OSTBAYERISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE REGENSBURG

INFORMATIK UND MATHEMATIK

Studiengang
IN, IT (B. Sc.)
Wintersemester 2020/21

Probe-Klausur Computerarithmetik und Rechenverfahren

Korrekturvorlage

Aufgabensteller: Martin Weiß
Prüfungstermin: X.X.2018
Arbeitszeit: 90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:
Kurzskript,
Formelsammlung,
2 handgeschriebene Seiten,
kein Taschenrechner

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Studiengruppe: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Anzahl Zusatzblätter: __________

Platznummer: ____________________

Es sind mehr Aufgaben formuliert, als in 90 min Klausurzeit gelöst werden könnten.
Als zusätzliche Übungsaufgaben gedacht!

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die *LR*-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösen Sie mit der *LR*-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Lösung

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Lz = b \Leftrightarrow z = \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$Rx = z \Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie Kondition und Norm der Matrix A bzgl. der 1-Norm, dabei ist die Inverse A^{-1} schon berechnet:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & -7 & -6 \\ -6 & -10 & -8 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & \frac{-11}{2} \\ -2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösung

$$\|A\|_1 = 21, \quad \left\|A^{-1}\right\|_1 = 18, \quad \mathrm{cond}_1(A) = 378$$

b) Geben Sie die Kondition folgender Matrizen bzgl. der jeweiligen Normen an:

$$\mathrm{cond}_2(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}), \quad \mathrm{cond}_\infty(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})$$

Lösung

$$\mathrm{cond}_2(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \quad = \quad 1, \quad \text{da Permutationsmatrix}$$

$$\mathrm{cond}_\infty(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) \quad = \quad 4, \quad \text{da} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Regel für Inverse einer Diagonalmatrix)

c) Wahr oder falsch? Geben Sie eine kurze Begründung an, z.B. durch ein Gegenbeispiel.

i) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt: Die Einheitsmatrix $E \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\|E\|_X = 1.$$

ii) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt für die zugehörige Kondition: Die Einheitsmatrix $E \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\mathrm{cond}_X(E) = 1.$$

iii) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm

iii) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt für die zugehörige Kondition: Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\mathrm{cond}_X(A) = 1$$

genau dann, wenn $A = E$ die Einheitsmatrix ist.

Lösung

i) wahr

ii) wahr

iii) falsch: gilt z.B. für jede Permutationsmatrix in $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, und bei $\|\cdot\|_2$ für jede orthogonale Matrix

Bemerkung:
Induzierte Matrixnormen $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind über eine Vektornorm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|A\|_X := \max_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X$$

Das sind die einzigen Matrixnormen, die wird betrachtet haben. Es gibt andere Matrixnormen, für die die hergeleiteten Regeln wie z.B. $\|I\|_X = 1$ für die Einheitsmatrix I, oder $\|AB\|_X \leq \|A\|_X \cdot \|B\|_X$ nicht gelten.

Aufgabe 3

Das eindeutige Interpolationspolynom durch die Wertepaare

i	0	1	2	3
x_i	4	2	0	3
y_i	63	11	7	28

mit $y_j = f(x_j)$ für ein unbekanntes f ist gegeben durch (das müssen Sie nicht zeigen!):

$$p(x) = 1 \cdot x^3 - 0 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 7$$

Geben Sie an:

a) die Koeffizienten a_i aus der Darstellung in Lagrange-Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j \cdot L_{j,3}(x)$$

b) das Newton-Schema der dividierten Differenzen, und die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} [x_0, \ldots, x_i] f \cdot \omega_i(x)$$

Lösung Achtung: Die x_i sind nicht monoton steigend angeordnet! Das muss auch nicht so sein.

