第五章　现代谱估计

5.1 引言

信号 { 确定性信号 周期信号 非周期信号
非确定信号 随机信号

确定信号的谱：付立叶变换

随机信号：付立叶变换不存在---》功率谱密度/功率谱

$\boxed{\text{功率谱估计}}$ ↑ 估计

观察到有限个信号样本

应用：语音信号分析，雷达信号处理，机械振动信号分析等

5.2 离散随机信号及其数字特征

一 离散随机信号的分类

随机信号：概率密度函数

统计特征参数[均值，方差，相关函数，协方差函数，高阶矩等]

平稳随机信号（**Stationary)**：

1) 弱平稳（广义平稳，**wide sense stationary)**

一阶和二阶矩与时间无关

各态历经（ **ergodicity):** 时间均值等于统计均值

2）强平稳 （严格平稳）

<u>限于讨论各态历经随机信号</u>

二 离散随机信号的数字特征

设：x(n)=0,n<0;-----因果实的离散随机信号

1. 平均 各态历经条件下，统计平均等于时间平均

$$均值:m_x(n)=m_x=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)=E[x(n)]$$

$$方差:\sigma_x^2(n)=\sigma_x^2=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}[x(n)-m_x]^2=E[(x(n)-m_x)^2]$$

$$均方值:m_{x^2}(n)=m_{x^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x^2(n)=E[x^2(n)]$$

2 相关函数和协方差函数

a) 相关函数

离散确定性信号

$$x_3(n) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} x_1(m)x_2(n+m) \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 & \text{自相关} \\ x_1 \neq x_2 & \text{互相关} \end{cases}$$

离散随机信号

自相关 $R_x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n)x(n+m)$ =E$[x(n)x(n+m)]$

$$R_x(m) = R_x(-m) \qquad R_x(\infty) = m_x^2$$

若$x(n)$是复数

$$R_x(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n=N-1} x(n)x^*(n+m) = \mathrm{E}[x(n)x^*(n+m)]$$

互相关 $$R_{xy}(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n=N-1}x(n)y(n+m) =\mathrm{E}[x(n)y(n+m)]$$

$$R_{xy}(m)=R_{yx}(-m);R_x(0)R_y(0)\ge\left|R_{xy}(m)\right|^2$$

自协方差 $$C_x(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n=N-1}[x(n)-m_x][x(n+m)-m_x]$$

$$=\mathrm{E}[(x(n)-m_x)(x(n+m)-m_x)]$$

$$=\mathrm{R}_x(m)-m_x^2$$

$$C_x(0)=\sigma_x^2$$

$$m_x=0\Rightarrow C_x(m)=R_x(m),R_x(0)=C_x(0)=\sigma_x^2$$

互协方差 $$C_{xy}(m)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n=N-1}[x(n)-m_x][y(n+m)-m_y]$$

$$=\mathrm{E}\{[x(n)-m_x][y(n+m)\text{-}m_y]\}$$

$$C_{xy}(m)=R_{xy}(m)-m_xm_y$$

5.3 功率谱估计概述

一 功率谱密度定义

1 定义 *x*(n)

$$
(1)\begin{cases} S_x(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{m=-\infty} R_x(m) e^{-j\omega m} \\ R_x(m) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega}) e^{j\omega m} d\omega \end{cases}
$$

维纳—辛钦公式

由于$R_x(\infty) = m_x^2$,所以若$m_x \neq 0, S_x(e^{j\omega})$不一定收敛.

