- 第二章 LMS自适应滤波

2.3 **LMS算法稳定性分析**

(Stability of LMS filter)

一 复习自相关阵及相关特性

二 **LMS算法稳定性分析**

LMS filter 的特点:

•非线性;

•反馈(feedback) → 理论分析困难 → 近似分析

一 复习自相关阵及相关特性（x(n): 平稳信号）

1 自相关阵

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_{xx}=E\left[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)\right]$$

$$=\begin{bmatrix} r(0), & r(1), & \ldots, & r(N-1) \\ r(1), & r(0), & \ldots, & r(N-2) \\ \ldots & \ldots & \circ & \ldots \quad \ldots \\ r(N-1), & \ldots, & \ldots & r(0) \end{bmatrix}$$

$$r(p)=E\left[x(n)x(n-p)\right]$$

自相关阵特点：

1） R是对称阵，即 $\mathbf{R}^T=\mathbf{R}$（实数情况）或（复数情况）$\mathbf{R}^H=\mathbf{R}$

且具有Toplitz性质

2) ***R***是非负的

$$\tilde{y}=\mathbf{H}^T\mathbf{X}=\mathbf{X}^T\mathbf{H}\Rightarrow$$

$$E[|\tilde{y}|^2]=E[\mathbf{H}^T\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{H}]=\mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}\geq 0$$

3) 含噪信号的***R***正定，

非奇异 → ***R***非奇异，可逆

2 特征值和特征向量

定义：一个N×N阶方阵R，它的特征矢量v_i（列矢量）定义为

$$\mathbf{R}v_i = \lambda_i v_i \quad 0 \le i \le N-1$$

称v_i为R的特征值（或特征根）λ_i所对应的特征矢量；

特征值λ_i是特征方程的解

$$\det[\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}_N] = 0$$

White noise

$\mathbf{R} = diag(\sigma^2, \sigma^2, \ldots, \sigma^2), \sigma^2$ − 方差

$\mathbf{R}$有N个相同的特征值, 任意N×1的列矢量均是其特征矢量(随机性)

Complex Sinusoidal

$$e^{j(\omega n+\varphi)} \Rightarrow r(p) = e^{j\omega p}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & e^{j\omega} & \ldots & e^{j(N-1)\omega} \\ e^{-j\omega} & 1 & \ldots & e^{j(N-2)\omega} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{-j(N-1)\omega} & e^{-j(N-2)\omega} & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}$的特征矢量: $\mathbf{q} = [1, e^{-j\omega}, \ldots, e^{-j(N-1)\omega}]^T$
(特征值为N)

由信号$e^{j\omega n}$组成的矢量相差一个共扼

3 矩阵的对角化

对于一个实对称阵（**R**阵），其不同特征值对应的特征矢量是正交的（欧氏空间内积为零）。

$$\mathbf{R}\mathbf{q}_j = \lambda_j \mathbf{q}_j$$

$$\|\mathbf{q}_i\| = 1,\ i = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \frac{1}{\lambda_j} \underbrace{\mathbf{q}_i^T \mathbf{R}}_{}\mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{R}\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$$

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j$$

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_{N-1}]$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}' \quad or \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}'\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{\Lambda}' = diag(\lambda_i) = diag(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1})$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

4 平稳随机过程自相关阵R的特征值和特征向量的性质

1) $\det(\mathbf{R}) = \prod_{i=0}^{N-1} \lambda_i$ → λ_i不等于0 是R可逆的充要条件 $0 \leqslant i \leqslant N-1$

2) $Tr(\mathbf{R}) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = Nr(0) = N\sigma_x^2$

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{q}_i^T \mathbf{R} \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i^T \mathbf{q}_i}$$

3) 因为矩阵R是非负的，故有$\lambda_i \geqslant 0$，$0 \leqslant i \leqslant N-1$

4) 定义矩阵范数 $\|A\| = (\lambda_{max} \text{ of } A^T A)^{1/2}$

矩阵的条件数 $X(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$

则有 $\|R\| = \lambda_{max}$ $\|R^{-1}\| = 1/\lambda_{min}$

$X(R) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ → 特征值的分散程度(大:病态)

5) KL变换（Karhunen-Loeve展开）

当N个正交矢量被获得后，N维信号矢量可以表示成这些基矢量的线性组合，这就是KL展开.

$$\mathbf{X}(n)=\sum_{i=0}^{N-1}c_i(n)\mathbf{q}_i \quad \mathbf{q}_i, i=0,1,\ldots,N-1 \quad \text{归一化正交}$$

$$c_i(n)=\mathbf{q}_i^T\mathbf{X}(n),\ i=0,1,\ldots,N-1$$

$$\mathbf{R}=E[\mathbf{X}(n)\mathbf{X}^T(n)]=E[\sum_{i=0}^{N-1}c_i(n)\mathbf{q}_i\cdot\sum_{j=0}^{N-1}c_j(n)\mathbf{q}_j^T]$$

$$=E[\sum_{i,j=0}^{N-1}c_i(n)c_j(n)\mathbf{q}_i\mathbf{q}_j^T]=\sum_{i=0}^{N-1}E[c_i^2(n)]\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^T$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\ \ diag(\lambda_i)\ \ \mathbf{Q}^T=\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^T$$

$$E[c_i^2(n)]=\lambda_i$$

特征值可以看成是信号矢量在特征矢量上投影的功率

二 LMS算法稳定性分析（x(n)平稳的情况下）

自适应步长δ,自相关矩阵R起着决定性作用 。

δ的选择满足下面两种收敛要求：

1）均值收敛：指系数H(n)的均值收敛到维纳最优解H_{opt}

2）均方收敛：指均方误差J(n)收敛到一个最小值

定义：权系数误差矢量c(n) = $H(n)-H_{opt}$

E[c(n)]（一阶矩）帮助我们分析LMS算法在均值意义下的收敛条件

E[c(n)c^T(n)]（二阶矩）帮助我们分析LMS算法在均方意义下收敛条件

由 $$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

可得 $$\mathbf{c}(n+1) = [I_N - \delta \mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)]\mathbf{c}(n) + \delta \mathbf{X}(n+1)e_0(n+1)$$

其中 $$e_0(n+1) = y(n+1) - \mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{H}_{opt}$$

