- 第三章 线性预测误差滤波器

3.1　定义和性质

3.1　定义和性质

一　定义

给定一组过去样本值：$x(n-1), x(n-2), \ldots, x(n-N)$

预测现在或将来值：$x(n) \Leftarrow \hat{x}(n)$

如果预测值是过去值的线性组合：

$$\hat{x}(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i) \longrightarrow \text{线性预测}$$

预测系数

预测误差：

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i) \longrightarrow \text{新息}$$

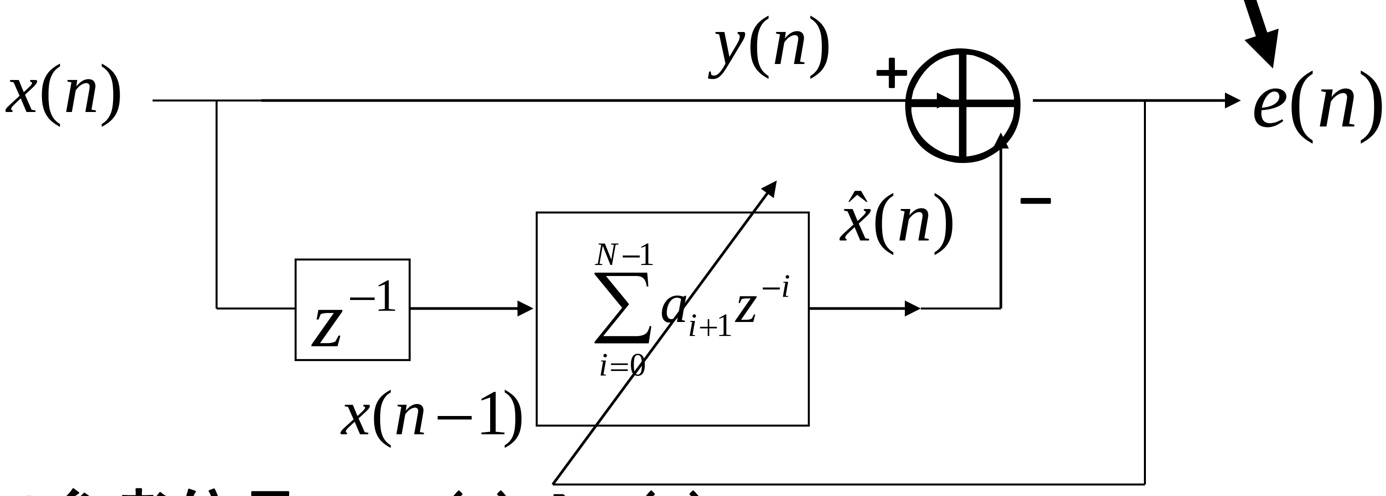
线性预测误差滤波器：$H(z) = 1 - \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i} = A(z)$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{H(z)=A(z)} \longrightarrow e(n)$$

一般地，线性预测误差滤波器指使均方误差达到最小的。

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i)$$

线性预测误差滤波器可看着是一种自适应滤波器:



比较:*参考信号　　$x(n) \rightarrow y(n)$

*输入信号　　$x(n-1) \rightarrow x(n)$

*估计(预测):　$\hat{x}(n) \rightarrow \hat{y}(n)$

平稳条件下,均方误差达到最小的线性滤波是最优滤波,即维纳滤波,利用维纳滤波结果可求得最佳预测系数

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_N = [a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_N]^T$$

$$\mathbf{r}_{yx} = E[y(n)\mathbf{x}(n)] \Rightarrow \mathbf{r}_N^a = E[x(n)\mathbf{x}(n-1)]$$

$$\mathbf{r}_N^a = [r(1) \quad r(2) \quad \ldots \quad r(N)]^T$$

$$R_N = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \ldots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r(N-1) & r(N-2) & \ldots & r(0) \end{bmatrix}$$

$$E[e^2(n)] = \min \Rightarrow \mathbf{H}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{r}_{yx}$$

$$\mathbf{r}_N^a - \mathbf{R}_N \mathbf{A} = 0$$

$$r(j) - \sum_{i=1}^{N} a_i r(j-i) = 0, 1 \le j \le N$$

$$\mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{aN} = E[e^2(n)] = E[x^2(n)] - \mathbf{A}_{opt}^T \mathbf{r}_N^a$$

$$= r(0) - \sum_{i=1}^{N} a_i r(i)$$

$$\mathbf{R}_{N+1} = \left[\begin{array}{c|ccc} r(0) & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{r(1) \quad \ldots \quad r(N)}^{(\mathbf{r}_N^a)^T}} \\ \hline r(1) & r(0) & \ldots & r(N-1) \\ . & . & . & . \\ r(N) & r(N-1) & \ldots & r(0) \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{r}_N^a$ $\mathbf{R}_N$

