Studiengang
IN, IT (B. Sc.)
Wintersemester 2020/21

Probe-Klausur Computerarithmetik und Rechenverfahren

Korrekturvorlage

Aufgabensteller: Martin Weiß
Prüfungstermin: real: XX.YY.ZZZZ
Arbeitszeit: 90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:
Kurzskript,
2 handgeschriebene Seiten,
Formelsammlung,
kein Taschenrechner

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Studiengruppe: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Anzahl Zusatzblätter: __________

Platznummer: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$	Note
Punkte	10	10	11	10	10	10		

Hinweise:

- Diese Prüfung besteht aus 6 Aufgaben.
- Alle Angabenblätter sind abzugeben.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben bitte auf den Angabenblättern (auch Rückseite benutzen). Bei Abgabe von Zusatzblättern, bitte ihre Anzahl auf der Angabe vermerken.
- Ergebnisse sind zu begründen und durch die entsprechenden Rechenschritte nachzuweisen, sofern nicht anders angegeben.
- Schreiben Sie mit einem nichtradierbaren Stift (z.B. Kugelschreiber, Füllfeder).

Aufgabe 1 (4 + 6 Punkte)

Gegeben seien Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die Inverse B^{-1}, und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ -4 & 22 & -18 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -66 \end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A und lösen Sie damit $Ax = b$. Wenn Sie die LR-Zerlegung nicht bestimmen können, verwenden Sie die (*falschen*) Matrizen

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -18 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 28 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie die Norm und Kondition von B bzgl. der ∞-Norm an.

c) Mit welcher relativen Genauigkeit bzgl. der ∞-Norm muss b gemessen werden, damit das Gleichungssystem $Bx = b$ mit relativer Genauigkeit von 4% gelöst werden kann? Wenn Sie b) nicht lösen konnten, verwenden Sie $\kappa_\infty(B) = 20$.

Lösung

a)

$$\overset{Gauss}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 20 & -16 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Lz = b \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -66 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad z = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$Rx = z \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 7 \\ -10 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

falsche LR-Zerlegung:

$$z = \begin{bmatrix} 7 \\ 18 \\ -12 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} 79 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{3}{4} \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\|B\|_\infty = 8, \qquad \left\|B^{-1}\right\|_\infty = 5, \qquad \mathrm{cond}_\infty(B)) = 40$$

c)

$$\delta_x \;\approx\; \mathrm{cond}_\infty(B)) \cdot \delta_b = 40 \cdot \delta_b \overset{!}{\leq} 4\%$$

also: $\delta_b \leq 4\%/40 = 0.1\%$

mit $\mathrm{cond}_{\mathrm{inf}}(B)) = 20$: $\delta_b \leq 4\%/20 = 0.2\%$

Aufgabe 2 (7 + 3 Punkte)

Die Fließkommazahlen nach IEEE 754-Standard mit einfacher Genauigkeit x_1, x_2 seien in Variablen `float x1, x2;` gespeichert. Ihre Werte sind als Bitmuster gegeben:

Variable	Byte 1	Byte 2	Byte 3	Byte 4
x1	01000010	01100110	00000000	00000000
x2	01100111	01000000	00000000	00000000

Welchen Wert als bit-Muster haben die Variablen `y1, y2, y3`, nachdem folgende Anweisungen durchlaufen wurden? Stellen, die mit `*` markiert sind, müssen Sie nicht angeben.

```
float y1 = x1 / (-128.0);
float y2 = x2 * x2;
float y3 = -8.25;
```

	Byte 1	Byte 2	Byte 3	Byte 4
y1			********	********
y2			********	********
y3			********	********

Variable	Byte 1	Byte 2	Byte 3	Byte 4
y1	10111110	11100110	00000000	00000000
y2	01111111	10000000	00000000	00000000
y3	11000001	00000100	00000000	00000000

Lösung

y1: Charakteristik: $\texttt{10000100}_2 = 132$. $128 = 2^7$. $132 - 7 = 125 = \texttt{01111101}_2$

y2: x3 hat $c = \texttt{11001110}_2 = 206$, also $e = 206 - 127 = 79$. Dann hat x3*x3 Exponenten $e = 79 + 79 = 158$, also $c = 158 + 127 = 285$ außerhalb des Wertebereichs. Also `+Inf`.

y3: $8.25 = 8 + \frac{1}{4} = \texttt{1000.01}_2 = 2^3 \cdot \texttt{1.00001}_2$.
Mantisse ohne führende 1 beginnt mit `.00001`.
Also $e = 3$, $c = e + 127 = 130 = \texttt{10000010}_2$. $\sigma = -1$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

[Eine komplett lineare Aufgabe ist in der Probeklausur vom SoSe 2018.]

