OSTBAYERISCHE
TECHNISCHE HOCHSCHULE
REGENSBURG

INFORMATIK UND
MATHEMATIK

Studiengang
IN, IT (B. Sc.)
Prof. Dr. Martin Weiß
Sommersemester 2018

# Klausur Computerarithmetik und Rechenverfahren

**Aufgabensteller:** Prof. Dr. M. Weiß
**Prüfungstermin:** real: 18.7.2018
**Arbeitszeit:** 90 Minuten
**Erlaubte Hilfsmittel:**
Kurzskript,
2 handgeschriebene Seiten,
Formelsammlung,
kein Taschenrechner

**Prüfungsteilnehmer**

**Name:** ______________________

**Vorname:** ______________________

**Studiengruppe:** ______________________

**Matrikel-Nr.:** ______________________

**Anzahl Zusatzblätter:** ____________

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | $\sum$ | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | | | |

Hinweise:

- Diese Prüfung besteht aus 6 Aufgaben und einer Bonusaufgabe. Die Punkte der ersten 6 Aufgaben sind hinreichend für die Note 1.0. Mit der Bonusaufgabe können Sie mehr als 100 % der Punkte erreichen, aber natürlich keine bessere Note als 1.0.
- Alle Angabenblätter sind abzugeben.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben bitte auf den Angabenblättern (auch Rückseite benutzen). Bei Abgabe von Zusatzblättern, bitte ihre Anzahl auf der Angabe vermerken.
- Ergebnisse sind zu begründen und durch die entsprechenden Rechenschritte nachzuweisen, sofern nicht anders angegeben.
- Schreiben Sie mit einem nichtradierbaren Stift (z.B. Kugelschreiber, Füllfeder).

**Aufgabe 1** (4 + 6 Punkte)

a) Gegeben seien die Matrix $A$ und ihre Inverse (die Inverse müssen Sie nicht nachrechnen):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Norm und die Kondition der Matrix $A$ bzgl. der $\|\cdot\|_1$-Norm. und bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$-Norm

b) Berechnen Sie die $LR$-Zerlegung von $B$ und lösen Sie damit $Bx = b$.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -4 & 22 & -18 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -66 \end{bmatrix}$$

Wenn Sie die $LR$-Zerlegung nicht bestimmen können, verwenden Sie die (*falschen*) Matrizen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -18 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 28 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 2** (7 + 3 Punkte)

Die Fließkommazahlen nach IEEE 754-Standard mit einfacher Genauigkeit $x_1, \dots, x_4$ seien in `float`-Variablen `x1, x2, x3, x4` gespeichert. Ihr Wert als Bitmuster sei gegeben durch:

| Variable | Byte 1 | Byte 2 | Byte 3 | Byte 4 |
|---|---|---|---|---|
| x1 | 00101011 | 00000000 | 01111100 | 00000000 |
| x2 | 00110101 | 00000000 | 01111100 | 00000000 |
| x3 | 11111000 | 10110000 | 00000000 | 00000000 |
| x4 | 01000000 | 10110000 | 00000000 | 00000000 |

a) Welchen Wert als bit-Muster haben die Variablen `y1, y2, y3`, nachdem folgende Anweisungen durchlaufen wurden? Stellen, die mit * markiert sind, müssen Sie nicht angeben.

```
float y1, y2, y3;
y1 = -x1 / 8;
y2 = 22.5;
y3 = x3*x3;
```

| Variable | Byte 1 | Byte 2 | Byte 3 | Byte 4 |
|---|---|---|---|---|
| y1 | | | | ******** |
| y2 | | | | ******** |
| y3 | | | | ******** |

b) Welchen Wert hat `x4` als reelle Zahl?

