Teoria de Grupos

Douglas de Araujo Smigly

26 de maio de 2018

Problemas e exercícios resolvidos

1 Questões

1.1 Grupos

(1) Prove que o par $(G, \star)$ é um grupo em cada um dos casos seguintes:

(a) $G = \mathbb{Z}_8$ e $\star \colon G \times G \to G$, dada por:

$$\star(\overline{a}, \overline{b}) = \overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}$$

(b) $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e *star* o produto usual de números complexos.

(2) Seja G um grupo. Mostre que se $(ab)^2 = a^2b^2$, para quaisquer $a, b \in G$, então G é abeliano.

(3) Vamos tentar generalizar a questão 1.

(a) Seja G um grupo no qual $(ab)^i = a^ib^i$, para três inteiros consecutivos i e para quaisquer $a, binG$. Mostre que G é abeliano.

(b) Vale o mesmo resultado se $(ab)^i = a^ib^i$, para apenas dois inteiros consecutivos i? Prove ou dê contraexemplo.

(4) Seja G um conjunto não vazio com uma operação binária associativa.

(a) Mostre que as seguintes condições são equivalentes:

(i) G é um grupo;

(ii) Para todos $a, b \in G$, as equações $bx = a$ e $yb = a$ têm pelo menos uma solução em G.

(iii) Existe $e \in G$ tal que $ae = a$, para todo $a \in G$ e para todo $a \in G$, existe $b \in G$ tal que $ab = e$ (isto é, "unidade à direita"e inverso à direita).

(*b*) Considere $G = S_3$, com a operação binária de composição correspondente e $H = \mathbb{Z}_3$, com a multiplicação usual.

(i) Resolva as equações $bx = a$ e $yb = a$, para todos $a, b \in G$.

(ii) Resolva as equações $bx = a$ e $yb = a$, para todos $a, b \in H$.

(iii) Conclua que $(S_3, \circ)$ é grupo, mas $(\mathbb{Z}_3, \cdot)$ não o é.

(5) Considere um grupo G. Dizemos que um elemento $a \in G$ é idempotente se, $a^2 = e$.

(*a*) Seja G um grupo tal que $a^2 = e$, para todo $a \in G$. Mostre que G é abeliano.

(*b*) O mesmo resultado é válido se G é um grupo tal que $a^3 = e$, para todo $a \in G$? Prove ou dê contraexemplo.

(6) Seja G um grupo tal que $(ab)^2 = (ba)^2$, para todos $a, b \in G$ e suponha que $x = e$ é o único elemento de G tal que $x^2 = e$. Mostre que G é abeliano.

(7) Sejam m, n inteiros positivos tais que $\text{mdc}(m, n) = 1$ (ou seja, m e n são primos entre si). Seja G um grupo em que todas as potências m-ésimas comutem entre si e todas as potências n-ésimas comutem entre si. Mostre que G é abeliano.

1.2 Subgrupos

(1) Em cada caso, verifique se o conjunto H é subgrupo do grupo G dado em cada um dos itens a seguir:

(a) $G = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ com a multiplicação usual, e $H = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(2) Seja G um grupo e seja S um subconjunto de G. Mostre que S é um subgrupo de G se e somente se $S \neq \emptyset$ e, para todos $a, b \in G$, se $a, b \in S$, então $ab^{-1} \in S$.

(3) Seja $G = S_4$. Mostre que

$$V = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

é subgrupo de G.

(4) Seja G um grupo e seja $\{H_i : i \in I\}$ uma família de subgrupos de G.

(a) Mostre que $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ é um subgrupo de G.

(b) É verdade que $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ sempre é um subgrupo de G? Prove ou dê contraexemplo.

(5) Seja G um grupo e sejam H e K subgrupos de G. Mostre que $H \cup K$ é um subgrupo de G se e somente se $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

(6) Seja G um grupo e H um subconjunto bnão vazio finito de G tal que $HH = H$. Prove que H é um subgrupo de G. E se H não for finito?

(7) Seja G um grupo. Dados H um subgrupo de G e $a \in G$, mostre que $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$ é um subgrupo de G.
Se H é finito, qual a ordem de aHa^{-1}?

(8) Seja a um elemento de um grupo G. O normalizador de a em G é dado por

$$N(a) = \{x \in G : xa = ax\}$$

(a) Determine o normalizador de σ em $S_3 = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$.

(b) Determine o normalizador de j em $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$.

(c) Prove que $N(a)$ é um subgrupo de G para todo $a \in G$.

(9) Seja G um grupo e seja H um subgrupo de G. Considere

$$\mathcal{C}_G(H) = \{x \in G : xh = hx, \forall hinH\}$$

$\mathcal{C}_G(H)$ é chamado centralizador de H em G.

(a) Seja $S_3 = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$, e considere $H = \{1, \sigma, \sigma^2\}$.

- Encontre $N(a)$, para todo $a \in H$.
- Calcule $\mathcal{C}_{S_3}(H)$.
- Verifique que $\mathcal{C}_{S_3}(H) = \bigcap\limits_{h \in H} N(h)$.