→ 维纳滤波误差（最优线性滤波误差）

$$e(n+1) = y(n+1) - \mathbf{H}^T(n)\mathbf{X}(n+1)$$

$$\mathbf{H}(n+1) = \mathbf{H}(n) + \delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1), n = 0,1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(n+1) &= \mathbf{H}(n) + \delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1) \\
&= \mathbf{H}(n) + \delta \mathbf{X}(n+1)[y(n+1) - \mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{H}(n)] \\
&= [\mathbf{I}_N - \delta \mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)]\mathbf{H}(n) + \delta y(n+1)\mathbf{X}(n+1) \\
&= [\mathbf{I}_N - \delta \mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)]\mathbf{c}(n) + \mathbf{H}_{opt} \\
&\quad \underline{-\delta \mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{H}_{opt} + \delta y(n+1)\mathbf{X}(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C}(n) = \mathbf{H}(n) - \mathbf{H}_{opt}$$

$$\mathbf{H}(n) = \mathbf{C}(n) + \mathbf{H}_{opt}$$

$$\Downarrow$$

$$e_0(n+1) = y(n+1) - \mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{H}_{opt}$$

$$\mathbf{c}(n+1) = [I_N - \delta \mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)]\mathbf{c}(n) + \delta \mathbf{X}(n+1)e_0(n+1)$$

$$\mathbf{c}(n+1)=[I_N-\delta\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)]\mathbf{c}(n)+\delta\mathbf{X}(n+1)e_0(n+1)$$

C(n) = H(n)-H_{opt}

（一）均值收敛分析

假设*H(n)*统计独立于*X(n+1)*，*y(n+1)*，而只与n+1时刻以前的量有关(*注意:在很多实际应用中,该假设不一定成立;但实验表明,基于此假设的分析结果基本正确*)

$$E[\mathbf{c}(n+1)]=E[(\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1))\mathbf{c}(n)]+\delta E[\mathbf{X}(n+1)e_0(n+1)]$$

$$=(\mathbf{I}_N-\delta E[\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)])E[\mathbf{c}(n)]$$

$$=[\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{R}]E[\mathbf{c}(n)]=[\mathbf{I}_N-\delta\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}'\mathbf{Q}^T]E[\mathbf{c}(n)]$$

=0(正交原理)

$$\mathbf{Q}^T E[\mathbf{c}(n+1)]=[\mathbf{I}_\mathrm{N}-\delta\mathbf{\Lambda}']\mathbf{Q}^T E[\mathbf{c}(n)]$$

$$\boldsymbol{\alpha}(n)=\mathbf{Q}^T\mathbf{c}(n)=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n)-\mathbf{H}_{opt}]$$

$$E[\boldsymbol{\alpha}(n+1)]=[\mathbf{I}_\mathrm{N}-\delta diag(\lambda_i)]E[\boldsymbol{\alpha}(n)]$$

初始值，设***H(0)=0***, $E[\boldsymbol{\alpha}(0)]=\mathbf{Q}^T E[\mathbf{H}(0)-\mathbf{H}_{opt}]=-\mathbf{Q}^T\mathbf{H}_{opt}$

$$E[\boldsymbol{\alpha}(n+1)] = [\mathbf{I} - \delta diag(\lambda_i)]E[\boldsymbol{\alpha}(n)]$$

$$\begin{bmatrix} E[\alpha_0(n+1)] \\ E[\alpha_1(n+1)] \\ \dots \\ E[\alpha_{N-1}(n+1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\delta\lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1-\delta\lambda_1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1-\delta\lambda_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[\alpha_0(n)] \\ E[\alpha_1(n)] \\ \dots \\ E[\alpha_{N-1}(n)] \end{bmatrix}$$

$$E[\alpha_k(n+1)] = (1-\delta\lambda_k)E[\alpha_k(n)], k = 0,1,\dots, N-1$$

$$E[\alpha_k(n)] = (1-\delta\lambda_k)^n E[\alpha_k(0)], k = 0,1,\dots, N-1$$

均值收敛条件

$$|1-\delta\lambda_k| < 1, \qquad for\ all\ k$$

$$0 < \delta < 2/\lambda_{\max}$$

均值收敛: E[H(n)] →$\mathbf{H}_{\mathbf{opt}}$

$\Updownarrow$

$$E[\boldsymbol{\alpha}(n)] = E[\mathbf{Q}^T \mathbf{c}(n)]$$
$$= \mathbf{Q}^T E[\mathbf{H}(n) - \mathbf{H}_{opt}] \Rightarrow 0$$

注意:尽管收敛条件由最大特征值决定,但均值收敛的快慢,受最小特征值$\lambda_{\min}$决定.

(二)均方收敛分析

$$\boldsymbol{\alpha}(n+1)=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n+1)-\mathbf{H}_{opt}]=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n)+\delta e(n+1)\mathbf{X}(n+1)-\mathbf{H}_{opt}]$$

$$=\boldsymbol{\alpha}(n)+\delta\mathbf{Q}^T e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

$$e(n+1)=y(n+1)-\mathbf{H}^T(n)\mathbf{X}(n+1)$$

$$=y(n+1)-\mathbf{H}_{opt}{}^T\mathbf{X}(n+1)-\mathbf{H}^T(n)\mathbf{X}(n+1)+\mathbf{H}_{opt}{}^T\mathbf{X}(n+1)$$

$$=e_0(n+1)-[\mathbf{H}(n)-\mathbf{H}_{opt}]^T\mathbf{X}(n+1)$$

$$=e_0(n+1)-[\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\mathbf{Q}^T\mathbf{X}(n+1)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(n)=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n)-\mathbf{H}_{opt}]$$

$e_0(n+1)$是和$X(n+1)$不相关的，进一步假设假设$H(n)$统计独立于$X(n+1)$，$y(n+1)$，而只与n+1时刻以前的量有关, 则将**$e(n+1)$**代入**$\alpha(n+1)$**可以得到：

$$E[[\boldsymbol{\alpha}(n+1)][\boldsymbol{\alpha}(n+1)]^T]=$$

$$\{E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T-\delta diag(\lambda_i)E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T-$$

$$\delta E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T diag(\lambda_i)\}+\delta^2E[e^2(n+1)]\cdot diag(\lambda_i)$$

$diag(\lambda_i)$

$e_0(n+1)$**是和**$X(n+1)$**不相关的，**进一步假设假设$H(n)$统计独立于$X(n+1)$，$y(n+1)$，而只与n+1时刻以前的量有关

$$+\delta^2 E[e^2(n+1)]\cdot diag(\lambda_i)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(n+1)=\boldsymbol{\alpha}(n)+\delta\mathbf{Q}^T e(n+1)\mathbf{X}(n+1)$$

$$[\boldsymbol{\alpha}(n+1)]^T=[\boldsymbol{\alpha}(n)]^T+\delta\mathbf{X}^T(n+1)e(n+1)\mathbf{Q}$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\alpha}(n+1)][\boldsymbol{\alpha}(n+1)]^T=&[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T+[\boldsymbol{\alpha}(n)]\delta e(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{Q}\\&+\delta\mathbf{Q}^T\mathbf{X}(n+1)e(n+1)[\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\\&+\delta^2\mathbf{Q}^T e(n+1)\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)e(n+1)\mathbf{Q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e(n+1)&=e_0(n+1)-[\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\mathbf{Q}^T\mathbf{X}(n+1)\\&=e_0(n+1)-\mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{Q}[\boldsymbol{\alpha}(n)]\end{aligned}$$

$$e(n+1)=e_0(n+1)-[\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\mathbf{Q}^T\mathbf{X}(n+1)$$
$$=e_0(n+1)-\mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{Q}[\boldsymbol{\alpha}(n)]$$

