Studiengang
IN, IT (B. Sc.)
Sommersemester 2018

Probe-Klausur Computerarithmetik und Rechenverfahren

Korrekturvorlage

Aufgabensteller: Martin Weiß
Prüfungstermin: real: 18.7.2018
Arbeitszeit: 90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:
Kurzskript,
2 handgeschriebene Seiten,
Formelsammlung,
kein Taschenrechner

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Studiengruppe: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Anzahl Zusatzblätter: ________

Platznummer: ____________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Note
Punkte	10	10	11	10	9	11	+6	61+6	

Hinweise:

- Diese Prüfung besteht aus 6 Aufgaben und einer Bonusaufgabe. Die Punkte der ersten 6 Aufgaben sind hinreichend für die Note 1.0. Mit der Bonusaufgabe können Sie mehr als 100 % der Punkte erreichen, aber natürlich keine bessere Note als 1.0.
- Alle Angabenblätter sind abzugeben.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben bitte auf den Angabenblättern (auch Rückseite benutzen). Bei Abgabe von Zusatzblättern, bitte ihre Anzahl auf der Angabe vermerken.
- Ergebnisse sind zu begründen und durch die entsprechenden Rechenschritte nachzuweisen, sofern nicht anders angegeben.
- Schreiben Sie mit einem nichtradierbaren Stift (z.B. Kugelschreiber, Füllfeder).

Aufgabe 1 (4 + 6 Punkte)

a) Gegeben seien die Matrix A und ihre Inverse (die Inverse müssen Sie nicht nachrechnen):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Norm und die Kondition der Matrix A bzgl. der $\|\cdot\|_1$-Norm. und bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm

b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von B und lösen Sie damit $Bx = b$.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -4 & 22 & -18 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -66 \end{bmatrix}$$

Wenn Sie die LR-Zerlegung nicht bestimmen können, verwenden Sie die (*falschen*) Matrizen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -18 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 28 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Lösung

a)

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= 13 \\ \|A^{-1}\|_1 &= 9 \\ \mathrm{cond}_1(A) &= 117 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \|A\|_\infty &= 11 \\ \|A^{-1}\|_\infty &= 10 \\ \mathrm{cond}_\infty(A) &= 110 \end{aligned}$$

b)

$$\xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 20 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{Gauss} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Lz = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -66 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad z = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Rx = z \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

falsche LR-Zerlegung:

$$z = \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \\ -12 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 79 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{3}{4} \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2 (7 + 3 Punkte)

Die Fließkommazahlen nach IEEE 754-Standard mit einfacher Genauigkeit $x_1, \ldots, x_4$ seien in `float`-Variablen `x1, x2, x3, x4` gespeichert. Ihr Wert als Bitmuster sei gegeben durch:

Variable	Byte 1	Byte 2	Byte 3	Byte 4
x1	00101011	00000000	01111100	00000000
x2	00110101	00000000	01111100	00000000
x3	11111000	10110000	00000000	00000000
x4	01000000	10110000	00000000	00000000

a) Welchen Wert als bit-Muster haben die Variablen `y1, y2, y3`, nachdem folgende Anweisungen durchlaufen wurden? Stellen, die mit `*` markiert sind, müssen Sie nicht angeben.

```
float y1, y2, y3;
y1 = -x1 / 8;
y2 = 22.5;
y3 = x3*x3;
```

