MAT0120 - Álgebra I para Licenciatura

Lista 1 - Soluções

Professor: Kostiantyn Iusenko
Monitor: Douglas de Araujo Smigly

1º Semestre de 2021

1 Axiomática de $\mathbb{Z}$

(1) Dado um inteiro x, chamamos de *valor absoluto* de x o numero inteiro designado por $|x|$ e definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove que

(a) $|a| \geq 0$;

(b) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$;

(c) $-|a| \leq a \leq |a|$;

(d) $|ab| = |a||b|$;

(e) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

(f) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

Solução

(a) Pela definição de valor absoluto, temos dois casos a analisar:

- $a \geq 0$: Se $a \geq 0$, então por definição, $|a| = a \geq 0$.
- $a < 0$. Se $a < 0$, isso significa que $-a > 0$, e $|a| = -a > 0$.

Portanto, concluímos que $|a| \geq 0$ para todo a.

(b) $(|a| = 0 \Rightarrow a = 0)$: Vamos verificar que se $|a| \neq 0$, então $a \neq 0$. Veja que, se $a < 0$, então $-a > 0$, e $|a| = -a > 0$, o que implica $a \neq 0$. Agora, se $a > 0$, então $|a| = a > 0$, assim $a \neq 0$. Logo, $|a| = 0$ apenas para $a = 0$.

$(|a| = 0 \Leftarrow a = 0)$: Por definição, $|0| = 0$.

(c)

Novamente, vamos dividir a situação em dois casos:

- Se $a < 0$, então $-a > 0$ e $|a| = -a > 0 > a$ e $-|a| = a$. Logo,

$$-|a| = a < |a|.$$

- Se $a \geq 0$, então $|a| = a > 0$, e $-|a| < 0 < a$, logo

$$-|a| < a = |a|$$

Juntando as duas informações, temos

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

(d) Vamos primeiramente provar que $|a| = \sqrt{a^2}$. Observe que:

- Se $a = 0$, então $|a| = 0 = \sqrt{0^2} = \sqrt{a^2}$.
- Se $a > 0$, então $|a| = a = \sqrt{a^2}$.
- Se $a < 0$, então $-a > 0$. Assim, pelo caso anterior, segue que $|-a| = \sqrt{(-a)^2}$. Agora, por definição, como $-a$ é positivo, então $|-a| = -a = |a|$. Além disso, $\sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2}$. Portanto,

$$|a| = |-a| = \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{a^2}.$$

Agora, aplicando tal propriedade na igualdade que precisamos verificar, ficamos com

$$|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{(a^2b^2)} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|\,.$$

(e) Utilizando o item (c), temos:

$$-|a| \leq a \leq |a| \quad \text{e} \quad -|b| \leq b \leq |b|\,.$$

Somando ambas, vem

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

Vamos agora analisar os possíveis valores de $a + b$ na identidade acima:

- Se $a + b \geq 0$, então $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$
- Se $a + b < 0$, então $|a + b| = -(a + b) \leq |a| + |b|$.

Em ambos os casos, concluímos que $|a + b| \leq |a| + |b|$.

(f) Observe que, pela Desigualdade Triangular provada no item (e)

$$|a| = |a - b + b| = \left|(a - b) + b\right| \leq |a - b| + |b|\,.$$

Logo,

$$|a| - |b| \leq |a - b| + |b| - |b| = |a - b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|\,.$$

Por outro lado, com o resultado acima, trocando a com b, temos $|b| - |a| \leq |b - a|$, o que nos permite limitar $-|a - b|$ por

$$|a - b| = \left|-(a - b)\right| = |b - a| \geq |b| - |a| = -(|a| - |b|) \Rightarrow -|a - b| \leq |a| - |b|\,.$$

Juntando as duas informações, temos:

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|\,.$$

Vamos analisar os possíveis valores de $|a| - |b|$:

- Se $|a| - |b| \geq 0$, então $\big||a| - |b|\big| = |a| - |b| \leq |a - b|$.
- Se $|a| - |b| < 0$, então $\big||a| - |b|\big| = -(|a| - |b|) = |b| - |a| \leq |b - a| = \big|-(a - b)\big| = |a - b|$.

Em ambos os casos, concluímos que $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

(2) Prove que o conjunto $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 7 < m < 8\}$ é vazio.

Solução

Observe que, se $m \in \mathbb{Z}$ é tal que $7 < m < 8$, então $0 < m - 7 < 1$. Assim,

$$S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 7 < m < 8\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 0 < m - 7 < 1\},$$

e tomando $s \in \mathbb{Z}$, basta mostrar que o conjunto

$$S' = \{s \in \mathbb{Z} \mid 0 < s < 1\}$$

é vazio. Para isto, vamos supor por absurdo que $S' \neq \emptyset$. Nesse caso, S' é um conjunto não-vazio de números inteiros não-negativos, e pelo Princípio da Boa Ordem, segue que este admite um elemento mínimo. Chamemo-lo de ξ. Assim,

$$\xi \in S \Rightarrow 0 < \xi < 1.$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade por ξ, temos que $0 < \xi^2 < \xi < 1$. Ou seja, existe um outro elemento $\xi^2 \in S'$ que e menor que ξ, o que é absurdo, pois ξ é minimal. Logo, tal elemento não pode existir, e $S' = \emptyset$. Consequentemente, $S = \emptyset$, como queríamos demonstrar.

(3) Um elemento $a \in \mathbb{Z}$ é dito *inversível* se existir um elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostre que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1.

Solução

Seja $a \in \mathbb{Z}$, e suponha que a é inversível. Assim, existe um elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Veja que $a \neq 0$, pois $0 \cdot a' = 0 \neq 1$.
Se $a \neq 0$,

$$a \cdot a' \Rightarrow |a \cdot a'| = |1| \Rightarrow |a||a'| = 1.$$

Mas

$$|a| \geq 1$$

e

$$|a'| \geq 1.$$

Então, a única forma do produto $|a||a'|$ ser 1 é caso $|a| = 1$, o que implica pela definição de valor absoluto vista no exercício 2 que $a = 1$ ou $a = -1$.

(4) Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$.

(a) Prove que

(i) $p \cdot (-q) = (-p) \cdot q = -(p \cdot q)$;

(ii) $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$.

(b) Mostre que se a multiplicação em $\mathbb{Z}$ tivesse sido definida satisfazendo $(-p)\cdot(-q) = -(p\cdot q)$, para todos $p, q \in \mathbb{N}$, então os números inteiros não satisfariam os seguintes axiomas:

(i) Propriedade cancelativa: para toda terna de inteiros a, b, c, com $a \neq 0$, tem-se que, se $ab = ac$, então $b = c$.

(ii) Propriedade distributiva: para toda terna de inteiros a, b, c de inteiros tem-se que $a(b + c) = ab + ac$.

(c) Se fosse válido que $(-3)\cdot(-5) = -15$, mostre que teríamos $7 \cdot 2 = -16$.