故一般地假设$m_x = 0$[若$m_x \neq 0$,可通过对$x(n)$去均值处理]

物理意义：*R*x(m)随着m越快衰减，说明该时间序列随时间变化越剧烈；反之则说明该时间序列随时间变化越平缓。故*R*x(m)中包含了各种频率成分的功率信息。

$$(2) \quad S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} E\left\{ \frac{1}{2N+1} \left| \sum_{n=-N}^{n=N} x(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=-\infty} R_x(m) e^{-j\omega m}$$

$$\boxed{\sum_{n=-N}^{n=N}\sum_{m=-N}^{m=N} f(n-m) = \sum_{k=-2N}^{k=2N}[2N+1-|k|]f(k)}$$

$$S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} E\left\{\frac{1}{2N+1}\left|\sum_{n=-N}^{n=N} x(n)e^{-j\omega n}\right|^2\right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} E\left\{\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=N}\sum_{m=-N}^{m=N} x(n)e^{-j\omega n}x(m)e^{j\omega m}\right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{n=N}\sum_{m=-N}^{m=N} R(n-m)e^{-j\omega(n-m)}\right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-2N}^{k=2N}[2N+1-|k|]R(k)e^{-j\omega k}\right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{k=-2N}^{k=2N}[1-\frac{|k|}{2N+1}]R(k)e^{-j\omega k}\right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{m=-\infty} R_x(m)e^{-j\omega m}$$

2.功率谱密度的性质

$$\begin{cases} S_x(e^{j\omega}) = \sum\limits_{m=-\infty}^{m=-\infty} R_x(m)e^{-j\omega m} \\ R_x(m) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega \end{cases}$$

功率谱密度的性质：

- $S_x(e^{j\omega})$为实的偶函数。
- $S_x(e^{j\omega}) \geq 0$ 。(由定义2）
- 随机序列的平均功率：

$$\mathrm{R}_x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_x(e^{j\omega})\,\mathrm{d}\,\omega$$

- 随机序列$\omega_1 > 0$ 到 $\omega_2 > 0$ 之间的平均功率为：

$$2 * \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} S_x(e^{j\omega})\,\mathrm{d}\,\omega$$

3.平稳白噪声序列功率谱密度

- 平稳白噪声序列：
  - 定义：平稳随机时间序列x(n)不同时刻的随机变量两两不相关。
  - 数字特征：
    - 均值：$E\{x(n)\}=0$。
    - 自相关函数：$R_x(m) = \sigma^2\delta(m)$。
    - 功率谱密度：$S_x(e^{j\omega}) = \sigma^2$ 。