由于

$$J(n)=E[e^2(n+1)]=E[e_0{}^2(n+1)]+E\underbrace{[[\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\mathbf{Q}^T[\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)]\mathbf{Q}[\boldsymbol{\alpha}(n)]]}_{\text{标量}}$$

$$E[e_0^2(n+1)]=J_{\min}$$

$$E[[\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\mathbf{Q}^T\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{Q}[\boldsymbol{\alpha}(n)]]$$
$$=E[Tr\{[\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\mathbf{Q}^T\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{Q}[\boldsymbol{\alpha}(n)]\}]$$
$$=E[Tr\{\mathbf{Q}^T\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)\mathbf{Q}[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\}]$$
$$=Tr\{\mathbf{Q}^TE[\mathbf{X}(n+1)\mathbf{X}^T(n+1)]\mathbf{Q}E[[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T]\}$$
$$=Tr\{diag(\lambda_i)E[[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T]\}$$
$$=\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_iE[a_i^2(n)]$$

$$J(n)=J_{\min}+\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_iE[\alpha_i{}^2(n)]$$

$$J(n)=J_{\min}+\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i E[\alpha_i^2(n)]$$

$$\boldsymbol{\alpha}(n)=\mathbf{Q}^T\mathbf{c}(n)=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n)-\mathbf{H}_{opt}]$$

令

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \cdots\\ \lambda_{N-1}\end{bmatrix} \qquad \left[\boldsymbol{\alpha}^2(n)\right]=\begin{bmatrix}\alpha_0^2(n)\\ \alpha_1^2(n)\\ \cdots\\ \alpha_{N-1}^2(n)\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&E[[\boldsymbol{\alpha}(n+1)][\boldsymbol{\alpha}(n+1)]^T]=\\&\{E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T-\delta E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T diag(\lambda_i)\\&-\delta diag(\lambda_i)E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T]\}\ +\delta^2 diag(\lambda_i)E[e^2(n+1)]\end{aligned}$$

$$E[\mathrm{e}^2(n+1)]=J(n)$$

令对角线上的元素相等

$$\begin{cases}J(n)=J_{\min}+\boldsymbol{\Lambda}^T E[\boldsymbol{\alpha}^2(n)]\\ E[\boldsymbol{\alpha}^2(n+1)]=[\mathbf{I}_N-2\delta diag(\lambda_i)+\delta^2\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^T]E[\boldsymbol{\alpha}^2(n)]+\delta^2 J_{\min}\boldsymbol{\Lambda}\end{cases}$$

为简化表达式, 令 $\boldsymbol{\beta}(n)=E[\boldsymbol{\alpha}^2(n)]$

则上式写成 $\boldsymbol{\beta}(n+1)=\mathbf{B}\boldsymbol{\beta}(n)+\delta^2 J_{\min}\boldsymbol{\Lambda}$

其中B是个方阵，全部元素为正的实数的对称阵

$$b_{ij}=\begin{cases}(1-\delta\lambda_i)^2 & i=j\\ \delta^2\lambda_i\lambda_j & i\neq j\end{cases}$$

分析：

（1） $J(n)=J_{\min}+\mathbf{\Lambda}^T E[\boldsymbol{\alpha}^2(n)]$

LMS算法均方收敛特性由β(n) =E[α^2(n)]决定，而LMS算法的均方收敛的过渡特性是由β(n) =E[α^2(n)]的进化来分析。定义超量误差$J_{ex}(n)$

$$J(n)=J_{\min}+J_{ex}(n)$$

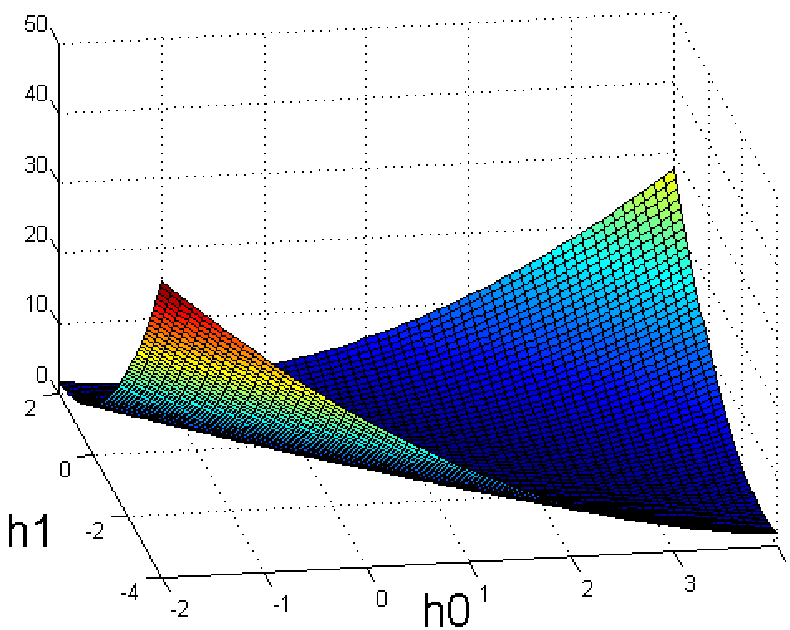
则 $$J_{ex}(n)=\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\beta}(n)=\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i E[\alpha_i^2(n)]$$