Solução

(a) Mostrar que $p\cdot(-q) = -(p\cdot q)$ significa mostrar que o número $p\cdot(-q)$ é inverso aditivo de $p\cdot q$, isto é, $p\cdot(-q) + p\cdot q = 0$. E de fato:

$$p\cdot(-q) + p\cdot q = p\cdot((-q)+q) = p\cdot 0 = 0.$$

Analogamente, mostramos que $(-p)\cdot q = -(p\cdot q)$, o que completa a prova de (i). Agora, usando (i), temos

$$(-p)\cdot(-q) = -(p\cdot(-q)) = -(-(p\cdot q)) = p\cdot q,$$

o que verifica (ii).

(b) Seja $a = -5, b = 3$ e $c = -3$, então se tivéssemos $(-5)\cdot(-3) = -(5\cdot 3) = -15$,

$$(-5)\cdot 3 = (-5)\cdot(-3),$$

mas $3 \neq -3$. Logo, a propriedade cancelativa não seria válida.

Agora, veja que

$$(-5)(3+(-3)) = -5\cdot 0 = 0$$

Por outro lado, pela propriedade distributiva,

$$(-5)(3+(-3)) = (-5)\cdot 3 + (-5)\cdot(-3) = -15 + (-15) = -30 \neq 0.$$

Logo, a propriedade distributiva não seria válida.

(c) Escrevendo $7 = 10 - 3$ e $2 = 7 - 5$, temos pela lei distributiva que

$$\begin{aligned} 7\cdot 2 &= (10-3)\cdot(7-5) \\ &= 10\cdot 7 + 10\cdot(-5) + (-3)\cdot 7 + (-3)\cdot(-5) \\ &= 70 - 50 - 21 - 15 \\ &= -16. \end{aligned}$$

2 Indução Finita

(1) Prove que se vale o Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.

Solução
Seja $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto finito não-vazio. Para $n = 1$, temos que $A_1 = \{a_1\}$ e a_1 é claramente elemento minimal de A_1. Agora, suponha que para $n = k > 1$, o conjunto $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ tenha elemento minimal a_k^*. O conjunto $A_{k+1} = A_k \cup a_{k+1}$ possui duas opções: ou $a_{k+1} \leq a_k^*$, o que implica que a_{k+1} é um elemento minimal de A_{k+1}, ou $a_{k+1} > a_k^*$, o que implica que a_k^* é elemento minimal de A_{k+1}. Logo, por indução, A_n sempre tem um elemento minimal, e portanto, vale o Princípio da Boa Ordem.

(2) Prove que se vale a segunda forma do Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.

Solução
Seja $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto finito não-vazio. Para $n = 1$, temos que $A_1 = \{a_1\}$ e a_1 é claramente elemento minimal de A_1. Agora, suponha que para todo n, com $1 \leq n \leq k$, o conjunto $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ tenha elemento minimal a_k^*. O conjunto $A_{k+1} = A_k \cup a_{k+1}$ possui duas opções: ou $a_{k+1} \leq a_k^*$, o que implica que a_{k+1} é um elemento minimal de A_{k+1}, ou $a_{k+1} > a_k^*$, o que implica que a_k^* é elemento minimal de A_{k+1}. Logo, por indução, A_n sempre tem um elemento minimal, e portanto, vale o Princípio da Boa Ordem.

(3) Prove por indução que

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1;$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, \forall n \geq 1;$

(c) [Desigualdade de Bernoulli] $(1+h)^n \geq 1 + nh$, onde $h > 0$ está fixado e $n \geq 0$.

Solução
(a) Vamos primeiramente testar o caso **base** $n = 1$:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)\,(1+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Agora, temos como **hipótese** que a afirmação é válida para certo $k > 1$, ou seja,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k\,(2k+1)\,(k+1)}{6}$$

Vamos mostrar que a expressão é válida para $n = k+1$, correspondendo ao **passo indutivo**:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k\,(2k+1)\,(k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)}{6}\left(k\,(2k+1) + 6\,(k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) \\
&= \frac{(k+1)}{6}\left((k+2)(2k+3)\right) \\
&= \frac{(k+1)\,(2k+3)\,(k+2)}{6}.
\end{aligned}$$

(b) O caso **base** é $n = 1$:

$$1^3 = \left(\frac{1\,(1+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Agora, vamos assumir por **hipótese** que para certo $n = k > 1$, a expressão a ser demonstrada é válida, ou seja,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = \left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2$$

O **passo indutivo** será verificar que isso acarreta a validade da expressão para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k\,(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2 + 4\,(k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}\left(k^2 + 4k + 4\right) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2 \\
&= \left(\frac{(k+1)\,(k+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

(c) Como h está fixado, utilizaremos n para realizar a indução. O caso **base** é $n = 0$, donde obtemos

$$(1+h)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot h = 1$$

Agora, a **hipótese** é que a expressão é válida para certo $n = k > 0$:

$$(1+h)^k \geq 1 + kh$$

Vejamos que isso ocasiona a validade desta para $n = k+1$, correspondendo ao **passo indutivo**:

$$\begin{aligned}
(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k (1+h) \\
&\geq (1+kh)(1+h) \\
&= 1 + h + kh + kh^2 \\
&= 1 + (k+1)h + \underbrace{kh^2}_{>0} > 1 + (k+1)h.
\end{aligned}$$

(4) Prove por indução que

(a) $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3 para todo $n \geq 0$;

(b) $5^n - 4n + 15$ é sempre divisível por 16 para todo $n \geq 0$;

(c) $2n^3 + 3n^2 + 7n$ é sempre divisível por 6 para todo $n \geq 0$.

(d) $4^{2n-1} + 1$ é sempre divisível por 5 para todo $n \geq 1$.

(e) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ é sempre divisível por 11 para todo $n \geq 1$.

Solução

Lembrando que se um número inteiro k é divisível por 3, então existe um $t \in \mathbb{Z}$ tal que $k = 3t$, estamos aptos a resolver os itens pedidos:

(a) **Caso Base**: $n = 0$ Temos que

$$0^3 + 2 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 3$$

Logo, $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para $n = 0$.

Hipótese: Assuma que $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para certo $n = k > 0$, ou seja, que para certo $t \in \mathbb{Z}$, seja satisfeito

$$k^3 + 2k = 3t.$$

Passo Indutivo: Provemos que $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 + 2(k+1) &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 \\
&= k^3 + 2k + 3\left(k^2 + k + 1\right) \\
&= 3t + 3\left(k^2 + k + 1\right) \\
&= 3(t + k^2 + k + 1) = 3q; \quad q \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Portanto, por indução, concluímos que $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para todo $n \geq 0$.