(b) Prove que $\mathcal{C}_G(H) = \bigcap_{h \in H} N(h)$, para todo grupo G e H subgrupo de G.

(c) Mostre que $\mathcal{C}_G(H)$ é subgrupo de G.

(10) O centro de um grupo G é definido como sendo o conjunto

$$\mathcal{Z}(G) = \{z \in G : zx = xz, \forall x \in G\}$$

(a) Calcule $\mathcal{Z}(S_3)$.

(b) Calcule $\mathcal{Z}(Q_8)$.

(c) Verifique que $\mathcal{Z}(G) = \mathcal{C}_G(G)$.

(d) Prove que $\mathcal{Z}(G)$ é subgrupo de G.

(11) Seja G um grupo. Define-se a ordem de $a \in G$ como sendo o menor inteiro positivo n tal que $a^n = e$, se esse número existir (casos contrário, dizemos que a ordem de a é infinita). Denotamos a ordem de a por $o(a)$. Mostre que se $a \in G$ tem ordem finita, esse número coincide com a ordem do subgrupo de G gerado por a.

(12) Seja G um grupo de ordem par. Mostre que G contém um elemento de ordem 2.

(13) Mostre que se G é um grupo de ordem par, então existe um número ímpar de elementos de ordem 2.

(14) Seja a um elemento de um grupo tal que $a^n = e$. Mostre que $o(a) \mid n$.

(15) Seja G um grupo e sejam $a, b \in G$. Mostre que ab e ba têm a mesma ordem.

(16) Seja G um grupo e seja $a \in G$ um elemento de ordem n. Se $n = km$, mostre que a^k tem ordem m.

(17) Seja G um grupo e seja $a \in G$ um elemento de ordem n. Seja m um inteiro positivo tal que $\text{mdc}(m, n) = 1$. Mostre que $o(a^m) = n$. O que ocorre se $\text{mdc}(m, n) > 1$?

(18) Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Definimos:

$$\varphi(n) = \left|\{m \in \mathbb{N}^* : \text{mdc}(m, n) = 1\}\right|$$

φ é a chamada **função φ de Euler** ou **função totiente de Euler**.

(a) Encontre $\varphi(24), \varphi(35)$ e $\varphi(97)$.

(b) Verifique que $\varphi(p) = p - 1$, onde p é um número primo.

(c) Mostre que o número de geradores de um grupo cíclico de ordem n é $\varphi(n)$.

Na verdade, temos que

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(19) Vamos mostrar nesse exercício que $GL_4(\mathbb{Z})$ admite um elemento de ordem 12.

(*a*) O m-ésimo **polinômio ciclotômico** $\varphi_n(x)$ é definido como

$$\varphi_n(x) = \prod_{\xi \in mu_m(\mathbb{C}} (x - \xi),$$

onde $\mu_m(\mathbb{C}) = \langle e^{\frac{2\pi i}{m}} \rangle = \{1, e^{\frac{2\pi i}{m}}, \ldots, e^{\frac{2\pi i(m-1)}{m}}\}$ é o conjunto das raízes m-ésimas da unidade (isto é, as raízes, em $\mathbb{C}$, da equação $x^m - 1 = 0$). Mostre que $\varphi_{12}(x) = x^4 - x^2 + 1$.

(*b*) Dado um polinômio mônico $p(x) = x^k + a_{k-1}p^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, dizemos que a **matriz companheira** C de $p(x)$ é a matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

(i) Escreva a matriz companheira de $\varphi_{12}(x)$.

(ii) Seja A a matriz companheira de $\varphi_m(x)$. Mostre que $A^m = I$. Pode-se mostrar que não existe natural positivo $k < m$, tal que $A^k = I$, ou seja, a ordem de A é m.

(*c*) Considere a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Verifique que B é inversível, e sua inversa possui todas as entradas inteiras.

(ii) Dada C a matriz companheira de $\varphi_{12}(x)$, mostre que é possível obter a partir de C a matriz B por meio de operações elementares nas linhas e colunas.

(iii) Qual é a ordem de $A = BCB^{-1}$?

(*d*) Conclua que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -16 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 35 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

é um elemento de ordem 12 de $GL_4(\mathbb{Z})$. Na verdade, 12 é a maior ordem finita possível para um elemento de $GL_4(\mathbb{Z})$. As possíveis ordens para elementos desse grupo que possuem ordem finita são $2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ e 12.

(20) Mostre que todo subgrupo de um grupo cíclico é cíclico.

(21) Sejam G um grupo e sejam $a, b \in G$.

(*a*) Mostre que $o(a) = o(b^{-1}ab)$.

(*b*) Se G possui apenas um elemento a de ordem n, mostre que $a \in \mathcal{Z}(G)$ e que $n = 1$ ou $n = 2$.

(22) Seja $G = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, munido da multiplicação usual de matrizes. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(*a*) Verifique que $o(A) = o(B) = 2$.

(*b*) Verifique que $o(AB) = \infty$.

(*c*) Conclua que se G não é abeliano, existem elementos $a, b \in G$, tais que $o(a), o(b) < \infty$, mas $o(ab) = \infty$.