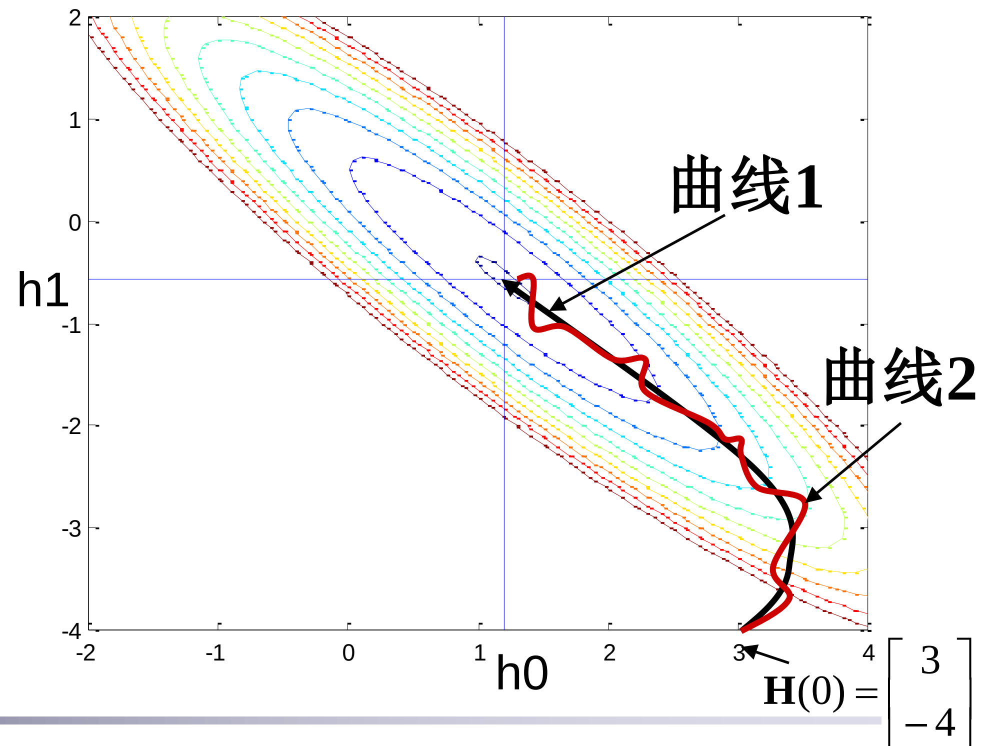
算法收敛时，J_{ex}(n)达到一个稳定值，除非E[α²(n)]为零矢量，否则J(n)≠$J_{\min}$

例：从H(n)调整过程理解

$$J(n)=E[y^2(n)]-2\mathbf{r}_{yx}^T\mathbf{H}+\mathbf{H}^T\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}$$

$$=0.55+h_0^2+h_1^2+2h_0h_1\cos\frac{\pi}{8}-\sqrt{2}h_0\cos\frac{\pi}{10}-\sqrt{2}h_1\cos\frac{9\pi}{40}$$





2) 均方收敛条件

从公式 $\boldsymbol{\beta}(n+1)=\mathbf{B}\boldsymbol{\beta}(n)+\delta^2 J_{\min}\boldsymbol{\Lambda}$

得到收敛条件是*B*中行元素的绝对值之和必须小于1。

其中**B**是个方阵，全部元素为正的实数的对称阵

$$b_{ij}=\begin{cases}(1-\delta\lambda_i)^2 & i=j\\ \delta^2\lambda_i\lambda_j & i\neq j\end{cases}$$

故有：$0<(1-\delta\lambda_i)^2+\delta^2\lambda_i\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{N-1}\lambda_j<1$ 或 $0<1-2\delta\lambda_i+\delta^2\lambda_i\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j<1$

始终成立

可得

$$\boxed{0<1+\delta\lambda_i[\delta\sum_{j=0}^{N-1}\lambda_j-2]<1}$$

$$0<\delta<\frac{2}{\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_j}$$

$$0<\delta<\frac{2}{\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_j}$$

这时我们称LMS算法在均方意义下收敛;平稳输入下有

$$Tr(\mathbf{R})=\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i=Nr(0)=N\sigma_x^2$$

所以均方收敛条件: $0<\delta<\dfrac{2}{N\sigma_x^2}$

（3）收敛时, $n\to\infty$, 由

$$E[[\boldsymbol{\alpha}(n+1)][\boldsymbol{\alpha}(n+1)]^T]=\{E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T-\delta E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T diag(\lambda_i)$$
$$-\delta diag(\lambda_i)E[\boldsymbol{\alpha}(n)][\boldsymbol{\alpha}(n)]^T\}$$
$$+\delta^2 diag(\lambda_i)E[e^2(n+1)]$$

可得:

$$E\left[[\boldsymbol{\alpha}(\infty)][\boldsymbol{\alpha}(\infty)]^T\right]diag(\lambda_i)+diag(\lambda_i)E\left[[\boldsymbol{\alpha}(\infty)][\boldsymbol{\alpha}(\infty)]^T\right]=\delta diag(\lambda_i)J(\infty)\mathbf{I}_N$$

$$E\left[[\boldsymbol{\alpha}(\infty)][\boldsymbol{\alpha}(\infty)]^T\right]diag(\lambda_i)+diag(\lambda_i)E\left[[\boldsymbol{\alpha}(\infty)][\boldsymbol{\alpha}(\infty)]^T\right]=\delta diag(\lambda_i)J(\infty)\mathbf{I}_N$$

$$E\left[\alpha_i^2(\infty)\right]=\beta_i(\infty)=\frac{\delta}{2}J(\infty)$$

$$J(n)=J_{\min}+J_{ex}(n)=J_{\min}+\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\beta}(n)$$

$$\boldsymbol{\beta}(n)=E\left[\boldsymbol{\alpha}^2(n)\right]=E\begin{bmatrix}\alpha_0^2(n)\\ \alpha_1^2(n)\\ \cdots\\ \alpha_{N-1}^2(n)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_0\\ \lambda_1\\ \cdots\\ \lambda_{N-1}\end{bmatrix}$$

$$J(\infty)=J_{\min}+\underbrace{\frac{\delta}{2}J(\infty)\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i}$$

可得

$$J(\infty)=J_{\min}/(1-\frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i)=J_{\min}/(1-\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2)$$

$$J_{ex}(\infty)=\frac{\delta}{2}[J_{\min}/(1-\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2)][N\sigma_x^2]$$

$$=J_{\min}\bullet\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2/(1-\frac{\delta}{2}N\sigma_x^2)$$

2.4 LMS算法性能分析
(Performance Analysis of LMS filter)

$$E[\alpha_k(n)]=(1-\delta\lambda_k)^n E[\alpha_k(0)],\quad k=0,1,\ldots,N-1$$

若假设初始条件为$\boldsymbol{\beta}(0)$，则可由递推式生成

$$\boldsymbol{\beta}(n)=\mathbf{B}^n\boldsymbol{\beta}(0)+\delta^2 J_{\min}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{B}^i\boldsymbol{\Lambda} \qquad \boldsymbol{\beta}(n+1)=\mathbf{B}\boldsymbol{\beta}(n)+\delta^2 J_{\min}\boldsymbol{\Lambda}$$

可见是$\mathbf{B}^n$控制着收敛，或者说是受输入信号的相关阵**R**的特征值λ_i的控制。若忽略**B**中与δ^2有关的量，则

$$b_{ij}\approx\begin{cases}1-2\delta\lambda_i & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad b_{ij}=\begin{cases}(1-\delta\lambda_i)^2 & i=j\\ \delta^2\lambda_i\lambda_j & i\neq j\end{cases}$$

$$\mathbf{B}^n\approx diag(1-2\delta\lambda_i)^n,\ \delta\lambda_i<<1$$

随着**n**的增大，λ_i中最小的一项$\lambda_{\min}$控制着收敛过程，可见，若条件数$X(R)=\lambda_{max}/\lambda_{min}$大，即$\lambda_i$分布范围广，则收敛慢。收敛速度的快慢，一般用时间常数的概念来表示：