(b) **Caso Base**: $n = 0$ Temos que

$$5^0 - 4 \cdot 0 + 15 = 1 + 15 = 16 = 1 \cdot 16$$

Logo, $5^n - 4n + 15$ é divisível por 16 para $n = 0$. **Hipótese**: Assuma que $5^n - 4n + 15$ é divisível por 16 para certo $n = k > 0$, ou seja, que para certo $t \in \mathbb{Z}$, seja satisfeito

$$5^n - 4n + 15 = 16t$$

Passo Indutivo: Provemos que $5^n - 4n + 15$ é divisível por 16 para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
5^{k+1} - 4\,(k+1) + 15 &= 5^{k+1} - 4k + 11 \\
&= 5^{k+1} - 20k + 16k + 75 - 64 \\
&= 5^{k+1} - 20k + 75 + 16k - 64 \\
&= 5(5^k - 4k + 15) + 16(k-4) \\
&= 5 \cdot 16t + 16(k-4) = 16(5t - k + 4) = 16q; \quad q \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(c) **Caso Base**: $n = 0$ Temos que

$$2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0 = 0 = 0 \cdot 6$$

Hipótese: Assuma que $2n^3 + 3n^2 + 7n$ é divisível por 6 para certo $n = k > 0$, ou seja, que para certo $t \in \mathbb{Z}$, seja satisfeito

$$2k^3 + 3k^2 + 7k = 6t$$

Passo Indutivo: Provemos que $2n^3 + 3n^2 + 7n$ é divisível por 6 para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
2\,(k+1)^3 + 3\,(k+1)^2 + 7\,(k+1) &= 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 3(k^2 + 2k + 1) + 7(k+1) \\
&= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 3k^2 + 6k + 3 + 7k + 7 \\
&= 2k^3 + 3k^2 + 7k + 6k^2 + 6k + 12 \\
&= 6t + 6(k^2 + k + 2) \\
&= 6(t + k^2 + k + 2) = 6q; \quad q \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(d) **Caso Base**: $n = 1$ Temos que

$$4^{2\cdot 1-1} + 1 = 4^1 + 1 = 5 = 1 \cdot 5$$

Hipótese: Assuma que $4^{2n-1} + 1$ é divisível por 5 para certo $n = k > 1$, ou seja, que para certo $t \in \mathbb{Z}$, seja satisfeito

$$4^{2n-1} + 1 = 5t$$

Passo Indutivo: Provemos que $4^{2n-1} + 1$ é divisível por 5 para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
4^{2\cdot(k+1)-1} + 1 &= 4^{2k+2-1} - 1 \\
&= 4^{2+(2k-1)} + 1 \\
&= 4^2 \cdot 4^{2k-1} + 1 \\
&= 16 \cdot 4^{2k-1} + 1 \\
&= 15 \cdot 4^{2k-1} + 4^{2k-1} + 1 \\
&= 15 \cdot 4^{2k-1} + 5t \\
&= 5(3 \cdot 4^{2k-1} + t) = 5q; \quad q \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(e) **Caso Base**: $n = 1$ Temos que

$$6^{2\cdot 1-2} + 3^{1+1} + 3^{1-1} = 1 + 9 + 1 = 11 = 1 \cdot 11$$

Hipótese: Assuma que $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ é divisível por 11 para certo $n = k > 1$, ou seja, que para certo $t \in \mathbb{Z}$, seja satisfeito

$$6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1} = 11t$$

Passo Indutivo: Provemos que $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ é divisível por 11 para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
6^{2(k+1)-2} + 3^{(k+1)+1} + 3^{(k+1)-1} &= 6^{2k+2-2} + 3^{k+1+1} + 3^{k+1-1} \\
&= 6^{2+(2k-2)} + 3^{1+(k+1)} + 3^{1+(k-1)} \\
&= 6^2 \cdot 6^{2k-2} + 3 \cdot 3^{k+1} + 3 \cdot 3^{k-1} \\
&= 6^{2k-2} + 3^{k+1} + 3^{k-1} + 35 \cdot 6^{2k-2} + 2 \cdot 3^{k+1} + 2 \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 35 \cdot (2 \cdot 3)^{2k-2} + 2 \cdot 3^{(k-1)+2} + 2 \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 35 \cdot 2^{2(k-1)} \cdot 3^{2(k-1)} + 2 \cdot 3^2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 35 \cdot 4^{k-1} \cdot 9^{k-1} + 18 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 35 \cdot 36^{k-1} + 20 \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 35 \cdot (3 \cdot 12)^{k-1} + 20 \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 35 \cdot 12^{k-1} \cdot 3^{k-1} + 20 \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + (35 \cdot 12^{k-1} + 20) \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 5 \cdot (7 \cdot 12^{k-1} + 4) \cdot 3^{k-1} \\
&= 11t + 5 \cdot (7 \cdot (11 + 1)^{k-1} + 4) \cdot 3^{k-1}
\end{aligned}$$

$$= 11t + 5 \cdot \left(7 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 4\right) \cdot 3^{k-1}$$

$$= 11t + 5 \cdot \left(7 \cdot \left(11 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 1\right) + 4\right) \cdot 3^{k-1}$$

$$= 11t + 5 \cdot \left(7 \cdot 11 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 7 + 4\right) \cdot 3^{k-1}$$

$$= 11t + 5 \cdot \left(7 \cdot 11 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 11\right) \cdot 3^{k-1}$$

$$= 11t + 11 \cdot \left(35 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 1\right) \cdot 3^{k-1}$$

$$= 11\left(t + \left(35 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 11^{k-1-i} + 1\right) \cdot 3^{k-1}\right) = 11q; \quad q \in \mathbb{Z}$$

(5) Sejam a e r dois números inteiros. Dizemos que a sequência $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, onde $a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a + 2r, \ldots, a_n = a + (n-1)r$ é uma *progressão aritmética* de razão r. Prove, utilizando o princípio de indução finita, que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + (a + (n-1)r) = \frac{n(2a + (n-1)r)}{2}$$

Solução

O caso **base** é $n = 1$:

$$\frac{1 \cdot (2a + (1-1)\,r)}{2} = \frac{2a + 0}{2} = a$$

Vamos assumir por **hipótese** que para certo $n = k > 1$, a somatória demonstrada é válida, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \frac{k\,(2a + (k-1)\,r)}{2}$$

Vamos então verificar a validade da fórmula para $n = k + 1$, compreendendo o **passo indutivo**:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} &= \frac{k\left(2a + (k-1)\,r\right)}{2} + a_{k+1} \\
&= \frac{k\left(2a + (k-1)\,r\right)}{2} + a + \left((k+1)-1\right) r \\
&= \frac{k\left(2a + (k-1)\,r\right) + 2a + 2kr}{2} \\
&= \frac{2ak + k(k-1)r + 2a + 2kr}{2} \\
&= \frac{2a\,(k+1) + r\,\left(k\,(k-1) + 2k\right)}{2} \\
&= \frac{2a\,(k+1) + r(k^2 - k + 2k)}{2} \\
&= \frac{2a\,(k+1) + r(k^2 + k)}{2} \\
&= \frac{2a\,(k+1) + rk\,(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)\,(2a + kr)}{2} \\
&= \frac{(k+1)\,\Big(2a + \left((k+1)-1\right) r\Big)}{2}.
\end{aligned}
$$

(6) Considere a seguinte sequência de somas:

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2!} & = & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} & = & \frac{5}{6} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} & = & \frac{23}{24} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} & = & \frac{119}{120}
\end{array}
$$

e seja $P(n)$ a soma

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n-1}{n!}$$

Determine uma expressão para $P(n)$ e, em seguida, utilizando o Princípio da Indução Finita, prove sua validade para $n \geq 2$.

