Fachhochschule Regensburg
Studiengänge Informatik und
Technische Informatik
Prof. Dr. Martin Weiß

WS 2012/2013, SS 2013

Probe-Klausur Computerarithmetik und Rechenverfahren

Prüfungsfach: Computerarithmetik und Rechenverfahren
Aufgabensteller: Prof. Dr. M. Weiß
Prüfungstermin: X.X.XXXX
Arbeitszeit: 90 Minuten
Zugelassene Hilfsmittel:
2 handgeschriebene Seiten

Punkte:	1	2	3	4	5	6	Σ	Note

Prüfungsteilnehmer
(bitte in Druckbuchstaben)

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Studiengruppe: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Es sind mehr Aufgaben formuliert, als in 90 min Klausurzeit beantwortet werden könnten.
Als zusätzliche Übungsaufgaben gedacht!

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie Kondition und Norm der Matrix A bzgl. der 1-Norm, dabei ist die Inverse A^{-1} schon berechnet:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & -7 & -6 \\ -6 & -10 & -8 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & \frac{-11}{2} \\ -2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösung

$$\|A\|_1 = 21, \quad \|A^{-1}\|_1 = 18, \quad \mathrm{cond}_1(A) = 378$$

b) Geben Sie die Kondition folgender Matrizen bzgl. der jeweiligen Normen an:

$$\mathrm{cond}_2(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}), \quad \mathrm{cond}_\infty(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})$$

Lösung

$$\mathrm{cond}_2(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = 1, \quad \text{da Permutationsmatrix}$$

$$\mathrm{cond}_\infty(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = 4, \quad \text{da } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Regel für Inverse einer Diagonalmatrix)

c) Wahr oder falsch? Geben Sie eine kurze Begründung an, z.B. durch ein Gegenbeispiel.

a) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt: Die Einheitsmatrix $E \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\|E\|_X = 1.$$

b) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt für die zugehörige Kondition: Die Einheitsmatrix $E \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\mathrm{cond}_X(E) = 1.$$

c) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt für die zugehörige Kondition: Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\mathrm{cond}_X(A) = 1$$

genau dann, wenn $A = E$ die Einheitsmatrix ist.

Lösung

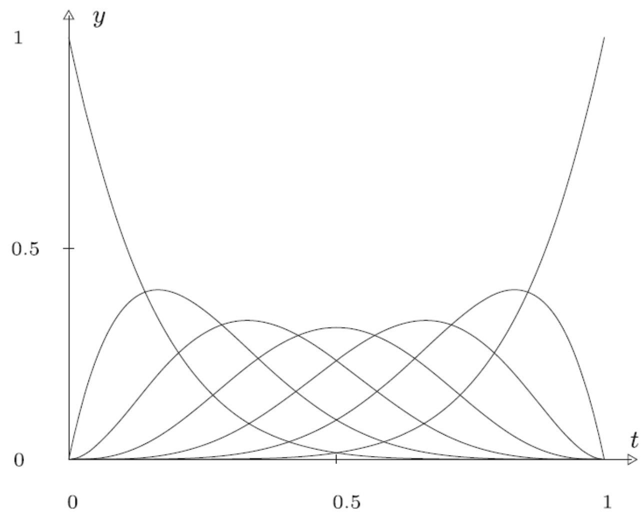
i) wahr

ii) wahr

iii) falsch: gilt z.B. für jede Permutationsmatrix in $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, und bei $\|\cdot\|_2$ für jede orthogonale Matrix

Aufgabe 2

a) In folgender Abbildung sind 6 Basispolynome eines bestimmten Typs dargestellt. Welchen Polynomtyp erkennen Sie?



Lösung Bernstein-Polynome, Quelle: Schwarz-Köckler

b) Das eindeutige Interpolationspolynom durch die Punkte

i	0	1	2	3
x_i	-1	1	2	3
y_i	-7	1	14	49

mit $y_j = f(x_j)$ für ein unbekanntes f ist gegeben durch (das müssen Sie nicht zeigen!):

$$p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 2$$

Geben Sie an:

a) die Koeffizienten a_i aus der Darstellung in Lagrange-Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j L_{j,3}(x)$$

a) den Wert der dividierten Differenz $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$ aus der Newton-Darstellung

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} [x_0, \ldots, x_i]f \cdot \omega_i(x)$$