Der Zerfall von radioaktivem Material kann mit dem Exponentialgesetz $M(t) = M_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$ beschrieben werden mit einer vom Material abhängigen Konstante; dabei ist M_0 die Menge Material [g] zur Zeit $t = 0$ (Anfang der Beobachtung), t die Zeit [Jahre]. Über eine weitere Konstante γ ergibt sich die Radioaktivität [Tera-Bequerel] als $A(t) = \gamma \cdot M(t)$. Die Konstanten betragen $\alpha_K = 0.1315, \gamma_K = 44$ für Kobalt 60, und $\alpha_C = 0.023$, $\gamma_C = 3.215$ für Cäsium 137.

Ein Behälter mit radioaktivem Abfall enthält eine unbekannte Menge Cäsium 137 und Kobalt 60. Über mehrere Jahre wurde die Gesamt-Radioaktivität des Fasses gemessen:

t	0	1	2	3	4	5	6
$A(t)$	103	91	81	73	65	58	53

a) Stellen Sie ein lineares Regressionsmodell auf, mit dem die Menge Cäsium 137 und Kobalt 60 zur Zeit $t = 0$ ermittelt werden kann. Benennen Sie insbesondere Ihre Variablen. Geben Sie die Matrixform an. Schreiben Sie dabei α_K usw. als Variablen, nicht die numerischen Werte. Sie sollen das Ausgleichsproblem **nicht** lösen.

b) Auf fernen Planeten gibt es Vorkommen eines stabilen Isotops des Elements 115 Moscovium mit genau denselben Konstanten wie Caesium 137, $\alpha_M = \alpha_C$, $\gamma_M = \gamma_C$. Zum Antrieb von Raumschiffen verwendet man eine Mischung von Caesium 137 und diesem radioaktivem Moscovium. Über mehrere Jahre wurde die Gesamt-Radioaktivität eines Treibstoffbehälters gemessen, dabei ergab sich genau dieselbe Tabelle wie oben.

   Können Sie mit Ihrem Modell die Mengen Cäsium 137 und Moscovium zur Zeit $t = 0$ ermitteln?

c) Jemand behauptet: Das Modell ist nichtlinear in den α's. Wenn man den Logarithmus verwendet, kann man auf andere Variablen wechseln, und könnte sogar die Zerfallskonstanten aus den Daten ermitteln.

   Was sagen Sie dazu?

Lösung

a) Variablen:

   - abhängige Größe: Gesamtaktivität A
   - unabhängige Größe: Zeit t
   - gesuchte Parameter: C_0 Anfangsmenge Caesium, K_0 Anfangsmenge Kobalt
   - ($\alpha_C, \gamma_C, \alpha_K, \gamma_K$ sind Konstanten aus Sicht dieser Teilaufgabe)

   Modellgleichung:

$$A = A(t) = C_0 \cdot \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t) + K_0 \cdot \gamma_K \exp(-\alpha_K \cdot t)$$

   bzw.

$$A_i = A(t_i) = C_0 \cdot \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_i) + K_0 \cdot \gamma_K \exp(-\alpha_K \cdot t_i), \qquad t_i = 0, \ldots, 6$$

in Matrixform:

$$\begin{bmatrix} \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_0) & \gamma_K \exp(-\alpha_K \cdot t_0) \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_6) & \gamma_K \exp(-\alpha_K \cdot t_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ K_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_6 \end{bmatrix}$$

(kurz: $\tilde{A} \cdot x = b$, Bezeichner $\tilde{A}$ weil A schon vergeben ist)

b) Wegen Gleichheit der Konstanten ergibt sich das Modell

$$\begin{aligned} A = A(t) &= C_0 \cdot \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t) + M_0 \cdot \gamma_M \exp(-\alpha_M \cdot t) \\ &= C_0 \cdot \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t) + M_0 \cdot \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t) \\ &= (C_0 + M_0) \cdot \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t) \end{aligned}$$

mit Matrixform

$$\begin{bmatrix} \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_0) & \gamma_M \exp(-\alpha_M \cdot t_0) \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_6) & \gamma_M \exp(-\alpha_M \cdot t_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ K_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_0) & \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_0) \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_6) & \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_0 \\ K_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_6 \end{bmatrix}$$

