Datum: 16. Juli 2014 Zeit: 11:00 Ort: U213

Signalverarbeitung

Modulschlussprüfung Sommersemester 2014

Name: ________________________ Matrikel-Nummer: ______________Platz: ______

Zeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: Cheat Sheet (1 Blatt = 2 Seiten)

Vorgehen:

1. Legen Sie Ihren Studierendenausweis auf den Tisch.
2. Schalten Sie Ihre Mobiltelefone aus!
3. Tragen Sie Namen, Matrikelnummer sowie Platznummer jetzt gleich auf dem Deckblatt ein.
4. Kontrollieren Sie, ob Sie alle Aufgabenblätter erhalten haben.
5. Schreiben Sie auf jedes abzugebende Zusatzblatt oben rechts Ihren Namen.
6. Streichen Sie ungültige Lösungsteile deutlich durch. Mehrfachlösungen sind falsch.
7. Geben Sie am Prüfungsende Ihre Lösung zusammen mit allen Unterlagen ab.
8. Vorzeitige Abgabe bis maximal 15 Minuten vor Prüfungsende.
9. Bleiben Sie am Prüfungsende sitzen, bis alle Prüfungen eingesammelt wurden!
10. **Bitte lesen Sie die Aufgabenstellungen ganz genau durch!**

Nr.	Aufgabe	max. Punkte	mögl. ZP	Punkte
1	Elementare Signale und Signaleigenschaften	16		
2	Faltung	8		
3	Korrelation	9	5	
4	LTI – Systeme	16		
5	Abtastung	16		
6	Fouriertransformation für Diskrete Zeit (DTFT)	12	4	
7	Diskrete Fouriertransformation (DFT)	15		
8	Z – Transformation	0	22	
	Gesamt	**92**		

1. Aufgabe: Elementare Signale und Signaleigenschaften (20 Punkte)

a) (2P) Ordnen Sie durch Ankreuzen die folgenden Signalbeispiele jeweils einer Signalkategorie zu. (Bewertungshinweis: richtige Zuordnung ½ P, falsche Zuordnung -½ P):