Lösung

a) Die Lagrange-Polynome

$$L_{j,n}(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

haben die Eigenschaft:

$$L_{j,n}(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Damit muss

$$a_j = y_j \qquad \text{für alle } j = 0, \ldots, 3$$

gelten, d.h.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_{j,3}(x)$$

i	0	1	2	3
x_i	-1	1	2	3
y_i	-7	1	14	49

b) Das Schema der dividierten Differenzen lautet:

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+3}]f$
0	-1	-7	-7	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0
2	2	14	14	0	0	0
3	3	49	49	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+3}]f$
0	-1	-7	-7	4	0	0
1	1	1	1	13	0	0
2	2	14	14	35	0	0
3	3	49	49	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+3}]f$
0	-1	-7	-7	4	3	0
1	1	1	1	13	11	0
2	2	14	14	35	0	0
3	3	49	49	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+3}]f$
0	-1	-7	-7	4	3	2
1	1	1	1	13	11	0
2	2	14	14	35	0	0
3	3	49	49	0	0	0

Also:

$$\begin{aligned} [x_0]f &= -7 \\ [x_0, x_1]f &= 4 \\ [x_0, x_1, x_2]f &= 3 \\ [x_0, x_1, x_2, x_3]f &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Vervollständigen Sie das Newton-Schema der dividierten Differenzen für die Stützstellen und Stützwerte

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y_i	0	-3	4	21

(in einer anderen Version waren hier die y-Werte durch 3 dividiert)

wobei Sie die vorhandenen Werte benutzen dürfen.

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+3}]f$
0	0	0	0	$*$	20	$*$
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	$*$	2	
2	1	4	4	17		
3	2	21	21			

Geben Sie das Interpolations-Polynom zu diesen Stützstellen und -werten in Newton-Form an (ohne Ausmultiplizieren!).

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+3}]f$	$[x_i, \ldots, x_{i+4}]f$
0	0	0	0	$*$	20	$*$	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	$*$	2	$*$	
2	1	4	4	17	$*$		
3	2	21	21	$*$			
$*$	$*$	$*$	$*$				

Es wird ein zusätzlicher Punkt $(x_4, y_4) = (3, -3)$ erfasst. Erweitern Sie hierzu das Schema der dividierten Differenzen. Zur Kontrolle: Es ergibt sich $[x_0, \ldots, x_4]f = 0$.

Preisfrage: was bedeutet das für (x_4, y_4)?

Lösung

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	0	0	0
2	1	4	4	0	0	0
3	2	21	21	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	-6	0	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	0	0
2	1	4	4	17	0	0
3	2	21	21	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	-6	20	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	2	0
2	1	4	4	17	0	0
3	2	21	21	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	-6	20	-9
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	2	0
2	1	4	4	17	0	0
3	2	21	21	0	0	0

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	-6	20	-9
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	2	
2	1	4	4	17		
3	2	21	21			

Mit den Standard-Bezeichnungen

$$\omega_{j,n}(x) = \prod_{i<j}(x - x_i)$$

ist dann

$$\begin{aligned} p(x) &= [x_0]f \cdot \omega_0(x) \\ &\quad +[x_0,x_1]f \cdot \omega_1(x) \\ &\quad +[x_0,x_1,x_2]f \cdot \omega_2(x) \\ &\quad +[x_0,x_1,x_2,x_3]f \cdot \omega_3(x) \\ &= 0 \cdot \omega_0(x) \\ &\quad -6 \cdot \omega_1(x) \\ &\quad +20 \cdot \omega_2(x) \\ &\quad -9 \cdot \omega_3(x) \end{aligned}$$

zusätzlicher Punkt:

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+3}]f$	$[x_i,\dots,x_{i+4}]f$
0	0	0	0	-6	20	-9	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	14	2	-9	0
2	1	4	4	17	$-\frac{41}{2}$	0	0
3	2	21	21	-24	0	0	0
4	3	-3	-3	0	0	0	0