**Aufgabe 3** (3 + 5 + 3 Punkte)

a) Warum ist die Auswertung der folgenden Formel für $|x| \ll 1$ numerisch instabil? Formen Sie in einen äquivalenten, numerisch stabilen Ausdruck um!

$$\frac{6}{2+3x} - \frac{3-x}{1+x}$$

b) Der body-mass-Index (BMI) dient zur Klassifikation von Übergewicht und wird aus der Masse $m$ in [kg] und der Körpergröße $h$ in [m] nach der Formel $\mathrm{BMI} = \mathrm{BMI}(m,h) = \frac{m}{h^2}$ berechnet. Geben Sie die relative Kondition der Funktion $\mathrm{BMI}(m,h)$ an.

c) Mit welcher relativen Genauigkeit müssen in b) Masse und Größe gemessen werden, um den BMI mit 2% relativer Genauigkeit zu bestimmen? Schätzen Sie mit Hilfe der relativen Kondition ab! Falls Sie b) nicht lösen konnten, verwenden Sie $\kappa(m,h) = 10$.

**Aufgabe 4** (5 + 5 Punkte)

a) Gegeben seien Messwerte $(x_i, y_i)$, wobei $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, 3$. Die Punkte sollen durch ein Polynom vom Höchstgrad 3 interpoliert werden. Vervollständigen Sie das Schema der dividierten Differenzen.

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $[x_i]f$ | $[x_i, x_{i+1}]f$ | $[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$ | $[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-1$ | $-7$ | $\square$ | | | |
| | | | | $> 4$ | | |
| 1 | 1 | 1 | $\square$ | | $> \square$ | |
| | | | | $> \square$ | | $> 2$ |
| 2 | 2 | 14 | $\square$ | | $> \square$ | |
| | | | | $> \square$ | | |
| 3 | 3 | 49 | $\square$ | | | |

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_r$ und $b_r$ so, dass die Funktion $s : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen bzgl. der Unterteilung $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ist. Weisen Sie alle erforderlichen Eigenschaften nach.

$$s(x) = \begin{cases} 2x^3 + 6x^2 + x + 1, & x \in [-1, 0] \\ a_r x^3 + b_r x^2 + x + 1, & x \in [0, 1] \end{cases}$$

**Aufgabe 5** (10 Punkte - nichtlinear und damit schwerer als bisher gehabt)

Zwei Rammen stehen auf der Baustelle für das neue Architekturgebäude, direkt vor dem Fenster Ihres Dozenten, und verursachen kleinere Erdbeben Diese können als Schwingungen mit Millimeterbereich auch ohne Messinstrumente wahrgenommen werden. Man nimmt an, dass die Stärke der Erschütterung, gemessen durch deren maximale Amplitude $A$, abhängt von

- $h$ =Fallhöhe des Gewichts (massiver Betonklotz), mit dem die Ramme ein Stahlrohr in den Boden treibt. Die Ramme zieht dieses Gewicht zwar immer in dieselbe Höhe, die Fallstrecke verlängert sich aber, je weiter das Rohr schon in den Boden gerammt ist. Dadurch ergibt sich eine Energie $mgh$, die in den Boden eingeleitet wird. Die Masse $m$ des Gewichts und die Erdbeschleunigung $g$ sind sehr genau bekannt, die Fallhöhe $h$ könnte man prinzipiell erfassen (Seillänge nach Aufschlag).
- $d$ = Abstand der Ramme vom Arbeitsplatz des Dozenten, gemessen in der Bodenebene. Mit zunehmendem Abstand nimmt die Amplitude der Erschütterung ab, im K002 ist schon fast nichts mehr zu spüren.

Man vermutet ein Gesetz [1]

$$A = C \cdot \frac{mgh}{d^\alpha}$$

Es ergibt sich eine Diskussion, ob $\alpha = 2$ ("Wellen breiten sich in der Oberflächenschicht aus, Braunkohle darunter dämpft, 2d-Effekt, also Exponent 2") oder $\alpha = 3$ ("Wellen breiten sich halbkugelförmig in den Boden aus, 3d-Effekt, also Exponent 3"), oder ein anderer (verschiedene Bodenschichten, bodennahes Rammen und Rammen in 10 m Tiefe müssten unterschiedlich modelliert werden, Übertragungsverhalten in 1. Stock, ...) den Zusammenhang erklärt.