(*d*) Encontre outros exemplos de grupos não abelianos e elementos que satisfazem essa condição.

(23) Seja G um grupo não trivial.

(*a*) Encontre todos os subgrupos de $G = (\mathbb{Z}_7, +)$.

(*b*) Prove que se G só possui como subgrupos os subgrupos triviais, então G é um grupo cíclico finito cuja ordem é um número primo.

(24) Seja $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Para cada $n \geq 1$, consideremos o conjunto

$$\mu_n(\mathbb{C}) = \langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle = \{1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, \ldots, e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}}\}$$

formado pelas raízes n-ésimas da unidade (isto é, as raízes, em $\mathbb{C}$, da equação $x^n - 1 = 0$).

(*a*) Encontre $\mu_3(\mathbb{C})$ e $\mu_5(\mathbb{C})$.

(*b*) Mostre que $\mu_n(\mathbb{C})$ é subgrupo de S^1.

(*c*) Conclua que existem grupos infinitos que possuem subgrupos cíclicos finitos de todas as ordens.

1.3 Classes laterais e Teorema de Lagrange

(1) Em cada caso seguinte, para G grupo e H subgrupo de G, determine $[G : H]$.

(*a*) $G = \mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos números inteiros e $H = \langle m \rangle$ o subgrupo dos múltiplos do inteiro $m \geq 2$.

(*b*) $G = \mathbb{Z}_{12}$ o grupo aditivo dos inteiros módulo 12 e $H = \langle 4 \rangle = \{\overline{0}, \overline{4}, \overline{8}\}$.

(*c*) $G = D_n = \langle \sigma, \tau | \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1} \rangle$, e $H = \langle \sigma^d, \sigma^r \tau \rangle$, onde $d \mid n$ e $0 \leq r < d$.

(1) Seja G um grupo e sejam H e K subgrupos de G cujas ordens são relativamente primas. Mostre que $H \cap K = \{e\}$.

(2) Seja G um grupo e sejam $a, b \in G$ tais que $ab = ba$. Se a tem ordem m, b tem ordem n e $\text{mdc}(m, n) = 1$, mostre que a ordem de ab é mn.

(3) Seja G um grupo abeliano que contém um elemento de ordem n e um de ordem m. Mostre que G contém um elemento de ordem $\text{mmc}(m, n)$.

(4) Seja G umm grupo e sejam H e K dois subgrupos de índice finito em G. Mostre que $H \cap K$ é um subgrupo de índice finito em G.

(5) Seja G um grupo e sejam $H \leq G$, e $K \leq H$. Mostre que K tem índice fiito em G se e somente se H tem índice finito em G e K tem índice finito em H. Neste caso, mostre que

$$[G : K] = [G : H][H : K].$$

(6) Neste exercício vamos construir um grupo não abeliano, contendo 8 elementos, cujos subgrupos são todos normais. Considere o seguinte subconjunto de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$:

$$Q_8 = \{Id, -Id, I, -I, J, -J, K, -K\},$$

em que

$$Id = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

(*a*) Verifique as seguintes identidades abaixo:

- $I^2 = J^2 = K^2 = -Id$
- $IJ = K = -JI$;
- $IK = -J = KI$;
- $JK = I = -KJ$.

(*b*) Mostre que Q_8 com o produto usual de matrizes é um grupo não abeliano de ordem 8.

(***c***) Encontre I^{-1}, J^{-1} e K^{-1}.

(***d***) Calcule as ordens de todos os elementos de Q_8.

(***e***) Liste todos os subgrupos de Q_8.

(***f***) Mostre que todos os subgrupos de Q_8 são normais.

(***g***) Determine o centro $\mathcal{Z}(Q_8)$ de Q_8.

1.4 Subgrupos normais e quocientes

(1) Seja H um subgrupo de índice 2 em um grupo G. Mostre que H é normal em G.

(6)

1.5 Homomorfismos de grupos

1.6 Grupos de Permutações

(1) Podemos descrever o grupo S_n com dois geradores, σ e τ, onde temos

$$S_n = \langle \sigma, \tau | \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{n-1}\tau \rangle$$

(*a*) Descreva os elementos de S_3.

(*b*) Encontre $0 \leq m, n \leq 4$ tais que $\sigma^{2020}\tau^{2019}\sigma^{2018}\tau^{2017}\sigma^{2016} = \sigma^n\tau^m \in S_5$.

(*c*) Escreva os elementos de S_4 e suas respectivas ordens baseado na representação dada acima.

(2) Seja H um subgrupo de S_n. Mostre que $H \subseteq A_n$ ou $[H : H \cap A_n] = 2$.

(3) Podemos representar um n-ciclo por $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

(*a*) Qual é a ordem de um n-ciclo?

(*b*) Qual é a ordem de um produto de r ciclos disjuntos de ordens $n_1, n_2, \ldots, n_r$?

(*c*) Para quais inteiros positivos m um m-ciclo é uma permutação par?

(4) Seja p um número primo.Mostre que todo elemento de ordem p em S_p é um p-ciclo. Mostre que S_p não possui elemento de ordem kp, para $k \geq 2$.