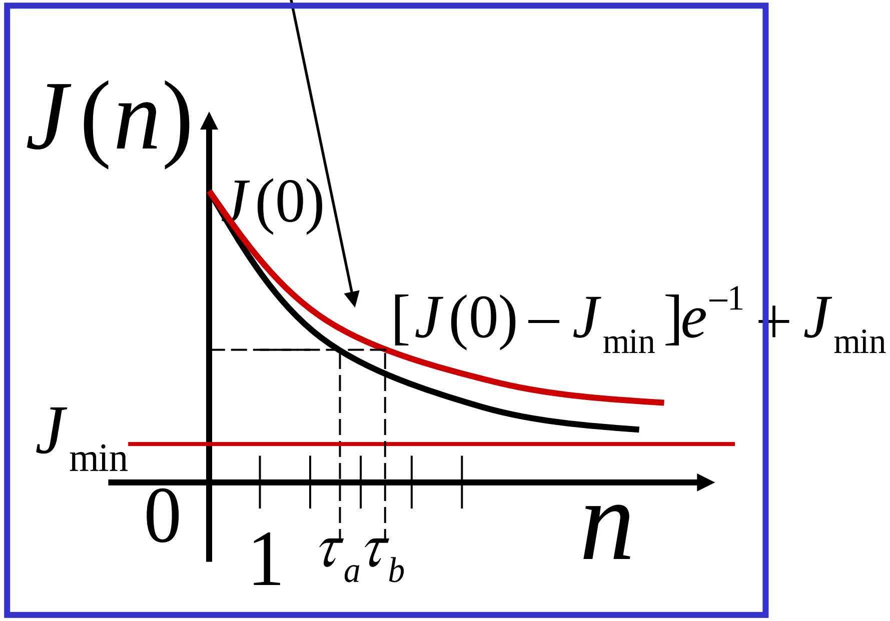
$$J(n) = E[e^2(n)] \square\ n$$

学习曲线

$$J(n) = J_{\min} + \mathbf{\Lambda}^T E[\boldsymbol{\alpha}^2(n)]$$

Learning curve

$$J(n) - J_{\min} = e^{-\frac{n}{\tau}}[J(0) - J_{\min}]$$



2.4 LMS算法性能分析

一 时间常数

在均值收敛中 $E[\alpha_k(n)] = (1-\delta\lambda_k)^n E[\alpha_\mathrm{k}(0)]$

可以用指数曲线来拟合 $E[\alpha_k(n)] = e^{-\frac{n}{\tau_k}} E[\alpha_\mathrm{k}(0)]$

可以求得 $\tau_k = \dfrac{-1}{\ln(1-\delta\lambda_k)}$

时间常数是指衰减到初始值的 e^{-1}倍时所需的时间

当δ足够小，δ<<1，δλ$_\mathrm{k}$<<1，则

$$\ln(1-\delta\lambda_k) \approx -\delta\lambda_k \quad \tau_k \approx \frac{1}{\delta\lambda_k}$$

E[H(n)]整体收敛时间常数τ$_\mathrm{a}$，可看成介于

$$\frac{-1}{\ln(1-\delta\lambda_{\max})} \le \tau_a \le \frac{-1}{\ln(1-\delta\lambda_{\min})}$$

对于均方收敛，若忽略2次项

$$\mathbf{B}^n \approx diag(1-2\delta\lambda_k)^n$$

要求

$$(1-2\delta\lambda_k)^n = e^{-n/\tau_k}$$

可得 $$\tau_k = \frac{-1}{\ln(1-2\delta\lambda_k)} \approx \frac{1}{2\delta\lambda_k}$$

如果R的特征值不太分散的话，λ_i都用 $\bar{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i$ 代替，可得

$$\tau_e \approx \frac{1}{2\delta\bar{\lambda}} = \frac{1}{2\delta\sigma_x^2}$$

$$J(\infty) = J_{\min} /(1 - \frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i) = J_{\min} /(1 - \frac{\delta}{2} N\sigma_x^2)$$

二、失调 Mis-adjustment

定义 $$M_{adj} = \frac{J(\infty)}{J_{\min}}$$

由前面讨论可得， $$M_{adj} = \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i}$$

若 $\frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i = \frac{\delta}{2} N\sigma_x^2 << 1$ ， $M_{adj} \approx 1 + \frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i$

$$= 1 + \frac{\delta}{2} N\sigma_x^2$$

三、讨论

1. 归纳LMS算法

参数	**N 权系数个数，FIR滤波器的阶数**
	δ ,自适应步距
初始条件	$H(0)=0$
数据	**X(n)， N×1，输入数据矢量（n时刻）**
	y(n),参考信号，期望的响应（n时刻）
计算	**for n=0,1,2,…**
	$e(n+1)=y(n+1)-H^T(n)X(n+1)$
	$H(n+1)=H(n)+\delta e(n+1)X(n+1)$

$$M_{adj} \approx 1 + \frac{\delta}{2} N\sigma_x^2$$

$$\tau_e \approx \frac{1}{2\delta\sigma_x^2}$$

2. 三个基本因素影响着**LMS**算法的性能

1) δ

采用小的δ值，自适应较慢，时间常数较大，相应收敛后的均方误差要小，需要较大量的数据来完成自适应过程；

当δ值较大时，自适应相对较快，代价是增加了收敛后的平均超量误差,需要较少量的数据来完成自适应过程;

因此δ的倒数可以被看成是LMS算法的Memory长度。

2) N

由于算法均方收敛的条件是 $0 < \delta < \dfrac{2}{\sum_{i=0}^{N-1} \lambda_j}$ 或 $0 < \delta < \dfrac{2}{N\sigma_x^2}$

所以均方误差J(n)的收敛特性和阶次N有关。

$$\boldsymbol{\alpha}(n)=\mathbf{Q}^T\mathbf{c}(n)=\mathbf{Q}^T[\mathbf{H}(n)-\mathbf{H}_{opt}]$$

$$\left[\boldsymbol{\alpha}^2(n)\right]=\begin{bmatrix}\alpha_0^2(n)\\ \alpha_1^2(n)\\ \cdots\\ \alpha_{N-1}^2(n)\end{bmatrix}$$

而***H*(n)收敛到H$_{opt}$的条件是（均值收敛条件）：**

$$0<\delta<\frac{2}{\lambda_{\max}}$$

$$\boldsymbol{\beta}(n)=E[\boldsymbol{\alpha}^2(n)]$$

$$J(n)=J_{\min}+J_{ex}(n)=J_{\min}+\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\beta}(n)$$