Mit einem Seismographen auf dem Schreibtisch des Dozenten soll diese Diskussion entschieden werden, indem $\alpha$ über ein Regressionsmodell ermittelt wird.

a) Stellen Sie ein (nichtlineares!) Modell auf; erklären Sie insb. Ihre Variablen.

b) Transformieren Sie das Modell in ein lineares Modell, und geben Sie ein lineares Ausgleichsproblem in Matrixform an, mit dem man insb. $\alpha$ bestimmen kann.

c) Wieviele Messungen braucht man mindestens, um $\alpha$ zu ermitteln?

[1] ja, ist viel komplizierter, Energie als Integral Abklingvorgang ermitteln, ...), aber wir wollten ja immer einfach anfangen

**Aufgabe 6**

Ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen bezüglich der Unterteilung $x_0, x_1, x_2$ des Intervalls $[0,2]$ soll durch die Punktepaare

| $j$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_j$ | 0 | 1 | 2 |
| $y_j$ | 3 | -1 | 7 |

gelegt werden. Mit den Bezeichnungen

$$s(x) = \begin{cases} s_L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, & x \in [0,1] = [x_0, x_1] \\ s_R(x) = 9 - 25x + 18x^2 - 3x^3, & x \in [1,2] = [x_1, x_2] \end{cases}$$

seien die Koeffizienten auf dem rechten Teilintervall schon bekannt. Berechnen Sie $a_0, a_1, a_2, a_3$.

**Aufgabe 7** (MATLAB: 4 + 5 + 2 Punkte)

a) Zur Interpolation seien Daten $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeben und eine Stelle $x_\star \in \mathbb{R}$, an der das Lagrange-Basis-Polynom $L_{j,n}$ von der Funktion `LagrangePolynomial(xs, x, j)` ausgewertet werden soll. Dabei wird $x_\star$ als `xs` übergeben. Der MATLAB-Code ist fehlerhaft. Kreisen Sie die Fehler ein, erklären Sie diese, und geben Sie eine korrekte Variante an!

```
function y = LagrangePolynomial(xs, x, j)
int k;
y = ones(length(x));
for k = 0:length(x)
    if k != j
        y = y * (xs - x[k]) / (x[j] - x[k]);
    end
end
```

b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die 1-Norm einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ liefert. Verwenden Sie *nicht* die MATLAB-Funktion `norm`!

c) Geben Sie *einen* MATLAB-Ausdruck *ohne Schleife* an, der die ersten $n \in \mathbb{N}$ Glieder der Folge $3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ als Zeilenvektor liefert. Eine Variable `n` sei dazu schon initialisiert.

**Aufgabe 8** (Bonusaufgabe: 6 x 1 Punkt)

Wahr oder falsch? Ankreuzen und *kurze* Begründung! **Ohne Begründung gibt es keinen Punkt**. Für falsche Begründungen gibt es keinen Abzug. Bei e) reicht der Name der Sprache.

a) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ invertierbar. Dann gibt es eine Zerlegung $A = LR$ mit einer linken Dreiecksmatrix $L$ und einer rechten Dreiecksmatrix $R$. wahr ☐ falsch ☐

b) Seien $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ Datenpaare in $\mathbb{R}^2$ mit $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$. Es gibt genau einen kubischen Spline mit $p(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, 3$. wahr ☐ falsch ☐

c) Für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ gilt: $\|A\|_1 = \|A^t\|_\infty$. wahr ☐ falsch ☐

d) Für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$ wahr ☐ falsch ☐

e) Die MATLAB-Sprache verwendet z.T. andere Konzepte als C/C++/Java-ähnliche Sprachen. Nennen Sie je eine Prograammierprache, die sich wie MATLAB verhält!

"Variablentypen müssen nicht deklariert werden."

---

"white spaces wie das Zeilenende bei Matrizen sind Teil der Syntax."

---