	Byte 1	Byte 2	Byte 3	Byte 4
y1	10101001	10000000	01111100	********
y2	01000001	10110100	00000000	********
y3	01111111	10000000	00000000	********

b) Welchen Wert hat `x4` als reelle Zahl? 5.5

Lösung

a)
- Berechnung von `y1`: `x1` muss nicht erst in $x_1 \in \mathbb{R}$ umgewandelt, durch -8 dividiert, und dann wieder nach IEEE 754 umgewandelt werden. Wegen

$$-x_1/8 = -(s2^e(1+\sum_{j=1}^{m} d_j 2^{-j}))/8 = -(s2^e(1+\sum_{j=1}^{m} d_j 2^{-j}))/2^3 = -s2^{e-3}(1+\sum_{j=1}^{m} d_j 2^{-j})$$

  reicht es, den Exponenten um 3 zu verkleinern. Statt des Exponenten wird die Charakteristik $c = e + 127$ abgespeichert, aber hier gilt genauso

$$(e-3)+127 = (e+127)-3 = c-3$$

  d.h. es reicht, die Charakteristik um 3 zu erniedrigen. Das Vorzeichenbit muss invertiert werden.

- Berechnung von `y2`:

$$22.5_{10} = 22 + \frac{1}{2} = \texttt{10110.1}_2 = \texttt{10110.1}_2 \cdot 2^{-4} \cdot 2^4 = +\texttt{1.01101}_2 \cdot 2^4$$

  - Vorzeichen: positiv, also bit = 0
  - Exponent: $e = 4$ Charakteristik: $c = e + 127 = 131$ wird abgespeichert, $131_{10} = \texttt{10000011}_2$ Mantisse: IEEE-Zahlen sind mit führender 1 *vor* dem Komma normalisiert, nur der Nachkommaanteil wird abgespeichert und mit 0en aufgefüllt

- Berechnung von `y3`: Exponent von `x3` ist

$$e = c - 127 = \texttt{11110001}_2 - 127 = 241 - 127 = 114$$

  Wir stellen `x3` nach IEEE dar durch $x_3 = \sigma \cdot 2^{114} \cdot fp$ mit einer Mantisse $f \geq 1$. Dann ist

$$x_3 \cdot x_3 \geq (2^{114})^2 f^2 \geq 2^{228}$$

  IEEE-Zahlen einfacher Genauigkeit können höchstens $e = 127$ codieren. Es ergibt sich also ein Überlauf über den maximalen Exponenten 127, also `Inf`. Das wird abgebildet, indem in der Charakteristik alle bits auf 1 gesetz werden. Das Vorzeichenbit unterscheidet `+Inf` und `-Inf`. Die Mantissenbit geben Details über Gründe von Überlauf bzw. Fehler; das brauchen Sie nicht zu wissen.

b) Vorzeichen $\sigma = +1$. Charakteristik $c = \texttt{10000001} = 129$. Also Exponent $e = c - 127 = 2$. Mantisse

$$f = \texttt{1.011} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{3}{8} = \frac{11}{8}.$$

Also

$$x = 2^e \cdot f = 4 \cdot \frac{11}{8} = \frac{11}{2} = 5.5$$

Aufteilung der 32 bit: höchstwertiges Bit in byte 1 = Vorzeichen. Es folgen 8 bit für die Charakteristik, verteilt auf 7 bits in byte 1 und 1 bit in byte 2. Dann folgen 23 bits für die Mantisse, die führende 1 in der Darstellung $1.d_1 d_2 \ldots d_{23}$ wird *nicht* abgespeichert.

Aufgabe 3 (3 + 5 + 3 Punkte)

a) Warum ist die Auswertung der folgenden Formel für $|x| \ll 1$ numerisch instabil? Formen Sie in einen äquivalenten, numerisch stabilen Ausdruck um!

$$\frac{6}{2+3x} - \frac{3-x}{1+x}$$

b) Der body-mass-Index (BMI) dient zur Klassifikation von Übergewicht und wird aus der Masse m in [kg] und der Körpergröße h in [m] nach der Formel $\mathrm{BMI} = \mathrm{BMI}(m,h) = \frac{m}{h^2}$ berechnet. Geben Sie die relative Kondition der Funktion $\mathrm{BMI}(m,h)$ an.

c) Mit welcher relativen Genauigkeit müssen in b) Masse und Größe gemessen werden, um den BMI mit 2% relativer Genauigkeit zu bestimmen? Schätzen Sie mit Hilfe der relativen Kondition ab! Falls Sie b) nicht lösen konnten, verwenden Sie $\kappa(m,h) = 10$.