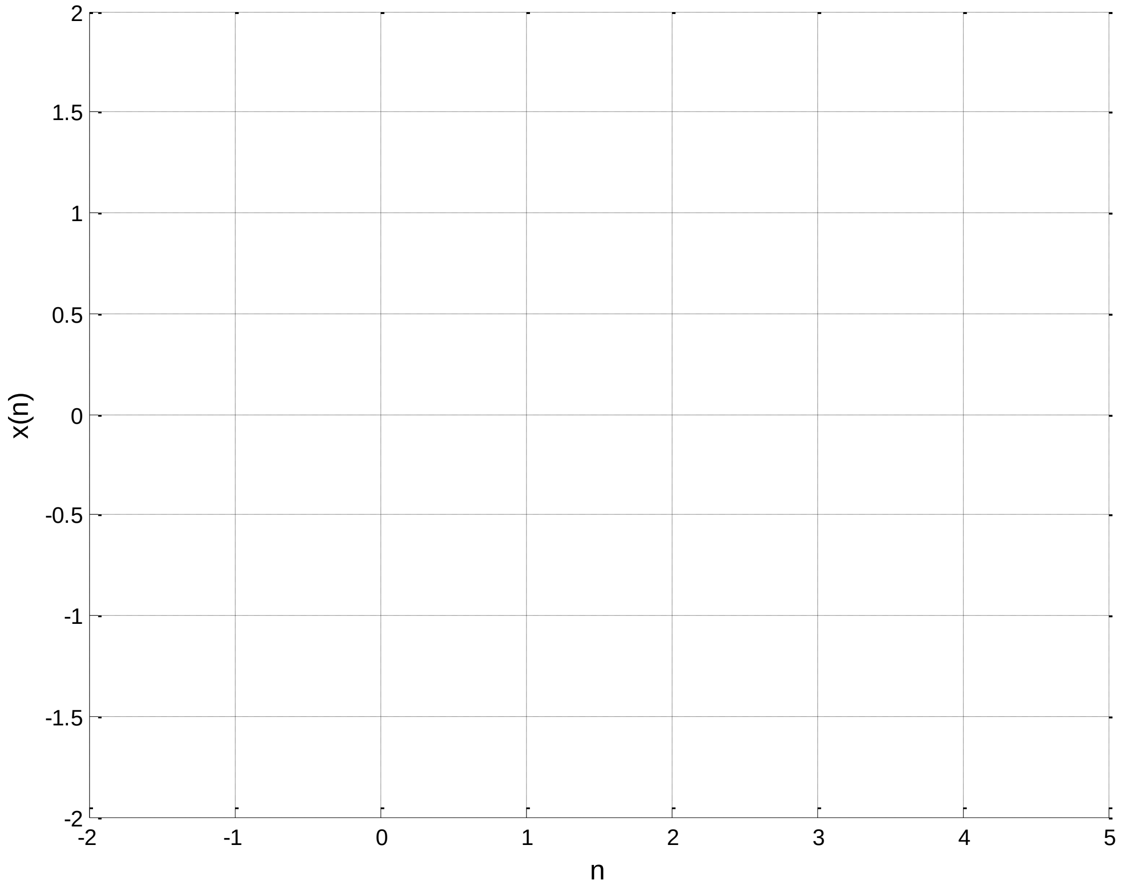
Signalbeispiel	Signalkategorie		
	zeitkontinuierlich	zeitdiskret	digital
Ausgangsspannung an einem Kondensatormikrofon			
Verlauf der monatlichen Niederschlagsmenge			
Kursverlauf eines börsennotierten Unternehmens			
Handy Klingelton			

b) (4P) Gegeben ist das folgende zeitdiskrete Signals $x(n)$

$$x(n) = -\frac{3}{2}u_R(n+1) + 2u(n+1) + 3u_R(n-2) + \frac{5}{2}\delta(n-2)$$

wobei $u_R(n)$ die Einheitsrampe, $u(n)$ den Einheitssprung und $\delta(n)$ den Einheitsimpuls bezeichnet.

Zeichnen Sie $x(n)$ in das nachfolgende Diagramm ein!



c) (7P) Gegeben ist das komplexe Signal $x(n) = 0.9^n \, e^{-j\frac{\pi}{4}n} \, u(n)$.

Das Signal ist (bitte ankreuzen, richtige Auswahl: 1P, falsche Auswahl: -1P):

