MAT0501 E MAT5734 - ANEIS E MÓDULOS

Prof: Juan Carlos Gutiérrez Fernández
Lista 2 (2018)

A seguir, A denotará um anel com 1.

1. Seja M um A-módulo e X um subconjunto de M. Definimos o *anulador* de X por
$$\operatorname{ann}(X) = \{a \in A : \ ax = 0 \quad \text{para todo } x \in X\}.$$
Mostre que $\operatorname{ann}(X)$ é um ideal à esquerda de A e quando X é um submódulo de M, então é um ideal (bilateral) de A.
2. Determine todos os submódulos de $\mathbb{Z}_{15}$ (como $\mathbb{Z}$-módulo). Determine o anulador de cada elemento de $\mathbb{Z}_{15}$ e o anulador de $\mathbb{Z}_{15}$.
3. Seja $M \neq 0$ um $\mathbb{Z}$-módulo finito tal que o conjunto dos seus submódulos é totalmente ordenado por inclusão. Prove que existe um primo p, tal que a ordem de M é uma potência de p.
4. Seja D um domínio de integridade e $x \in D$ com $x \neq 0$. Mostre que $D \cong Dx$ como D-módulos.
5. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado.
6. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um $\mathbb{Z}$-módulo livre.
7. Se M, N são A-módulos, então o conjunto $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ de todos os homomorfismos de A-módulos de M em N é um grupo abeliano respeito da operação "soma de homomorfismos". Provar que $\operatorname{Hom}_A(M, M)$ é um anel, onde o produto é a composição de aplicações. Provar que M é um $\operatorname{Hom}_A(M, M)$-módulo à esquerda em relação à ação obvia de $\operatorname{Hom}_A(M, M)$ em M,
$$f \cdot x = f(x), \quad \text{para todo} \quad f \in \operatorname{Hom}_A(M, M), \ \text{ e } \quad x \in M.$$
8. Determinar $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n)$ e $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$, com $n > 0$ como $\mathbb{Z}$-módulos.
9. Provar que para todo A-módulo M, temos $\operatorname{Hom}_A(A, M) \cong (M, +, 0)$.
10. Seja M um A-módulo. Seja $x \longrightarrow ax$ o endomorfismo do grupo M definido por um elemento fixo a de A. Este endomorfismo pertence a $\operatorname{End}_A(M)$?
11. Um A-módulo M é *simples* (ou *irredutível*) se $M \neq 0$ e os únicos submódulos de M são 0 e M. Seja $f\colon M \longrightarrow N$ um homomorfismo não nulo de A-módulos. Mostre que se M é simples então f é injetora e se N é simples, então f é sobrejetora.
12. Prove o Lema de Schur: Se M e N são módulos simples, então qualquer homomorfismo de M em N não nulo é um isomorfismo. Em particular, o anel de endomorfismos de um módulo simples é um anel com divisão.

13. A reciproca do lema é verdadeira? Isto é, se $\mathrm{End}_A(M)$ é um anel de divisão, então necessariamente M é simples?
14. Provar que um A-módulo M é simples se e somente se $M \cong A/I$ onde I é um ideal à esquerda maximal de A.
15. Sejam $M, M_1, \ldots, M_n$ uma família de A-módulos. Provar que $M \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ se e somente se para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe um homomorfismo de A-módulos $\varphi_i \colon M \longrightarrow M$ tal que $\mathrm{Im}\,(\varphi_i) \cong M_i$, $\varphi_i\varphi_j = 0$ para $i \neq j$ e $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = I_M$.
16. Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de A-módulos. Provar que se M' e M'' são finitamente gerados, então N é finitamente gerado.
17. Considerar o seguinte diagrama comutativo de A-módulos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & N \arrow[d, "h"] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \end{tikzcd}$$

Provar que g envia $\mathrm{Ker}\, f$ em $\mathrm{Ker}\, f'$ e que h envia $\mathrm{Im}\, f$ em $\mathrm{Im}\, f'$. Consequentemente, g e h determinam homomorfismos,

$$\begin{aligned} g_1 &\colon \mathrm{Ker}\, f \longrightarrow \mathrm{Ker}\, f', & g_2 &\colon \mathrm{Coim}\, f \longrightarrow \mathrm{Coim}\, f' \\ h_1 &\colon \mathrm{Im}\, f \longrightarrow \mathrm{Im}\, f', & h_2 &\colon \mathrm{Coker}\, f \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f'. \end{aligned}$$

18. Se considera o seguinte diagrama comutativo de A-módulos com filas exatas

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & T \arrow[d, "\gamma"] \\ M' \arrow[r, "f'"] & N' \arrow[r, "g'"] & T' \end{tikzcd}$$

Provar que f e g induzem homomorfismos $\mathrm{Ker}\,\alpha \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\beta$ e $\mathrm{Ker}\,\beta \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\gamma$ respetivamente. Provar que f' e g' induzem homomorfismos $\mathrm{Coker}\,\alpha \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\beta$ e $\mathrm{Coker}\,\beta \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\gamma$. Além do mais, se f' monomorfismo, então sequência $\mathrm{Ker}\,\alpha \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\beta \longrightarrow \mathrm{Ker}\,\gamma$ é exata e se g é epimorfismo, então é exata a sequência $\mathrm{Coker}\,\alpha \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\beta \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\gamma$.
19. Provar que se F é um A-módulo livre, para qualquer diagrama de A-módulos com linha exata da forma

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "h"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

existe um homomorfismo $\varphi \colon F \longrightarrow M$, tal que $g\varphi = h$.
20. Provar que para todo A-módulo livre F e toda sequência exata de A-módulos

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} T \longrightarrow 0,$$

a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(F, N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(F, T) \longrightarrow 0$$

é exata, onde f^* e g^* são definidas por $f^*(\varphi) = f \circ \varphi \quad \text{e} \quad g^*(\varphi) = g \circ \varphi$.

21. Provar que se f é um endomorfismo suprajetivo de A^n, então f é bijetora. Podemos também concluir que f é necessariamente bijetora se assumir que f é um endomorfismo de R^n injetor?