Lösung

a) Auslöschung durch Subtraktion zweier betraglich fast gleicher Zahlen: Beide Brüche sind nahe bei 3. Besser:

$$\begin{aligned}
\frac{6}{2+3x} - \frac{3-x}{1+x} &= \frac{6(1+x)-(2+3x)(3-x)}{(2+3x)(1+x)} \\
&= \frac{(6+6x)-(6-2x+9x-3x^2)}{(2+3x)(1+x)} = \frac{(6+6x)-(6+7x-3x^2)}{(2+3x)(1+x)} \\
&= \frac{3x^2-x}{(2+3x)(1+x)} = \frac{x(3x-1)}{(2+3x)(1+x)}
\end{aligned}$$

Multiplikationen im Zähler unkritisch, im Nenner Addition von ungefähr gleichen Zahlen

b) Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial \mathrm{BMI}}{\partial m}(m,h) = \frac{1}{h^2} \qquad \frac{\partial \mathrm{BMI}}{\partial h}(m,h) = (-2)\cdot\frac{m}{h^3}$$

$$\begin{aligned}
\phi_m(m,h) \equiv \phi_1(m,h) &= \left|\frac{\frac{\partial \mathrm{BMI}}{\partial m}(m,h)}{\mathrm{BMI}(m,h)}\cdot m\right| = \left|\frac{\frac{1}{h^2}}{\frac{m}{h^2}}\cdot m\right| = 1 \\
\phi_h(m,h) \equiv \phi_2(m,h) &= \left|\frac{\frac{\partial \mathrm{BMI}}{\partial h}(m,h)}{\mathrm{BMI}(m,h)}\cdot h\right| = \left|\frac{(-2)\cdot\frac{m}{h^3}}{\frac{m}{h^2}}\cdot h\right| = 2 \\
\kappa^\infty(m,h) &= \max\{|\phi_1(m,h)|, |\phi_2(m,h)|\} = 2
\end{aligned}$$

c) lineare Analyse mit Kondition:

$$2 \stackrel{!}{\geq} \delta_{\mathrm{BMI}} \approx \kappa^\infty(m,h)\delta_{(h,m)} = 2\% \cdot \delta_{(h,m)}$$

Also $\delta_{(h,m)} \leq 1\%$ ausreichend. .
Man kann auch mit 2 Funktionen von je 1 Variable argumentieren: D.h. fasse BMI zweimal

als Funktion nur einer Variablen m und h auf (die andere Variable als Konstante ansehen), und betrachte Bedingungen

$$\begin{aligned} 2 &\overset{!}{\geq} \delta_{\mathrm{BMI}} \approx \kappa(m)\delta_m = 1 \cdot \delta_m \\ 2 &\overset{!}{\geq} \delta_{\mathrm{BMI}} \approx \kappa(h)\delta_h = 2 \cdot \delta_h \end{aligned}$$

Also ergibt sich aufgeteilt nach δ_h, δ_m: $\delta_m \leq 2$, $\delta_h \leq 1$ Hinreichend ist $\delta_m \leq 1$, $\delta_h \leq 1$.
Mit $\kappa = 10$: $\delta_{(h,m)} \leq \frac{1}{5}\%$ ausreichend

Aufgabe 4 (5 + 5 Punkte)

a) Gegeben seien Messwerte (x_i, y_i), wobei $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, 3$. Die Punkte sollen durch ein Polynom vom Höchstgrad 3 interpoliert werden. Vervollständigen Sie das Schema der dividierten Differenzen.