当*H*(n)均值收敛到H$_{opt}$还不够。希望*H*(n)的起伏即*H*(n)-H$_{opt}$的方差要小，即J$_{ex}$（n)要收敛，且要小。

由于 $0<\delta<\dfrac{2}{\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_j}$ ⇒ $0<\delta<\dfrac{2}{\lambda_{\max}}$

所以考虑到实际应用中不但要求均值收敛而且一般会要求均方收敛，所以关于叠代步长的选取一般按均方收敛要求去取：

$$0<\delta<\frac{2}{\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_j}=\frac{2}{N\sigma_x^2}$$

$$\tau_k = \frac{-1}{\ln(1-2\delta\lambda_k)} \approx \frac{1}{2\delta\lambda_k}$$

$$J(\infty) = J_{\min} / (1 - \frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i) \approx J_{\min} + J_{\min}\frac{\delta}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i$$

3) λ_i

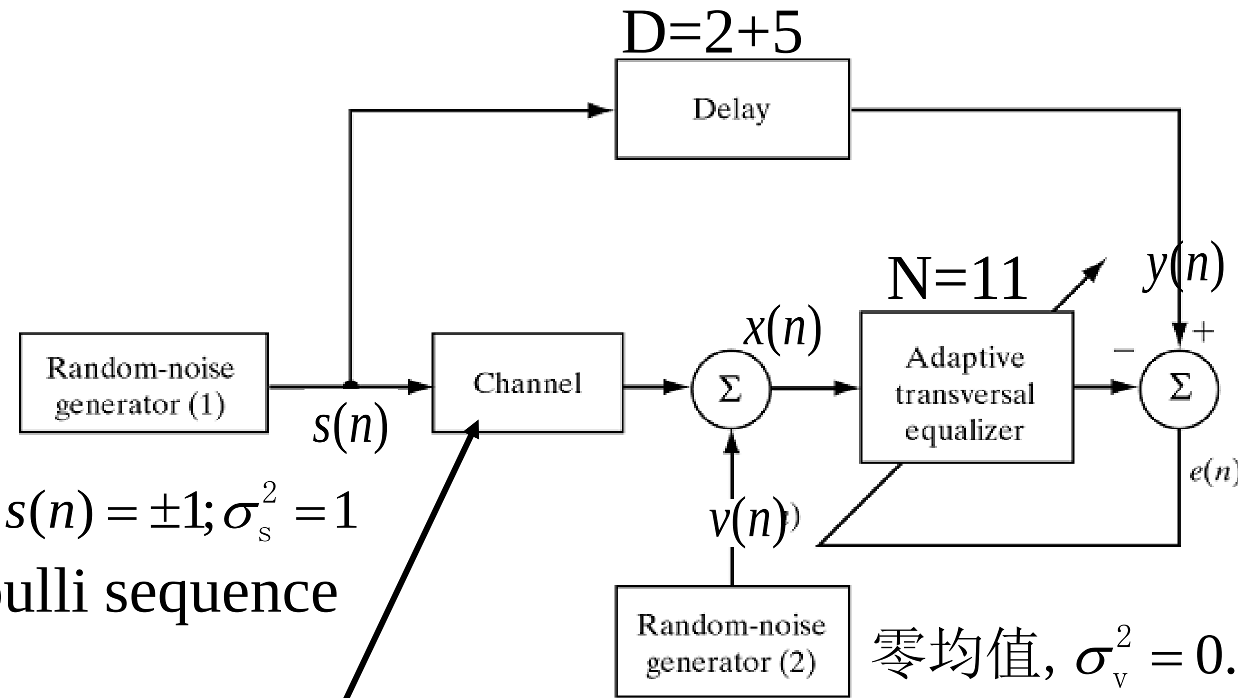
当输入的相关阵R的特征值比较分散时，**LMS**算法的超量均方误差主要由最大特征值决定。而权系数矢量均值收敛到H_{opt}所需的时间受最小特征值限制。在特征值很分散（输入相关阵是病态的）时，**LMS**算法的收敛较慢。

3. 独立理论

上面的结论都是基于一个有关量的独立性假设，且是平稳的。

有关的独立假设等价于假定输入矢量序列是统计独立的，导致***H*(n)和y(n+1)、*X*(n+1)**是独立的，事实上这一假设是有问题的，它忽略了在算法收敛过程中，从一次迭代到下一次迭代时，梯度方向之间是统计相关的。但是，由独立假设预测的结果和实验及计算机模拟结果多数符合得相当好。