二　性质

1.　线性预测与信号模型

当$N \to \infty$时, 即

$$e(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i x(n-i)$$

当按$E[e^2(n)]$最小设计a_i时，有

$$E[e(n)x(n-i)] = 0, i \geq 1$$

$$e(n-i) = x(n-i) - \sum_{i'=1}^{\infty} a_i x(n-i-i')$$

$$E[e(n)e(n-i)] = 0, i \geq 1$$

所以：预测误差序列$e(n)$是一个白噪声（Innovation, 新息） → **白化处理(whitening)**

一个特殊情况：当*x*(n)是一个AR过程时，即信号*x*(n)是由一个全极点信号模型通过一个白噪声序列*e*(n)激励产生的输出：

$$e(n) \longrightarrow \boxed{B(z)} \longrightarrow x(n)$$

$$\boxed{\sigma_e^2}$$

$$B(z)=\frac{1}{A(z)}=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

0

$$x(n)=e(n)+\sum_{i=1}^{N}a_i x(n-i)\Rightarrow e(n)=x(n)-\sum_{i=1}^{N}a_i x(n-i)$$

$$E[e(n)x(n-j)]=E[x(n)x(n-j)-\sum_{i=1}^{N}a_i E[x(n-i)x(n-j)]$$

$$1)\ j\ge 1;\ r(j)-\sum_{i=1}^{N}a_i r(j-i)=0$$

$$\boxed{\mathbf{R}_{N+1}\begin{bmatrix}1\\-\mathbf{A}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{aN}\\0\end{bmatrix}}$$

$$\left.\begin{aligned}&2)\ j=0;\ E[e(n)x(n)]=E[x^2(n)]-\sum_{i=1}^{N}a_i E[x(n-i)x(n)]\\&E[e(n)x(n)]=E\{e(n)[e(n)+\sum_{i=1}^{N}a_i x(n-i)]\}=\sigma_e^2\end{aligned}\right\}$$

$$r(0)-\sum_{i=1}^{N}a_i r(i)=\sigma_e^2$$

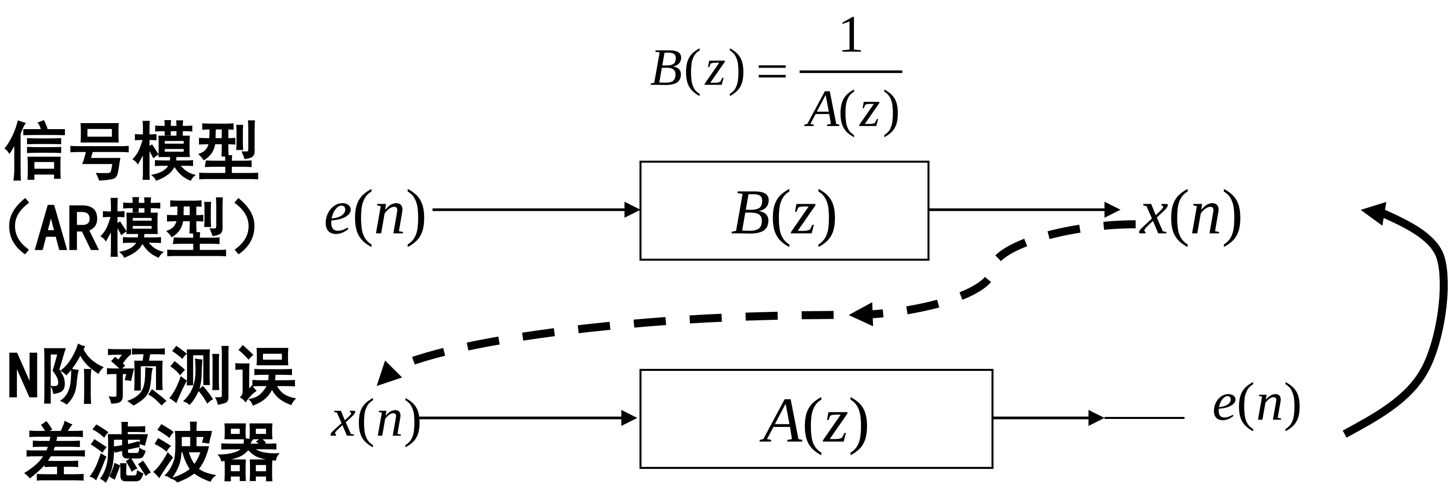
$$\sigma_e^2=E_{aN}$$

$$B(z)=\frac{1}{A(z)}=\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}$$

结论:

1) 对于模型阶次已知为N的AR过程，当正向预测误差按最小均方误差准则求N阶预测误差滤波器预测系数和该AR过程相应的参数有相同的值；

2) 推论：当过程为非自回归时（非AR模型），或是AR模型的阶次N未知，则预测误差滤波器提供了对该过程的一个估计，预测器阶次不断增加是$e(n)$逐渐白化的过程；



$$e(n) \longrightarrow \boxed{B(z)} \longrightarrow x(n)$$

$$\boxed{x(n) = e(n) + \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i)}$$

3) 由于AR过程$x(n)$的功率谱

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} r_x(k) e^{-j\omega k}$$

功率谱定义

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_e^2}{\left|1 - \sum_{i=1}^{N} a_i e^{-j\omega i}\right|^2}$$

所以估计出过程$x(n)$的参数a_i后，就等于估计出信号的功率谱. 因此，线性预测分析是估计信号功率谱的一种有效的方法。

$$A(z)=1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}$$

2. 最小相位特性

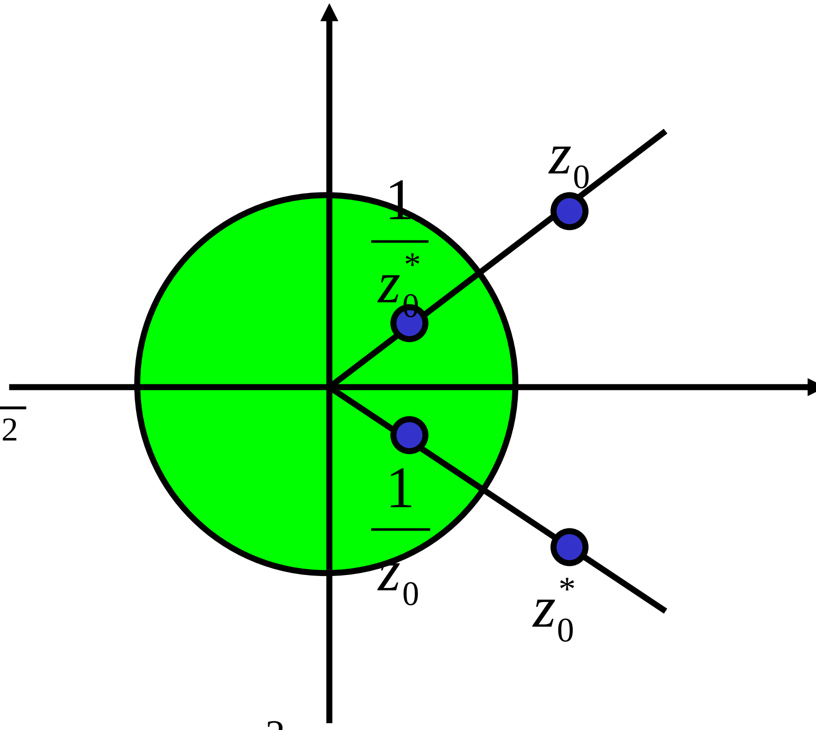
线性预测误差滤波器A(z)是最小相位的，即其全部零点在Z平面的单位园内(包括单位园).

证明(反证法)：

$$A'(z)=A(z)\frac{z-1/z_0^*}{z-z_0}\frac{z-1/z_0}{z-z_0^*}$$

$$\left|\frac{z-1/z_0^*}{z-z_0}\right|^2_{z=e^{j\omega}}=\left|\frac{e^{j\omega}-1/z_0^*}{e^{j\omega}-z_0}\frac{e^{-j\omega}-1/z_0}{e^{-j\omega}-z_0^*}\right|=\frac{1}{|z_0|^2}$$

$$\left|\frac{z-1/z_0}{z-z_0^*}\right|^2_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{|z_0|^2}$$



$$\left|A'(e^{j\omega})\right|^2=\left|A(e^{j\omega})\right|^2\frac{1}{|z_0|^4}<\left|A(e^{j\omega})\right|^2$$

$$\left|A'(e^{j\omega})\right|^2 = \left|A(e^{j\omega})\right|^2 \frac{1}{\left|z_0\right|^4} < \left|A(e^{j\omega})\right|^2$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{A(z)} \longrightarrow e(n)$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{A'(z)} \longrightarrow e'(n)$$