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
0	-1	-7	$\boxed{-7}$			
				> 4		
1	1	1	$\boxed{1}$		$> \boxed{3}$	
				$> \boxed{13}$		> 2
2	2	14	$\boxed{14}$		$> \boxed{11}$	
				$> \boxed{35}$		
3	3	49	$\boxed{49}$			

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_r und b_r so, dass die Funktion $s : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen bzgl. der Unterteilung $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ist. Weisen Sie alle erforderlichen Eigenschaften nach.

$$s(x) = \begin{cases} 2x^3 + 6x^2 + x + 1, & x \in [-1, 0] \\ a_r x^3 + b_r x^2 + x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Lösung

a) .

b) Teilfunktionen sind Polynome vom Höchstgrad 3.

$$\begin{aligned} s_l'(x) &= 6x^2 + 12x + 1 & s_r'(x) &= 3a_r x^2 + 2b_r x + 1 \\ s_l''(x) &= 12x + 12 & s_r''(x) &= 6a_r x + 2b_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_l(0) &= 1 = s_r(0) \\ s_l'(0) &= 1 = s_r'(0) \\ s_l''(0) &= 12 = s_r''(0) \quad \Longrightarrow b_r = 6 \\ s_l''(-1) &= 0 \\ s_r''(1) &= 0 \quad \Longrightarrow a_r = -2 \end{aligned}$$

$a_r = -2$, $b_r = 6$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Bei einem Supermarkt werden auf Europaletten (identische) Plastikboxen mit Äpfeln, Birnen und Tomaten angeliefert. Die Paletten sind in Schrumpf-Folie eingewickelt und werden beim Wareneingang gewogen. Die Plastikboxen mit dem Obst werden nicht einzeln gewogen. Der Supermarktbetreiber nimmt an, dass die Boxen jeder Sorte annähernd mit gleicher Menge gefüllt sind, aber die Lieferanten nicht unbedingt die versprochene Menge liefern.

Erstellen Sie ein lineares Regressionsmodell.

Kann aus dem Gewicht der folgenden Lieferungen das Gewicht der einzelnen Warenboxen ermittelt werden? Falls nein: hilft es, wenn das Gewicht einer Europalette (ca. 22 kg) und / oder das Gewicht einer leeren Plastikbox (ca. 1.5 kg) bekannt sind?

Lieferung Nummer	Äpfel [Anzahl Boxen]	Birnen [Anzahl Boxen]	Tomaten [Anzahl Boxen]	Gewicht Palette+Boxen kg
1	20	20	20	964
2	20	25	15	974
3	20	22	18	968
4	22	20	18	974
5	15	25	20	949

Lösung Variablen

- unabhängige, einstellbare Größen:
  - A Anzahl Apfelkisten
  - B Anzahl Birnenkisten
  - T Anzahl Tomatenkisten
  - (P Anzahl Plastikboxen $= A + B + T$, keine eigene Variable)
- abhängige Größen:
  - m Masse (Gewicht) der Lieferung
- gesuchte / zu bestimmende Parameter:
  - α Masse (Gewicht) Äpfel
  - β Masse (Gewicht) Birnen
  - τ Masse (Gewicht) Tomaten
  - π Masse (Gewicht) Plastikbox
  - E Gewicht Europalette

Modell:

$$m = E + A\alpha + B\beta + T\tau + (A + B + T)\pi$$

Lineares Modell: $y = \tilde{A} \cdot x$ mit

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 20 & 20 & 60 \\ 1 & 20 & 25 & 15 & 60 \\ 1 & 20 & 22 & 18 & 60 \\ 1 & 22 & 20 & 18 & 60 \\ 1 & 15 & 25 & 20 & 60 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} E \\ \alpha \\ \beta \\ \tau \\ \pi \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 964 \\ 974 \\ 968 \\ 974 \\ 949 \end{bmatrix}$$

Die Systemmatrix hat Rang 4, weil Spalte 1 und 5 linear abhängig sind. Anschaulich: es sind immer 60 Boxen auf der Palette (volle Lieferhöhe). Man kann nur die Summe des Gewichts der Palette und Boxen ermitteln.

