OSTBAYERISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE REGENSBURG

INFORMATIK UND MATHEMATIK

Studiengang
IN, IT (B. Sc.)
Wintersemester 2020/21

Probe-Klausur Computerarithmetik und Rechenverfahren

Aufgabensteller: Martin Weiß
Prüfungstermin: real: XX.YY.ZZZZ
Arbeitszeit: 90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:
Kurzskript,
2 handgeschriebene Seiten,
Formelsammlung,
kein Taschenrechner

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Studiengruppe: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Anzahl Zusatzblätter: __________

Platznummer: ______________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punkte								

Hinweise:

- Diese Prüfung besteht aus 6 Aufgaben.
- Alle Angabenblätter sind abzugeben.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben bitte auf den Angabenblättern (auch Rückseite benutzen). Bei Abgabe von Zusatzblättern, bitte ihre Anzahl auf der Angabe vermerken.
- Ergebnisse sind zu begründen und durch die entsprechenden Rechenschritte nachzuweisen, sofern nicht anders angegeben.
- Schreiben Sie mit einem nichtradierbaren Stift (z.B. Kugelschreiber, Füllfeder).

Aufgabe 1 (4 + 6 Punkte)

Gegeben seien Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die Inverse B^{-1}, und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -4 & 22 & -18 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -66 \end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie die *LR*-Zerlegung von A und lösen Sie damit $Ax = b$. Wenn Sie die *LR*-Zerlegung nicht bestimmen können, verwenden Sie die (*falschen*) Matrizen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -18 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 28 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie die Norm und Kondition von B bzgl. der ∞-Norm an.

c) Mit welcher relativen Genauigkeit bzgl. der ∞-Norm muss b gemessen werden, damit das Gleichungssystem $Bx = b$ mit relativer Genauigkeit von 4% gelöst werden kann? Wenn Sie b) nicht lösen konnten, verwenden Sie $\kappa_\infty(B) = 20$.

Aufgabe 2 (7 + 3 Punkte)

Die Fließkommazahlen nach IEEE 754-Standard mit einfacher Genauigkeit x_1, x_2 seien in Variablen `float x1, x2;` gespeichert. Ihre Werte sind als Bitmuster gegeben:

Variable	Byte 1	Byte 2	Byte 3	Byte 4
x1	01000010	01100110	00000000	00000000
x2	01100111	01000000	00000000	00000000

Welchen Wert als bit-Muster haben die Variablen `y1, y2, y3`, nachdem folgende Anweisungen durchlaufen wurden? Stellen, die mit `*` markiert sind, müssen Sie nicht angeben.

```
float y1 = x1 / (-128.0);
float y2 = x2 * x2;
float y3 = -8.25;
```

	Byte 1	Byte 2	Byte 3	Byte 4
y1			********	********
y2			********	********
y3			********	********

Aufgabe 3 (10 Punkte)

[Eine komplett lineare Aufgabe ist in der Probeklausur vom SoSe 2018.]

Der Zerfall von radioaktivem Material kann mit dem Exponentialgesetz $M(t) = M_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$ beschrieben werden mit einer vom Material abhängigen Konstante; dabei ist M_0 die Menge Material [g] zur Zeit $t = 0$ (Anfang der Beobachtung), t die Zeit [Jahre]. Über eine weitere Konstante γ ergibt sich die Radioaktivität [Tera-Bequerel] als $A(t) = \gamma \cdot M(t)$. Die Konstanten betragen $\alpha_K = 0.1315, \gamma_K = 44$ für Kobalt 60, und $\alpha_C = 0.023$, $\gamma_C = 3.215$ für Cäsium 137.