(5) Sejam t e n inteiros positivos e p um primo. Mostre que o grupo S_n possui elementos de ordem p^t se, e somente se, $n \geq p^t$.

(6) Mostre que as possíveis ordens dos elementos do grupo S_7 são $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10$ e 12.
A título de curiosidade, vale a pena citar o seguinte Teorema de Landau sobre o crescimento assintótico das ordens em elementos de S_n :

Teorema 1 (Landau)**.** *Se $\mathcal{G}(n)$ é a maior ordem possível para um elemento de S_n, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \mathcal{G}(n)}{\sqrt{n \ln n}} = 1$$

(7) Vamos ver como se comportam os geradores de S_n.

(*a*) Mostre que S_n é gerado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & n-1 \,, & 1 & n \end{pmatrix}$.

(*b*) Mostre que S_n é gerado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

(*c*) Mostre que A_n é gerado pelos 3-ciclos de S_n, se $n \geq 3$.

(8) Seja G um subgrupo de S_5 gerado pelo ciclo $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$ e pelo elemento $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Prove que $G \cong D_5$, onde D_5 é o grupo diedral de ordem 10.

(9) Seja $\varphi \colon D_4 \to C_{24}$ um homomorfismo. Mostre que para todo $\alpha \in D_4$, temos que $\varphi(\alpha^2) = e$.

(10) Seja $\sigma \in S_n$ o r-ciclo $i_1 \quad i_2 \quad \ldots \quad i_r$ e seja $\alpha \in S_n$.

(a) Mostre que
$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha(i_1) & \alpha(i_2) & \ldots & \alpha(i_r) \end{pmatrix}.$$

(b) Se σ, τ são dois r-ciclos, mostre que existe $\alpha \in S_n$ tal que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \tau$.

(c) Prove que duas permutações são conjugadas se e somente se elas têm a mesma estrutura cíclica.

(11) Mostre que A_4 não contém subgrupos de ordem 6 (e portanto, não vale a recíproca do Teorema de Lagrange).

(12) Uma matriz de permutação é uma matriz obtida a partir da matriz identidade $n \times n$ permutando-se suas colunas. Denote por P_n o conjunto de todas as matrizes de permutação $n \times n$.

(a) Mostre que P_n forma um grupo com a multiplicação usual de matrizes.

(b) Mostre que a função
$$\begin{array}{rccc} \theta & : & S_n & \longrightarrow & P_n \\ & & \sigma & \longmapsto & \theta(\sigma) \end{array},$$
em que $\theta(\sigma)$ denota a mattriz cuja i-ésima coluna coincide com a $\sigma(i)$-ésima coluna da matriz identidade, é um isomorfismo.

(c) Prove que $\text{sgn}(\sigma) = \det(\theta(\sigma))$.

(d) Ficou confuso sobre o que esta questão quer dizer? Considere as matrizes
$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Verifique $\sigma^3 = \tau^2 = I_3$, onde I_3 denota a matriz identidade 3×3, e verifique que σ e τ satisfazem as condições da presentação de S_3 apresentada na questão 1. Ou seja, temos uma representação matricial para o grupo de permutações S_3.

(13) Mostre que D_n é isomorfo ao subgrupo de S_n gerado pelas permutações
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(14) Determine todos os subgrupos normais de S_4.

(15) Ecnontre um grupo G que contenha subgrupos H e K tais que K seja normal em H, H seja normal em G, mas K não seja normal em G.

(16) Seja $n = 3$ ou $n \geq 5$. Mostre que $\{e\}$, A_n e S_n são os únicos subgrupos normais de S_n. (em particular, A_n é o único subgrupo de S_n de índice 2.)

(17) Prove que o número de subgrupos de D_n é $\sigma(n) + \tau(n)$, onde $\tau(n)$ representa a quantidade de divisores positivos de n e $\sigma(n)$ representa a soma dos divisores de n.

1.7 Produto Direto

(18) Sejam G_1, G_2, G_3 grupos. Mostre que $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$ e que $G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$.

(19) Sejam $G_1, \ldots, G_n$ grupos e seja $a = (a_1, \ldots, a_n)$ um elemento do produto direto $G_1 \times \ldots \times G_n$. Suponha que, para cada $i = 1, \ldots, n$, o elemento a_i tenha ordem finita r_i no grupo G_i. Mostre que a ordem de a em G é igual a $\text{mmc}(r_1, \ldots, r_n)$.

(20) Considere

$$\mathcal{S}_k = \prod_{i=2}^{k} S_i$$

Encontre a ordem do elemento $a = \left(\sigma\tau^2\sigma^0, \sigma^2\tau^3\sigma^{-1}, \sigma^2\tau^4\sigma^{-2}, \ldots, \sigma^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor}\tau^k\sigma^{-\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}\right) \in \mathcal{S}_k$.