Solução

Observe que o denominador de cada expressão é $n!$, já que $\text{mmc}(2!, 3!, \ldots, n!) = n!$, e o numerador é uma unidade menor do que o denominador. Logo, podemos conjecturar que

$$P(n) = \sum_{i=2}^{n} = \frac{n! - 1}{n!}$$

Provemos a fórmula para $P(n)$ por indução. O caso **base** é $n = 2$, o qual é claramente verdadeiro pelo enunciado:

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = \frac{2! - 1}{2} = \frac{2 - 1}{2}$$

Agora, assuma que o resultado é válido para $n = k > 2$, ou seja, que

$$P(k) = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k-1}{k!} = \frac{k!-1}{k!}$$

Vejamos que o resultado é válido para $n = k+1$, com o **passo indutivo**:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{k-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} &= \frac{k!-1}{k!} + \frac{k}{(k+1)!} \\
&= \frac{(k!-1)(k+1)+k}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \cdot \big((k!-1)\,(k+1) + k\big) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \cdot \big(k! \cdot k + k! - \cancel{k} - 1 + \cancel{k}\big) \\
&= \frac{1}{(k+1)!} \cdot \big(k!\,(k+1) - 1\big) \\
&= \frac{(k+1)! - 1}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

(7) Prove que se $n \geq 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

Solução

Vamos provar a afirmação utilizando indução em n. Iniciando com o caso base, para $n = 3$, o polígono convexo é um triângulo, e sabemos da geometria euclidiana elementar que a soma de seus ângulos internos é 180°, ou seja, $S_3 = (3-2) \cdot 180^\circ = 180^\circ$.
Suponha agora por hipótese que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com $n = k$ lados seja

$$S_k = (k-2) \cdot 180^\circ.$$

Considere o polígono convexo $A_0 A_1 \cdots A_k$ com $n = k+1$ lados, ilustrado na figura 1.

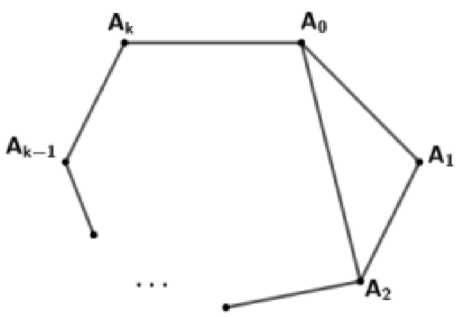


Figura 1: Polígono de $k+1$ lados

O polígono $A_0A_2\cdots A_k$ que se obtém traçando o segmento $\overline{A_0A_2}$ tem k lados. Consequentemente a soma dos seus ângulos internos é $S_k = (k-2)\cdot 180^\circ$. Agora, a soma dos ângulos internos do polígono original será a soma dos ângulos do triângulo $A_0A_1A_2$ adicionada de S_k, isto é,

$$S_{k+1} = S_k + 180^\circ = (k-2)\cdot 180^\circ + 180^\circ = (k+1-2)\cdot 180^\circ.$$

Assim, a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados de fato é $(n-2)\cdot 18^\circ$.

(8) Sabe-se que a forma trigonométrica do número complexo $z = a+bi$ é dada por

$$z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta),$$

onde $\theta = \arg z$ e $\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Prove, utilizando o Princípio de Indução Finita, a fórmula de De Moivre, isto é, se $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, então

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solução

Comecemos com o caso **base**. Nessa situação, o caso base é dado para $n=0$, onde temos:

$$z^0 = \rho^0\left(\cos(0\theta) + i\cdot\text{sen}(0\theta)\right) = 1\cdot\left(\cos(0) + i\cdot\text{sen}(0)\right) = 1 = z^0$$

Agora, suponha por **hipótese** que a fórmula de De Moivre é válida para um certo $n = k > 0$, ou seja,

$$z^k = \rho^k\left(\cos(k\theta) + i\cdot\text{sen}(k\theta)\right)$$

Temos então que, para $n = k+1$,

$$\begin{aligned}
z^{k+1} = z^k\cdot z^1 &= \left(\rho^k\left(\cos(k\theta) + i\cdot\text{sen}(k\theta)\right)\right)\cdot\left(\rho\left(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\theta\right)\right)\\
&= \rho^{k+1}\left(\cos(k\theta) + i\cdot\text{sen}(k\theta)\right)\cdot\left(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\theta\right)\\
&= \rho^{k+1}\left(\cos(k\theta)\cos\theta - \text{sen}\theta\text{sen}(k\theta) + i\cdot\left(\cos k\theta\text{sen}\theta + \text{sen}k\theta\cos\theta\right)\right)\\
&= \rho^{k+1}\left(\cos(k\theta+\theta) + i\cdot\left(\text{sen}(k\theta+\theta)\right)\right)\\
&= \rho^{k+1}\left(\cos((k+1)\theta) + i\cdot\text{sen}((k+1)\theta)\right)
\end{aligned}$$

Portanto, o **passo indutivo** está finalizado e a fórmula de De Moivre provada.

(9) Seja $a \neq 0 \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos a potência não-negativa de a do seguinte modo:

$$a^m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0\\ a, & \text{se } m = 1\\ a^{m-1}\cdot a, & \text{se } m > 1\end{cases}.$$

Prove que

(a) $a^m\cdot a^n = a^m + n, \forall m,n \in \mathbb{N}$;

(b) $(a^m)^n = a^{m\cdot n}, \forall m,n \in \mathbb{N}$.

Solução
Provemos ambos os itens por indução:

(a) O caso base é $n = 0$:

$$a^m \cdot a^0 \overset{def}{=} a^m \cdot 1 = a^{m+0} = a^m$$

A hipótese de indução é que, para certo $n = k$, é válido

$$a^m \cdot a^k = a^{m+k}; k \in \mathbb{Z}.$$

Provemos agora que a afirmação é válida para $n = k + 1$:

$$a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot \left(a^k \cdot a^1\right) = \left(a^m \cdot a^k\right) \cdot a^1 = a^{m+k} \cdot a^1 \overset{def}{=} a^{m+k+1}$$

(b) O caso base é $n = 0$:

$$\left(a^m\right)^0 \overset{def}{=} 1 = a^{m\cdot 0} = a^0$$

A hipótese de indução é que, para certo $n = k$, é válido

$$\left(a^m\right)^k = a^{m\cdot k}; k \in \mathbb{Z}$$

Provemos agora que a afirmação é válida para $n = k + 1$:

$$\left(a^m\right)^{k+1} = \left(a^m\right)^k \cdot \left(a^m\right)^1 = a^{m\cdot k} \cdot a^m = a^{m\cdot k+m} = a^{m(k+1)}$$

(10) Prove que $x - y$ divide $x^n - y^n$ para quaisquer inteiros x, y distintos e $n \geq 1$.

Solução
Vamos provar o resultado por indução. Primeiramente, observemos o **caso base** $n = 1$:

$$x^1 - y^1 = x - y = 1 \cdot (x - y)$$

Como **hipótese de indução**, assuma que $x - y$ divide $x^n - y^n$ para $n = k > 1$, ou seja, que

$$x^k - y^k = t\,(x - y)\,; t \in \mathbb{Z}$$

Realizemos agora o **passo indutivo**, mostrando que a afirmação é válida para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x \cdot x^k - y \cdot y^k \\ &= x \cdot x^k - x \cdot y^k + x \cdot y^k - y \cdot y^k \\ &= x\left(x^k - y^k\right) + y^k\,(x - y) \\ &= x \cdot t\,(x - y) + y^k\,(x - y) \\ &= (x - y)\left(xt + y^k\right) \\ &= (x - y)\,q; \quad q \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

(11) Para todo inteiro $n \geq 1$, prove que

(a) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1-x}$;

(b) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ ([Dica:] Use o item anterior).

