MAT0120 - Álgebra I para Licenciatura

Lista 2

Professor: Kostiantyn Iusenko
Monitor: Douglas de Araujo Smigly

1º Semestre de 2021

1 Divisibilidade

(1) Mostre que um número inteiro a é par se e somente se a^2 for par.

(2) Mostre que o produto de três inteiros consecutivos é divisível por 6 e que o produto de quatro inteiros consecutivos é divisível por 24.

(3) Mostre que $4 \nmid n^2 + 2$ para qualquer inteiro n.

(4) Prove que se $a \in \mathbb{Z}$, então $360 \mid a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$.

(5) Seja a um inteiro. Mostre que:

(a) $a^2 - a$ é divisível por 2;

(b) $a^3 - a$ é divisível por 6;

(c) $a^5 - a$ é divisível por 30.

(6) Mostre que todo inteiro do forma $6k + 5$ é também da forma $3k + 2$, mas o contrário é falso.

(7) Usando o Algoritmo da Divisão, mostre que:

(a) todo inteiro ímpar é da forma $4k + 1$ ou $4k + 3$;

(b) o quadrado de todo inteiro é da forma ou $3k$ ou $3k + 1$;

(c) o cubo de todo inteiro é da forma $9k$ ou $9k + 1$ ou $9k + 8$;

(d) o cubo de todo inteiro é da forma $7k$ ou $7k + 1$ ou $7k + 6$.

(8) Prove que nenhum inteiro da sequência $11, 111, 1111, \ldots$ é um quadrado perfeito.
[Dica:] Mostre que todo número quadrado perfeito é da forma $4k$ ou $4k + 1$.

(9) Para $n \geq 1$, mostre que $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ é um inteiro.
[Dica:] Usando o Algoritmo da Divisão, n tem a forma $6k$ ou $6k + 1$ ou $\cdots$ ou $6k + 5$. Mostre o resultado em todos os casos.

(10) Verifique que se um inteiro n é um quadrado e um cubo simultaneamente (como no caso $64 = 8^2 = 4^3$), então n é da forma $7k$ ou $7k + 1$.

(11) Seja n um inteiro positivo. Prove por indução que:

(a) $7 \mid 2^{3n} - 1$. (b) $8 \mid 3^{2n} + 7$. (c) $3 \mid 2^n + (-1)^{n+1}$.

(12) Sejam x, y inteiros ímpares. Mostre que $x^2 + y^2$ é par mas não é divisível por 4.

(13) Encontre todos os valores de n tais que $n^2 + 1$ é divisível por $n + 1$.

(14) Mostre que se $7 \mid a^2 + b^2$ então $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

(15) Prove que $a^3 + b^3 + 4$ não é um cubo perfeito quaisquer que sejam os números naturais a e b.

(16) Sejam a e b dois números inteiros tais que $78a = 179b$. Prove que $a + b$ possui mais do que 2 divisores positivos.

(17) Seja a um número inteiro positivo tal que $a^{10} + 1$ é divisível por 10.

(a) Mostre que a pode assumir infinitos valores.

(b) Se $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ são 2021 inteiros positivos tais que $a_i^{10} + 1$ é divisível por 10 para cada $i = 1, \ldots, 2021$, prove que

$$10 \nmid a_1 + a_2 + \ldots + a_{2021}$$

(18) [Critério de divisibilidade por 7] Para verificar se um número é divisível por 7, devemos duplicar o algarismo das unidades e subtrair o resto do número. Se o resultado dessa operação for divisível por 7, então o número é divisível por 7.

(a) Verifique se os números 56735, 1563 e 1057 são divisíveis por 7.

(b) Prove a validade desse critério de divisibilidade.

(19) [Critérios de Divisibilidade por 3 e por 9] Seja a um número inteiro.

(a) Prove que a é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus dígitos for divisível por 3.

(b) Prove que um inteiro é divisível por 9 se, e somente se, a some de seus dígitos for divisível por 9.

(c) Mostre que o número

$$n = 23571113171923293137414347535961677 1,$$

formado pela concatenação dos números primos entre 2 e 71, é um múltiplo de 9.

(20) [Critério de Divisibilidade por 11] Prove que um inteiro é divisível por 11 se, e somente se, a diferença entre a soma dos seus dígitos nas posições ímpares e a soma dos seus dígitos nas posições pares for divisível por 11.

(21) * A soma dos algarismos de 2021! foi escrita na representação decimal. A soma dos algarismos do número resultante foi escrita na representação decimal, e assim por diante. Finalmente, o resultado é um número de um único algarismo. Encontre esse número.

2 Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum

(1) Para a não nulo, mostre (usando somente a definição de mdc) que $\text{mdc}(a,0) = \text{mdc}(a,a) = |a|$ e $\text{mdc}(a,1) = 1$.

(2) Mostre, usando somente a definição de mdc, que $\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(|a|,|b|)$.

(3) Prove que o máximo divisor comum é uma operação associativa, ou seja, que

$$\text{mdc}(a,\text{mdc}(b,c)) = \text{mdc}(\text{mdc}(a,b),c)$$

para todos $a,b,c \in \mathbb{Z}$.

(4) Sejam a,b dois inteiros não-nulos. Mostre que $\text{mdc}(na,nb) = n\text{mdc}(a,b)$ e $\text{mmc}(na,nb) = n\text{mmc}(a,b)$ se n é um inteiro positivo.