1. 功率谱与自相关函数之间是FT的关系

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} r_x(k) e^{-j\omega k} \longleftarrow \text{功率谱定义}$$

$$r_x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega \qquad r_x(0) = E[x^2(n)] = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

2. 由功率谱定义可得线性系统输入和输出信号的功率谱的关系

$$P_e(e^{j\omega}) = \left|A(e^{j\omega})\right|^2 P_x(e^{j\omega}) \Rightarrow E_{aN} = \sigma_e^2 = E[e^2(n)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|A(e^{j\omega})\right|^2 P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

$$P_{e'}(e^{j\omega}) = \left|A'(e^{j\omega})\right|^2 P_x(e^{j\omega}) \Rightarrow E'_{aN} = \sigma_{e'}^2 = E[e'^2(n)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|A'(e^{j\omega})\right|^2 P_x(e^{j\omega}) d\omega$$

$$\left|A'(e^{j\omega})\right|^2 < \left|A(e^{j\omega})\right|^2$$

与线性预测误差滤波器定义矛盾 $\Leftarrow$ $\therefore E'_{aN} < E_{aN}$

$x(n) \longrightarrow \boxed{A(z)} \longrightarrow e(n)$

3. 信号的可预测性

一个信号是N阶可预测的指

$E_{aN}=0$ 即 $E_a = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2 P_x(e^{j\omega}) d\omega = 0$

或时间域有

$$x(n) = \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i)$$

唯一满足上述方程的信号是具有线谱特性的信号，即

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^{N} |S_i|^2 \delta(\omega - \omega_i), |S_i|^2 \text{是}\omega_i\text{线谱的功率}$$

证明：1）充分性，使 $A(z) = \prod_{i=1}^{N} (1 - e^{j\omega_i} z^{-1}) \Rightarrow E_{aN}=0$

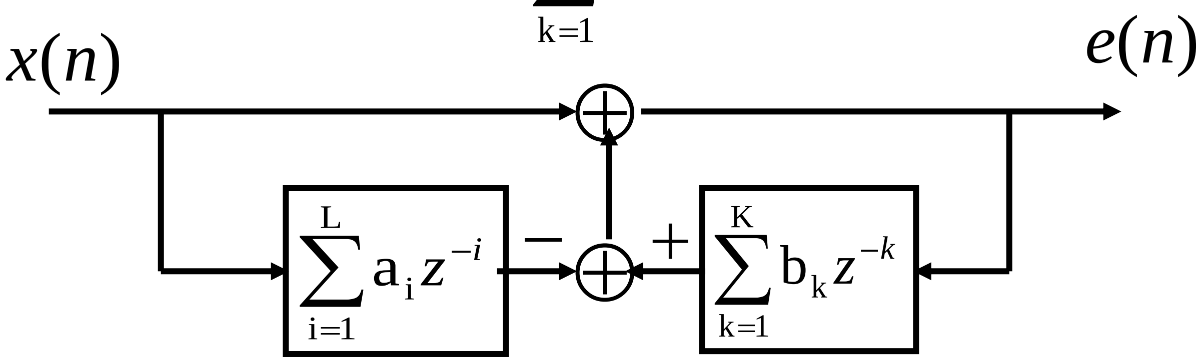
2）必要性

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |A(e^{j\omega})|^2 P_x(e^{j\omega}) d\omega = 0 \Rightarrow$ 而$A(z)$最多只有N个零点 $\Rightarrow$ $P_x(e^{j\omega})$最多只能有N个非零值

4. IIR预测器

当预测器阶次是有限整数时，预测误差滤波器是FIR的；否则滤波器是IIR的，因为当 $N \to \infty$ 时，等效于分母多项式存在。

$$H(z) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{L} a_i z^{-i}}{1 - \sum_{k=1}^{K} b_k z^{-k}}$$



$$e(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{L} a_i x(n-i) + \sum_{k=1}^{K} b_k e(n-k)$$