Am Modell sieht man: man kann nur die Summe $C_0 + M_0$ ermitteln (weil die Zerfallseigenschaften der Materialien identisch sind). An der Matrixform sieht man: Die Spalten sind identisch. Die Matrix hat also nur Rang 1. Damit ist nur 1 Parameter ermittelbar, eben die Summe der Anfangsmengen - aber nicht diese Mengen isoliert.

c) Ein exponentielles Modell $A = C \cdot \exp(-\alpha t)$ kann man mit dem natürlichen Logarithmus in neuen Variablen schreiben als

$$\tilde{A} := \ln A = \ln C - \alpha t =: \tilde{C} - \alpha t$$

Dieses Modell ist linear in den Parametern $\tilde{C}$ und α, d.h. man kann damit tatsächlich α ermitteln.

Für das Modell aus a) funktioniert das leider nicht, weil der Logarithmus zwar Produkte und Potenzen in Summen und Produkte verwandelt, aber mit Summen nichts anfangen kann. D.h. man kann nicht weiter vereinfachen

$$\ln \left(C_0 \cdot \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t) + M_0 \cdot \gamma_M \exp(-\alpha_M \cdot t) \right)$$

Für b) klappt es:

$$\ln((C_0 + M_0) \cdot \gamma_C \exp(-\alpha_C \cdot t)) = \ln(C_0 + M_0) + \ln \gamma_C - \alpha_C \cdot t =: \ln \gamma_C + \tilde{S}_0 - \alpha t$$

$\ln \gamma_C$ kann auf die andere Seite gebracht werden und stört die Linearität nicht.

Aufgabe 4 (4 + 6 Punkte)

a) Für das Bundesland Bayern soll aus den Corona-Daten der 71 Landkreise ein Mittelwert gebildet werden. Die Variablen `inzidenz` und `bevoelkerung` enthalten als Spaltenvektoren die 7-Tage-Inzidenz pro 100000 Einwohner I_l, und die Bevölkerungszahl B_l für die Landkreise $l = 1, \dots, 71$. Die mittlere Inzidenz I ergibt sich gemäß $I = \frac{1}{\sum_{l=1}^{71} B_l} \sum_{l=1}^{71} I_l \cdot B_l$. Geben Sie dafür einen möglichst einfachen MATLAB-Ausdruck ohne Schleifen an.

Lösung

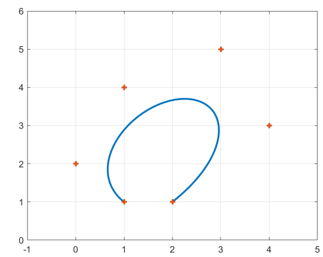
```
I = @(Inzidenz, Bevoelkerung) 1/sum(Bevoelkerung)*Inzidenz'*Bevoelkerung;
```

b) Die Funktion `plotBezier` soll gemäß der Formel

$$B(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} P_k, \; \lambda \in [0,1]$$

eine Bezier-Kurve zu Punkten $P_0, \dots, P_n \in \mathbb{R}^2$ zeichnen, die spaltenweise in der Matrix P übergeben werden. Weiter sollen die Punkte P_i mit einem Kreuz markiert werden, siehe die Kommandos mit zugehöriger Ausgabe rechts.
Die Implementierung enthält Fehler – nicht nur Syntaxfehler. Markieren Sie die Fehler, erklären Sie jeweils das Problem, und geben Sie eine korrekte Version an. (Die MATLAB-Funktion `nchoosek` berechnet den Binomialkoeffizienten.)

```
P = [1 0 1 3 4 2
     1 2 4 5 3 1];
plotBezier(P);
axis([-1 5 0 6]);
grid on
```




```
function plotBezier(P)
figure(1); clf;
[~,n] = size(P);
lambda = 0:1;
B = zeros(2,length(lambda));
for k=0:n-1
    B = B+nchoosek(n-1,k)*P(:,k+1) ...
        *lambda.^k.*(1-lambda).^(n-1-k);
end
plot(B(1,:),B(2,:), 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(P(1,:),P(2,:), '+', 'LineWidth', 2);
end
end
```

- `lambda = 0:1;` muss z.B. `lambda = 0:0.1:1;` sein
- `k=0` gibt Problem bei `P(:,k)`
- `.^` bei λ-Potenzen fehlt
- geschweifte Klammern bei `for`-Schleife
- `hold on` fehlt
- `P[:,k]`: runde statt eckige Klammern
- `...` erforderlich
- `+=` gibt es nicht

Aufgabe 5 (9 + 4 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob die Funktionen die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllen.