a)

$$p(x) = 63 \cdot L_{0,3}(x) + 11 \cdot L_{1,3}(x) + 7 \cdot L_{2,3}(x) + 28 \cdot L_{3,3}(x)$$

mit (nicht verlangt in der Aufgabenstellung, nur zur Erklärung):

$$\begin{aligned} L_{0,3}(x) &= \frac{x\,(x-2)\,(x-3)}{8} \\ L_{1,3}(x) &= \frac{x\,(x-3)\,(x-4)}{4} \\ L_{2,3}(x) &= -\frac{(x-2)\,(x-3)\,(x-4)}{24} \\ L_{3,3}(x) &= -\frac{x\,(x-2)\,(x-4)}{3} \end{aligned}$$

b) Newton-Schema

$$\left[\begin{array}{c|c||ccccc} 4 & 63 & 63 & & & & \\ & & & > 26 & & & \\ 2 & 11 & 11 & & > 6 & & \\ & & & > 2 & & > 1 & \\ 0 & 7 & 7 & & > 5 & & \\ & & & > 7 & & & \\ 3 & 28 & 28 & & & & \end{array}\right]$$

Interpolationspolynom in Newton-Darstellung:

$$p_3(x) = 63 \cdot \omega_0(x) + 26 \cdot \omega_1(x) + 6 \cdot \omega_2(x) + 1 \cdot \omega_3(x)$$

Wesentlich ist: richtige Zahlen aus dem Newton-Schema zuordnen, obere Diagonale ablesen

nicht verlangt: konkrete Werte für $\omega_j(x)$

$$p_3(x) \quad = \quad 63 \cdot 1 + 26 \cdot (x-4) + 6 \cdot (x-4)(x-2) + 1 \cdot (x-4)(x-2)x$$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Wertepaare

i	0	1	2	3
x_i	0	2	3	4
y_i	7	11	28	63

a) Geben Sie mit Hilfe des Newton-Schemas das Interpolationspolynom vom Höchstgrad 2 durch $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ an, und zwar in nicht-ausmultiplizierter Form, sowie in Monom-Form $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.

b) Geben Sie mit Hilfe des Newton-Schemas das Interpolationspolynom vom Höchstgrad 3 durch $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ an, und zwar in nicht-ausmultiplizierter Form.

c) Berechnen Sie das Newton-Schema für folgende Wertepaare, die sich aus den obigen nur durch Indizierung unterscheiden:

i	0	1	2	3
x_i	4	2	0	3
y_i	63	11	7	28

Welche Werte erkennen Sie aus Teilaufgabe a) und b) wieder?

Lösung

a) Momom-Darstellung: über Vandermonde-Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

liefert

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i x^i = 5x^2 - 8x + 7$$

$$\left[\begin{array}{c|c||ccc} 0 & 7 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & 11 & 11 & 17 & 0 \\ 3 & 28 & 28 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Polynom in Newton-Form:

$$p(x) = 7\omega_{0,2}(x) + 2\omega_{1,2}(x) + 5\omega_{2,2}(x)$$

b)

$$\left[\begin{array}{c|c||cccc} 0 & 7 & 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 11 & 17 & 9 & 0 \\ 3 & 28 & 28 & 35 & 0 & 0 \\ 4 & 63 & 63 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Polynom in Newton-Form:

$$p(x) = 7\omega_{0,3}(x) + 2\omega_{1,3}(x) + 5\omega_{2,3}(x) + 1 \cdot \omega_{2,3}(x)$$

c)

$$\left[\begin{array}{c|c||cccc} 4 & 63 & 63 & 26 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 11 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 28 & 28 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wiedererkannt:

- Spalte $[x_i]f = y_i$, in entsprechend permutierter Reihenfolge
- Werte 2, 5 in Spalten $[x_i, x_{i+1}]f$, $[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$, aus Teilaufgabe b)
- Wert 1 als Koeffizient des höchsten Newton-Polynoms. Dieser Wert ist der Koeffizient von x^3 in Monom-Darstellung und muss daher unabhängig von der Reihenfolge der x_i an der Spitze des Dreiecksschemas auftauchen.