四、Computer experiment on adaptive equalization

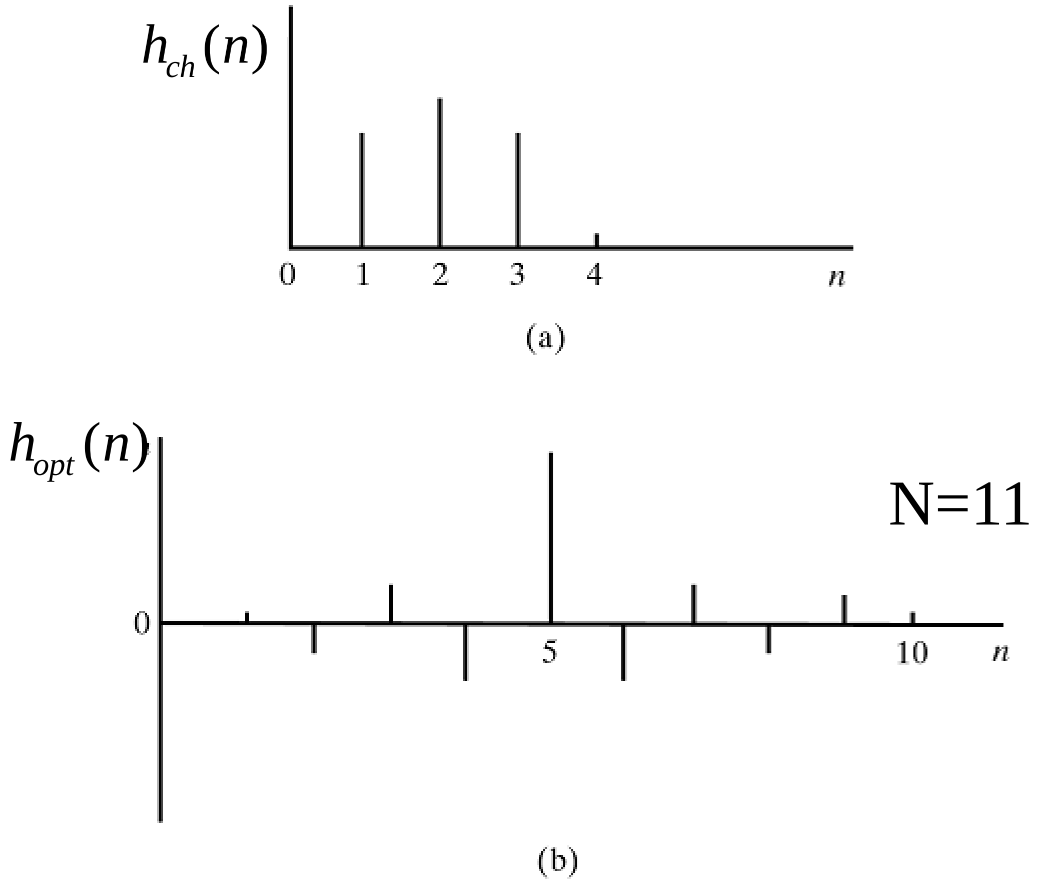


零均值, $s(n)=\pm 1; \sigma_s^2=1$

Bernoulli sequence

零均值, $\sigma_v^2=0.001$

$$h_{ch}(n)=\begin{cases} \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{W}(n-2)\right)\right], n=1,2,3 \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad otherwise \end{cases}$$



(a) Impulse response of channel; (b) impulse response of optimum transversal equalizer.

Correlation Matrix of the Equalizer Input

$$x(n)=\sum_{k=1}^{3}h_{ch}(k)s(n-k)+v(n)$$

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & r(2) & 0 & \ldots & 0 \\ r(1) & r(0) & r(1) & r(2) & \ldots & 0 \\ r(2) & r(1) & r(0) & r(1) & \ldots & 0 \\ 0 & r(2) & r(1) & r(0) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & r(0) \end{bmatrix}_{N\times N}$$

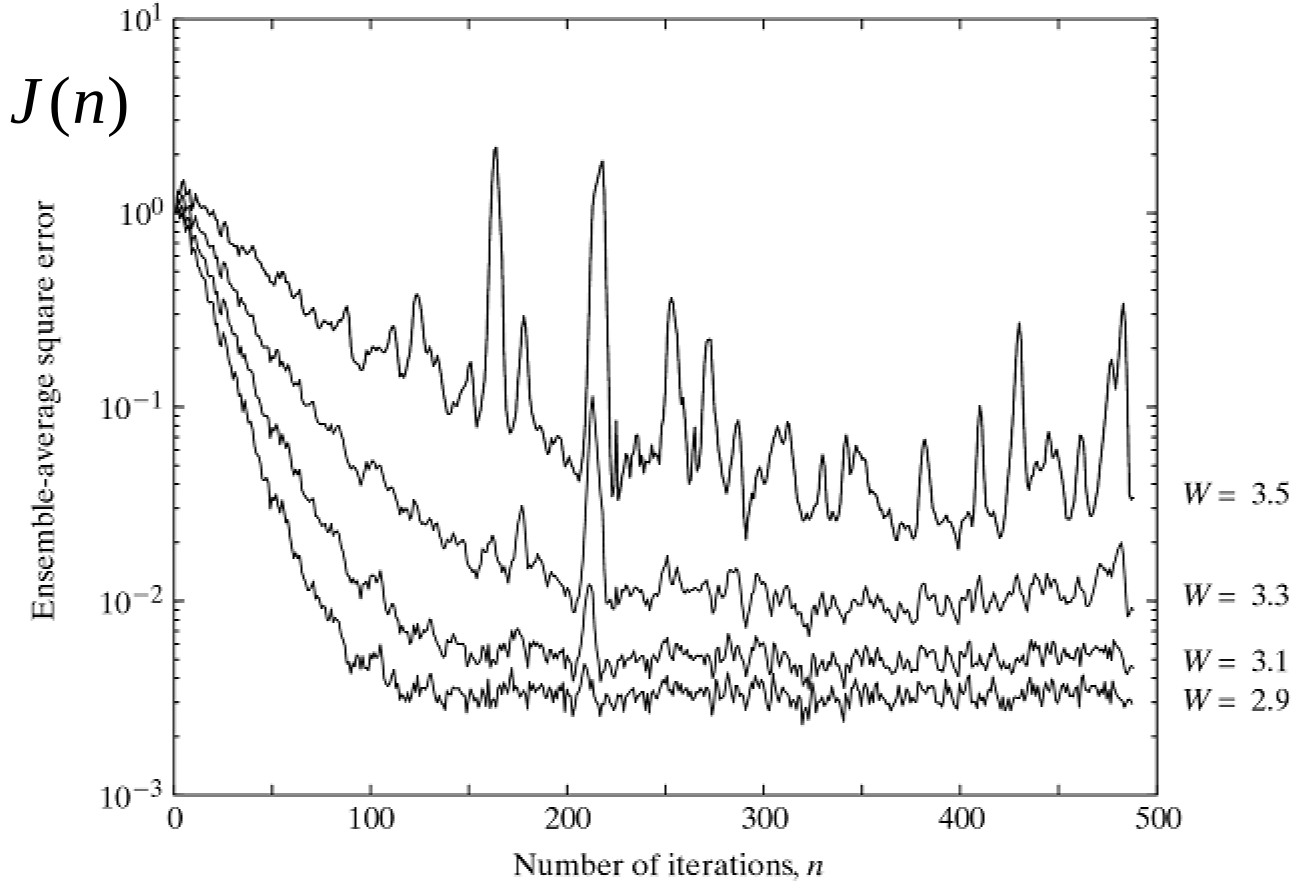
$$r(0)=h_{ch}^2(1)+h_{ch}^2(2)+h_{ch}^2(3)+\sigma_v^2,$$
$$r(1)=h_{ch}(1)h_{ch}(2)+h_{ch}(2)h_{ch}(3),$$
$$r(2)=h_{ch}(1)h_{ch}(3)$$