(5) Determine $\text{mdc}(a,b)$ e $\text{mmc}(a,b)$ para os inteiros a e b dados abaixo:

(a) $a = 32$ e $b = 54$;

(b) $a = 27$ e $b = 45$;

(c) $a = 15$ e $b = 80$;

(d) $a = 8798$ e $b = 2314$;

(e) $a = 1583890$ e $b = 3927$.

(6) Nos casos abaixo, utilize o Algoritmo de Euclides para determinar inteiros r e s tais que $\text{mdc}(a,b) = ar + bs$.

(a) $a = 56$ e $b = 72$;

(b) $a = 24$ e $b = 138$;

(c) $a = 119$ e $b = 272$;

(d) $a = 1128$ e $b = 336$.

(7) Para os inteiros não-nulos a e b, mostre que as seguintes condições são equivalentes

(a) $a \mid b$;

(b) $\text{mdc}(a,b) = |a|$;

(c) $\text{mmc}(a,b) = |b|$.

(8) Mercúrio leva 2111 horas para completar uma volta em torno do Sol, enquanto Vênus leva 5393 horas. Com que frequência Sol, Mercúrio e Vênus se alinham?

(9) Mostre que se a é um inteiro positivo então a e $a+1$ são primos entre si.

(10) Escolhendo-se 51 números dentre os números naturais de 1 até 100, prove que existem ao menos 2 que devem ser primos entre si.

(11) Assumido que $\text{mdc}(a,b) = 1$, mostre o seguinte:

(a) $\text{mdc}(a+b, a-b) = 1$ ou 2. (*Dica:* Seja $d = \text{mdc}(a+b, a-b)$ e mostre que $d \mid 2a$, $d \mid 2b$; assim, $d \leq \text{mdc}(2a, 2b) = 2\text{mdc}(a,b)$);

(b) $\text{mdc}(2a+b, a+2b) = 1$ ou 3;

(c) $\text{mdc}(a+b, a^2+b^2) = 1$ ou 2. ([Dica:] $a^2+b^2 = (a+b)(a-b)+2b^2$.)

(12) Sejam $a,b,c \in \mathbb{Z}$ tais que $a \mid b$ e $\text{mdc}(b,c) = 1$. Mostre que $\text{mdc}(a,c) = 1$.

(13) Explique como definir o máximo divisor comum $\text{mdc}(a,b,c)$ de três números inteiros a,b,c. Em seguida, generalize sua definição para aplicar a qualquer quantidade de números inteiros.

(14) Um empreiteiro deseja construir um prédio em um terreno retangular de dimensões 216 m por 414 m. Para isso deverá cercá-lo com estacas. Se ele colocar uma estaca em cada canto do terreno e utilizar sempre a mesma distância entre duas estacas consecutivas, qual será a quantidade mínima de estacas a serem utilizadas?

(15) Dona Antônia possui um enfeite pisca-pisca, para árvores de Natal, que tem lâmpadas amarelas, vermelhas e azuis. As lâmpadas amarelas se acendem de 4 em 4 minutos; as vermelhas, de 3 em 3 minutos; e as azuis, de 6 em 6 minutos.

(a) Se às 20 horas e 15 minutos todas as lâmpadas se acenderem, a que horas elas voltarão a se acender novamente ao mesmo tempo?

(b) Dona Antônia quer deixar sua árvore de Natal mais colorida, e por isso vai comprar um pisca-pisca verde. De quanto em quanto tempo as lâmpadas verdes deverão acender para que todas as lâmpadas do ornamento decorativo de Dona Antônia acendam simultaneamente ao menos 87 vezes por dia?

(16) * Prove que, se a e b são números inteiros primos entre si com $a > b$, então para todo par de inteiros positivos m,n, temos que

$$\text{mdc}(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{\text{mdc}(m,n)} - b^{\text{mdc}(m,n)}.$$

[Dica:] Chamando $e = a^{\text{mdc}(m,n)} - b^{\text{mdc}(m,n)}$ e $f = \text{mdc}(a^m - b^m, a^n - b^n)$, mostre que $e \mid f$ e $f \mid e$, usando o Teorema de Bézout e o fato de que, se $\alpha \mid a^\beta - b^\beta$, então $\alpha \mid a^{\beta\gamma} - b^{\beta\gamma}$, para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$.

(17) Para cada item, encontre o menor valor positivo de n para o qual a fração dada não é irredutível nem nula:

(a) $\dfrac{n-11}{3n+8}$

(b) $\dfrac{4n+17}{n-5}$

(c) $\dfrac{2n+5}{7n+1}$

(d) $\dfrac{n^3+2n^2-54n+34}{n^2+8n-7}$

(18) * Sabe-se que, se F_m representa o m-ésimo número de Fibonacci, então

$$\mathrm{mdc}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{mdc}(m,n)}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Use este fato para provar que nenhum número de Fibonacci ímpar é divisível por 17.

(19) * Sejam a_n e b_n inteiros satisfazendo a relação

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n,$$

para todo inteiro positivo n. Prove que $\mathrm{mdc}(a_n, b_n) = 1$.
[Dica:] Aplique indução em n.

(20) * Sejam m e n dois números inteiros positivos primos entre si. Encontre os possíveis valores de

$$\mathrm{mdc}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n).$$

[Dica:] Escreva $5^m + 7^m = (5^n + 7^n)(5^{m-n} + 7^{m-n}) - 5^n 7^{m-n} - 5^{m-n} 7^n$, e analise o que ocorre com esta expressão para $m < 2n$ e $m > 2n$ para utilizá-la no Algoritmo de Euclides. Em seguida, verifique os possíveis valores de $\mathrm{mdc}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n)$ conforme as paridades de m e n.

Observação: Exercícios marcados com * são extras.