Kennt man E und π, ergibt sich das Modell

$$m - E - (A + B + T)\pi = E + A\alpha + B\beta + T\tau$$

Die zugehörige Systemmatrix

$$\begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 20 & 25 & 15 \\ 20 & 22 & 18 \\ 22 & 20 & 18 \\ 15 & 25 & 20 \end{bmatrix}$$

hat Rang 3, so dass alle Parameter ermittelt werden können.

Aufgabe 6 (10 Punkte - nichtlinear und damit schwerer als bisher gehabt)

Zwei Rammen stehen auf der Baustelle für das neue Architekturgebäude, direkt vor dem Fenster Ihres Dozenten, und verursachen kleinere Erdbeben Diese können als Schwingungen mit Millimeterbereich auch ohne Messinstrumente wahrgenommen werden. Man nimmt an, dass die Stärke der Erschütterung, gemessen durch deren maximale Amplitude A, abhängt von

- h =Fallhöhe des Gewichts (massiver Betonklotz), mit dem die Ramme ein Stahlrohr in den Boden treibt. Die Ramme zieht dieses Gewicht zwar immer in dieselbe Höhe, die Fallstrecke verlängert sich aber, je weiter das Rohr schon in den Boden gerammt ist. Dadurch ergibt sich eine Energie mgh, die in den Boden eingeleitet wird. Die Masse m des Gewichts und die Erdbeschleunigung g sind sehr genau bekannt, die Fallhöhe h könnte man prinzipiell erfassen (Seillänge nach Aufschlag).
- d = Abstand der Ramme vom Arbeitsplatz des Dozenten, gemessen in der Bodenebene. Mit zunehmendem Abstand nimmt die Amplitude der Erschütterung ab, im K002 ist schon fast nichts mehr zu spüren.

Man vermutet ein Gesetz [1]

$$A = C \cdot \frac{mgh}{d^\alpha}$$

Es ergibt sich eine Diskussion, ob $\alpha = 2$ ("Wellen breiten sich in der Oberflächenschicht aus, Braunkohle darunter dämpft, 2d-Effekt, also Exponent 2") oder $\alpha = 3$ ("Wellen breiten sich halbkugelförmig in den Boden aus, 3d-Effekt, also Exponent 3"), oder ein anderer (verschiedene Bodenschichten, bodennahes Rammen und Rammen in 10 m Tiefe müssten unterschiedlich modelliert werden, Übertragungsverhalten in 1. Stock, ...) den Zusammenhang erklärt.

Mit einem Seismographen auf dem Schreibtisch des Dozenten soll diese Diskussion entschieden werden, indem α über ein Regressionsmodell ermittelt wird.

a) Stellen Sie ein (nichtlineares!) Modell auf; erklären Sie insb. Ihre Variablen.

b) Transformieren Sie das Modell in ein lineares Modell, und geben Sie ein lineares Ausgleichsproblem in Matrixform an, mit dem man insb. α bestimmen kann.

c) Wieviele Messungen braucht man mindestens, um α zu ermitteln?

Lösung

a) Modell ist schon gegeben:

$$A = C \cdot \frac{mgh}{d^\alpha}$$

Variablen

[1] ja, ist viel komplizierter, Energie als Integral Abklingvorgang ermitteln, ...), aber wir wollten ja immer einfach anfangen

- unabhängige, einstellbare Größen:
  - d Abstand
  - h Fallhöhe
- abhängige Größen:
  - A Amplitude
- gesuchte / zu bestimmende Parameter:
  - C Proportionalitätsfaktor
  - α Abklingexponent
- Konstanten:
  - m: Masse des Rammgewichts
  - g: Erdbeschleunigung

  Die Konstanten kann man auch mit dem Parameter C zusammenfassen.