Solução

(a) O caso base é $n = 1$. Temos:

$$1 + \frac{x}{1-x} = \frac{1-x+x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Agora, assuma por hipótese que a afirmação é válida para $n = k > 1$, ou seja,

$$1 + x + \cdots + x^{k-1} + \frac{x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

Vamos provar que o resultado é válido para $n = k+1$. Para isso, observe primeiramente que, da hipótese de indução, temos

$$1 + x + \cdots + x^{k-1} + \frac{x^k}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow$$

$$1 + x + \cdots + x^{k-1} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x}$$

Utilizando isso, estamos aptos a realizar o passo indutivo para provar que

$$1 + x + \cdots + x^{k-1} + x^k + \frac{x^{k+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
1 + x + \cdots + x^{k-1} + x^k + \frac{x^{k+1}}{1-x} &= \frac{1}{1-x} - \frac{x^k}{1-x} + x^k + \frac{x^{k+1}}{1-x} \\
&= \frac{1 - x^k + x^k(1-x) + x^{k+1}}{1-x} \\
&= \frac{1 - x^k + x^k - x^{k+1} + x^{k+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

(b) Para $x = 2$, temos:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1}{1-2} - \frac{2^n}{1-2} = -1 - \frac{2^n}{-1} = 2^n - 1$$

(12) * Seja n um inteiro positivo. Mostre que

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0;$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Solução

(a) Para resolver esse item, vamos considerar a expansão de $(x+y)^n$:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n \tag{1}$$

Como a soma se trata de termos alternantes, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n},$$

Podemos colocar $x = 1$ e $y = -1$ na Equação (1) para obter a soma acima, chegando assim a:

$$\begin{aligned}
(1+(-1))^n &= \binom{n}{0}1^n(-1)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}1^1(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}1^0(-1)^n \\
0^n &= \binom{n}{0}(-1)^0 + \binom{n}{1}(-1)^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n \\
0 &= \binom{n}{0}(-1) - \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n \\
0 &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}
\end{aligned}$$

(b) Como nos coeficientes binomiais temos a presença do termo $2n$, vamos analisar o comportamento de

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n(1+x)^n.$$

Desenvolvendo cada binômio separadamente, temos:

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n} &= \binom{2n}{0}x^{2n} + \binom{2n}{1}x^{2n-1} + \cdots + \binom{2n}{n}x^n + \cdots + \binom{2n}{2n-1}x^1 + \binom{2n}{2n}x^0 \\
(x+1)^n &= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}x^1 + \binom{n}{n}x^0 \\
(1+x)^n &= \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n
\end{aligned}$$

Ao multiplicarmos os dois últimos, obtemos um polinômio equivalente ao primeiro, ou seja:

$$\binom{2n}{0}x^{2n} + \binom{2n}{1}x^{2n-1} + \cdots + \binom{2n}{n}x^n + \cdots + \binom{2n}{2n-1}x^1 + \binom{2n}{2n}x^0 =$$

$$\left[\binom{n}{n}\cdot\binom{n}{0}\right]x^0+\cdots+\left[\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2\right]x^n+\cdots+\left[\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{n}\right]x^{2n}$$

Note que o coeficiente de x^n nos dois polinômios devem ser iguais. Assim:

$$\left[\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2\right]=\binom{2n}{n}\Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

(13) Prove por indução finita para todo $n>1$ que

(a) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$;

(b) $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}$;

(c) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$,

(d) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

Solução

(a) **Caso :** $n=2$. Para $n=2$, temos que

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$$

Hipótese: **Hipótese:** Suponha que, para $n=k>2$,

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$$

Passo Indutivo: Para $n=k+1$, temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(k+1)+1}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)}&=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\\&=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}\\&>\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}\\&=\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\&>\frac{13}{24}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{2k+2}=\frac{13}{24}.\end{aligned}$$

(b) **Caso base:** O caso base é $n=2$. Temos

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}=\frac{2+1}{2\cdot 2}$$

Hipótese: Suponha que, para $n=k>2$,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$$

Passo Indutivo: Provemos que a afirmação é válida para $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) &= \frac{k+1}{2k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\\
&= \frac{k+1}{2k}\cdot\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)\\
&= \frac{k+1}{2k}\cdot\left(\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}\right)\\
&= \frac{(k+2)}{2\,(k+1)}\\
&= \frac{(k+1)+1}{2\,(k+1)}.
\end{aligned}$$

(c) **Caso base**: $n=1$

$$1\cdot 1!=1 \quad \text{e} \quad (1+1)!-1=2!-1=2-1=1$$

Hipótese: Suponha a afirmação válida para $n=k>1$, ou seja,

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$$

Passo: Vejamos que a afirmação é válida para $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+k\cdot k!+(k+1)\,(k+1)! &= (k+1)!-1+(k+1)\,(k+1)!\\
&= (k+1)!\,\big(1+(k+1)\big)-1\\
&= (k+2)\,(k+1)!-1=(k+2)!-1.
\end{aligned}$$

(d) *Caso Base*: Para $n = 1$, temos

$$\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

Hipótese: Suponha a validade para $n = k > 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Passo Indutivo: Provemos que a afirmação é válida para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\,(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\,(k+2)} \\
&= \frac{k\,(k+2)+1}{(k+1)\,(k+2)} \\
&= \frac{\left(k^2+2k+1\right)}{(k+1)\,(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)\,(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.
\end{aligned}$$

(14)

(a) Considere a sequência de números inteiros $(a_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 0; \\ 3, & \text{se } n = 1; . \\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Mostre que

$$a_n = 2^n + 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(b) Considere a sequência de números inteiros $(b_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; . \\ 3b_{n-} - 2b_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

Mostre que

$$b_n = 2^n - 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(c) Considere a *Sequência de Fibonacci* $(F_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que

(i) $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$;

(ii) $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$.

Solução

Vamos utilizar a segunda forma do Princípio da Indução Finita:

(a) **Caso Base**: Vejamos que a afirmação é válida para $n = 0$ e $n = 1$:

$n = 0$:

$$2^0 + 1 = 2 = a_0$$

$n = 1$:

$$2^1 + 1 = 3 = a_1$$

Hipótese: Suponha que a afirmação é válida **para todo** $n \geq k \geq 1$, ou seja, para k entre 1 e n, inclusive, temos

$$a_k = 2^k + 1$$

Passo Indutivo: Provemos que a afirmação é válida para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} &= 3\left(2^k + 1\right) - 2\left(2^{k-1} + 1\right) \\ &= 3 \cdot 2^k + 3 - 2^k - 2 \\ &= 2 \cdot 2^k + 1 \\ &= 2^{k+1} + 1. \end{aligned}$$

(b) **Caso Base**: Vejamos que a afirmação é válida para $n = 0$ e $n = 1$:

$n = 0$:

$$2^0 - 1 = 0 = b_0$$

$n = 1$:

$$2^1 - 1 = 1 = b_1$$

Hipótese: Suponha que a afirmação é válida **para todo** $n \geq k \geq 1$, ou seja, para k entre 1 e n,

$$b_k = 2^k - 1$$

Passo Indutivo: Provemos que a afirmação é válida para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} b_{k+1} = 3b_k - 2b_{k-1} &= 3\left(2^k - 1\right) - 2\left(2^{k-1} - 1\right) \\ &= 3 \cdot 2^k - 3 - 2^k + 2 \\ &= 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