3.2　正向与反向预测误差

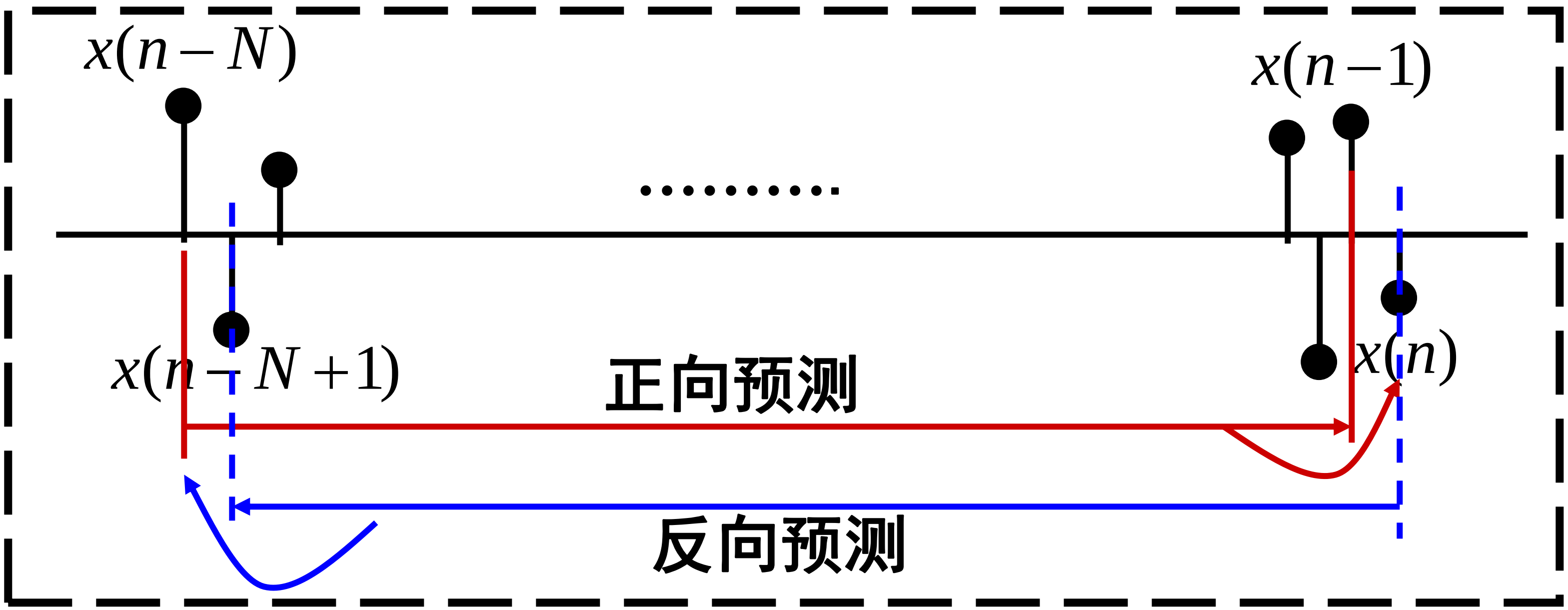
一 定义

正向预测误差:

$$e_a(n) = x(n) - \hat{x}(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i)$$

反向预测误差:

$$e_b(n) = x(n-N) - \hat{x}(n-N) = x(n-N) - \sum_{i=1}^{N} b_i x(n-N+i)$$



物理意义1:反向预测误差可看着是正向预测时最旧数据丢失所引起的损失。

物理意义2:反向预测误差反映信号在反向时间上的相关性。

$$\boxed{e_a(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i)}$$ $$\boxed{e_b(n) = x(n-N) - \sum_{i=1}^{N} b_i x(n-N+i)}$$

将正, 反向预测误差表示为矩阵形式:

$$e_a(n) = x(n) - \mathbf{A}_N^T \mathbf{x}(n-1)$$

$$e_b(n) = x(n-N) - \mathbf{B}_N^T \mathbf{x}(n)$$

式中:

$$\mathbf{x}(n) = \begin{bmatrix} x(n) \\ x(n-1) \\ \cdots \\ x(n-N+1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_N = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b_N \\ b_{N-1} \\ \cdots \\ b_1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{反向预测系数}$$