二 功率谱估计问题及谱估计方法

1 谱估计问题 $x(n)$

给定一个随机过程的一个实现中的有限长度数据

$x(0)$，$x(1)$，。。。， $x(N-1)$

来估计：$S_x(e^{j\omega})$

2 谱估计方法

非参数法谱估计

周期图法，自相关法

平滑周期图法

最小方差法

参数法谱估计

时间序列模型

最大熵谱估计法

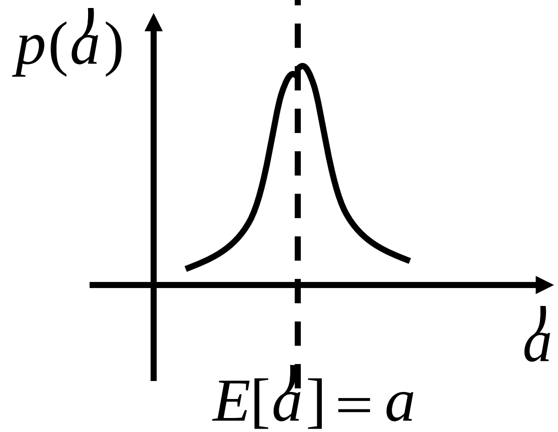
线性谱分析法（经典谱估计）

非线性谱分析法（现代谱估计）

三 统计估计基础回顾

估计量仍是一个随机变量

$$\hat{a} = F(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$$



1）无偏估计

估计偏量（偏差）$B(\hat{a}) = a - E[\hat{a}]$

若$B(\hat{a}) = 0$,则称无偏估计

若$\lim\limits_{N\to\infty} B(\hat{a}) = 0$,则称$\hat{a}$是真值$a$的渐进无偏估计

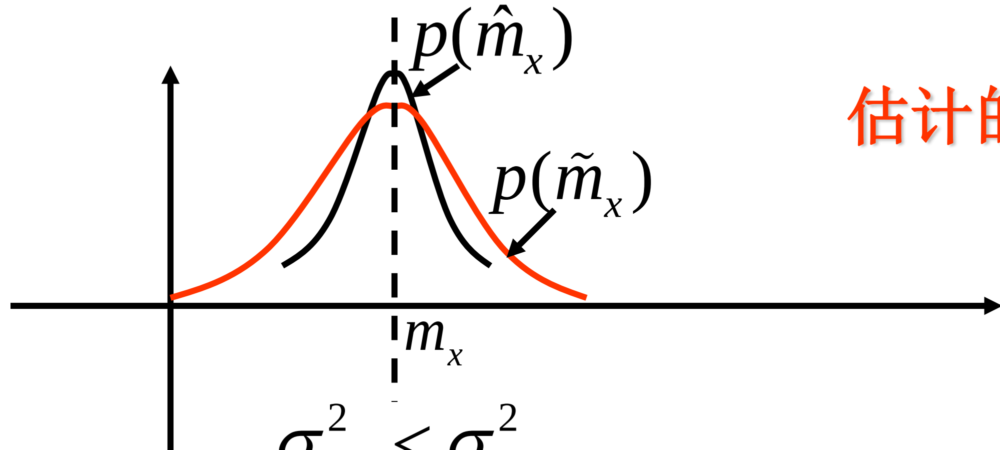
例： $x(n) = m_x + e(n), E[e(n)] = 0$

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

$E[\hat{m}_x] = m_x$,即$\hat{m}_x$是m_x的无偏估计

2）最小方差估计（有效估计）

$$Var[\widehat{a}] = E\{[(\widehat{a} - E(\widehat{a})]^2\} = \sigma_{\widehat{a}}^2 \Rightarrow \min$$



估计的可信度

$$\sigma_{\hat{m}_x}^2 < \sigma_{\tilde{m}_x}^2$$

3）一致估计

$$MSE[\widehat{a}] = E\{[\widehat{a} - a]^2\} = \sigma_{\widehat{a}}^2 + B^2 \Rightarrow \min$$ （均方误差最小）

若 $MSE[\widehat{a}] \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$，则 $\widehat{a}$ 是 a 的渐进一致估计

4）偏量与方差的折衷

$\widehat{m}_x$：无偏，$E[\widehat{m}_x] = m_x$

令：$\tilde{m}_x = a\widehat{m}_x$

则：$B[\tilde{m}_x] = (1-a)m_x$

$Var[\tilde{m}_x] = a^2 Var[\widehat{m}_x]$

$$\boxed{\begin{aligned} B(\tilde{m}_x) &= m_x - E[\tilde{m}_x] \\ &= m_x - E[a\widehat{m}_x] \\ &= m_x - am_x \\ &= (1-a)m_x \end{aligned}}$$

5.4 自相关函数的估计

$$x(n): x(0), x(1), ..., x(N-1) \to R_x(m): \hat{R}_x(m), \text{设} E[x(n)] = 0$$

一 窗估计法

方法1： $$R_N(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|), |m| \le \text{N-1}$$

方法2： $$R'_N(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|), |m| \le \text{N-1}$$

$$E[R'_N(m)] = R_x(m)$$ 无偏估计

$$R_N(m) = \frac{N-|m|}{N} R'_N(m)$$

$$E[R_N(m)] = \frac{N-|m|}{N} R_x(m) \xrightarrow{N\to\infty} E[R_N(m)] = R_x(m)$$ 渐进无偏

$$Var[R_N(m)] = \left(\frac{N-|m|}{N}\right)^2 Var[R'_N(m)] \le Var[R'_N(m)]$$

二 自相关函数的Rader计算法

1.问题

$$\begin{cases} R_N(m) = \dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x(n+m), 0 \le m \le \text{N-1} \\ R_N(m) = R_N(-m) \text{ ,m=-1,-2,...,-N+1} \end{cases}$$