(21)

- **(a)** Seja G um grupo e sejam H e K subgrupos normais de G tais que $HK = G$ e $H \cap K = \{e_G\}$. Mostre que $G \cong H \times K$.
- **(b)** Sejam G_1 e G_2 dois grupos e seja $G = G_1 \times G_2$ o produto direto deles. Considere os seguintes subconjuntos de G :

$$H = \{(a_1, e_2) : a_1 \in G_1\} \quad \text{e} \quad K = \{(e_1, a_2) : a_2 \in G_2\}$$

onde e_i denota o elemento identidade do grupo G_i. Mostre que H e K são subgrupos normais de G tais que $HK = G$ e $H \cap K = \{e_G\}$.

(22) Sejam G_1, G_2 grupos, seja N_1 um subgrupo normal de G_1 e seja N_2 um subgrupo normal de G_2. Mostre que $N_1 \times N_2$ é um subgrupo normal de $G_1 \times G_2$ e que

$$\frac{G_1 \times G_2}{N_1 \times N_2} \cong \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2}$$

(23) Seja G um grupo e sejam $H_1, \ldots, H_n$ subgrupos normais de G tais que $G = H_1 \ldots H_n$ e $H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1} = \{e\}$, para todo $i = 2, \ldots, n$. Mostre que G é isomorfo ao produto direto de $H_1, \ldots, H_n$. Dizemos, neste caso, que G é produto direto interno de $H_1, \ldots, H_n$.

(24) Seja G um grupo e sejam $H_1, \ldots, H_n$ subgrupos de G. Mostre que G é produto direto interno de $H_1, \ldots, H_n$ se, e somente se

- **(a)** $h_i h_j = h_j h_i$, $\forall\ h_i \in H_i$ e $h_j \in H_j$, com $i \neq j$, e
- **(b)** Todo elemento de $g \in G$ se escreve de maneira única na forma

$$g = h_1 \cdots h_n,$$

com $h_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, n$.

(25) Para todo $n \geq 1$, denotaremos por C_n o grupo cíclico de ordem n. Mostre que $C_n \times C_m$ é cíclico se e somente se $\mathrm{mdc}(m,n) = 1$ e que, neste caso, $C_n \times C_m \cong C_{mn}$.

(26) Verifique que $C_4 \times C_6 \cong C_{12}$. De fato, $C_m \times C_n \cong C_{\mathrm{mmc}(m,n)}$.

(27) Dizemos que um grupo G é o produto semidireto (interno) de N por H se G contém subgrupos N e H tais que

(i) $N \lhd G$;

(ii) $NH = G$;

(iii) $N \cap H = \{e\}$.

Resolva cada um dos itens abaixo:

(a) Mostre que se G é o produto semidireto interno de N por H, então os elementos de G podem ser expressos de maneira única na forma nh, com $n \in N$ e $h \in H$.

(b) Seja G um produto semidireto de N por H. Mostre que

$$\begin{array}{rccl} \theta : & H & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(N) \\ & h & \longmapsto & \theta_h \end{array},$$

com $\theta_h(n) = hnh^{-1}$, $\forall n \in N$, é um homomorfismo.

(c) Sejam N e H dois grupos e seja $\theta\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ um homomorfismo. Defina a seguinte operação binária no conjunto $N \times K = \{(n,k) : n \in N, h \in H\}$:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1\theta_{h_1}(n_2), h_1h_2)$$

Mostre que $N \times H$ com essa operação binária forma um grupo, chamado produto semidireto (externo) de N por H e denotado por $N \rtimes_\theta H$.

(d) Mostre que

$$N^* = \{(n,e) \in N \rtimes_\theta H : n \in N\}$$

é um subgrupo normal de $N \rtimes_\theta H$ e que $N \rtimes_\theta H$ é o produto semidireto interno de N^* por

$$H^* = \{(e,h) \in N \rtimes_\theta H : h \in H\}$$

(e) Mostre que se G é o produto semidireto interno de N por H, então $G \cong N \rtimes_\theta H$, onde θ é o homomorfismo do item (b).

(f) Mostre que o grupo diedral D_n é um produto semidireto de um grupo cíclico de ordem n por um grupo cíclico de ordem 2.

(28) Prove que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$, onde

$$\begin{array}{rccl} \theta : & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3) \\ & x & \longmapsto & \theta_x \end{array},$$

onde $\theta_{\bar{0}} = 1_{\mathbb{Z}_3}$ e $\theta_{\bar{1}} = (x \mapsto -x)$.

1.8 Grupos Abelianos Finitos

(29) Descreva todos os grupos abelianos de ordem $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$.

(30) Mostre que um grupo abeliano finito não é cíclico se e somente se ele contiver um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ para algum primo p positivo.

(31) Verifique que $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ é um grupo abeliano finito que não é cíclico.

(32) Mostre que D_{91}, com ordem 182, não contém subgrupos cíclicos de ordem 14.

(33) Mostre que se a ordem de um grupo abeliano não for divisível por um quadrado então o grupo é cíclico.

(34) Sejam G_1, G_2, G_3 grupos abelianos finitos. Mostre que, se

$$G_1 \times G_2 \cong G_1 \times G_3,$$

então $G_2 \cong G_3$.

(35) Seja G um grupo e $\mathcal{Z}(G)$ o centro de G.

