadas:

$w(0,t) = 0$; $w(30,t) = 0$; $w(x,0) = 60 - 2x - (20 + x) = 40 - 3x$

Observa-se que neste ponto vigora um problema de condições de contorno homogêneas para ser resolvido, com $\alpha^2 = 1$ e $f(x) = 40 - 3x$. Então, é preciso aplicar o Método de Separação de Variáveis (1), sendo:

$w(x,t) = X(x)T(t)$ (4).

Substituindo w dado pela equação (4) na equação (1), obtem-se:

α^2 X''T = XT' (5)

A equação (5) é equivalente a:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} \quad (6)$$

Então, a equação (6) deve ser igual a uma constante, pois, é o único modo de estabelecer uma igualdade entre derivadas espaciais e temporais. Assim, obtem-se:

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\gamma, \text{ onde } \alpha^2 = 1. \quad (7)$$

Geram-se, então, duas equações ordinárias a seguir para X(x) e T(t):

X'' + γX = 0, (8)

T' + γT = 0, (9)

 ISSN 2237-7166

Agora considera-se a solução da Eq. (8) que satisfaz às condições de contorno da função espacial-temporal, onde w(0,t) = w (30,t) = 0. As únicas soluções não triviais [1] são as autofunções:

$X_n(x) = sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right), n = 1,2,3,\ldots$ (10)

Associadas aos autovalores $\gamma_n = \frac{n^2\pi^2}{900}$, n = 1,2,3,..... (11)

Voltando para a Eq. (9) para T(t) e substituindo γ_n por $\frac{n^2\pi^2}{900}$, temos

T’ + $\left(\frac{n^2\pi^2}{900}\right)T$ = 0, logo T(t) é proporcional a exp($\frac{-n^2\pi^2 t}{900}$). (12)

Portanto, multiplicando-se as soluções das equações (8) e (9), obtém-se:

$w(x,t) = c_n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{900}} sen(\frac{n\pi x}{30})$, n = 1,2,3,.... (13)

Onde $c_n = \frac{2}{30}\int_0^{30}(40-3x)sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)dx$ (14)

Assim, $u(x,t) = 20 + x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{900}} sen\frac{n\pi x}{30}$, onde c_n são os termos da Eq. (14).

Calculando os dois primeiros termos da função da Equação (14), tem-se:

$u(x,t) = 20 + x - \frac{20}{\pi} e^{\frac{-\pi^2 t}{900}} sen\left(\frac{\pi x}{30}\right) + \frac{90}{\pi} e^{\frac{-4\pi^2 t}{900}} sen(\frac{2\pi x}{30})$ (15)

,.

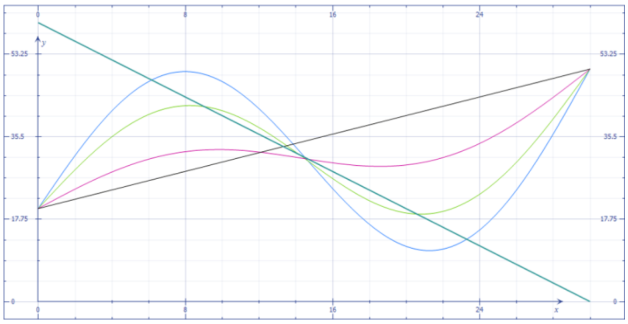

Figura 2: Deslocamentos em função do tempo em pontos sucessivos da barra.

Referências

[1] W. Boyce, R.C. ,DiPrima “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno”, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2010.

[2] E. Kreyszig, “Matemática Superior para Engenharia”, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2009.