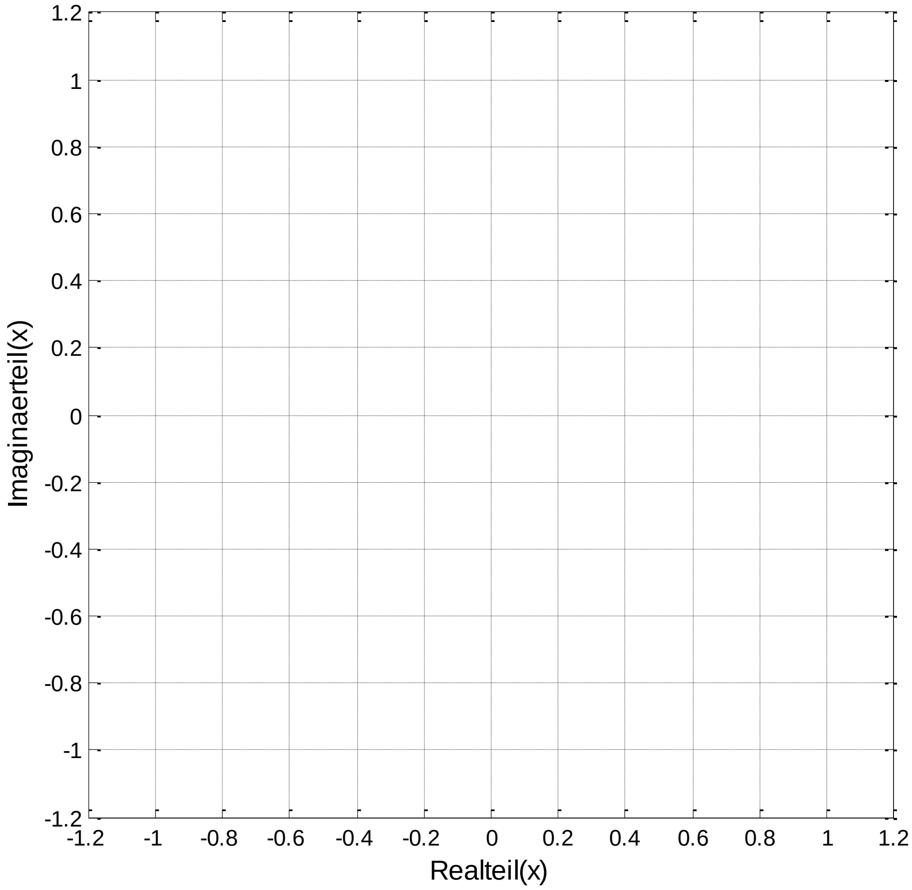
☐ nicht periodisch

☐ ein Energiesignal

☐ absolut summierbar

☐ ein Leistungssignal

Stellen Sie das Signal für $n = 0, 1, \ldots 9$ dar:



d) (3P) Ergänzen Sie den folgenden MATLAB Code, so dass die Aufgabe c) (Darstellung des komplexen Signals $x(n) = 0.9^n\, e^{-j\frac{\pi}{4}n}\, u(n)$) gelöst wird.

```
n = 0:9;




plot (x);
axis(1.2*[-1 1 -1 1])
grid;
xlabel('Realteil(x)'); ylabel('Imaginaerteil(x)');
```

2. Aufgabe: Faltung (8 Punkte)

Gegeben sind zwei zeitdiskrete Signale

$$h(n) = [1,\ \underline{2}\ ,\ 1, -1] \text{ und } x(n) = [\underline{1},\ 2,\ 3,\ 1]$$

(das unterstrichene Element entspricht jeweils dem Zeitindex $n = 0$, alle nicht angegebenen Signalwerte sind 0.) Ermitteln Sie die folgenden Faltungssummen (markieren Sie das Element an der Stelle $n = 0$ ebenfalls durch Unterstreichen!)

a) (5P) $h(n) \star x(n)$

b) (2P) $h(n+1) \star x(n+1)$

c) (1P) $h(n+1) \star x(n-1)$

3. Aufgabe: Korrelation (9+5 Punkte)

In einem Konzertsaal befindet sich eine Audioquelle, die ein Sendesignal $x(n)$ aussendet. Stark vereinfacht, empfängt ein Zuhörer als Empfangssignal $y(n)$ dieses Sendesignal $x(n)$ und zusätzlich (überlagert) ein verzögertes, abgeschwächtes Echo $\alpha x(n - K_{echo})$:

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n - K_{echo})$$

a) (4P) Von $x(n)$ ist nur die Autokorrelationsfunktion $r_{x,x}(l)$ bekannt. Ermitteln Sie daraus die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{y,x}(l)$ zwischen dem Empfangssignal $y(n)$ und dem Sendesignal $x(n)$.

b) (5P) **[Zusatzaufgabe]** Ermitteln Sie daraus ferner die Autokorrelationsfunktion $r_{y,y}(l)$ für das Empfangssignal $y(n)$.

c) (5P) Gegeben sind zwei Signale

$$y(n) = [1,\ \underline{2}\ ,\ 1, -1] \text{ und } x(n) = [1,\ 3,\ 2,\ \underline{1}]$$

Berechnen Sie die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{y,x}(l)$.