(*a*) Mostre que se $G/\mathcal{Z}(G)$ for cíclico, então G será abeliano.

(*b*) Mostre que se G tem ordem p^2, onde p é um número primo, então G é abeliano.

(*c*) Suponha que G não seja abeliano e que $|G| = p^3$, onde p é um número primo. Mostre que $\mathcal{Z}(G) = G'$ e que $G/\mathcal{Z}(G) \cong C_p \times C_p$, onde C_p denota o grupo cíclico de ordem p.

1.9 Ações de Grupo

(36) Seja G um grupo de ordem p^k, onde p é um número primo e $k > 0$. Mostre que se H é um subgrupo de ordem p^{k-1}, então H é normal em G.

(37) Seja G um p-grupo finito, onde p é um número primo positivo. Seja H um subgrupo normal de G tal que $H \neq \{e\}$. Mostre que $H \cap \mathcal{Z}(G) \neq \{e\}$.

(38) Seja G um grupo agindo num conjunto X. Dizemos que a ação de G em X é *livre* se $\mathrm{Stab}(x) = \{e_G\}$, para todo $x \in X$. Mostre que se a ação de G em X é livre, então $\left|\mathcal{O}(x)\right| = |G|$, para todo $x \in X$.

(39) Seja G um grupo que age em um conjunto S. Para cada $g \in G$, considere o seguinte subconjunto de S :

$$S^g = \{x \in S \colon g \cdot x = x\}$$

Mostre que o número de órbitas distintas da ação de G em S é dado por

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S^g| .$$

2 Soluções

2.1 Grupos de Permutações

(1) Podemos descrever o grupo S_n com dois geradores, σ e τ, onde temos

$$S_n = \langle \sigma, \tau | \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma = \sigma^{n-1}\tau \rangle$$

(a) Descreva os elementos de S_3.

(b) Encontre $0 \leq m, n \leq 4$ tais que $\sigma^{2020}\tau^{2019}\sigma^{2018}\tau^{2017}\sigma^{2016} = \sigma^n\tau^m \in S_5$.

(c) Escreva os elementos de S_4 e suas respectivas ordens baseado na representação dada acima.

Solução:

(a) Baseado na representação dada no enunciado, temos que

$$S_3 = \{1, \sigma, \sigma^2, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau\}$$

(b) Em S_5, temos que $\sigma^5 = 1$, e $\tau\sigma = \sigma^4\tau$. Desse modo,

$$\sigma^{2020}\tau^{2019}\sigma^{2018}\tau^{2017}\sigma^{2016} =$$

$$\sigma^{2020}\tau(\tau^{2018}\sigma^{2018})\tau(\tau^{2016}\sigma^{2016}) =$$

Encontre $0 \leq m, n \leq 4$ tais que $\sigma^{2020}\tau^{2019}\sigma^{2018}\tau^{2017}\sigma^{2016} = \sigma^n\tau^m \in S_5$.

(c) Escreva os elementos de S_4 e suas respectivas ordens baseado na representação dada acima.

(2) Seja H um subgrupo de S_n. Mostre que $H \subseteq A_n$ ou $[H : H \cap A_n] = 2$.

(3) Podemos representar um n-ciclo por $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

(a) Qual é a ordem de um n-ciclo?

(b) Qual é a ordem de um produto de r ciclos disjuntos de ordens $n_1, n_2, \ldots, n_r$?

(c) Para quais inteiros positivos m um m-ciclo é uma permutação par?

(4) Seja p um número primo.Mostre que todo elemento de ordem p em S_p é um p-ciclo. Mostre que S_p não possui elemento de ordem kp, para $k \geq 2$.

(5) Sejam t e n inteiros positivos e p um primo. Mostre que o grupo S_n possui elementos de ordem p^t se, e somente se, $n \geq p^t$.

(6) Mostre que as possíveis ordens dos elementos do grupo S_7 são $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10$ e 12.
(7) Vamos ver como se comportam os geradores de S_n.

(*a*) Mostre que S_n é gerado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & n-1 \ , \ 1 & n \end{pmatrix}$.

(*b*) Mostre que S_n é gerado por $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

(*c*) Mostre que A_n é gerado pelos 3-ciclos de S_n, se $n \geq 3$.

(8) Seja G um subgrupo de S_5 gerado pelo ciclo $1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$ e pelo elemento $\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. Prove que $G \cong D_5$, onde D_5 é o grupo diedral de ordem 10.

(9) Seja $\varphi \colon D_4 \to C_{24}$ um homomorfismo. Mostre que para todo $\alpha \in D_4$, temos que $\varphi(\alpha^2) = e$.

(10) Seja $\sigma \in S_n$ o r-ciclo $i_1 \quad i_2 \quad \ldots \quad i_r$ e seja $\alpha \in S_n$.

(*a*) Mostre que

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha(i_1) & \alpha(i_2) & \ldots & \alpha(i_r) \end{pmatrix}.$$

(*b*) Se σ, τ são dois r-ciclos, mostre que existe $\alpha \in S_n$ tal que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \tau$.

(*c*) Prove que duas permutações são conjugadas se e somente se elas têm a mesma estrutura cíclica.