Preisantwort: $[x_0,\dots,x_4]f = 0$ bedeutet, dass der Punkt (x_4,y_4) auf dem Interpolations-Polynom durch $(x_0,y_0),\dots,(x_3,y_3)$ liegt. Denn: mit dem Term $[x_0,\dots,x_4]f$ wird das Newton-Polynom $\omega_4(x)$ multipliziert, das die neue Potenz x^4 mitbringt. Im eindeutigen (!) Interpolationspolynom durch $(x_0,y_0),\dots,(x_4,y_4)$ taucht also die Potenz x^4 nicht auf. Damit ist das Interpolationspolynom durch $(x_0,y_0),\dots,(x_4,y_4)$ vom Grad (höchstens) 3 wie das ebenso eindeutige Interpolationspolynom durch $(x_0,y_0),\dots,(x_3,y_3)$. Das Interpolationspolynom durch $(x_0,y_0),\dots,(x_4,y_4)$ ist also schon durch $(x_0,y_0),\dots,(x_3,y_3)$ festgelegt, und (x_4,y_4) muss dann auf diesem Polynom liegen.

Aufgabe 4

a) Geben Sie eine Formel für die (betragsmäßig) kleinste und größte Zahl für `float`-Zahlen, also Fließkomma-Zahlen mit einfacher Genauigkeit nach Standard IEEE 754 an.

b) Stellen Sie $x = 62,5$ als IEEE-754-Fließkommazahl mit einfacher Genauigkeit dar.

c) Die Fließkommazahlen mit einfacher Genauigkeit $x_1, \ldots, x_5$ seien in `float`-Variablen

```
float  x1, x2, x3, x4, x5;
```

gespeichert. Ihr Wert als Bitmuster sei gegeben durch:

Variable				
x_1	01010101	10000000	01111100	00000000
x_2	01010101	10001000	01111100	00000000
x_3	11010101	10000000	00000000	00000000
x_4	00000000	00000000	00000000	00000000
x_5	00010101	10000000	01111100	00000000

Welchen Wert als bit-Muster haben die Variablen, nachdem folgende Anweisungen durchlaufen wurden?

```
x4 = x1 + x2;
x1 = x1 * 4;
x2 = -x2;
x3 = 1.0;
x5 = x5 * x5;
```

Lösung

a) betraglich kleinste Zahl: bei kleinstem Exponent und gleichzeitig kleinster Mantisse

$$2^{-126} \cdot 1$$

betraglich größte Zahl: bei größtem Exponent und gleichzeitig größter Mantisse

$$2^{127} \cdot (2 - 2^{-23})$$

b) x in ganzzahligen Anteil und Nachkommaanteil zerlegen, in 2er-Potenzen darstellen:

$$\begin{aligned} x &= 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + \frac{1}{2} \\ &= \texttt{111110.1}_2 \end{aligned}$$

Normalisieren, d.h. Mantisse in Bereich $[1, 2[$ bringen:

$$x = \texttt{1.1111101}_2 \cdot 2^5$$

Von der Mantisse werden nur die Nachkommastellen übernommen, die normalisierte `1` wird nicht abgespeichert. Charakteristik c= Exponent e + 127, hier $c = 132$.
Charakteristik in Binärdarstellung übersetzen:

$$c = \texttt{10000100}_2$$

Vorzeichen positiv, also führende `0`; ergibt insgesamt

Variable				
x	`01000010`	`01111010`	`00000000`	`00000000`

c) Erklärung:

- `x1`: Charakteristik bzw. Exponent +2 wegen Multiplikation mit 2^2
- `x2`: Vorzeichenbit invertieren
- `x3`: wie Teilaufgabe 2.
- `x4`: Addition der Mantissen, da Exponenten der Summanden gleich sind. Nach Addition der Mantissen ist eine *Renormalisierung* erforderlich, die den Exponenten erhöht
- `x5`: underflow, da neuer Exponent < -127. Charakteristik $c = 43$, also Exponent $e = c - 127 = -84$. Exponent von `x5*x5` = $2e = -168$ liegt außerhalb des zulässigen Bereichs für Exponenten.

Variable				
x_1	`01010110`	`10000000`	`01111100`	`00000000`
x_2	`11010101`	`10001000`	`01111100`	`00000000`
x_3	`00111111`	`10000000`	`00000000`	`00000000`
x_4	`01010110`	`00000100`	`01111100`	`00000000`
x_5	`00000000`	`00000000`	`00000000`	`00000000`

Aufgabe 5

a) Welche der folgenden Iterationsfunktionen stellt die Newton-Iteration zur Bestimmung der Nullstelle der Gleichung $x^3 - a = 0$ dar? Nur 1 Antwort ist richtig!

i)
$$\square \qquad x_{k+1} = x_k + \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2}$$

ii)
$$\square \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - a}{3x_k^2}$$

iii)
$$\square \qquad x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k^2}{x_k^3 - a}$$

b) Geben Sie die Sekanten-Iteration zur Bestimmung der Nullstelle der Gleichung

$$x^3 - a = 0$$

mit $a > 0$ an.