[ältere Aufgabe, Darstellung des Newton-Schemas noch nicht aufgehübscht]

Aufgabe 5

Vervollständigen Sie das Newton-Schema der dividierten Differenzen für die Stützstellen und Stützwerte

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y_i	0	-3	4	21

(in einer anderen Version waren hier die y-Werte durch 3 dividiert)

wobei Sie die vorhandenen Werte benutzen dürfen.

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	$*$	20	$*$
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	$*$	2	
2	1	4	4	17		
3	2	21	21			

Geben Sie das Interpolations-Polynom zu diesen Stützstellen und -werten in Newton-Form an (ohne Ausmultiplizieren!).

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+4}]f$
0	0	0	0	$*$	20	$*$	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	$*$	2	$*$	
2	1	4	4	17	$*$		
3	2	21	21	$*$			
$*$	$*$	$*$	$*$				

Es wird ein zusätzlicher Punkt $(x_4,y_4)=(3,-3)$ erfasst. Erweitern Sie hierzu das Schema der dividierten Differenzen. Zur Kontrolle: Es ergibt sich $[x_0,\dots,x_4]f=0$.

Preisfrage: was bedeutet das für (x_4,y_4)?

Lösung

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	0	0	0
2	1	4	4	0	0	0
3	2	21	21	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	-6	0	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	0	0
2	1	4	4	17	0	0
3	2	21	21	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	-6	20	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	2	0
2	1	4	4	17	0	0
3	2	21	21	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	-6	20	-9
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	2	0
2	1	4	4	17	0	0
3	2	21	21	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	-6	20	-9
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	2	
2	1	4	4	17		
3	2	21	21			

Mit den Standard-Bezeichnungen

$$\omega_{j,n}(x) = \prod_{i<j}(x - x_i)$$

ist dann

$$\begin{aligned} p(x) &= [x_0]f \cdot \omega_0(x) \\ &\quad +[x_0,x_1]f \cdot \omega_1(x) \\ &\quad +[x_0,x_1,x_2]f \cdot \omega_2(x) \\ &\quad +[x_0,x_1,x_2,x_3]f \cdot \omega_3(x) \\ &= 0 \cdot \omega_0(x) \\ &\quad -6 \cdot \omega_1(x) \\ &\quad +20 \cdot \omega_2(x) \\ &\quad -9 \cdot \omega_3(x) \end{aligned}$$

zusätzlicher Punkt:

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\ldots,x_{i+3}]f$	$[x_i,\ldots,x_{i+4}]f$
0	0	0	0	-6	20	-9	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	2	-9	0
2	1	4	4	17	$-\frac{41}{2}$	0	0
3	2	21	21	-24	0	0	0
4	3	-3	-3	0	0	0	0

Preisantwort: $[x_0,\ldots,x_4]f = 0$ bedeutet, dass der Punkt (x_4,y_4) auf dem Interpolations-Polynom durch $(x_0,y_0),\ldots,(x_3,y_3)$ liegt. Denn: mit dem Term $[x_0,\ldots,x_4]f$ wird das Newton-Polynom $\omega_4(x)$ multipliziert, das die neue Potenz x^4 mitbringt. Im eindeutigen (!) Interpolationspolynom durch $(x_0,y_0),\ldots,(x_4,y_4)$ taucht also die Potenz x^4 nicht auf. Damit ist das Interpolationspolynom durch $(x_0,y_0),\ldots,(x_4,y_4)$ vom Grad (höchstens) 3 wie das ebenso eindeutige Interpolationspolynom durch $(x_0,y_0),\ldots,(x_3,y_3)$. Das Interpolationspolynom durch $(x_0,y_0),\ldots,(x_4,y_4)$ ist also schon durch $(x_0,y_0),\ldots,(x_3,y_3)$ festgelegt, und (x_4,y_4) muss dann auf diesem Polynom liegen.