(c) Observe que

$$\begin{aligned}
F_2 &= F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1\\
F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2\\
F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3\\
F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5
\end{aligned}$$

Vamos provar ambos os itens por indução:

(i) **Caso base:** Para $n = 2$, temos

$$F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2\cdot 1 = -1 = (-1)^{2+1}$$

Hipótese: Suponha que a afirmação é válida **para todo** $n \geq k \geq 1$, ou seja, para k entre 1 e n,

$$F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1} = (-1)^{k+1}$$

Passo indutivo: Para $n = k + 1$,

$$\begin{aligned}
F_{k+1}^2 - F_{k+2}F_k &= F_{k+1}^2 - (F_{k+1} + F_k)F_k\\
&= F_{k+1}^2 - F_k \cdot F_{k+1} - F_k^2\\
&= F_{k+1}(F_{k+1} - F_k) - F_k^2\\
&= F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2\\
&= -\left(F_k^2 - F_{k+1}F_{k-1}\right)\\
&= -(-1)^{k+1} = (-1)^{k+2}.
\end{aligned}$$

(ii) **Caso base:** Para $n = 2$, temos

$$F_2^2 - F_3F_1 = 1^2 - 2\cdot 1 = -1 = (-1)^{2+1}$$

Hipótese: Suponha que a afirmação é válida **para todo** $n \geq k \geq 1$, ou seja, para k entre 1 e n,

$$F_3F_4 - F_2F_5 = 2\cdot 3 - 1\cdot 5 = 1 = (-1)^2$$

Passo indutivo: Para $n = k + 1$,

$$\begin{aligned}
F_{k+2}F_{k+3} - F_{k+1}F_{k+4} &= (F_k + F_{k+1})F_{k+3} - F_{k+1}(F_{k+2} + F_{k+3})\\
&= F_kF_{k+3} + \cancel{F_{k+1}F_{k+3}} - F_{k+1}F_{k+2} - \cancel{F_{k+1}F_{k+3}}\\
&= F_kF_{k+3} - F_{k+1}F_{k+2}\\
&= -(F_{k+1}F_{k+2} - F_kF_{k+3})\\
&= -(-1)^k = (-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

(15) Prove que, se n é um múltiplo de 8, então F_n é múltiplo de 7.
[Dica:] Prove que $F_{n+8} = 7F_{n+4} - F_n$.

Solução

Vamos provar inicialmente que $F_{n+8} = 7F_{n+4} - F_n$.
Faremos a demonstração por indução:
Caso Base: Para $n = 0$, temos

$$F_{0+8} = F_8 = 21 = 7 \cdot 3 - 0 = 7F_{0+4} - F_0$$

Para $n = 1$, temos

$$F_{1+8} = F_9 = 34 = 7 \cdot 5 - 1 = 7F_{1+4} - F_1$$

Hipótese: Suponha que a afirmação é válida para todo n com $0 \leq n \leq k$, ou seja, $Fk + 8 = 7F_{k+4} - F_k$.
Passo indutivo: Vamos provar que o resultado é válido para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
F_{(k+1)+8} &= F_{k+9} \\
&= F_{k+8} + F_{k+7} \\
&= 7F_{k+4} - F_k + 7F_{k+3} - F_{k-1} \\
&= 7(F_{k+4} + F_{k+3} - (F_k + F_{k-1}) \\
&= 7F_{k+5} - F_{k+1}
\end{aligned}$$

Vejamos agora que F_n é múltiplo de 7. se n é múltiplo de 8. Sendo n múltiplo de 8, podemos escrevê-lo na forma $n = 8t$, onde $t \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar esse resultado por indução em t.
Caso Base: Para $t = 0$, temos

$$F_{8 \cdot 0} = F_0 = 0 = 0 \cdot 7.$$

Hipótese: Suponha que, para $t = k$, é válido que

$$F_{8k} = 7q, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Passo Indutivo: Vamos verificar que, para $t = k + 1$, $F_{8(k+1)}$ é múltiplo de 7. Com auxílio do fato demonstrado acima, temos

$$\begin{aligned}
F_{8(k+1)} &= F_{8k+8} \\
&= 7F_{8k+4} - F_{8k} \\
&= 7F_{8k+4} - 7q \\
&= 7(F_{8k+4} - q) \\
&= 7r, r \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

(16) * Prove que todo número natural pode ser representado como uma soma de diversos números de Fibonacci distintos.

Solução

Provaremos o resultado por indução em n, pela segunda forma. Comecemos com o **caso base**. Se $n = 0, n = 1$ ou $n = 2$, então a existência da representação desejada é trivial.
Agora vamos supor por **hipótese** que todo número natural menor que n pode ser representado como uma soma de diversos números de Fibonacci distintos. Agora, vamos encontrar o maior número de Fibonacci menor ou igual a n. Suponha que é F_m; ou seja, $F_m \leq n < F_{m+1}$. A diferença $d = n - F_m$ é menor do que n e também menor do que F_m, já que $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$. Pela hipótese de indução, d pode ser representado como uma soma de diversos números de Fibonacci distintos e é claro que F_m é grande demais para ser incluído. Logo, somando F_m, obtemos a expressão desejada para n, já que d pode ser escrito como soma de números de Fibonacci distintos, e

$$n = d + F_m.$$

(17) O que há de errado com a seguinte demonstração por indução de que para todo inteiro positivo n nós temos $a^{n-1} = 1$?

> Demonstração: Para $n = 1, a^{1-1} = a^0 = 1$, correto. Assumindo o teorema válido para $k \leq n$, temos para $n + 1$:
>
> $$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,$$
>
> como desejávamos.

Solução

Vamos observar como o passo indutivo foi desenvolvido.

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,$$

Atente para o fato de que, na expressão em vermelho, o autor da demonstração utilizou que $a^{n-1} = 1$ **e** $a^{n-2} = 1$, o que não foi provada, já que em seu caso base, apenas mostrou-se a validade da expressão para $n = 1$, e não para $n = 2$, o qual claramente a afirmação está equivocada, visto que $a^{2-1} = a^1 = a \neq 0$. Assim, houve uma confusão entre o uso da primeira e da segunda forma do Princípio da Indução Finita, advindo daí o erro da demonstração em questão.

(18) * É dado um conjunto de n pontos em um círculo e cada par de pontos está ligado por um segmento. Acontece que três desses segmentos nunca se encontram no mesmo ponto. Em quantas partes eles dividem o interior do círculo?