4. Aufgabe: LTI – Systeme (16 Punkte)

a) (5P) Die folgende Tabelle gibt Funktionen an, die einen Systemeingang $x(n)$ in einen Systemausgang $y(n)$ übersetzen. Kreuzen Sie an, ob eine solche Funktion ein LTI – System beschreibt oder nicht. (Bewertungshinweis: jede richtige Antwort → 1P, jede falsche Antwort → 1P Abzug)

Die Funktion …	beschreibt ein LTI – System	beschreibt **<u>nicht</u>** ein LTI – System
$y(n) = 3\,x^2(n)$		
$y(n) = 2\,x(n-2) + 5$		
$y(n) = x(n-1) + x(1-n)$		
$y(n) = a(n)\,x(n-2) + 0.9\,x(n-3)$		
$y(n) = x(n) - n$		

b) (11P) Gegeben ist ein LTI – System mit der folgenden Differenzengleichung:

$$y(n-1) = 0.8x(n) + 0.2x(n-1) - y(n)$$

(3P) Zeichnen Sie das dazugehörige Systemblockschaltbild

(1P) Es handelt es sich hierbei um (kreuzen Sie an!) (richtige Antwort: 1P, falsche Antwort -1P)

☐ ein FIR – System

☐ ein IIR – System

(3P) Ermitteln Sie die Impulsantwort $h(n)$ für $n = -2 \dots 3$

n	-2	-1	0	1	2	3
$h(n)$						

(2P) Ist das System kausal? Begründen Sie Ihre Antwort.

(2P) Ist das System BIBO – stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

5. Aufgabe: Abtastung (16 Punkte)

a) (6P) Ein zeitkontinuierliches Signal

$x_a(t) = 2 + 2\cos(150\,\pi t) + 3\cos(110\,\pi t)$

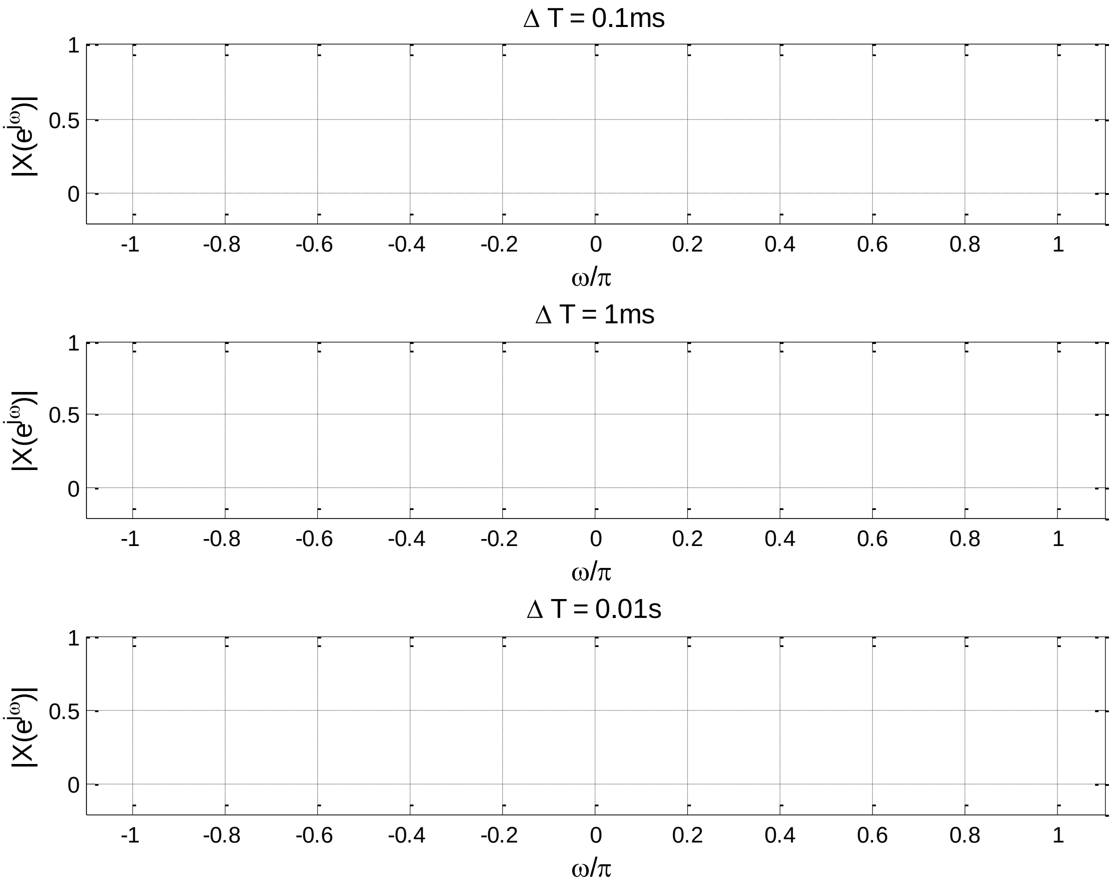
wird mit der Abtastrate $F_s = 100\ samples/s$ abgetastet.