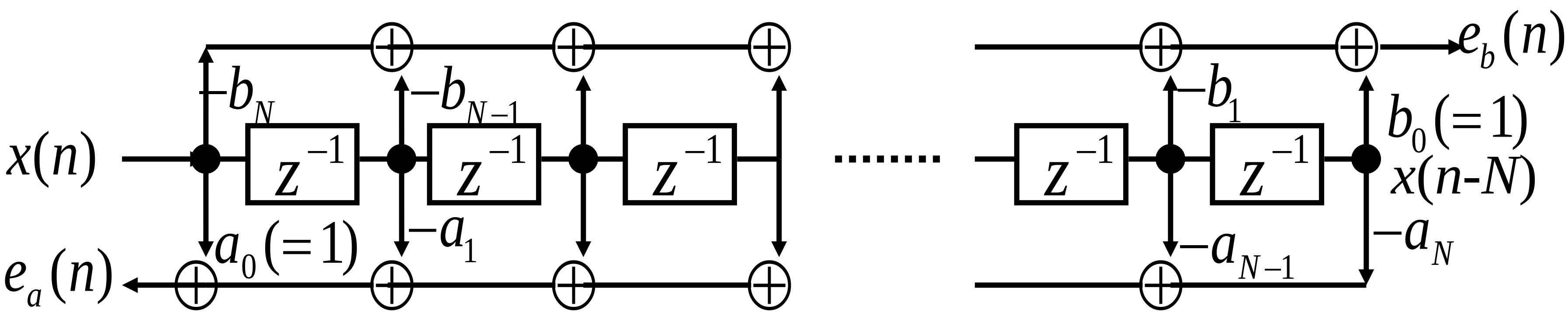
正, 反向预测误差滤波器的传递函数

$$A(z) = 1 - \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}$$

$$B(z) = z^{-N} - \sum_{i=1}^{N-1} b_i z^{-(N-i)} = z^{-N}[1 - \sum_{i=1}^{N} b_i z^{i}]$$

$$e_a(n) = x(n) - \sum_{i=1}^{N} a_i x(n-i)$$

$$e_b(n) = x(n-N) - \sum_{i=1}^{N} b_i x(n-N+i)$$



正,反向预测误差滤波器的直接实现结构

二 求解正、反向预测误差滤波器的系数

$$E\left[e_a^2(n)\right] \to \min \Rightarrow \mathbf{R}_{N+1}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E\left[e_b^2(n)\right] \to \min \Rightarrow \mathbf{R}_{N+1}\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{bN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b_N \\ b_{N-1} \\ \cdots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

三 正、反向预测误差滤波器的关系

$$\mathbf{J}_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & & 1 & \\ & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

矢量元素倒置

$$\mathbf{J}_N\mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_N\mathbf{R}_N = \mathbf{R}_N\mathbf{J}_N$$

对称方阵

$$\mathbf{J}_{N+1}\times \qquad \mathbf{R}_{N+1}\begin{bmatrix} -\mathbf{B}_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{bN} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{N+1}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{J}_N\mathbf{B}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{bN} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftarrow \mathbf{R}_{N+1}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{a_i = b_i} \Leftarrow \mathbf{A}_N = \mathbf{J}_N\mathbf{B}_N, E_{aN} = E_{bN} = E_a$$

结论:

对于平稳的输入信号讲, 正反向预测误差功率相同, 系数也相同, 但排列次序是相反的. 因此从理论上讲, 线性预测误差分析可以从正向来完成, 也可以从反向来完成, 但是涉及非平稳时, 或在过渡区(R_{N+1}可能会不同), 差别就会显现.

当R阵被估计出来后, 最好的性能是组合这两种方法.

四 反向预测的二个特性

1）反向预测误差滤波器是最大相位的；

$$A(z)=1-\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}$$

$$B(z)=z^{-N}[1-\sum_{i=1}^{N}b_i z^{i}]$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{A}_N=\mathbf{J}_N\mathbf{B}_N\\ \Downarrow\\ a_i=b_i\end{gathered}}$$

若z_0是A(z)的零点$\rightarrow z_0^{-1}$是B(z)的一个零点；

由于A(z)是最小相位的，$\left|z_0\right|<1\Rightarrow\left|z_0^{-1}\right|>1$，

即$B(z)$是最大相位的

$$\boxed{e_{bi}(n) = x(n-i) - \sum_{j=1}^{i} b_j x(n-i+j)}\quad \boxed{e_{bi}(n) = x(n-i) - \mathbf{B}_i^T \mathbf{x}(n)}\quad \mathbf{B}_N = \begin{bmatrix} b_N \\ b_{N-1} \\ \cdots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

2) 各阶反向预测误差提供一组不相关信号, 即不同阶反向预测误差构成一组正交序列, 可作为信号空间的一组正交基.

