MAT0120 - Álgebra I para Licenciatura

Lista 1

Professor: Kostiantyn Iusenko
Monitor: Douglas de Araujo Smigly

1º Semestre de 2021

1 Axiomática de $\mathbb{Z}$

(1) Dado um inteiro x, chamamos de *valor absoluto* de x o numero inteiro designado por $|x|$ e definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Prove que

(a) $|a| \geq 0$;

(b) $|a| = 0$ se, e somente se, $a = 0$;

(c) $-|a| \leq a \leq |a|$;

(d) $|ab| = |a||b|$;

(e) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

(f) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

(2) Prove que o conjunto $S = \{m \in \mathbb{Z} \mid 7 < m < 8\}$ é vazio.

(3) Um elemento $a \in \mathbb{Z}$ é dito *inversível* se existir um elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostre que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1.

(4) Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$.

(a) Prove que

(i) $p \cdot (-q) = (-p) \cdot q = -(p \cdot q)$;

(ii) $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$.

(b) Mostre que se a multiplicação em $\mathbb{Z}$ tivesse sido definida satisfazendo $(-p) \cdot (-q) = -(p \cdot q)$, para todos $p, q \in \mathbb{N}$, então os números inteiros não satisfariam os seguintes axiomas:

(i) Propriedade cancelativa: para toda terna de inteiros a, b, c, com $a \neq 0$, tem-se que, se $ab = ac$, então $b = c$.

(ii) Propriedade distributiva: para toda terna de inteiros a, b, c de inteiros tem-se que $a(b + c) = ab + ac$.

(c) Se fosse válido que $(-3) \cdot (-5) = -15$, mostre que teríamos $7 \cdot 2 = -16$.

2 Indução Finita

(1) Prove que se vale o Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.

(2) Prove que se vale a segunda forma do Princípio da Indução Finita, então vale o Princípio da Boa Ordem.

(3) Prove por indução que

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall n \geq 1;$

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, \forall n \geq 1;$

(c) [Desigualdade de Bernoulli] $(1+h)^n \geq 1 + nh$, onde $h > 0$ está fixado e $n \geq 0$.

(4) Prove por indução que

(a) $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3 para todo $n \geq 0$;

(b) $5^n - 4n + 15$ é sempre divisível por 16 para todo $n \geq 0$;

(c) $2n^3 + 3n^2 + 7n$ é sempre divisível por 6 para todo $n \geq 0$.

(d) $4^{2n-1} + 1$ é sempre divisível por 5 para todo $n \geq 1$.

(e) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ é sempre divisível por 11 para todo $n \geq 1$.

(5) Sejam a e r dois números inteiros. Dizemos que a sequência $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, onde $a_1 = a, a_2 = a + r, a_3 = a + 2r, \ldots, a_n = a + (n-1)r$ é uma *progressão aritmética* de razão r. Prove, utilizando o princípio de indução finita, que a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a + (a+r) + (a+2r) + \ldots + (a + (n-1)r) = \frac{n(2a + (n-1)r)}{2}$$

(6) Considere a seguinte sequência de somas:

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2!} & = & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} & = & \frac{5}{6} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} & = & \frac{23}{24} \\
\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \frac{4}{5!} & = & \frac{119}{120}
\end{array}$$

e seja $P(n)$ a soma

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{n-1}{n!}$$

Determine uma expressão para $P(n)$ e, em seguida, utilizando o Princípio da Indução Finita, prove sua validade para $n \geq 2$.

(7) Prove que se $n \geq 3$, então a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

(8) Sabe-se que a forma trigonométrica do número complexo $z = a + bi$ é dada por

$$z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta),$$

onde $\theta = \arg z$ e $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Prove, utilizando o Princípio de Indução Finita, a fórmula de De Moivre, isto é, se $z = \rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$, então

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(9) Seja $a \neq 0 \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos a potência não-negativa de a do seguinte modo:

$$a^m = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 0 \\ a, & \text{se } m = 1 \\ a^{m-1} \cdot a, & \text{se } m > 1 \end{cases}.$$

Prove que

(*a*) $a^m \cdot a^n = a^m + n, \forall m, n \in \mathbb{N}$;

(*b*) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

(10) Prove que $x - y$ divide $x^n - y^n$ para quaisquer inteiros x, y distintos e $n \geq 1$.