线性相关可由园周相关计算，此时圆周相关的周期L>=2N+1

$$R_N(m) = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{L-1} x(l)x((l+m))_L$$

$$= \frac{1}{N} IFFT[X(k)X^*(k)], 0 \le m \le \text{N-1}$$

一般地，$|m| \le M << N$，因此利用上述方法计算量较大

2.Rader法　2：1分段

$$\boxed{R_N(m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-m-1}x(n)x(n+m), 0\le m\le \text{N-1}}$$

$$v_i(n)=\begin{cases}x(n+(i-1)M), 0\le n\le M-1\\ 0, \qquad M\le n\le 2M-1\end{cases}$$

$$u_i(n)=\begin{cases}x(n+(i-1)M), 0\le n\le 2M-1\\ 0, \qquad \text{others}\end{cases}$$

$$i=1,2,\ldots,K\ge N/M$$

$$R_N(m)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}\sum_{n=0}^{M-1}v_i(n)u_i(n+m)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}IFFT[V_i\ (k)U_i^*(k)]$$

$$=\frac{1}{N}IFFT[\sum_{i=1}^{K}V_i\ (k)U_i^*(k)]$$

$$\boxed{\begin{aligned}V_i\ (k)&=FFT_{2M}[v_i(n)]\\ U_i\ (k)&=FFT_{2M}[u_i(n)]\end{aligned}}$$

$$\because u_i(n)=v_i(n)+v_{i+1}(n+M)$$

$$i=1,2,\ldots,K-1$$

$$\therefore U_i(k)=V_i(k)+e^{j\frac{2\pi}{2M}Mk}V_{i+1}(k)=V_i(k)+(-1)^kV_{i+1}(k)$$

而$U_K(k)=V_K(k)$

Rader法算法步骤

$$1.V_i\ (k), i=1,2,\dots,K, K=[N/M], V_i\ (k)=FFT_{2M}[v_i(n)]$$

$$乘法: \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\bullet\frac{2M}{2}\log_2(2M)=N\log_2(2M)$$

$$2.U_i(k)=V_i(k)+(-1)^k V_{i+1}(k); i=1,2,\dots,K-1;$$

$$U_K(k)=V_K(k)$$

$$3.X_i(k)=V_i\ (k)U_i^*(k); i=1,2,\dots,K;$$

$$4.X(k)=\sum_{i=1}^{K}X_i(k);$$

$$乘法: \frac{N}{M}\bullet 2M=2N$$

$$5.R_N(m)=\frac{1}{N}IFFT[X(k)], 0\le m\le M-1$$

$$乘法: \frac{2M}{2}\bullet\log_2(2M)=M\log_2(2M)$$

$$\boxed{总计算量: (\mathrm{N}+\mathrm{M})\log_2(2M)+2N}$$

5.5 传统功率谱估计
（非参数谱估计）

一 间接法（BT法，自相关法）

间接法I $\hat{S}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-M}^{M} R_N(m) e^{-j\omega m}, M \le N-1$ 渐进无偏

间接法II $\hat{S}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-M}^{M} R'_N(m) e^{-j\omega m}, M \le N-1$ 渐进无偏

二 直接法（周期图法）

$$x(n), n = 0,1,\ldots,N-1 \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$\text{定义}: I_N(\omega) = \frac{1}{N}\left|X(e^{j\omega})\right|^2 \Leftarrow \text{周期图}$$

$$\text{则令}: \widehat{S}(e^{j\omega}) = I_N(\omega)$$

$$S_x(e^{j\omega}) = \lim_{N\to\infty} E\left\{\frac{1}{2N+1}\left|\sum_{n=-N}^{n=N} x(n) e^{-j\omega n}\right|^2\right\}$$

