OSTBAYERISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE REGENSBURG
INFORMATIK UND MATHEMATIK

Studiengang
IN, IT (B. Sc.)
Prof. Dr. Martin Weiß
Wintersemester 2017/18

Probe-Klausur Computerarithmetik und Rechenverfahren

Aufgabensteller: Prof. Dr. M. Weiß
Prüfungstermin: X.X.2017
Arbeitszeit: 90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel:
Kurzskript,
Formelsammlung,
2 handgeschriebene Seiten,
kein Taschenrechner

Prüfungsteilnehmer

Name: ______________________________

Vorname: ___________________________

Studiengruppe: ______________________

Matrikel-Nr.: _______________________

Anzahl Zusatzblätter: _______________

Es sind mehr Aufgaben formuliert, als in 90 min Klausurzeit gelöst werden könnten.
Als zusätzliche Übungsaufgaben gedacht!

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die *LR*-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & -5 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösen Sie mit der *LR*-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$\begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie Kondition und Norm der Matrix A bzgl. der 1-Norm, dabei ist die Inverse A^{-1} schon berechnet:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -4 & -7 & -6 \\ -6 & -10 & -8 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & \frac{-11}{2} \\ -2 & -7 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie die Kondition folgender Matrizen bzgl. der jeweiligen Normen an:

$$\mathrm{cond}_2(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}), \quad \mathrm{cond}_\infty(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix})$$

c) Wahr oder falsch? Geben Sie eine kurze Begründung an, z.B. durch ein Gegenbeispiel.

i) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt: Die Einheitsmatrix $E \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\|E\|_X = 1.$$

ii) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt für die zugehörige Kondition: Die Einheitsmatrix $E \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\mathrm{cond}_X(E) = 1.$$

iii) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm

iii) Für eine beliebige durch eine Norm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gilt für die zugehörige Kondition: Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ hat

$$\mathrm{cond}_X(A) = 1$$

genau dann, wenn $A = E$ die Einheitsmatrix ist.

Bemerkung:
Induzierte Matrixnormen $\|\cdot\|_X : \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind über eine Vektornorm $\|\cdot\|_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\|A\|_X := \max_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_X$$

Das sind die einzigen Matrixnormen, die wird betrachtet haben. Es gibt andere Matrixnormen, für die die hergeleiteten Regeln wie z.B. $\|I\|_X = 1$ für die Einheitsmatrix I, oder $\|AB\|_X \leq \|A\|_X \cdot \|B\|_X$ nicht gelten.

Aufgabe 3

Das eindeutige Interpolationspolynom durch die Wertepaare

i	0	1	2	3
x_i	4	2	0	3
y_i	63	11	7	28

mit $y_j = f(x_j)$ für ein unbekanntes f ist gegeben durch (das müssen Sie nicht zeigen!):

$$p(x) = 1 \cdot x^3 - 0 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 7$$

Geben Sie an:

a) die Koeffizienten a_i aus der Darstellung in Lagrange-Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^{3} a_j \cdot L_{j,3}(x)$$

b) das Newton-Schema der dividierten Differenzen, und die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} [x_0, \ldots, x_i] f \cdot \omega_i(x)$$

Aufgabe 4

Gegeben seien die Wertepaare

i	0	1	2	3
x_i	0	2	3	4
y_i	7	11	28	63

a) Geben Sie mit Hilfe des Newton-Schemas das Interpolationspolynom vom Höchstgrad 2 durch $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ an, und zwar in nicht-ausmultiplizierter Form, sowie in Monom-Form $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$.

b) Geben Sie mit Hilfe des Newton-Schemas das Interpolationspolynom vom Höchstgrad 3 durch $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ an, und zwar in nicht-ausmultiplizierter Form.

c) Berechnen Sie das Newton-Schema für folgende Wertepaare, die sich aus den obigen nur durch Indizierung unterscheiden:

i	0	1	2	3
x_i	4	2	0	3
y_i	63	11	7	28

Welche Werte erkennen Sie aus Teilaufgabe a) und b) wieder?

Aufgabe 5

Vervollständigen Sie das Newton-Schema der dividierten Differenzen für die Stützstellen und Stützwerte

i	0	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y_i	0	-3	4	21

(in einer anderen Version waren hier die y-Werte durch 3 dividiert)

wobei Sie die vorhandenen Werte benutzen dürfen.

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\ldots,x_{i+3}]f$
0	0	0	0	$*$	20	$*$
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	$*$	2	
2	1	4	4	17		
3	2	21	21			

Geben Sie das Interpolations-Polynom zu diesen Stützstellen und -werten in Newton-Form an (ohne Ausmultiplizieren!).

i	x_i	y_i	$[x_i]f$	$[x_i,x_{i+1}]f$	$[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]f$	$[x_i,\ldots,x_{i+3}]f$	$[x_i,\ldots,x_{i+4}]f$
0	0	0	0	$*$	20	$*$	0
1	$\frac{1}{2}$	-3	-3	$*$	2	$*$	
2	1	4	4	17	$*$		
3	2	21	21	$*$			
$*$	$*$	$*$	$*$				

Es wird ein zusätzlicher Punkt $(x_4, y_4) = (3, -3)$ erfasst. Erweitern Sie hierzu das Schema der dividierten Differenzen. Zur Kontrolle: Es ergibt sich $[x_0, \ldots, x_4]f = 0$.

Preisfrage: was bedeutet das für (x_4, y_4)?