(11) Mostre que A_4 não contém subgrupos de ordem 6 (e portanto, não vale a recíproca do Teorema de Lagrange).

(12) Uma matriz de permutação é uma matriz obtida a partir da matriz identidade $n \times n$ permutando-se suas colunas. Denote por P_n o conjunto de todas as matrizes de permutação $n \times n$.

(*a*) Mostre que P_n forma um grupo com a multiplicação usual de matrizes.

(*b*) Mostre que a função

$$\begin{array}{cccc} \theta & : & S_n & \longrightarrow & P_n \\ & & \sigma & \longmapsto & \theta(\sigma) \end{array},$$

em que $\theta(\sigma)$ denota a mattriz cuja i-ésima coluna coincide com a $\sigma(i)$-ésima coluna da matriz identidade, é um isomorfismo.

(*c*) Prove que $\operatorname{sgn}(\sigma) = \det(\theta(\sigma))$.

(*d*) Ficou confuso sobre o que esta questão quer dizer? Considere as matrizes

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifique $\sigma^3 = \tau^2 = I_3$, onde I_3 denota a matriz identidade 3×3, e verifique que σ e τ satisfazem as condições da presentação de S_3 apresentada na questão 1. Ou seja, temos uma representação matricial para o grupo de permutações S_3.

(13) Mostre que D_n é isomorfo ao subgrupo de S_n gerado pelas permutações

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(14) Determine todos os subgrupos normais de S_4.

(15) Ecnontre um grupo G que contenha subgrupos H e K tais que K seja normal em H, H seja normal em G, mas K não seja normal em G.

(16) Seja $n = 3$ ou $n \geq 5$. Mostre que $\{e\}$, A_n e S_n são os únicos subgrupos normais de S_n. (em particular, A_n é o único subgrupo de S_n de índice 2.)

(17) Prove que o número de subgrupos de D_n é $\sigma(n) + \tau(n)$, onde $\tau(n)$ representa a quantidade de divisores positivos de n e $\sigma(n)$ representa a soma dos divisores de n.

2.2 Produto Direto

(18) Sejam G_1, G_2, G_3 grupos. Mostre que $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$ e que $G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong (G_1 \times G_2) \times G_3$.

(19) Sejam $G_1, \ldots, G_n$ grupos e seja $a = (a_1, \ldots, a_n)$ um elemento do produto direto $G_1 \times \ldots \times G_n$. Suponha que, para cada $i = 1, \ldots, n$, o elemento a_i tenha ordem finita r_i no grupo G_i. Mostre que a ordem de a em G é igual a $\text{mmc}(r_1, \ldots, r_n)$.

(20) Considere

$$\mathcal{S}_k = \prod_{i=2}^{k} S_i$$

Encontre a ordem do elemento $a = \left(\sigma\tau^2\sigma^0, \sigma^2\tau^3\sigma^{-1}, \sigma^2\tau^4\sigma^{-2}, \ldots, \sigma^{\left\lfloor\frac{k+1}{2}\right\rfloor}\tau^k\sigma^{-\left\lfloor\frac{k-1}{2}\right\rfloor}\right) \in \mathcal{S}_k$.

(21)

(*a*) Seja G um grupo e sejam H e K subgrupos normais de G tais que $HK = G$ e $H \cap K = \{e_G\}$. Mostre que $G \cong H \times K$.

(*b*) Sejam G_1 e G_2 dois grupos e seja $G = G_1 \times G_2$ o produto direto deles. Considere os seguintes subconjuntos de G :

$$H = \{(a_1, e_2) : a_1 \in G_1\} \quad \text{e} \quad K = \{(e_1, a_2) : a_2 \in G_2\}$$

onde e_i denota o elemento identidade do grupo G_i. Mostre que H e K são subgrupos normais de G tais que $HK = G$ e $H \cap K = \{e_G\}$.

(22) Sejam G_1, G_2 grupos, seja N_1 um subgrupo normal de G_1 e seja N_2 um subgrupo normal de G_2. Mostre que $N_1 \times N_2$ é um subgrupo normal de $G_1 \times G_2$ e que

$$\frac{G_1 \times G_2}{N_1 \times N_2} \cong \frac{G_1}{N_1} \times \frac{G_2}{N_2}$$

(23) Seja G um grupo e sejam $H_1, \dots, H_n$ subgrupos normais de G tais que $G = H_1 \dots H_n$ e $H_i \cap H_1 \dots H_{i-1} = \{e\}$, para todo $i = 2, \dots, n$. Mostre que G é isomorfo ao produto direto de $H_1, \dots, H_n$. Dizemos, neste caso, que G é produto direto interno de $H_1, \dots, H_n$.

(24) Seja G um grupo e sejam $H_1, \dots, H_n$ subgrupos de G. Mostre que G é produto direto interno de $H_1, \dots, H_n$ se, e somente se

(a) $h_i h_j = h_j h_i$, $\forall\ h_i \in H_i$ e $h_j \in H_j$, com $i \neq j$, e

(b) Todo elemento de $g \in G$ se escreve de maneira única na forma

$$g = h_1 \cdots h_n,$$

com $h_i \in H_i$, $i = 1, \dots, n$.

