第五章　现代谱估计

5.6 最大熵谱估计

一.问题的提出

传统的谱估计方法存在缺点的原因：

人为地假定观察到的数据以外的数据为令

导致自相关估计也是有限长

而实际情况是没有观察到的数据不一定为零

如何解决?

注意到没有观察到的数据和已观察到的数据之间是有关系的。因此，我们有可能根据已观察到的数据推测未观察到的数据。

如何推测?　　增加信息量

二.信息和熵

信息量：事件A以概率P_A出现所携带的信息量

$$I_A = -\log_r P_A, \begin{cases} r = 2, \text{比特} \\ r = e, \text{奈特} \\ r = 10, \text{哈特} \end{cases}$$

平均信息量（熵）：信息源发送一组彼此独立的不同的消息X_j,(j=1,2,…,n),概率为P_j,

每一个消息： $I_j = -\log_{10} p_j$

平均信息量（熵）：

$$H = E[I_j] = -\sum_{j=1}^{n} p_j \log_{10} p_j$$

例：零均值高斯平稳随机序列*x*(n)的熵

$$H=\frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]_{M+1}$$

R*x*是*x*(n)的自相关阵。

熵率（Entropy rate)

$$h=\lim_{M\to\infty}\frac{H}{M+1}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]^{\frac{1}{M+1}}$$

若$x(n)$的功率谱$S_x(f)$限制在$-f_c\le f\le f$范围内，有：

$$h=\frac{1}{2}\ln(2f_c)+\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\ln[S_x(f)]df$$

(上述结论对一般平稳序列也是适应的）

三.最大熵谱估计原理

x(n)的频谱范围

$[-f_c, f_c]$, $f_s=1/T$, $f_c=f_s/2$

$$\begin{cases} R_x(m)=\int_{-f_c}^{f_c} S_x(f)e^{j2\pi fmT}df \\ S_x(f)=T\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m)e^{-j2\pi fmT} \end{cases}$$

问题：已知**$R_x(0),\ldots, R_x(M)$→**估计 $S_x(f)\Rightarrow \overset{\frown}{S}_x(f)$

方法：按最大熵原理，在已知

$$R_x(m)=\int_{-f_c}^{f_c} S_x(f)e^{-j2\pi fmT}df, m=0,1,\ldots,M$$

的条件下，估计**$R_x(m)$,$m>=M+1$,**使得

$$S_x(f)=T\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(m)e^{-j2\pi fmT}$$

时对应的熵率

$$h=\frac{1}{2}\ln(2f_c)+\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\ln[S_x(f)]df$$

最大，或使

$$H=\frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]$$

最大。

按熵率最大的方法：利用**Lagrangian**乘数法解此有约束优化问题。得：

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{\sum_{m=-M}^{M} \cdots}$$

$$\boxed{R_x(m) = \int_{-f_c}^{f_c} S_x(f) e^{-j2\pi fmT} df, m = 0,1,\ldots,M}$$

其中，$c(m)$ 是**Lagrangian**乘数，可由约束条件求得，并代入上式可得：

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\sigma^2}{\left|1 + \sum_{m=1}^{M} a(m) e^{-j2\pi fmT}\right|^2}$$

其中**a(m)**可由**Yule-Walker**方程，由**M+1**个自相关函数求取：

$$\sum_{k=0}^{M} a_k R_x(m-k) = \begin{cases} \frac{2f_c}{|g(0)|^2} = 2f_c\sigma^2, m = 0 \\ 0, m = 1,2,..,M \end{cases}, \sigma^2 = \frac{1}{|g(0)|^2}$$

四.最大熵自相关外推

$$H=\frac{1}{2}\log_{10}\det[\mathbf{R}_x]$$

$R_x(0),\ldots,R_x(M)$ $\Rightarrow$ $R_x(M+1)\rightarrow R_x(M+2)\rightarrow\ldots$

$$\frac{\partial\det[\mathbf{R}_x(M+1)]}{\partial R_x(M+1)]}=0,\frac{\partial\det[\mathbf{R}_x(M+2)]}{\partial R_x(M+2)]}=0,\ldots$$

$$[\mathbf{R}_x(M+1)]=\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \ldots & R_x(M+1) \\ R_x(1) & R_x(0) & \ldots & R_x(M) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \ldots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\det[\mathbf{R}_x(M+1)]}{\partial R_x(M+1)]}=0\Rightarrow\det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \ldots & R_x(M-1) \\ R_x(2) & R_x(1) & \ldots & R_x(M-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \ldots & R_x(1) \end{bmatrix}=0$$

$$(-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(2) & \dots & 0 \\ R_x(0) & R_x(1) & \dots & R_x(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M-1) & R_x(M-2) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$\det[\mathbf{R}_x(M+1)]$$

$$=\det\begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(1) & \dots & 0 \\ R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial R_x(M+1)}(*)=(-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ & & \dots & R_x(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} 0 & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_x(M-1) & \dots & R_x(0) \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \det[\mathbf{R}_x(M+1)]}{\partial R_x(M+1)]} = 0 \Rightarrow \det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ R_x(2) & R_x(1) & \dots & R_x(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix} = 0$$

$$\partial \det[\mathbf{R}_x(M+1)] / \partial R_x(M+1)$$

$$= (-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ R_x(2) & R_x(1) & \dots & R_x(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} R_x(1) & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ & & \dots & R_x(M-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$+(-1)^{M+3}\det\begin{bmatrix} 0 & R_x(0) & \dots & R_x(M-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_x(M-1) & \dots & R_x(0) \\ R_x(M+1) & R_x(M) & \dots & R_x(1) \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}_x(f)=\frac{1}{\sum_{m=-M}^{M} c(m)e^{-j2\pi fmT}}$$