Summary of parameters for the experiment on adaptive equalization

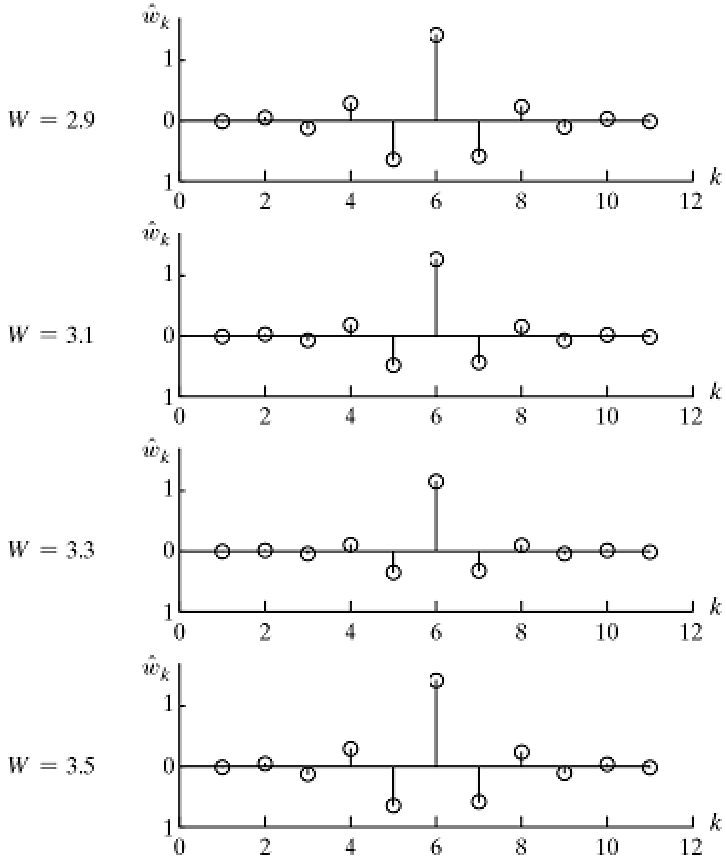
W	2.9	3.1	3.3	3.5
r(0)	1.0963	1.1568	1.2264	1.3022
r(1)	0.4388	0.5596	0.6729	0.7774
r(2)	0.0481	0.0783	0.1132	0.1511
$\lambda_{\min}$	0.3339	0.2136	0.1256	0.0656
$\lambda_{\max}$	2.0295	2.3761	2.7263	3.0707
$\chi(\mathbf{R}) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$	6.0782	11.1238	21.7132	46.8216

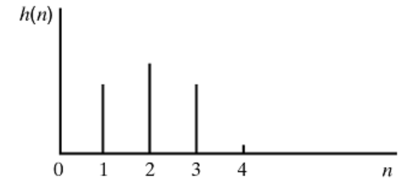
Experiment 1: Effect of Eigenvalue Spread

2.4 LMS算法性能分析

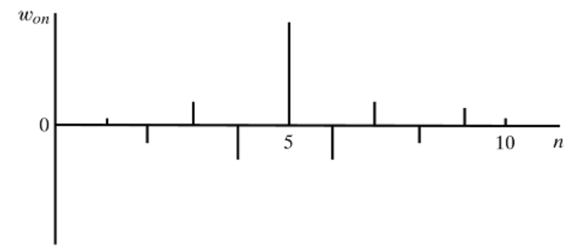


Learning curves of the LMS algorithm for an adaptive equalizer with number of taps N=11,step-size $\delta = 0.075$,and varying eigenvalue spread $\chi(\mathbf{R})$





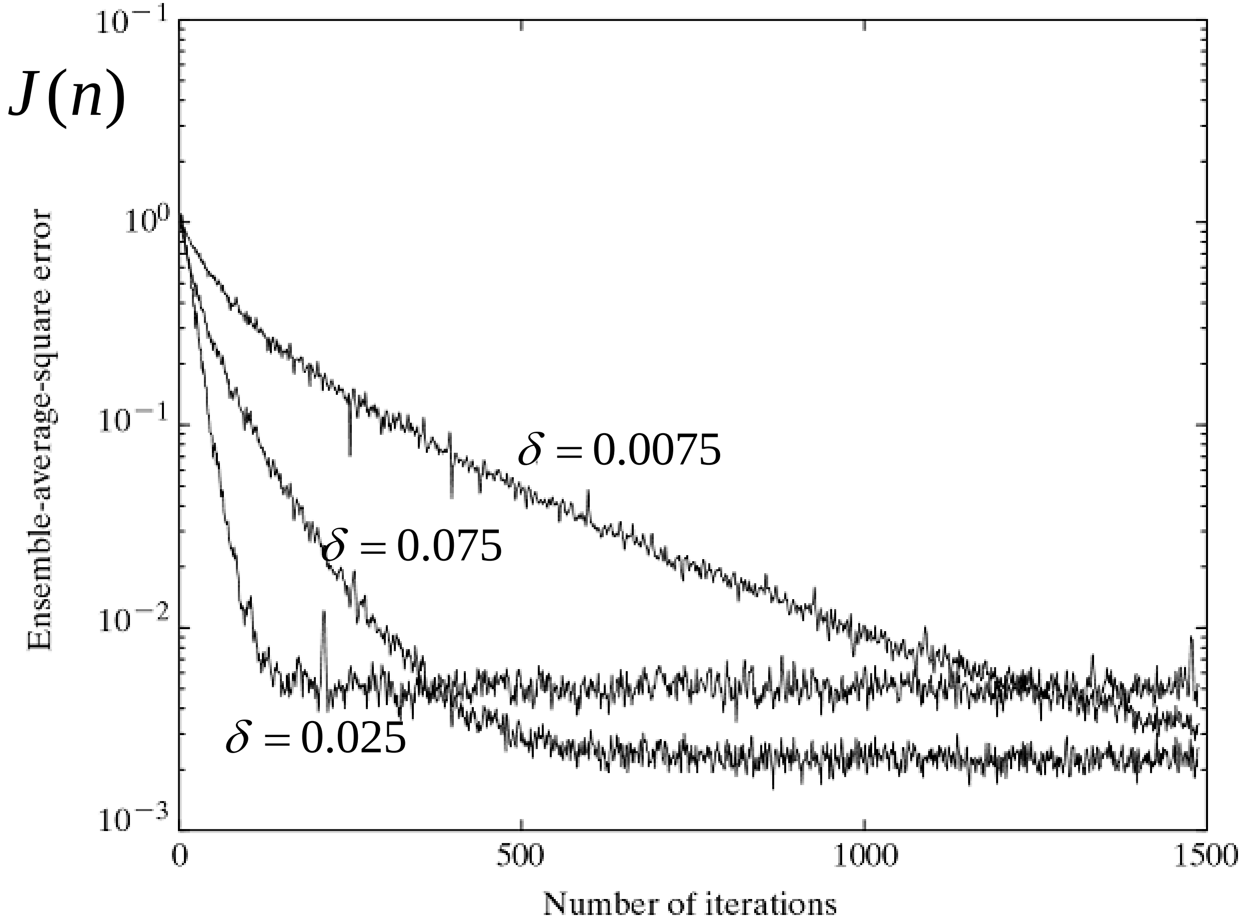
(a)



(b)

Ensemble-average impulse response of the adaptive equalizer (after 1000 iterations) for each of four different eigenvalue spreads

Experiment 2: Effect of Step-size Parameter



Learning curves of the LMS algorithm for an adaptive equalizer with number of taps N=11,fixed eigenvalue spread ,and varying step-size δ