b) Modell logarithmieren:

$$\begin{array}{rrcl} & \log A & = & \log\left(C \cdot \frac{mgh}{d^\alpha}\right) = \\ & & = & \log C + \log(mg) + \log h - \alpha \log d \\ & =: & = & \tilde{C} + \log(mg) + \tilde{h} - \alpha \tilde{d} \\ \Leftrightarrow & \tilde{A} - \tilde{h} & = & \tilde{C} - \alpha \tilde{d} \end{array}$$

In Matrixform, mit Messungen $i = 1, \ldots, m$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\tilde{d}_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\tilde{d}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \alpha \end{bmatrix}}_{=: Ax} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 - \tilde{h}_1 - \log(mg) \\ \vdots \\ \tilde{A}_m - \tilde{h}_m - \log(mg) \end{bmatrix}}_{b}$$

Alternativ $\log(mg)$ mit $\tilde{C}$ kombinieren (m, g werden als bekannt angenommen, $\hat{C} = \tilde{C} + \log(mg)$: In Matrixform, mit Messungen $i = 1, \ldots, m$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\tilde{d}_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -\tilde{d}_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \alpha \end{bmatrix}}_{=: Ax} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 - \tilde{h}_1 \\ \vdots \\ \tilde{A}_m - \tilde{h}_m \end{bmatrix}}_{b}$$

Hat man $\hat{C}$ ermittelt, kann man $\tilde{C} = \hat{C} - \log(mg)$ berechnen, und daraus das eigentlich interessante $C = \exp(C)$.

c) Man braucht mindestens 2 Messungen, um $\tilde{C}$ und α, sonst kann der Rang von A nicht 2 sein. (Ohne $\tilde{C}$ kann α nicht ermittelt werden.).
Allerdings müssen dann mindestens 2 verschiedene d-Werte vorliegen, sonst hat die Matrix

A immer Rang 1, weil die 2 Spalten dann linear abhängig sind. Mit nur einem Aufstellort (Abstand) kann nicht unterschieden werden, welcher Anteil Abschwächung des Signals auf das Übertragungsverhalten, und welcher Anteil auf die Entfernung zurückgeführt werden kann.

Aufgabe 7

Ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen bezüglich der Unterteilung x_0, x_1, x_2 des Intervalls $[0,2]$ soll durch die Punktepaare

j	0	1	2
x_j	0	1	2
y_j	3	-1	7

gelegt werden. Mit den Bezeichnungen

$$s(x) = \begin{cases} s_L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, & x \in [0,1] = [x_0, x_1] \\ s_R(x) = 9 - 25x + 18x^2 - 3x^3, & x \in [1,2] = [x_1, x_2] \end{cases}$$

seien die Koeffizienten auf dem rechten Teilintervall schon bekannt. Berechnen Sie a_0, a_1, a_2, a_3.

Lösung Mit den Bezeichnungen $s_R(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ erhält man:

$$\begin{aligned} s_L'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \\ s_L''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x \\ s_R'(x) &= b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 \\ s_R''(x) &= 2b_2 + 6b_3 x \end{aligned}$$

Einsetzen von $x_1 = 1$ mit den bekannten Werten von b_i liefert

$$s_R'(x_1) = s_R'(1) = 2, \qquad s_R''(x_1) = s_R''(1) = 18,$$

Natürliche Randbedingung bei x_0, Interpolationsbedingung bei x_1 und und Glattheit bei x_1 liefert durch Einsetzen die 4 Bedingungen

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 0 &= s_L''(x_0) = 2a_2 \\ &\text{(II)} & -1 &= s_L(x_1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ &\text{(III)} & 2 &= s_R'(x_1) = s_L'(x_1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ &\text{(IV)} & 18 &= s_R''(x_1) = s_L''(x_1) = 2a_2 + 6a_3 \end{aligned}$$