Lösung

a) Richtig ist (b). Newton-Verfahren für skalare Funktionen lautet allgemein:

$$x_{k+1} = x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k)$$

b) Sekanten-Verfahren für skalare Funktionen lautet allgemein:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Hier also:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k^3 - x_{k-1}^3}(x_k^3 - a) \\ &= x_k - (x_k^2 + x_k x_{k-1} + x_{k-1}^2)(x_k^3 - a) \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Welches der folgenden MATLAB-Code-Fragmente implementiert die Lösung eines Gleichungssystems $Rx = z$ mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix `R` und (mehrere korrekte Antworten möglich)?

a) ☐

```
function x = foo(R,b)
n = length(b);
x = zeros(n,1);
for j = 1:n
    x(j) = ( b(j) - R( j,1:j-1 ) * x( 1:j-1 ) ) / R(j,j);
end
```

b) ☐

```
function x = foo(U,b)
n = length(b);
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / R(n,n);
for i = n-1:-1:1
    sum = 0;
    for j = i+1:n
        sum = sum + R(i,j) * x(j);
    end
    x(i) = (b(i) - sum) / R(i,i);
end
```

c) ☐

```
x = R\z;
```

d) ☐

```
x = R/z;
```

e) ☐

```
z = R\x;
```

Lösung

a) nein: ist Vorwärtselimination mit unterer Dreiecksmatrix, vektoriell

b) ja

c) ja, wenn auch nicht performant, da Dreiecksstruktur nicht ausgenützt wird

d) nein, Gleichungssystem lösen ist backslash, nicht Divisionszeichen!

e) nein, Variablen `x` und `z` an falscher Stelle

Welches der folgenden MATLAB-Code-Fragmente implementiert den Tausch der Zeilen `k` und `l` der Matrix `A` mit `size(A)=[n m]`? (mehrere korrekte Antworten möglich)

a) ☐

```
A([k l], :) = A([l k],:)
```

b) ☐

```
A(:, [k l]) = A(:,[l k])
```

c) ☐

```
for Index = 1:n
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=A(k,Index);
end
```

d) ☐

```
for Index = 1:n
help = A(k,Index);
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=help;
end
```

e) ☐

```
for Index = 1:m
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=A(k,Index);
end
```

Lösung

a) korrekt

b) falsch: getauscht werden die *Spalten* `k` und `l`

c) falsch: es fehlt die Variable zur Zwischenspeicherung von `A(k,Index)`. Nach Durchlauf des Programms haben die Zeilen `k` und `l` dieselben Werte, nämlich die ursprünglich in `A(l, :)` gespeicherten Werte

d) falsch: Tausch zwar mit Hilfsvariable, aber Index läuft bis `n`, die Zeilen haben aber `m` Einträge

e) falsch: keine Hilfsvariable

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die relative Kondition der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & x_1^2\cdot x_2 \end{array}$$

im Punkt $(x_1,x_2)=(2,3)$.

Lösung relative Kondition für skalare Funktionen mehrerer Variablen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)} &\approx \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\cdot\frac{x_i}{f(x)}\cdot\frac{\tilde{x}_i-x_i}{x_i} \\ &=: \sum_{i=1}^{n}\phi_i(x)\cdot\frac{\tilde{x}_i-x_i}{x_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{f(x)}\right| &\leq \max_{i=1}^{n}|\phi_i(x)|\cdot\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\tilde{x}_i-x_i}{x_i}\right| \\ &=: \kappa_{\text{rel}}^{\infty}(x)\cdot\|\delta_x\|_1 \end{aligned}$$

hier:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot\frac{x_1}{f(x)} \\ &= 2x_1x_2\frac{x_1}{x_1^2\cdot x_2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\cdot\frac{x_2}{f(x)} \\ &= x_1^2\frac{x_2}{x_1^2\cdot x_2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dann ist

$$\kappa_{\text{rel}}^{\infty}((2,3))=\max\{2,1\}=2$$

unabhängig von (x_1,x_2).