Aufgabe 6

a) Geben Sie eine Formel für die (betragsmäßig) kleinste Zahl ungleich 0 und größte Zahl für `float`-Zahlen, also Fließkomma-Zahlen mit einfacher Genauigkeit nach Standard IEEE 754 an (ohne Berücksichtigung von denormalisierten Zahlen!).

b) Stellen Sie $x = 62,5$ als IEEE-754-Fließkommazahl mit einfacher Genauigkeit dar.

c) Die Fließkommazahlen nach IEEE 754-Standard mit einfacher Genauigkeit $x_1, \ldots, x_5$ seien in `float`-Variablen

```
float  x1, x2, x3, x4, x5;
```

gespeichert. Ihr Wert als Bitmuster sei gegeben durch:

Variable				
x_1	01010101	10000000	01111100	00000000
x_2	01010101	10001000	01111100	00000000
x_3	11010101	10000000	00000000	00000000
x_4	00000000	00000000	00000000	00000000
x_5	00010101	10000000	01111100	00000000

Welchen Wert als bit-Muster haben die Variablen, nachdem folgende Anweisungen durchlaufen wurden?

```
x4 = x1 + x2;
x1 = x1 * 4;
x2 = -x2;
x3 = 1.0;
x5 = x5 * x5;
```

Lösung

a) betraglich kleinste Zahl: bei kleinstem Exponent und gleichzeitig kleinster Mantisse

$$2^{-126} \cdot 1$$

(Bei denormalisierten Zahlen: $c = 0$ wird interpretiert als $e = -126$, nicht: $e = -127$, wie man nach der Gleichung $e = c - b$ vermuten würde. Die 1 vor der Mantisse entfällt. Kleinste Mantisse entspricht dann 2^{-23}, insgesamt $2^{-126-23} = 2^{-149}$.)
betraglich größte Zahl: bei größtem Exponent und gleichzeitig größter Mantisse

$$2^{127} \cdot (2 - 2^{-23})$$

b) x in ganzzahligen Anteil und Nachkommaanteil zerlegen, in 2er-Potenzen darstellen:

$$\begin{aligned} x &= 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \frac{1}{2} \\ &= \mathtt{111110.1}_2 \end{aligned}$$

Normalisieren, d.h. Mantisse in Bereich $[1, 2[$ bringen:

$$x = \mathtt{1.1111101}_2 \cdot 2^5$$

Von der Mantisse werden nur die Nachkommastellen übernommen, die normalisierte `1` wird nicht abgespeichert. Charakteristik c= Exponent e + 127, hier $c = 132$.
Charakteristik in Binärdarstellung übersetzen:

$$c = \texttt{10000100}_2$$

Vorzeichen positiv, also führende `0`; ergibt insgesamt

Variable				
x	`01000010`	`01111010`	`00000000`	`00000000`

c) Erklärung:

- `x1`: Charakteristik bzw. Exponent +2 wegen Multiplikation mit 2^2
- `x2`: Vorzeichenbit invertieren
- `x3`: wie Teilaufgabe 2.
- `x4`: Addition der Mantissen, da Exponenten der Summanden gleich sind. Nach Addition der Mantissen ist eine *Renormalisierung* erforderlich, die den Exponenten erhöht
- `x5`: underflow, da neuer Exponent < -127. Charakteristik $c = 43$, also Exponent $e = c - 127 = -84$. Exponent von `x5*x5` = $2e = -168$ liegt außerhalb des zulässigen Bereichs für Exponenten.

Variable				
x_1	`01010110`	`10000000`	`01111100`	`00000000`
x_2	`11010101`	`10001000`	`01111100`	`00000000`
x_3	`00111111`	`10000000`	`00000000`	`00000000`
x_4	`01010110`	`00000100`	`01111100`	`00000000`
x_5	`00000000`	`00000000`	`00000000`	`00000000`

Aufgabe 7

Welches der folgenden MATLAB-Code-Fragmente implementiert die Lösung eines Gleichungssystems $Rx = b$ mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix `R` und (mehrere korrekte Antworten möglich)?