Ein Behälter mit radioaktivem Abfall enthält eine unbekannte Menge Cäsium 137 und Kobalt 60. Über mehrere Jahre wurde die Gesamt-Radioaktivität des Fasses gemessen:

t	0	1	2	3	4	5	6
$A(t)$	103	91	81	73	65	58	53

a) Stellen Sie ein lineares Regressionsmodell auf, mit dem die Menge Cäsium 137 und Kobalt 60 zur Zeit $t = 0$ ermittelt werden kann. Benennen Sie insbesondere Ihre Variablen. Geben Sie die Matrixform an. Schreiben Sie dabei α_K usw. als Variablen, nicht die numerischen Werte. Sie sollen das Ausgleichsproblem **nicht** lösen.

b) Auf fernen Planeten gibt es Vorkommen eines stabilen Isotops des Elements 115 Moscovium mit genau denselben Konstanten wie Caesium 137, $\alpha_M = \alpha_C$, $\gamma_M = \gamma_C$. Zum Antrieb von Raumschiffen verwendet man eine Mischung von Caesium 137 und diesem radioaktivem Moscovium. Über mehrere Jahre wurde die Gesamt-Radioaktivität eines Treibstoffbehälters gemessen, dabei ergab sich genau dieselbe Tabelle wie oben.

   Können Sie mit Ihrem Modell die Mengen Cäsium 137 und Moscovium zur Zeit $t = 0$ ermitteln?

c) Jemand behauptet: Das Modell ist nichtlinear in den α's. Wenn man den Logarithmus verwendet, kann man auf andere Variablen wechseln, und könnte sogar die Zerfallskonstanten aus den Daten ermitteln.

   Was sagen Sie dazu?

Aufgabe 4 (4 + 6 Punkte)

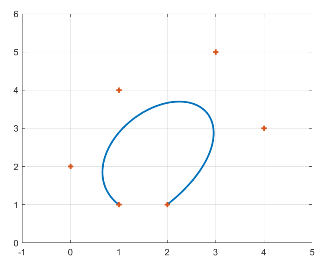
a) Für das Bundesland Bayern soll aus den Corona-Daten der 71 Landkreise ein Mittelwert gebildet werden. Die Variablen `inzidenz` und `bevoelkerung` enthalten als Spaltenvektoren die 7-Tage-Inzidenz pro 100000 Einwohner I_l, und die Bevölkerungszahl B_l für die Landkreise $l = 1, \dots, 71$. Die mittlere Inzidenz I ergibt sich gemäß $I = \frac{1}{\sum_{l=1}^{71} B_l} \sum_{l=1}^{71} I_l \cdot B_l$. Geben Sie dafür einen möglichst einfachen MATLAB-Ausdruck ohne Schleifen an.

b) Die Funktion `plotBezier` soll gemäß der Formel

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} P_k, \ \lambda \in [0,1]$$

eine Bezier-Kurve zu Punkten $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ zeichnen, die spaltenweise in der Matrix P übergeben werden. Weiter sollen die Punkte P_i mit einem Kreuz markiert werden, siehe die Kommandos mit zugehöriger Ausgabe rechts.
Die Implementierung enthält Fehler – nicht nur Syntaxfehler. Markieren Sie die Fehler, erklären Sie jeweils das Problem, und geben Sie eine korrekte Version an. (Die MATLAB-Funktion `nchoosek` berechnet den Binomialkoeffizienten.)

```
P = [1 0 1 3 4 2
     1 2 4 5 3 1];
plotBezier(P);
axis([-1 5 0 6]);
grid on
```




```
function plotBezier(P)
figure(1); clf;
[~,n] = size(P);
lambda = 0:0.01:1;
B = zeros(2,length(lambda));
for k=0:n
{
    B += nchoosek(n,k)*P[:,k]
        *lambda^k.*(1-lambda)^(n-k);
}
plot(B(1,:),B(2,:), 'LineWidth', 2);
plot(P(1,:),P(2,:), '+', 'LineWidth', 2);
end
end
```

Aufgabe 5 (9 + 4 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob die Funktionen die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllen.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f_1(x) = \sin(x) \\ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f_2(x) = \tfrac{1}{2}\sin(x) + 100 \\ f_3 : (-\infty, 0] \to [99, 101], &\quad f_3(x) = \tfrac{1}{2}\sin(x) + 100 \end{aligned}$$

b) Geben Sie die Newton-Iteration und die Sekanten-Iteration an für die Lösung der nichtlinearen Gleichung $x + x^2 - \frac{1}{3}\cos(x) = 7$

Aufgabe 6 (4 + 6 Punkte)

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2 \\ e^{x_1 - 1} + {x_2}^3 - 2 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot \ln(1 + x_2^2)$$