$$e_{bi}(n), 0 \le i \le N-1$$

i表示反向预测器的阶次

不相关信号

$$[e_b(n)]^T = \begin{bmatrix} e_{b0}(n) & e_{b1}(n) & \dots & e_{bN-1}(n) \end{bmatrix} = \mathbf{x}_N^T(n) \begin{bmatrix} 1 & \boxed{-\mathbf{B}_1} & & & \\ 0 & 1 & \boxed{-\mathbf{B}_2} & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & -\mathbf{B}_{N-2} & \\ & & & 1 & -\mathbf{B}_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_B$

0阶时: $e_{b0}(n) = x(n)$

1阶时: $e_{b1}(n) = x(n-1) - b_1^1 x(n)$

2阶时: $e_{b2}(n) = x(n-2) - b_2^2 x(n) - b_1^2 x(n-1)$

⋮

N−1阶时: $e_{bN-1}(n) = x(n-(N-1)) - b_{N-1}^{N-1} x(n) \dots - b_1^{N-1} x(n-N+2)$

$$R_N = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \dots & r(N-1) \\ r(1) & r(0) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(N-1) & r(N-2) & \dots & r(0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{N+1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_N \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{bN} \end{bmatrix}$$

$$[e_b(n)]^T = \mathbf{x}_N^T(n)\mathbf{M}_B$$

$$\underbrace{E\{[e_b(n)][e_b(n)]^T\}}_{对称阵} = \mathbf{M}_B^T E[\mathbf{x}_N(n)\mathbf{x}_N^T(n)]\mathbf{M}_B = \underbrace{\mathbf{M}_B^T \overbrace{\mathbf{R}_N \mathbf{M}_B}^{下三角阵}}_{下三角阵}$$

下三角阵

对角阵 ← 对称阵 = 下三角阵

$$\mathbf{R}_N\mathbf{M}_B = \mathbf{R}_N \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{B}_1 & & & & \\ 0 & 1 & -\mathbf{B}_2 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & \\ & & & -\mathbf{B}_{N-2} & & \\ & & & 1 & -\mathbf{B}_{N-1} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{b0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & E_{b1} & 0 & & \\ * & * & E_{b2} & & \\ & & & & \\ & & & 0 & \\ & & & E_{bN-2} & 0 \\ * & * & * & * & E_{bN-1} \end{bmatrix}$$

i=N-2

$$\mathbf{R}_{N-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{N-2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{N-2} \\ E_{bN-2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_N = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{N-1} & & \begin{matrix} r(N-1) \\ r(N-2) \end{matrix} \\ \hline r(N-1) & & r(1) & r(0) \end{array}\right]$$

3.3　阶次叠代关系
（ Livinson - Dubin 算法）

$$E\left[e_a^2(n)\right] \to \min \Rightarrow \mathbf{R}_{N+1}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{A}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{aN} \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于一个j阶预测器，目标是求解方程：

$$R^j \begin{bmatrix} 1 \\ -A^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^j \\ 0 \end{bmatrix}$$

对于一个p阶预测器，即求j=p时的解.

Levinson求解方法的基本思想：阶次叠代，即A^j, E^j 用j−1阶的解A^{j-1}, E^{j-1} *递推得到.*

$$E_{aj} \Rightarrow E^j$$

$$\mathbf{A}_j \Rightarrow \mathbf{A}^j = [a_1^j, a_2^j, \ldots, a_j^j]^T$$

$$\mathbf{R}_{j+1} \Rightarrow \mathbf{R}^j = \begin{bmatrix} r(0) & r(1) & & r(j) \\ r(1) & r(0) & & r(j-1) \\ & & & \\ r(j) & r(j-1) & & r(0) \end{bmatrix}$$

一些符号的定义：

$$\mathbf{r}_a^j=\begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \dots \\ r(j) \end{bmatrix}, \mathbf{r}_b^j=\mathbf{J}_j\mathbf{r}_a^j=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}\mathbf{r}_a^j=\begin{bmatrix} r(j) \\ r(j-1) \\ \dots \\ r(1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^j=\begin{bmatrix} b_j^j \\ b_{j-1}^j \\ \dots \\ b_1^j \end{bmatrix}=\mathbf{J}_j\mathbf{A}^j=\begin{bmatrix} a_j^j \\ a_{j-1}^j \\ \dots \\ a_1^j \end{bmatrix}$$

$$\boxed{R^j\begin{bmatrix}1\\-A^j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E^j\\0\end{bmatrix}}\qquad \boxed{R^{j-1}\begin{bmatrix}1\\-A^{j-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E^{j-1}\\0\end{bmatrix}}\qquad \boxed{\mathbf{r}_b^j=\begin{bmatrix}r(j)\\r(j-1)\\\cdots\\r(1)\end{bmatrix}}$$