a) □

```
function x = foo(R,b)
n = length(b);
x = zeros(n,1);
for j = 1:n
    x(j) = ( b(j) - R( j,1:j-1 ) * x( 1:j-1 ) ) / R(j,j);
end
```

b) □

```
function x = foo(R,b)
n = length(b);
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / R(n,n);
for i = n-1:-1:1
    sum = 0;
    for j = i+1:n
        sum = sum + R(i,j) * x(j);
    end
    x(i) = (b(i) - sum) / R(i,i);
end
```

c) □

```
x = R\z;
```

d) □

```
x = R/z;
```

e) □

```
z = R\x;
```

Lösung

a) nein: ist Vorwärtselimination mit unterer Dreiecksmatrix, vektoriell

b) ja

c) ja, wenn auch nicht performant, da Dreiecksstruktur nicht ausgenützt wird

d) nein, Gleichungssystem lösen ist backslash, nicht Divisionszeichen!

e) nein, Variablen `x` und `z` an falscher Stelle

Aufgabe 8

Welches der folgenden MATLAB-Code-Fragmente implementiert den Tausch der Zeilen `k` und `l` der Matrix `A` mit `size(A)=[n m]`? (mehrere korrekte Antworten möglich)

a) □

```
A([k l], :) = A([l k],:)
```

b) □

```
A(:, [k l]) = A(:,[l k])
```

c) □

```
for Index = 1:n
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=A(k,Index);
end
```

d) □

```
for Index = 1:n
help = A(k,Index);
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=help;
end
```

e) □

```
for Index = 1:m
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=A(k,Index);
end
```

Lösung

a) korrekt

b) falsch: getauscht werden die *Spalten* `k` und `l`

c) falsch: es fehlt die Variable zur Zwischenspeicherung von `A(k,Index)`. Nach Durchlauf des Programms haben die Zeilen `k` und `l` dieselben Werte, nämlich die ursprünglich in `A(l, :)` gespeicherten Werte

d) falsch: Tausch zwar mit Hilfsvariable, aber Index läuft bis `n`, die Zeilen haben aber `m` Einträge

e) falsch: keine Hilfsvariable

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die relative Kondition der Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1^2 \cdot x_2 \end{aligned}$$

im Punkt $(x_1, x_2) = (2, 3)$.

Lösung relative Kondition für skalare Funktionen mehrerer Variablen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} &\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \frac{x_i}{f(x)} \cdot \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i} \\ &=: \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) \cdot \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| &\leq \max_{i=1}^{n} |\phi_i(x)| \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i} \right| \\ &=: \kappa_{\text{rel}}^{\infty}(x) \cdot \|\delta_x\|_1 \end{aligned}$$

hier:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot \frac{x_1}{f(x)} \\ &= 2x_1 x_2 \frac{x_1}{x_1^2 \cdot x_2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \cdot \frac{x_2}{f(x)} \\ &= x_1^2 \frac{x_2}{x_1^2 \cdot x_2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\kappa_{\text{rel}}^{\infty}((2,3)) = \max\{2, 1\} = 2$$

unabhängig von (x_1, x_2).

Aufgabe 10

Eine Hausverwaltungsgesellschaft will für Neuvermietungen in einer großen Wohnanlage eine Schätzung für die Wärmekosten ermitteln, bestehend aus Heizung und Warmwasserbereitung. Es wird angenommen, dass die Haupteinflußgrößen die Fläche der Wohnung in m^2, sowie die Personenzahl im Haushalt ist (es wird nicht zwischen Kindern und Erwachsenen unterschieden).

a) Formulieren Sie ein lineares Modell, benennen Sie insb. Ihre Variablen.

b) Stellen Sie ein Ausgleichsproblem in der Form $Ax = b$ auf Basis folgender Daten auf:

Wohnungsnummer	Wohnfläche [m^2]	Personen	Wärmekosten €
1	120	3	1500
2	150	4	1800
3	150	4	1700
4	130	3	1600

c) Aus wie vielen Wohnungen müssen mindestens Vergleichsdaten vorliegen, um eine sinnvolle Schätzung durchführen zu können?