五.最大熵谱估计的解

$$h=\frac{1}{2}\ln(2f_c)+\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\ln[S_x(f)]df$$

$$S_x(f)=T\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_x(m)e^{-j2\pi fmT}$$

$$\frac{\partial h}{\partial R_x(m)}=\frac{\partial h}{\partial S_x(f)}\frac{\partial S_x(f)}{\partial R_x(m)}=\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\frac{1}{S_x(f)}\frac{\partial S_x(f)}{\partial R_x(m)}df$$

$$=\frac{1}{2f_c}\int_{-f_c}^{f_c}\frac{1}{S_x(f)}Te^{-j2\pi fmT}df=0,|m|\geq M+1$$

$$c_m=\int_{-f_c}^{f_c}\frac{1}{S_x(f)}e^{j2\pi fmT}df=0,|m|\geq M+1$$

$$\frac{1}{S_x(f)}=\sum_{m=-M}^{M}c_m e^{-j2\pi fmT},c_m=c_{-m}$$

$$\hat{S}_x(f)=\frac{1}{\sum_{m=-M}^{M}c_m e^{-j2\pi fmT}}$$

代入约束条件：$R_x(m)=\int_{-f_c}^{f_c} S_x(f)e^{j2\pi fmT}df, m=0,1,\ldots,M$

$$=\int_{-f_c}^{f_c} \frac{e^{j2\pi fmT}}{\sum_{n=-M}^{M} c_n e^{-j2\pi fnT}} df, m=0,1,\ldots,M$$

令$z=e^{j2\pi fT}, df=\frac{f_c}{j\pi}(\frac{dz}{z}), f_c=\frac{f_s}{2}=\frac{1}{2T}$

$$R_x(m)=\frac{f_c}{j\pi}\oint_{u.c}\frac{z^{m-1}}{\sum_{n=-M}^{M} c_n z^{-n}}dz, m=0,1,\ldots,M$$

$$\sum_{n=-M}^{M} c_n z^{-n}=G_M(z)G^*{}_M(\frac{1}{z^*})=|g(0)|^2 A_M(z)A^*{}_M(\frac{1}{z^*})$$

$$G_M(z)=\sum_{n=0}^{M} g(n)z^{-n}, G^*{}_M(\frac{1}{z^*})=\sum_{n=0}^{M} g^*(n)z^n$$

$$R_x(m)=\frac{f_c}{j\pi}\oint_{u.c}\frac{z^{m-1}}{\sum_{n=-M}^{M}c_n z^{-n}}dz,\; m=0,1,\ldots,M$$

$$A_M(z)=\sum_{k=0}^{M}a_k z^{-k},\; A^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right)=\sum_{k=0}^{M}a_k^* z^n,\; a_0=1$$

$$R_x(m)=\frac{f_c}{j\pi}\oint_{u.c}\frac{z^{m-1}}{G_M(z)G^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right)}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_{u.c}\frac{2f_c}{G_M(z)G^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right)}z^{m-1}dz$$

$$R_x(m)\longrightarrow\boxed{G_M(z)}\longrightarrow y(m)=R_x(m)*g(m)$$

$$y(m)=\sum_{k=0}^{M}g(k)R_x(m-k)$$

$$=\frac{f_c}{j\pi}\oint_{u.c}\frac{1}{G_M(z)G^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right)}\bullet G_M(z)\bullet z^{m-1}dz=\frac{f_c}{j\pi}\oint_{u.c}\frac{1}{G^*_M\left(\frac{1}{z^*}\right)}\bullet z^{m-1}dz$$

$$\boxed{A_M(z)=\sum_{k=0}^{M} a_k z^{-k},\ A^*{}_M\left(\frac{1}{z^*}\right)=\sum_{k=0}^{M} a_k^* z^n}$$

$$y(m)=\frac{f_c}{j\pi}\oint_{u.c}\frac{1}{G^*{}_M\left(\frac{1}{z^*}\right)}\bullet z^{m-1}dz=2f_c\bullet\frac{1}{2\pi j}\oint_{u.c}\frac{z^m}{G^*{}_M\left(\frac{1}{z^*}\right)}\frac{dz}{z}$$

$$y(m)=\begin{cases}\dfrac{2f_c}{g^*(0)}, m=0\\ 0, m=1,2,..,M\end{cases}$$

$$G \quad \sum_{k=0}^{M} g(k)R_x(m-k)=\begin{cases}\dfrac{2f_c}{g^*(0)}, m=0\\ 0, m=1,2,..,M\end{cases} \quad {}^*(n)z^n$$

$$\sum_{k=0}^{M} a_k R_x(m-k)=\begin{cases}\dfrac{2f_c}{|g(0)|^2}=2f_c\sigma^2, m=0\\ 0, m=1,2,..,M\end{cases},\ \sigma^2=\frac{1}{|g(0)|^2}$$

$$\therefore \hat{S}_x(f)=\frac{1}{\sum_{n=-M}^{M} c_n e^{-j2\pi fnT}}=\left.\frac{1}{\sum_{n=-M}^{M} c_n z^{-n}}\right|_{z=e^{-j2\pi fT}}=\left.\frac{1}{|g(0)|^2 A_M(z)A^*{}_M\left(\frac{1}{z^*}\right)}\right|_{z=e^{-j2\pi fT}}$$

$$\boxed{\therefore \hat{S}_x(f)=\frac{\sigma^2}{\left|1+\sum_{n=1}^{M} a_n e^{-j2\pi fnT}\right|^2}}$$