1ª Lista de Exercícios

1. Seja A um conjunto com duas operações que satisfazem todas as condições da definição de anel com unidade, com a possível exceção da condição: $a + b = b + a$ para todo $a, b \in A$. Prove que A é um anel.

2. Seja A um anel e R um subanel de A. Pode acontecer que:

   (a) A seja um anel com unidade e R não;

   (b) R seja um anel com unidade e A não;

   (c) A e R sejam anéis com unidade e a unidade de A seja diferente da unidade de R;

   (d) A e R sejam anéis com unidade e as unidades de A e de R coincidem.

   Dar exemplos que ilustre cada uma das situações acima.

3. Prove que o único automorfismo do anel $\mathbb{Z}$ é o automorfismo idêntico.

4. Sejam A um corpo, A' um anel e $\varphi\colon A \to A'$ um homomorfismo de anéis não nulo. Prove que φ é monomorfismo.

5. Sejam A um anel e I um ideal à esquerda de A. Chama-se *anulador* de I ao conjunto $\mathrm{Anl}(I) = \{x \in A \mid xm = 0, \forall m \in I\}$. Prove que $\mathrm{Anl}(I)$ é um ideal bilateral de A.

6. Consideremos os anel $M_2(\mathbb{Q})$ das matrizes 2×2 com coeficientes em $\mathbb{Q}$.

   (a) Prove que os únicos ideais bilaterais de $M_2(\mathbb{Q})$ são (0) e o próprio $M_2(\mathbb{Q})$;

   (b) Dar exemplos de ideais à esquerda e à direita não triviais de $M_2(\mathbb{Q})$;

   (c) Generalizar os resultados anteriores para um anel de matrizes $M_2(F)$ onde F é um corpo.

7. Seja p um número primo. Prove que:

   (a) Se A é um anel de integridade finito de característica p, então a aplicação $\varphi\colon A \to A$ dada por $\varphi(a) = a^p$ é um automorfismo de A;

   (b) O único automorfismo de $\mathbb{Z}_p$ é o automorfismo idêntico. Deduzir que $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$ para todo $a \in A$;

   (c) Prove o *Teorema de Fermat*, isto é, se p não divide a, então $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

8. Seja A um anel tal que $x^2 = x$ para todo $x \in A$, este anel é chamado *anel de Boole*. Mostre que A é um anel comutativo.

9. Mostre que todo anel de integridade finito é um corpo. Note que $\mathbb{Z}$ é um anel de integridade infinito e não é um corpo.

10. Sejam A um anel, I e J ideais à direita (esquerda)de A. Mostre que $I \cup J$ é um ideal à direita (esquerda) de A se e somente se $I \subset J$ ou $J \subset I$.

11. Seja $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$. Mostre que $m\mathbb{Z}$ é um ideal maximal de $\mathbb{Z}$ se e somente se m é um número primo.

12. Seja A um anel tal que $x^3 = x$ para todo $x \in A$. Mostre que A é um anel comutativo.

13. Seja A um anel tal que os únicos ideais à direita de A são $\{0\}$ e A. Mostre que A é um anel com divisão ou um anel com um número primo de elementos no qual $ab = 0$ para todos $a, b \in A$.

14. Sejam F um corpo e $F[X, Y]$ o anel dos polinômios em duas indeterminadas com coeficientes em F. Prove que $F[X, Y]$ não é um anel principal.

    Sugestão: considerar o ideal gerado pelo conjunto $\{X, Y\}$.

15. Seja $A = \mathcal{C}([0,1])$ o anel das funções continuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Se M é um ideal maximal de A, prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $M = \{f \in A \mid f(c) = 0\}$.

16. Prove que:

    (a) O ideal I de $\mathbb{Z}$ é maximal se e somente se $I = (p)$, onde p é um número primo;

    (b) $F[X]$ é um anel principal, onde F é um corpo. Qual a condição sobre $f \in F[X]$ para que (f) seja um ideal maximal?

17. Seja $A = \mathcal{C}[0,1]$ o anel das funções reais continuas definidas no intervalo $[0,1]$. Prove que $I = \left\{f \in A \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right\}$ é um ideal maximal de A.

18. Seja M um A-módulo. Prove que:

    (a) $(-a)m = a(-m) = -(am),\ \forall a \in A,\ \forall m \in M$;

    (b) $0.m = 0,\ \forall m \in M$;

    (c) $a.0 = 0,\ \forall a \in A$.

19. Sejam M um A-módulo e S e T submódulos de M. Prove que $S \cup T$ é um submódulo de M se e somente se $S \subset T$ ou $T \subset S$.

20. Determinar: todos os submódulos do $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{12}$, o anulador de cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ e o anulador do módulo todo.

21. Dar um exemplo de um $\mathbb{Z}$-módulo, onde dois submódulos quaisquer sejam sempre não isomorfos.

22. Prove que se m e n são dois inteiros relativamente primos, o único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\varphi\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ é o homomorfismo nulo.

23. Seja M um $\mathbb{Z}$-módulo finito tal que o conjunto dos seus submódulos é totalmente ordenado por inclusão. Prove que existe um número primo p tal que o número de elementos de M é uma potência de p.

24. Um A-módulo M é *simples* se $M \neq (0)$ e os únicos submódulos de M são (0) e o próprio M.

    (a) Prove que se M é simples e $\varphi\colon M \to N$ é um A-homomorfismo não nulo, então φ é um monomorfismo. Prove que se N também é simples então φ é um isomorfismo.

    (b) Seja $\mathrm{Hom}(M, N)$ o conjunto de todos os A-homomorfismos de M em N. Mostrar que com a soma definida pontualmente e o produto por composição, $\mathrm{Hom}(M, M)$ é um anel. Prove que se M é simples, então $\mathrm{Hom}(M, M)$ é um anel com divisão. *(este resultado é conhecido como Lema de Schur)*.

25. Prove que, se a seqüência, $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\phi} S$ é exata, são equivalentes:

    (a) φ é epimorfismo;

    (b) $\mathrm{Im}(\psi) = 0$;

    (c) ϕ é monomorfismo.

26. Seja o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \xrightarrow{f'} & M & \xrightarrow{f} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \varphi' \downarrow & & \varphi \downarrow & & \varphi'' \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{g'} & N & \xrightarrow{g} & N'' & & \end{array}$$

    Suponhamos que as filas são seqüências exatas, prove que:

    (a) Se φ' e φ'' são epimorfismos, então φ é epimorfismo;

(b) Se φ' e φ'' são isomorfismos, então φ é isomorfismo.

27. Seja o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & h_4 \downarrow & & h_5 \downarrow \\ N_1 & \xrightarrow{g_1} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_5 \end{array}$$

Suponhamos que as filas são seqüências exatas, prove que:

(a) Se h_1 é epimorfismo e h_4 é monomorfismo, então $\ker(h_3) = f_2(\ker(h_2))$;

(b) Se h_2 é epimorfismo e h_5 é monomorfismo, então $g_3^{-1}(\mathrm{Im}(h_4)) = \mathrm{Im}(h_3)$;

(c) (Lema dos cinco) Se $h_1,\ h_2,\ h_4$ e h_5 são isomorfismos, então h_3 é um isomorfismo.