(2P) Ermitteln Sie das zeitdiskrete Signal $x(n)$, das als Ergebnis der Abtastung entsteht

$x(n) =$ ____

(3P) Tritt Aliasing auf? Falls ja, welche zeitkontinuierliche(n) Frequenz(en) erscheinen fehlerhaft?

b) (6P) Ein zeitkontinuierliches Signal $x_a(t) = \sin(1000\,\pi t)$ wird mit dem Abtastintervall ΔT abgetastet. Skizzieren Sie den Betragsverlauf $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ der Fouriertransformierten (DTFT) des zeitdiskreten Signals $x(n) = x_a(n\,\Delta T)$ für $\Delta T = 0.1\ ms$, $\Delta T = 1\ ms$, $\Delta T = 0.01\ s$:



c) (4P) Digitale Speicherfolien für Röntgengeräte haben oft eine nutzbare Bitbreite von $12\ Bit$. Geben Sie das damit erzielbare bestmögliche Signal – Rausch – Verhältnis in dB an. (Rechenweg angeben!)

Angenommen, die Signalleistung sei $P_{Signal} = 1\mu W$. Wie groß ist dann die durch die Quantisierung eingeführte (Quantisierungs-) Rauschleistung? (Rechenweg angeben!)

6. Aufgabe: Fouriertransformation für Diskrete Zeit (DTFT) (12+4 Punkte)

Gegeben sei die Impulsantwort $h(n) = A\,[u(n) - u(n-L)]$ eines LTI – Systems.

a) (3P) Ermitteln Sie hierzu die Übertragungsfunktion $H(e^{j\omega})$. (Rechenweg angeben!)

$H\left(e^{j\omega}\right) =$ ______________________________

b) (4P) Skizzieren Sie den Amplitudengang $|H(j\omega)|$ (Skizze:)

c) (2P) Um welchen Typ von Filter handelt es sich?

Filtertyp: ______________________________

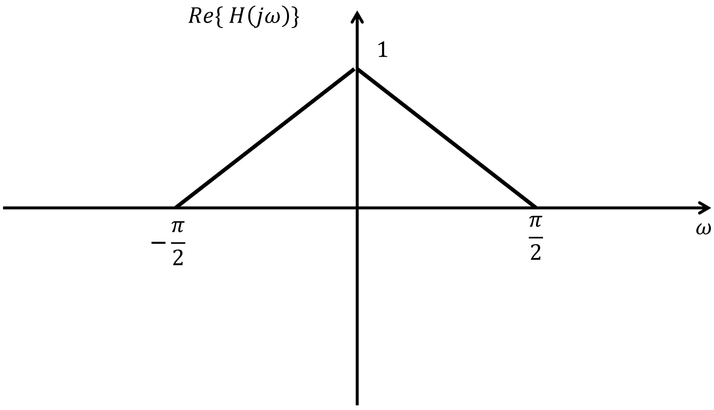
d) (3P) Bewirkt dieses LTI – System für alle Eingangssignale eine einheitliche Verzögerung? (kreuzen Sie an!) (richtige Antwort: 1P, falsche Antwort -1P)

