MAT0501 E MAT5734 - ANÉIS E MÓDULOS

Prof: Juan Carlos Gutiérrez Fernández
Lista 1 (2018)

1. Provar que na definição de anel com unidade a comutatividade da adição é consequência dos outros axiomas da definição de anel, e portanto é redundante.
2. Seja A um anel tal que $x^2 = x$ para todo $x \in A$. Mostre que A é comutativo.
3. Seja A um anel com unidade finito. Mostre que para todo x em A, $x \neq 0$, temos que, ou x é invertível, ou x é divisor de 0.
4. Seja A um anel com unidade e sejam $a, b \in A$. Mostre que $1 - ab$ é invertível se, e somente se, $1 - ba$ é invertível. Nesse caso, determine $(1 - ab)^{-1}$.
5. Seja $A = M_n(D)$ o anel das matrizes $n \times n$ sobre um anel com divisão D. Mostre que seu centro é $Z(A) = \{\lambda I_n : \lambda \in Z(D)\}$. Mostre que A é um anel simples, isto é, os únicos ideais de A são os triviais.
6. Um elemento x de um anel A é *nilpotente* se existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$ e é *idempotente* se $x^2 = x$. Seja A um anel sem elementos nilpotentes não nulos. Mostre que se $e \in A$ é idempotente, então $e \in Z(A)$.
7. Prove que num anel comutativo A, $a + b$ é nilpotente se a e b são nilpotentes. Provar que este resultado pode ser falso se A não é comutativo.
8. Seja K corpo e $M \in M_n(K)$ uma matriz nilpotente. Provar que $I_n - M$ possui inversa.
9. Seja A um anel tal que $x^3 = x$ para todo $x \in A$. Mostre que A é comutativo.
10. Seja A o grupo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ com a soma natural coordenada a coordenada. Provar que $\mathrm{End}(A)$ é um anel não comutativo.
11. Seja S um subconjunto não vazio de um anel A. Definimos
$$l(S) = \{a \in A : ax = 0, \text{ para todo } x \in S\}$$
$$r(S) = \{a \in A : xa = 0, \text{ para todo } x \in S\}$$
o *anulador à esquerda* e *direita* de S, respetivamente.
   Mostre que $l(S)$ e $r(S)$ são, respetivamente, ideais à esquerda e direita de A.
12. Seja A um anel tal que o conjunto I dos elementos não invertíveis de A é um ideal. Mostre que A/I é um anel de divisão e para cada $a \in A$, a é invertível ou $1 - a$ é invertível. Mostre que $\mathbb{Z}_{p^2}$ com p primo é um exemplo deste tipo de anel.
13. Prove que um anel com unidade A é de divisão se e somente se A não possui ideais à esquerda próprios.
14. Se ab é uma unidade em um anel A, então ba é uma unidade em A?
15. Provar que se a^n é uma unidade em um anel A, então a é uma unidade em A.

16. Provar que se a é invertível à esquerda e não é um divisor de zero à direita, então a é uma unidade em A.
17. Seja I um ideal de um anel comutativo A. Se I está contido na união finita de ideais primos $P_1 \cup \cdots \cup P_n$, então $I \subset P_i$ para algum i.
18. Seja $f\colon A \longrightarrow B$ um epimorfismo de anéis e P um ideal primo de A que contém $\ker f$. Provar que $f(P)$ é um ideal primo de B. Provar que se Q é um ideal primo de B, então $f^{-1}(Q)$ é um ideal primo de A que contém $\ker f$.
19. Provar que se D é um anel de divisão finito, então $a^{|D|} = a$ para cada $a \in D$. (Denotamos por $|D|$ a *ordem* do anel, isto é, o número de elementos do anel.)
20. Provar que Z_n contém elementos nilpotentes se e somente se n é dividido pelo quadrado de um número primo.
21. Seja I um ideal próprio de A. Provar
$$\frac{M_n(A)}{M_n(I)} \cong M_n(A/I).$$
22. Um anel A é *simples* se $A \neq 0$ e não possui ideais próprios. Mostrar que a característica de um anel simples com unidade é 0 ou um primo p.
23. Seja $A[[x]]$ o conjuntos das sequências infinitas $(a_0, a_1, \ldots), a_i \in A$. Cada elemento de $A[[x]]$ pode ser representado formalmente como $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, com $a_i \in R$. Provar que $A[[x]]$ é um anel se definimos $+, \cdot, 0, 1$ como no anel de polinômios. Chama-se anel das *series de potências formais em uma indeterminada.* Provar que um elemento $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in A[[x]]$ é uma unidade em $A[[x]]$ se e somente se a_0 é uma unidade em A.
24. Seja A um anel comutativo e I um ideal de A. Definamos
$$\text{Rad } I = \{r \in A \ : \ r^n \in I \text{ para algum } n\}.$$
Provar que Rad I é um ideal de A.
25. Provar que se I e um ideal à esquerda de A, então $\text{ann}_l(I) = \{a \in A \ : \ ax = 0 \ \ \forall\, x \in I\}$ é um ideal de A.
26. Seja I ideal de A. Provar que
$$[A\colon I] = \{a \in A \ : \ xa \in I \text{ para cada } x \in A\}$$
é um ideal de A que contém I.
27. Determine todos os ideais primos e maximais de $\mathbb{Z}_n$.
28. Provar que cada anel de ordem p^2, com p primo, é comutativo.
29. Seja p um número primo. Achar um exemplo de anel de ordem p^3 não comutativo.