Solução

Vamos primeiramente iniciar uma busca para a fórmula que registre o número $\mathcal{P}(n)$ de partes nas quais o círculo é dividido. Para $n = 1, 2$, é óbvio que $\mathcal{P}(1) = 1, \mathcal{P}(2) = 2$.
Fazendo os desenhos para $n = 3, 4$ e 5, obtemos que $\mathcal{P}(3) = 4, \mathcal{P}(4) = 8$ e $\mathcal{P}(5) = 16$, como mostrado na figura abaixo:

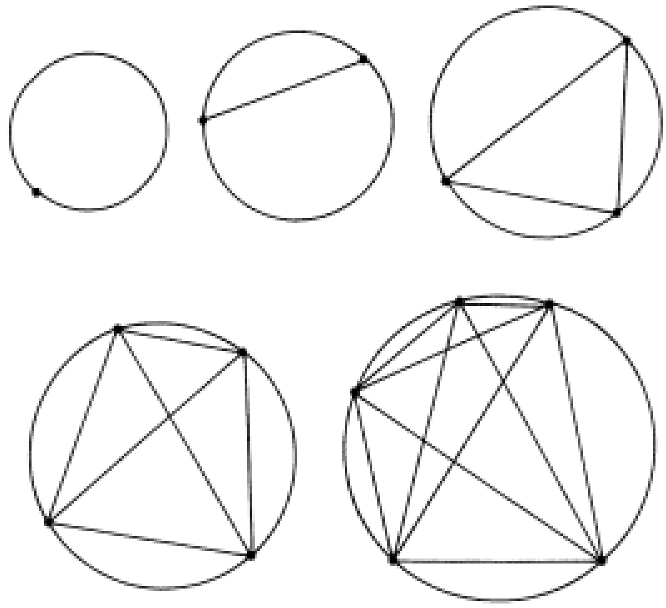


Figura 2: Desenhos para $\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \mathcal{P}(4)$ e $\mathcal{P}(5)$.

Poderíamos baseado nessas observações conjecturar que $\mathcal{P}(n) = 2^{n-1}$, mas veremos que isso não ocorre.
Se o círculo possui n pontos, então existem $\binom{n}{4}$ intersecções de cordas dentro do círculo, pois cada conjunto de quatro pontos fornece apenas uma dessas intersecções. Assim, o número de vértices na figura deve ser $V = n + \binom{n}{4}$. Para encontrar o número de arestas, contemos suas extremidades. Existem $n+1$ delas em cada um dos n pontos e quatro em cada uma das $\binom{n}{4}$ intersecções, ou seja,

$$2A = n(n+1) + 4\binom{n}{4}.$$

Pela Fórmula de Euler $V - A + F = 1$, o número de regiões dentro do círculo deve ser

$$\begin{aligned} F = 1 + A - V &= 1 + \frac{n(n+1)}{2} + 2\binom{n}{4} - \left(n + \binom{n}{4}\right) \\ &= \binom{n}{4} + \frac{n(n+1) - 2n}{2} + 1 \\ &= \binom{n}{4} + \frac{n(n-1)}{2} + 1 \\ &= \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1 \end{aligned}$$

Vamos provar então que

$$\mathcal{P}(n) = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1.$$

Para o nosso **caso base**, vamos considerar.
Para o **passo indutivo**, suponha que para algum $n = k$, temos que

$$\mathcal{P}(k) = \binom{k}{4} + \binom{k}{2} + 1.$$

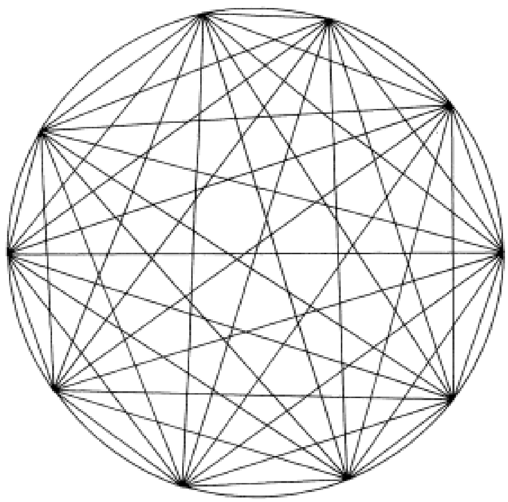
Vamos mostrar que a fórmula é válida para $\mathcal{P}(k+1)$.
Para isso, observe que, partindo do círculo com as $\mathcal{P}(k)$ marcadas, ao adicionar um novo ponto, ligando aos demais k pontos, teremos a formação de k novas regiões. Além disso, como três segmentos não podem se encontrar no mesmo ponto, teremos outras $\binom{k}{3}$ regiões formadas. Assim:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(k+1) &= \mathcal{P}(k) + \binom{k}{3} + k \\
&= \binom{k}{4} + \binom{k}{2} + 1 + \binom{k}{3} + \binom{k}{1} \\
&= \binom{k}{4} + \binom{k}{3} + \binom{k}{2} + \binom{k}{1} + 1 \\
&= \binom{k+1}{4} + \binom{k+1}{2} + 1,
\end{aligned}$$

onde no último passo utilizamos a Relação de Stifel:

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p}$$

Assim, mostramos que $\mathcal{P}(k+1) = \binom{k+1}{4} + \binom{k+1}{2} + 1$.
Uma curiosidade é que, $\mathcal{P}(10) = 256$, como mostrado na figura abaixo:



(19) * [Pizza de Steiner] Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?

Solução
Denotando o número máximo de pedaços com n cortes por p_n, vamos provar por indução a fórmula:

$$p_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

No **caso base**, para $n = 1$, ou seja, com apenas um corte, é claro que só podemos obter dois pedaços. Portanto, a fórmula está correta, pois

$$p_1 = \frac{1(1+1)}{2} + 1 = 2.$$

Admitamos agora como **hipótese** que, para algum $n = k$, a fórmula para p_k esteja correta. Vamos mostrar que a fórmula para p_{k+1} também está correta.

Suponhamos que, com k cortes, obtivemos o número máximo $\frac{k(k+1)}{2} + 1$ de pedaços e queremos fazer mais um corte, de modo a obter o maior número possível de pedaços. Vamos conseguir isso se o $(k+1)$-ésimo corte encontrar cada um dos k cortes anteriores em pontos que não são de interseção de dois cortes.

Por outro lado, se o $(k+1)$-ésimo corte encontra todos os k cortes anteriores, ele produz $k+1$ novos pedaços: o corte começa em um determinado pedaço e, ao encontrar o primeiro corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço. Ao encontrar o segundo corte, ele separa em dois o pedaço em que está, entrando em outro pedaço, e assim sucessivamente, até encontrar o k-ésimo corte separando o último pedaço em que entrar em dois. Assim, são obtidos $k+1$ pedaços a mais dos que já existiam; logo,

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k + k + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + n + 1 \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1,
\end{aligned}
$$

o que mostra que a fórmula está correta para $n+1$ cortes.