☐ ja, einheitliche Verzögerung für alle Eingangssignale

☐ nein, verschiedene Eingangssignale können unterschiedlich verzögert werden

Begründen Sie Ihre Entscheidung! Falls es eine einheitliche Verzögerung gibt, geben Sie deren Wert an!

e) **[Zusatzaufgabe]** (4P) Gegeben ist die Fouriertransformierte $X(j\omega)$ eines Signals $x(n)$. Im Folgenden ist der Realteil $Re\{X(j\omega)\}$ dargestellt. Der Imaginärteil $Im\{X(j\omega)\}$ ist überall $Im\{X(j\omega)\} = 0$:



Kreuzen Sie an, welche der folgenden Eigenschaften auf das Signal $x(n)$ zutreffen (Bewertungshinweis: jede richtige Antwort +1P, jede falsche Antwort -1P):

☐ $x(n)$ ist rein reellwertig

☐ $x(n)$ ist gerade

☐ $x(n)$ ist ungerade

Geben Sie die Energie $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$ des Signals $x(n)$ an:

$E =$

7. Aufgabe: Diskrete Fourier – Transformation (DFT) (15 Punkte)

a) (3P) Erklären Sie kurz den Unterschied zwischen der Fouriertransformation für diskrete Zeit (DTFT) und der Diskreten Fouriertransformation (DFT). Warum / unter welchen Bedingungen ist die DFT ein sinnvoller Ersatz für die DTFT?

____

____

____

____

b) (2P) Erklären Sie den Unterschied zwischen der Diskreten Fourier – Transformation (DFT) und der Schnellen Fourier – Transformation (FFT)

____

____

____

____

c) (4P) Berechnen Sie die DFT für das Signal $x(n) = [4, 1, -1, 1]$ (Rechenweg angeben!)

$X(k) =$ ____

d) (2P) Berechnen Sie die DFT für das Signal $x(n) = [-1,\ 1, 4, 1]$

$X(k) =$ ____

e) (4P) Gegeben ist die DFT $X(k) = [\,5, -5j, -1, 5j]$. Berechnen Sie daraus das zugehörige Signal $x(n)$.

$x(n) =$ ____

8. Aufgabe: Z – Transformation (22 Punkte)

Gegeben ist ein LTI – System mit folgender Systemfunktion:

$$H(z) = \frac{2 - \sqrt{3}z^{-1}}{1 - \sqrt{3}\,z^{-1} + z^{-2}}$$

a) (4P) Ermitteln Sie die Differenzengleichung für dieses System

$y(n) =$ ______________________________

a) (4P) Zeichnen Sie das Pol – Nullstellen – Diagram (PN-Plan) für dieses System

b) (2P) Ist dieses System BIBO – stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

____

c) (3P) Ist dieses System invertierbar, d.h.: Ist das zu diesem System inverse System BIBO – stabil? Begründen Sie Ihre Antwort!

d) (9P) Ermitteln Sie die Impulsantwort $h(n)$ dieses Systems in geschlossener (analytischer) Form!

$h(n) =$

Anhang:

Nützliche Winkelfunktionswerte:

$\boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\omega}$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7071$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nützliche Beziehungen zwischen Winkelfunktionen:

$$\cos\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\omega$$

$$\cos(\omega - \pi) = \cos(\omega + \pi) = -\cos\omega$$