(11) Para todo inteiro $n \geq 1$, prove que

(*a*) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \dfrac{x^n}{1-x}$;

(*b*) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ ([Dica:] Use o item anterior).

(12) * Seja n um inteiro positivo. Mostre que

(*a*) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$;

(*b*) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

(13) Prove por indução finita para todo $n > 1$ que

(*a*) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$;

(*b*) $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$;

(*c*) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$,

(*d*) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

(14)

(a) Considere a sequência de números inteiros $(a_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$a_n = \begin{cases} 2, & \text{se } n = 0; \\ 3, & \text{se } n = 1; \\ 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que

$$a_n = 2^n + 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(b) Considere a sequência de números inteiros $(b_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ 3b_{n-} - 2b_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que

$$b_n = 2^n - 1, \quad \forall n \geq 0.$$

(c) Considere a *Sequência de Fibonacci* $(F_n)_{n\geq 0}$ dada por

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{se } n \geq 2 \end{cases}.$$

Mostre que

(i) $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$;

(ii) $F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^n$.

(15) Prove que, se n é um múltiplo de 8, então F_n é múltiplo de 7.
[Dica:] Prove que $F_{n+8} = 7F_{n+4} - F_n$.

(16) * Prove que todo número natural pode ser representado como uma soma de diversos números de Fibonacci distintos.

(17) O que há de errado com a seguinte demonstração por indução de que para todo inteiro positivo n nós temos $a^{n-1} = 1$?

Demonstração: Para $n = 1, a^{1-1} = a^0 = 1$, correto. Assumindo o teorema válido para $k \leq n$, temos para $n + 1$:

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1,$$

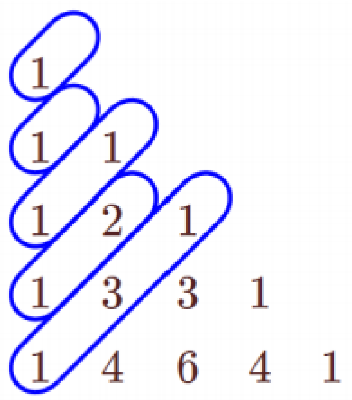
como desejávamos.

(18) * É dado um conjunto de n pontos em um círculo e cada par de pontos está ligado por um segmento. Acontece que três desses segmentos nunca se encontram no mesmo ponto. Em quantas partes eles dividem o interior do círculo?

(19) * [Pizza de Steiner] Qual é o maior número de partes em que se pode dividir o plano com n cortes retos?

(20) Suponha um campeonato de futebol com n times onde todos jogam contra todos uma única vez. Prove por indução que o número total de jogos é $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

(21) * Faça uma conjectura sobre as somas das diagonais ascendentes no Triângulo de Pascal conforme indicado. Prove que sua conjectura é verdadeira.



(22) * Prove que $ab^n + cn + d$ será divisível pelo inteiro positivo m para todo $n \geq 0$ quando $a + d$, $(b-1)c$ e $ab - a + c$ forem divisíveis por m.
[Observação:] Essa questão pode ser vista como uma "fábrica de exercícios"semelhantes aos itens do exercício 4.

(23) Sabe-se que $x + \dfrac{1}{x} = d$ é um inteiro.

(a) Prove que $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ também é um inteiro, qualquer que seja o número natural n.

(b) * Encontre todos os valores de $d \geq 2$ tais que 194 é um termo da sequência

$$\left\{x + \frac{1}{x}, x^2 + \frac{1}{x^2}, x^3 + \frac{1}{x^3}, \ldots\right\}.$$

Observação: Exercícios marcados com * são extras.