Aufgabe 6

a) Geben Sie eine Formel für die (betragsmäßig) kleinste Zahl ungleich 0 und größte Zahl für `float`-Zahlen, also Fließkomma-Zahlen mit einfacher Genauigkeit nach Standard IEEE 754 an (ohne Berücksichtigung von denormalisierten Zahlen!).

b) Stellen Sie $x = 62,5$ als IEEE-754-Fließkommazahl mit einfacher Genauigkeit dar.

c) Die Fließkommazahlen nach IEEE 754-Standard mit einfacher Genauigkeit $x_1, \ldots, x_5$ seien in `float`-Variablen

```
float  x1, x2, x3, x4, x5;
```

gespeichert. Ihr Wert als Bitmuster sei gegeben durch:

Variable				
x_1	01010101	10000000	01111100	00000000
x_2	01010101	10001000	01111100	00000000
x_3	11010101	10000000	00000000	00000000
x_4	00000000	00000000	00000000	00000000
x_5	00010101	10000000	01111100	00000000

Welchen Wert als bit-Muster haben die Variablen, nachdem folgende Anweisungen durchlaufen wurden?

```
x4 = x1 + x2;
x1 = x1 * 4;
x2 = -x2;
x3 = 1.0;
x5 = x5 * x5;
```

Aufgabe 7

Welches der folgenden MATLAB-Code-Fragmente implementiert die Lösung eines Gleichungssystems $Rx = z$ mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix R und (mehrere korrekte Antworten möglich)?

a) ☐

```
function x = foo(R,b)
n = length(b);
x = zeros(n,1);
for j = 1:n
    x(j) = ( b(j) - R( j,1:j-1 ) * x( 1:j-1 ) ) / R(j,j);
end
```

b) ☐

```
function x = foo(U,b)
n = length(b);
x = zeros(n,1);
x(n) = b(n) / R(n,n);
for i = n-1:-1:1
    sum = 0;
    for j = i+1:n
        sum = sum + R(i,j) * x(j);
    end
    x(i) = (b(i) - sum) / R(i,i);
end
```

c) ☐

```
x = R\z;
```

d) ☐

```
x = R/z;
```

e) ☐

```
z = R\x;
```

Aufgabe 8

Welches der folgenden MATLAB-Code-Fragmente implementiert den Tausch der Zeilen `k` und `l` der Matrix `A` mit `size(A)=[n m]`? (mehrere korrekte Antworten möglich)

a) ☐

```
A([k l], :) = A([l k],:)
```

b) ☐

```
A(:, [k l]) = A(:,[l k])
```

c) ☐

```
for Index = 1:n
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=A(k,Index);
end
```

d) ☐

```
for Index = 1:n
help = A(k,Index);
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=help;
end
```

e) ☐

```
for Index = 1:m
A(k,Index)=A(l,Index);
A(l,Index)=A(k,Index);
end
```

Aufgabe 9

Bestimmen Sie die relative Kondition der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & x_1^2 \cdot x_2 \end{array}$$

im Punkt $(x_1,x_2) = (2,3)$.

Aufgabe 10

Eine Hausverwaltungsgesellschaft will für Neuvermietungen in einer großen Wohnanlage eine Schätzung für die Wärmekosten ermitteln, bestehend aus Heizung und Warmwasserbereitung. Es wird angenommen, dass die Haupteinflußgrößen die Fläche der Wohnung in m^2, sowie die Personenzahl im Haushalt ist (es wird nicht zwischen Kindern und Erwachsenen unterschieden).

a) Formulieren Sie ein lineares Modell, benennen Sie insb. Ihre Variablen.

b) Stellen Sie ein Ausgleichsproblem in der Form $Ax = b$ auf Basis folgender Daten auf:

Wohnungsnummer	Wohnfläche [m ^{2}]	Personen	Wärmekosten €
1	120	3	1500
2	150	4	1800
3	150	4	1700
4	130	3	1600

c) Aus wie vielen Wohnungen müssen mindestens Vergleichsdaten vorliegen, um eine sinnvolle Schätzung durchführen zu können?

Aufgabe 11

Ein kubischer Spline mit natürlichen Randbedingungen bezüglich der Unterteilung x_0, x_1, x_2 des Intervalls $[0,2]$ soll durch die Punktepaare

j	0	1	2
x_j	0	1	2
y_j	3	-1	7

gelegt werden. Mit den Bezeichnungen

$$s(x) = \begin{cases} s_L(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, & x \in [0,1] = [x_0, x_1] \\ s_R(x) = 9 - 25x + 18x^2 - 3x^3, & x \in [1,2] = [x_1, x_2] \end{cases}$$

seien die Koeffizienten auf dem rechten Teilintervall schon bekannt. Berechnen Sie a_0, a_1, a_2, a_3.

Aufgabe 12

a) Eine Variable sei definiert als `v = [1 2]`, ferner die Anweisungen

(1) `v'*v` (2) `v*v` (3) `v.*v` (4) `v*ones(2)`

Welche Anweisung ergibt welches Ergebnis? Tragen Sie die Nummer ein!

`<Fehler>`	`[3 3]`	`[ 1 2` `2 4 ]`	`[1 4]`
☐	☐	☐	☐

b) In MATLAB seien Variablen definiert durch

```
A = [1 2 2; 3 4 4; 1 2 3];
x = [1 2 3]';
```

ferner die Anweisungen

(1) `x+1` (2) `x*x` (3) `A*x` (4) `x'*A`

Welche Anweisung ergibt welches Ergebnis? Tragen Sie die Nummer ein!

`<Fehler>`	`[2`
	`3`
	`4]`
		`[10 16 19]`	`[11`
			`23`
			`14]`

☐	☐	☐	☐