(25) Para todo $n \geq 1$, denotaremos por C_n o grupo cíclico de ordem n. Mostre que $C_n \times C_m$ é cíclico se e somente se $\mathrm{mdc}(m, n) = 1$ e que, neste caso, $C_n \times C_m \cong C_{mn}$.

(26) Verifique que $C_4 \times C_6 \cong C_{12}$. De fato, $C_m \times C_n \cong C_{\mathrm{mmc}(m,n)}$.

(27) Dizemos que um grupo G é o produto semidireto (interno) de N por H se G contém subgrupos N e H tais que

(i) $N \lhd G$;

(ii) $NH = G$;

(iii) $N \cap H = \{e\}$.

Resolva cada um dos itens abaixo:

(a) Mostre que se G é o produto semidireto interno de N por H, então os elementos de G podem ser expressos de maneira única na forma nh, com $n \in N$ e $h \in H$.

(b) Seja G um produto semidireto de N por H. Mostre que

$$\begin{array}{rcccl} \theta & : & H & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(N) \\ & & h & \longmapsto & \theta_h \end{array},$$

com $\theta_h(n) = hnh^{-1}$, $\forall n \in N$, é um homomorfismo.

(c) Sejam N e H dois grupos e seja $\theta\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ um homomorfismo. Defina a seguinte operação binária no conjunto $N \times K = \{(n, k) : n \in N, h \in H\}$:

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) = (n_1 \theta_{h_1}(n_2), h_1 h_2)$$

Mostre que $N \times H$ com essa operação binária forma um grupo, chamado produto semidireto (externo) de N por H e denotado por $N \rtimes_\theta H$.

(*d*) Mostre que
$$N^* = \{(n,e) \in N \rtimes_\theta H : n \in N\}$$
é um subgrupo normal de $N \rtimes_\theta H$ e que $N \rtimes_\theta H$ é o produto semidireto interno de N^* por
$$H^* = \{(e,h) \in N \rtimes_\theta H : h \in H\}$$

(*e*) Mostre que se G é o produto semidireto interno de N por H, então $G \cong N \rtimes_\theta H$, onde θ é o homomorfismo do item (b).

(*f*) Mostre que o grupo diedral D_n é um produto semidireto de um grupo cíclico de ordem n por um grupo cíclico de ordem 2.

(28) Prove que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$, onde
$$\begin{array}{rccl} \theta : & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_3) \\ & x & \longmapsto & \theta_x \end{array},$$
onde $\theta_{\overline{0}} = 1_{\mathbb{Z}_3}$ e $\theta_{\overline{1}} = (x \mapsto -x)$.

2.3 Grupos Abelianos Finitos

(29) Descreva todos os grupos abelianos de ordem $2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$.

(30) Mostre que um grupo abeliano finito não é cíclico se e somente se ele contiver um subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ para algum primo p positivo.

(31) Verifique que $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ é um grupo abeliano finito que não é cíclico.

(32) Mostre que D_{91}, com ordem 182, não contém subgrupos cíclicos de ordem 14.

(33) Mostre que se a ordem de um grupo abeliano não for divisível por um quadrado então o grupo é cíclico.

(34) Sejam G_1, G_2, G_3 grupos abelianos finitos. Mostre que, se
$$G_1 \times G_2 \cong G_1 \times G_3,$$
então $G_2 \cong G_3$.

(35) Seja G um grupo e $\mathcal{Z}(G)$ o centro de G.

(*a*) Mostre que se $G/\mathcal{Z}(G)$ for cíclico, então G será abeliano.

(*b*) Mostre que se G tem ordem p^2, onde p é um número primo, então G é abeliano.

(*c*) Suponha que G não seja abeliano e que $|G| = p^3$, onde p é um número primo. Mostre que $\mathcal{Z}(G) = G'$ e que $G/\mathcal{Z}(G) \cong C_p \times C_p$, onde C_p denota o grupo cíclico de ordem p.

2.4 Ações de Grupo

(36) Seja G um grupo de ordem p^k, onde p é um número primo e $k > 0$. Mostre que se H é um subgrupo de ordem p^{k-1}, então H é normal em G.

(37) Seja G um p-grupo finito, onde p é um número primo positivo. Seja H um subgrupo normal de G tal que $H \neq \{e\}$. Mostre que $H \cap \mathcal{Z}(G) \neq \{e\}$.

(38) Seja G um grupo agindo num conjunto X. Dizemos que a ação de G em X é *livre* se $\mathrm{Stab}(x) = \{e_G\}$, para todo $x \in X$. Mostre que se a ação de G em X é livre, então $\left|\mathcal{O}(x)\right| = |G|$, para todo $x \in X$.

(39) Seja G um grupo que age em um conjunto S. Para cada $g \in G$, considere o seguinte subconjunto de S :

$$S^g = \{x \in S \colon g \cdot x = x\}$$

Mostre que o número de órbitas distintas da ação de G em S é dado por

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |S^g| \, .$$