(20) Suponha um campeonato de futebol com n times onde todos jogam contra todos uma única vez. Prove por indução que o número total de jogos é $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Solução

Seja $\mathcal{J}(n)$ o total de jogos do campeonato de futebol com n times onde todos jogam contra todos uma única vez. Vamos provar o resultado por indução em n :

Caso base: Para $n = 2$, suponha que as equipes que disputem o torneio sejam A e B. Só haverá então 1 jogo, justamente o confronto A x B, e portanto

$$\mathcal{J}(2) = 1 = \frac{2(2-1)}{2}$$

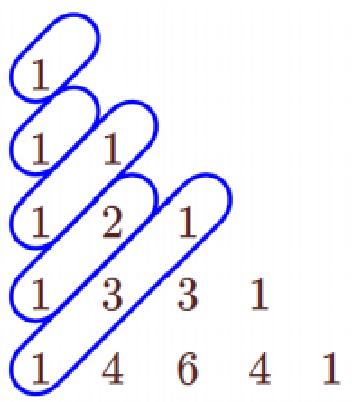
Hipótese: Suponha que para $n = k$, o total de jogos de futebol do campeonato seja

$$\mathcal{J}(k) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Passo indutivo: Provemos que $\mathcal{J}(k+1) = \dfrac{(k(k+1)}{2}$. Para isso, considere que as equipes $A_1, A_2, \ldots,$ A_k e A_{k+1} disputaram o torneio. Pela hipótese de indução, um torneio com as k equipes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ terá exatamente $\mathcal{J}(k) = \dfrac{k(k-1)}{2}$ partidas disputadas. Para um torneio com a adição de A_{k+1}, este deverá disputar todos os confrontos A_{k+1} x A_1, A_{k+1} x A_2, ..., A_{k+1} x A_{k-1} e A_{k+1} x A_k, fazendo um total de k jogos. Logo, o total de partidas disputadas será

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(k+1) &= \mathcal{J}(k) + k \\
&= \frac{k(k-1)}{2} + k \\
&= \frac{k(k-1)}{2} + \frac{2k}{2} \\
&= \frac{k(k-1)+2k}{2} \\
&= \frac{k^2-k+2k}{2} \\
&= \frac{k^2+k}{2} \\
&= \frac{k(k+1)}{2}.
\end{aligned}$$

(21) * Faça uma conjectura sobre as somas das diagonais ascendentes no Triângulo de Pascal conforme indicado. Prove que sua conjectura é verdadeira.



Solução

Temos então que provar que

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n-p}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{0}{n} = F_{n+1}$$

Caso base: Para $n = 0$, temos

$$\binom{0}{0} = 1 = F_{0+1}$$

Hipótese: Suponha que o resultado é válido para $n = k$, ou seja,

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{k-p}{p} = F_{k+1}$$

Passo indutivo: Vejamos a validade da identidade para $n = k+1$. Para isso, vamos utilizar a relação de Stifel:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Agora, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0}^{k+1}\binom{(k+1)-p}{p} &= \binom{k+1}{0}+\sum_{p=1}^{k}\binom{(k+1)-p}{p}\\
&= \binom{k}{0}+\sum_{p=1}^{k}\left[\binom{k-p}{p}+\binom{k-p}{p-1}\right]\\
&= \binom{k}{0}+\sum_{p=1}^{k}\binom{k-p}{p}+\sum_{p=1}^{k}\binom{k-p}{p-1}\\
&= \sum_{p=0}^{k}\binom{k-p}{p}+\sum_{p=1}^{k}\binom{k-p}{p-1}\\
&= \sum_{p=0}^{k}\binom{k-p}{p}+\sum_{p=0}^{k-1}\binom{(k-1)-p}{p}\\
&= F_{k+1}+F_k\\
&= F_{k+2}
\end{aligned}$$

(22) Sabe-se que $x+\dfrac{1}{x}=d$ é um inteiro.

(a) Prove que $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ também é um inteiro, qualquer que seja o número natural n.

(b) * Encontre todos os valores de $d\geq 2$ tais que 194 é um termo da sequência

$$\left\{x+\frac{1}{x},x^2+\frac{1}{x^2},x^3+\frac{1}{x^3},\ldots\right\}.$$

Solução

(a) Vamos provar por indução em n. Para o **caso base**, temos:

$n=1:$

$$x-\frac{1}{x}=d\in\mathbb{Z}$$

$n=2:$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2+2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=d^2-2\in\mathbb{Z}$$

Suponha por **hipótese** que, para todo n entre 1 e k, $x^k+\dfrac{1}{x^k}$ é inteiro. Vamos provar que $x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}$ é inteiro para o **passo indutivo**.

Observe que

$$\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}+x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$$

e portanto

$$x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right). \tag{2}$$

Por hipótese $x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\in\mathbb{Z}$, bem como $x^k+\frac{1}{x^k}\in\mathbb{Z}$. Assim, concluímos que $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\in\mathbb{Z}$, e a indução está completa.

(b) Vamos nos aproveitar do raciocínio empregado no item (a). Seja $a_n=x_n+\frac{1}{x^n}$. Observe que $a_1=d$, e podemos também obter $a_0=2$. Pela Equação 2, temos que

$$a_{k+1}=a_kd-a_{k-1}$$

Logo, a sequência $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma relação de recorrência linear de segunda ordem. Calculemos alguns de seus termos:

$$\begin{aligned}
a_0&=2\\
a_1&=d\\
a_2&=a_1d-a_0=d\cdot d-2=d^2-2\\
a_3&=a_2d-a_1=(d^2-2)d-d=d^3-3d\\
a_4&=a_3d-a_2=(d^3-3d)d-(d^2-2)=d^4-4d^2+2\\
a_5&=a_4d-a_3=(d^4-4d^2+2)d-(d^3-3d)=d^5-5d^3+5d\\
a_6&=a_5d-a_4=(d^5-5d^3+5d)d-(d^4-4d^2+2)=d^6-6d^4+9d^2-2
\end{aligned}$$

Observe que, se $d=2$, então $a_n=2$ para todo n. Assim, procuramos por $d\geq 3$. Veja agora que, se $d=3$, então

$$a_6=d^6-6d^4+9d^2-2=3^6-6\cdot 3^4+9\cdot 3^2-2=729-6\cdot 81+9\cdot 9-2=322>194.$$

Assim, concluímos que se $k\geq 6$, então $a_k>194$. Logo, basta nos atermos aos primeiros 5 termos da sequência.
Vamos analisar o que acontece em cada situação:

- Se $a_1=194$, isso significa que $d=194$.
- Se $a_2=194$, então
$$a_2=d^2-2=194\Rightarrow d^2=196\Rightarrow d=14.$$
- Se $a_3=194$, então
$$a_3=d^3-3d=194\Rightarrow d(d^2-3)=194$$
Como procuramos por $d\geq 3$ inteiro positivo e $194=2\cdot 97$, a única opção é $d=97$, mas nesse caso $97(97^2-3)>97\cdot 2=194$. Logo, não temos solução nesse caso;
- Se $a_4=194$, então
$$a_4=d^4-4d^2+2=194\Rightarrow d^4-4d^2=192\Rightarrow d^2(d^2-4)=192.$$
Como $192=2^6\cdot 3$, e $d\geq 3$, d^2 pode ser $(2^2)^2=2^4=16$ ou $(2^3)^2=64$. Analisemos cada situação:

☻ Se $d = 4$, então $4^2(4^2 - 4) = 192$.

☺ Se $d = 8$, então $8^2(8^2 - 4) = 3840 \neq 192$.

Logo, concluímos que $d = 4$ é uma solução.

- Se $a_5 = 194$, então

$$a_5 = d^5 - 5d^3 + 5d = 194 \Rightarrow d^5 - 5d^3 + 5d = 194 \Rightarrow d(d^4 - 5d^2 + 5) = 194.$$

Novamente, como $194 = 2 \cdot 97$ e $d \geq 3$, se $d = 97$, $d^4 - 5d^2 + 5 > 194$, e portanto não temos soluções nesse caso.

Concluímos que os possíveis valores de d que fazem com que a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenha 194 são $4, 14$ e 194.

Observação: Exercícios marcados com * são extras.