< 直接法和间接法间的关系>

$$I_N(\omega)=\frac{1}{N}\left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(k)e^{-j\omega k}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{j\omega n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}x(k)x(n)e^{-j\omega(k-n)}$$

令$m=k-n,k=n+m$

$$I_N(\omega)=\frac{1}{N}\left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

$$=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-|m|}x(n)x(n+m)e^{-j\omega m}$$

$$=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}R_N(m)e^{-j\omega m}$$

$\therefore I_N(\omega)$是间接法I当$M=N-1$时的功率谱估计

三 直接法和间接法估计质量

<均值>

间接法I(M=N-1)

$$E[\hat{S}(e^{j\omega})]=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}E[R_N(m)]e^{-j\omega m}=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}\frac{N-|m|}{N}R_x(m)e^{-j\omega m}$$

直接法 $$E[\hat{S}(e^{j\omega})]=E[I_N(\omega)]=\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}(1-\frac{|m|}{N})R_x(m)e^{-j\omega m}$$

定义 $$w_B(m)=\begin{cases}1-\frac{|m|}{N},|m|<N\\ 0,others\end{cases}\Rightarrow W_B^N(\omega)=\frac{\sin^2\frac{N}{2}\omega}{N\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

间接法I(M=N-1)和直接法的均值可统一表示为:

$$E[\hat{S}(e^{j\omega})]=S(e^{j\omega})*W_B^N(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(e^{j\theta})W_B^N(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

间接法II

$$E[\hat{S}(e^{j\omega})] = \sum_{m=-M}^{M} E[R'_N(m)]e^{-j\omega m}$$

$$= \sum_{m=-M}^{M} R_x(m)e^{-j\omega m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} w_R(m)R_x(m)e^{-j\omega m}$$

$$= W_R(\omega) * S_x(e^{j\omega})$$

$$其中: w_R(n) = \begin{cases} 1, |m| \le M, M \le N-1 \\ 0, others \end{cases}, W_R(\omega) = \frac{\sin[\omega(2M-1)/2]}{\sin[\omega/2]}$$

<方差>

表达式较为复杂，当*x(n)*是高斯随机过程时：

$$Var[\hat{S}(e^{j\omega})] \approx S_x^2(e^{j\omega})\left\{1 + \frac{\sin^2[\omega N]}{[N\sin\omega]^2}\right\}$$

四 传统功率谱估计的改进

1.平均周期图法

K个独立同分布随机变量的平均值的方差为单独一个变量方差的1/K

$x(n), n=0,1,\ldots,N-1 \Rightarrow$ 分成K段, 每段M个取样, N=KM

$$x^i(n)=x(n+iM-M), 0\le n\le M-1, 1\le i\le K$$

$$I_M^i(\omega)=\frac{1}{M}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x^i(n)e^{-j\omega n}\right|^2, 1\le i\le K$$

$$\text{定义}: B_x(\omega)=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}I_M^i(\omega)$$

$$\text{则}: E[B_x(\omega)]=E[I_M^i(\omega)]=S_x(e^{j\omega})*W_B^M(e^{j\omega})$$

$$\text{而}: Var[B_x(\omega)]=\frac{1}{K}Var[I_M^i(\omega)]\approx\frac{1}{K}S_x^2(e^{j\omega})\left\{1+\frac{\sin^2[\omega M]}{[M\sin\omega]^2}\right\}$$