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f_1(x) = \sin(x) \\ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f_2(x) = \tfrac{1}{2}\sin(x) + 100 \\ f_3 : (-\infty, 0] \to [99, 101], &\quad f_3(x) = \tfrac{1}{2}\sin(x) + 100 \end{aligned}$$

b) Geben Sie die Newton-Iteration und die Sekanten-Iteration an für die Lösung der nichtlinearen Gleichung $x + x^2 - \frac{1}{3}\cos(x) = 7$

Lösung

a) f_1, f_2 sind Selbstabbildungen, d.h. Definitions- und Wertebereich sind die gleichen Mengen. f_3 ist keine Selbstabbildung, erfüllt die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes also nicht.
Kontraktionsbedingung: Wir berechnen die Ableitung und prüfen, ob diese durch eine Konstante $L < 1$ abgeschätzt werden kann.

- $f_1'(x) = \cos(x)$.
$$\left|f_1'(x)\right| = |\cos(x)| \leq 1 = K$$
Voraussetzung des Banachschen Fixpunktsatzes also nicht erfüllt, weil K nicht strikt kleiner als 1 ist
- $f_2'(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$.
$$\left|f_2'(x)\right| = \left|\frac{1}{2}\cos(x)\right| \leq \frac{1}{2} = K$$
Voraussetzung des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt
- (Das braucht man nicht mehr nachrechnen, da schon keine Selbstabbildung. Der Vollständigkeit halber) Wie bei f_2, Kontraktionseigenschaft ist erfüllt

Ergänzung, war nicht verlangt: f_1 hat einen eindeutigen Fixpunkt 0. D.h. der Banachschen Fixpunktsatz liefert ein hinreichendes, aber nicht notwendiges Kriterium.

b) Achtung: Die Formulierung beider Verfahren geht aus von der Nullstellensuche. Man muss die Aufgabenstellung also interpretieren als: Löse $f(x) = x + x^2 - \frac{1}{3}\cos(x) - 7 = 0$.
Newton-Iteration: Ableitung benötigt: $f'(x) = 1 + 2x + \frac{1}{3}\sin(x)$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - f'(x_k)^{-1} f(x_k), \qquad k \in \mathbb{N}_0 \\ &= x_k - \frac{x_k + x_k^2 - \frac{1}{3}\cos(x_k) - 7}{1 + 2x_k + \frac{1}{3}\sin(x_k)} \end{aligned}$$

Es gibt Definitionslücken wegen des Nenners, das war nicht gefragt.
Sekanten-Iteration:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \\ &= x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{(x_k + x_k^2 - \frac{1}{3}\cos(x_k)) - (x_{k-1} + x_{k-1}^2 - \frac{1}{3}\cos(x_{k-1}))}(x_k + x_k^2 - \frac{1}{3}\cos(x_k) - 7) \end{aligned}$$

Im Nenner fällt die Konstante 7 heraus.

Aufgabe 6 (4 + 6 Punkte)

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 + {x_2}^2 - 2 \\ \mathrm{e}^{x_1 - 1} + {x_2}^3 - 2 \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x_1, x_2) = x_1 \cdot \ln(1 + x_2^2)$$

Lösung

a)

$$Df_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ \mathrm{e}^{x_1 - 1} & 3{x_2}^2 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \ln\left({x_2}^2 + 1\right) \\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 2\,\frac{x_1 x_2}{{x_2}^2 + 1} \\
Hf_2(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 2\,\frac{x_2}{{x_2}^2+1} \\ 2\,\frac{x_2}{{x_2}^2+1} & 2\,\frac{x_1}{{x_2}^2+1} - 4\,\frac{x_1 {x_2}^2}{\left({x_2}^2+1\right)^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$