Lösung

a) Variablen:

- Abhängige Größe:
  y: Wärmekosten
- Unabhängige Größen:
  - P: Personenzahl
  - F: Wohnfläche
- unbekannte Parameter
  - α: Wärmekostenfaktor für Warmwasserverbrauch, angenommen als linearer Größe der Personenzahl
  - β: Wärmekostenfaktor für Heizung, angenommen als lineare Größe der Wohnfläche
  - γ: Fixkosten

Modell: $y = \alpha P + \beta F + \gamma$

b) $Ax = b$, oder

$$\begin{bmatrix} 1 & 120 & 3 \\ 1 & 150 & 4 \\ 1 & 150 & 4 \\ 1 & 130 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 \\ 1800 \\ 1700 \\ 1600 \end{bmatrix}$$

c) mindestens soviele Messungen wie die Anzahl freier Parameter. Allerdings müssen die Messungen die einstellbaren Größen in ausreichend unterschiedlicher Art abdecken (linear abhängige Spalten!)

Aufgabe 11

Ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen bezüglich der Unterteilung x_0, x_1, x_2 des Intervalls $[0,2]$ soll durch die Punktepaare

j	0	1	2
x_j	0	1	2
y_j	3	-1	7

gelegt werden. Mit den Bezeichnungen

$$s(x) = \begin{cases} s_L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, & x \in [0,1] = [x_0, x_1] \\ s_R(x) = 9 - 25x + 18x^2 - 3x^3, & x \in [1,2] = [x_1, x_2] \end{cases}$$

seien die Koeffizienten auf dem rechten Teilintervall schon bekannt. Berechnen Sie a_0, a_1, a_2, a_3.

Lösung Mit den Bezeichnungen $s_R(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ erhält man:

$$\begin{aligned} s_L'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \\ s_L''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x \\ s_R'(x) &= b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 \\ s_R''(x) &= 2b_2 + 6b_3 x \end{aligned}$$

Einsetzen von $x_1 = 1$ mit den bekannten Werten von b_i liefert

$$s_R'(x_1) = s_R'(1) = 2, \qquad s_R''(x_1) = s_R''(1) = 18,$$

Natürliche Randbedingung bei x_0, Interpolationsbedingung bei x_1 und und Glattheit bei x_1 liefert durch Einsetzen die 4 Bedingungen

$$\begin{array}{lr} \text{(I)} & 0 = s_L''(x_0) = 2a_2 \\ \text{(II)} & -1 = s_L(x_1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \text{(III)} & 2 = s_R'(x_1) = s_L'(x_1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ \text{(IV)} & 18 = s_R''(x_1) = s_L''(x_1) = 2a_2 + 6a_3 \end{array}$$

Das kann man in der Reihenfolge (I) $\Rightarrow$ (IV) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (II) lösen:

$$a_0 = 3, a_1 = -7, a_2 = 0, a_3 = 3$$

Aufgabe 12

a) Eine Variable sei definiert als `v = [1 2]`, ferner die Anweisungen

(1) `v'*v` (2) `v*v` (3) `v.*v` (4) `v*ones(2)`

Welche Anweisung ergibt welches Ergebnis? Tragen Sie die Nummer ein!

`<Fehler>`	`[3 3]`	`[ 1 2` `  2 4 ]`	`[1 4]`
2	4	1	3

b) In MATLAB seien Variablen definiert durch

```
A = [1 2 2; 3 4 4; 1 2 3];
x = [1 2 3]';
```

ferner die Anweisungen

(1) `x+1` (2) `x*x` (3) `A*x` (4) `x'*A`

Welche Anweisung ergibt welches Ergebnis? Tragen Sie die Nummer ein!

`<Fehler>`	`[2`
	` 3`
	` 4]`
		`[10 16 19]`	`[11`
			` 23`
			` 14]`

2	1	4	3