Das kann man in der Reihenfolge (I) $\Rightarrow$ (IV) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (II) lösen:

$$a_0 = 3, a_1 = -7, a_2 = 0, a_3 = 3$$

Aufgabe 8 (MATLAB: 4 + 5 + 2 Punkte)

a) Zur Interpolation seien Daten $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeben und eine Stelle $x_\star \in \mathbb{R}$, an der das Lagrange-Basis-Polynom $L_{j,n}$ von der Funktion `LagrangePolynomial(xs, x, j)` ausgewertet werden soll erweitert: für einen Vektor $x_\star \in \mathbb{R}^m$). Dabei wird $x_\star$ als `xs` übergeben. Der MATLAB-Code ist fehlerhaft. Kreisen Sie die Fehler ein, erklären Sie diese, und geben Sie eine korrekte Variante an!

```
function y = LagrangePolynomial(xs, x, j)
int k;
y = ones(length(x));
for k = 0:length(x)
    if k != j
        y = y * (xs - x[k]) / (x[j] - x[k]);
    end
end
```

- `int k`
- `ones(length(xVec))` erzeugt Matrix. Wenn $x_\star \in \mathbb{R}$, reicht `y=1`. Für $x_\star \in \mathbb{R}^m$: `y = ones(length(xs),1);`; außderdem dann `.`-Operator in

  ```
  y = y .* (xs - x(k)) ./ (x(j) - x(k));
  ```

- `!=` heißt `~=`
- `k = 0` zählt ab 0
- eckige Klammern bei Zugriff auf Vektoren
- korrekt, aber teilweise problematisch: abschließendes `end` für Klammer fehlt

b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die 1-Norm einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ liefert. Verwenden Sie *nicht* die MATLAB-Funktion `norm`!

```
function norm1 = myNorm(A)
[n,m] = size(A);
norm1 = 0;
for j = 1:m
  spalte = 0;
  for i = 1:n
    spalte = spalte + abs(A(i,j));
  end
  norm1 = max(norm1, spalte);
end
```

c) Geben Sie *einen* MATLAB-Ausdruck *ohne Schleife* an, der die ersten $n \in \mathbb{N}$ Glieder der Folge $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ als Zeilenvektor liefert. Eine Variable `n` sei dazu schon initialisiert.

```
a = 3:2:2*n+1;
```

Aufgabe 9 (Bonusaufgabe: 6 x 1 Punkt)

Wahr oder falsch? Ankreuzen und *kurze* Begründung! **Ohne Begründung gibt es keinen Punkt**. Für falsche Begründungen gibt es keinen Abzug. Bei e) reicht der Name der Sprache.

a) Sei $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbar. Dann gibt es eine Zerlegung $A = LR$ mit einer linken Dreiecksmatrix L und einer rechten Dreiecksmatrix R. wahr [ ] falsch [x]

Lösung falsch: i.A. Permutation erforderlich

b) Seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ Datenpaare in $\mathbb{R}^2$ mit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$. Es gibt genau einen kubischen Spline mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, 3$. wahr [ ] falsch [x]

Lösung falsch: nur mit Randbedingungen eindeutig

c) Für alle $A \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt: $\|A\|_1 = \|A^t\|_\infty$. wahr [x] falsch [ ]

Lösung wahr: Spaltensummennorm = Zeilensummennorm der transponierten Matrix

d) Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\|v\|_\infty \le \|v\|_1$ wahr [x] falsch [ ]

Lösung $\|v\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| = \|v\|_1$

e) Die MATLAB-Sprache verwendet z.T. andere Konzepte als C/C++/Java-ähnliche Sprachen. Nennen Sie je eine Prograammierprache, die sich wie MATLAB verhält!

"Variablentypen müssen nicht deklariert werden."

Lösung Python, Lisp, Prolog, Tcl, PHP, Ruby, Smalltalk

"white spaces wie das Zeilenende bei Matrizen sind Teil der Syntax."

Lösung Python, Fortran