推导:

1) $$R^j\begin{bmatrix}1\\-A^{j-1}\\0\end{bmatrix}$$

$\mathbf{J}_{j+1}\times$

$$\mathbf{R}^j\begin{bmatrix}0\\-\mathbf{B}^{j-1}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_j\\0_{j-1}\\E^{j-1}\end{bmatrix}$$

$$K_j=r(j)-\sum_{i=1}^{j-1}a_i^{j-1}r(j-i)$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{c|c}R^{j-1}&r_b^j\\\hline(r_b^j)^T&r(0)\end{array}\right]\begin{bmatrix}1\\-A^{j-1}\\\hline 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E^{j-1}\\0_{j-1}\\\hline K_j\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{k_j=K_j/E^{j-1}}$$

2) $$R^j\begin{bmatrix}0\\\begin{bmatrix}-B^{j-1}\\1\end{bmatrix}k_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_j^2E^{j-1}\\0_{j-1}\\K_j\end{bmatrix}$$

$$\boxed{R^j\begin{bmatrix}1\\-A^j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E^j\\0\end{bmatrix}}$$

3): 1) − 2)

$$R^j\begin{bmatrix}1\\-A^{j-1}\\0\end{bmatrix}-R^j\begin{bmatrix}0\\\begin{bmatrix}-B^{j-1}\\1\end{bmatrix}k_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E^{j-1}\\0_{j-1}\\K_j\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k_j^2E^{j-1}\\0_{j-1}\\K_j\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}A^j=\begin{bmatrix}A^{j-1}\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B^{j-1}\\-1\end{bmatrix}k_j\\E^j=E^{j-1}-k_j^2E^{j-1}\end{cases}$$

$$\boxed{E_{aN}=r(0)-\sum_{i=1}^{N}a_i r(i)}$$

Livinson - Dubin 算法：$\begin{cases} A^j=\begin{bmatrix}A^{j-1}\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B^{j-1}\\-1\end{bmatrix}k_j \\ E^j=E^{j-1}-k_j^2E^{j-1}\end{cases}$ $\quad K_j=r(j)-\sum_{i=1}^{j-1}a_i^{j-1}r(j-i)$, $\quad k_j=K_j/E^{j-1}$

求解j=p阶预测误差滤波器，首先计算r(0)，r(1)，...，r(p)

1）初始化，$E^0=r(0)$

2）j=1

$$a_1^1=k_1=r(1)/r(0)$$

$$E^1=(1-k_1^2)r(0)$$

$$\mathbf{A}^j=\begin{bmatrix}a_1^j\\a_2^j\\\cdots\\a_{j-1}^j\\a_j^j\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{c}\mathbf{A}^{j-1}=\begin{bmatrix}a_1^{j-1}\\a_2^{j-1}\\\cdots\\a_{j-1}^{j-1}\end{bmatrix}\\0\end{array}\qquad \begin{array}{c}\mathbf{B}^{j-1}=\begin{bmatrix}b_{j-1}^{j-1}\\b_{j-2}^{j-1}\\\cdots\\b_1^{j-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{j-1}^{j-1}\\a_{j-2}^{j-1}\\\cdots\\a_1^{j-1}\end{bmatrix}\\-1\end{array}$$

3）2=<j<=p递推

$$k_j=\frac{1}{E^{j-1}}[r(j)-\sum_{i=1=}^{j-1}a_i^{j-1}r(j-i)]$$

$$a_j^j=k_j \qquad \boxed{b_{j-i}^{j-1}}$$

$$a_i^j=a_i^{j-1}-k_ja_{j-i}^{j-1},i=1,2,\ldots,j-1$$

$$E^j=(1-k_j^2)E^{j-1}$$

4）p阶的解

给定：$k_1,k_2,\ldots.k_p$； $a_1^1=k_1$

For j=2....,p {

$a_j^j=k_j$

$a_i^j=a_i^{j-1}-k_ja_{j-i}^{j-1},i=1,2,\ldots,j-1$

$E^j=(1-k_j^2)E^{j-1}$ }