$\boxed{\rightarrow\text{有偏渐近一致估计}}$

2.平滑周期图法（BT谱估计的改进）

$$BT:\hat{S}(e^{j\omega})=\sum_{m=-M}^{M}R_N(m)e^{-j\omega m},M\le N-1$$

$$\overset{M=N-1}{=}\sum_{m=-(N-1)}^{N-1}R_N(m)e^{-j\omega m}$$

m大$\to$估计$R_N(m)$所用数据少$\to$估计$R_N(m)$不可靠, 方差大

$\to\overset{\frown}{S}(e^{j\omega})$的方差大$\Rightarrow$减少$m$大的$R_N(m)$对$\overset{\frown}{S}(e^{j\omega})$的贡献$\Rightarrow$对$R_N(m)$加权

$$\hat{S}_{BT}(e^{j\omega})=\sum_{m=-(M-1)}^{M-1}w(m)R_N(m)e^{-j\omega m}$$

- $0\le w(m)\le w(0)=1$
- $w(-m)=w(m)$
- $w(m)=0,|m|>M,M\le N-1$

$$w(m)\Leftrightarrow W(e^{j\omega}),R_N(m)\Leftrightarrow\overset{\frown}{S}(e^{j\omega})=I_N(\omega)$$

$$\hat{S}_{BT}(e^{j\omega})=I_N(\omega)*W(e^{j\omega})$$

$$
\begin{aligned}
E[\hat{S}_{BT}(e^{j\omega})] &= E[I_N(\omega) * W(e^{j\omega})] \\
&= E[I_N(\omega)] * W(e^{j\omega}) \\
&= S_x(e^{j\omega}) * W_B^N(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \\
&\overset{M<<N}{\approx} S_x(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \qquad W(e^{j\omega}) \overset{M\to\infty}{\Rightarrow} \delta(\omega), \therefore \text{渐近无偏}
\end{aligned}
$$

$$
\text{而}: Var[\widehat{S}_{BT}(\omega)] \approx S_x^2(e^{j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{m=-(M-1)}^{(M-1)} w^2(m)
$$

$\boxed{\text{偏倚与方差之间存在矛盾，一般取} M=N/5}$

3.修正周期图求平均法（Welch法）

加窗平滑+分段平均

$x(n), n=0,1,\ldots,N-1 \Rightarrow$ 分成K段, 每段M个取样, N=KM

$x^i(n)=x(n+iM-M), 0\le n\le M-1, 1\le i\le K$

$$J_M^i(\omega)=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}x^i(n)w(n)e^{-j\omega n}\right|^2, 1\le i\le K \quad U=\frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1}w^2(n)$$

定义: $\widehat{S}_{avpd}(e^{j\omega})=\frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}J_M^i(\omega)$

则: $E[\widehat{S}_{avpd}(e^{j\omega})]=E[J_M^i(\omega)]=S_x(e^{j\omega})*W_B^M(e^{j\omega})*W(e^{j\omega})$

$$W(e^{j\omega})=\frac{1}{MU}\left|\sum_{n=0}^{M-1}w(n)e^{-j\omega n}\right|^2$$

$$Var[\widehat{S}_{avpd}(e^{j\omega})]\approx\frac{1}{K}S_x^2(e^{j\omega})$$

4.传统谱估计的主要问题

偏差和方差的折衷 ⟷ 分辨率和可靠性

↕

- 人为地将观察到的数据以外的数据视为零

$$E[\hat{S}(e^{j\omega})] = S(e^{j\omega}) * W_B^N(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\theta}) W_B^N(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

$$Var[\hat{S}(e^{j\omega})] \approx S_x^2(e^{j\omega})\left\{1+\frac{\sin^2[\omega N]}{[N\sin\omega]^2}\right\}$$

- 经典谱估计方法的缺点：
  - 有偏估计：经典谱估计方法无法进一步提高分辨率，存在较严重的旁瓣“泄漏”现象。
  - 方差很大：估计的方差随着采样数目N的增大基本上不减小。
  - 经典谱估计得到的功率谱密度不是一致性估计。
  - 在采样数目N有限的条件下，经典谱估计方法无法较好地调和估计偏差和方差的矛盾。
- 产生经典谱估计方法缺点的原因分析：
  - 数据长度有限是造成分辨率低和旁瓣“泄漏”的根本原因。
  - 经典谱估计都仅是对提供数据的“简单”利用，没有想办法挖掘并利用数据间内在的规律性。