Dans de nombreux problèmes physiques, on est amené à chercher une fonction inconnue qui est solution d'une équation liant cette fonction à ses dérivées successives.
Une relation liant une fonction d'une variable réelle à ses dérivées est appelée **une équation différentielle**.

1 Définition

Définition 1 Une **équation différentielle d'ordre** n est de la forme :

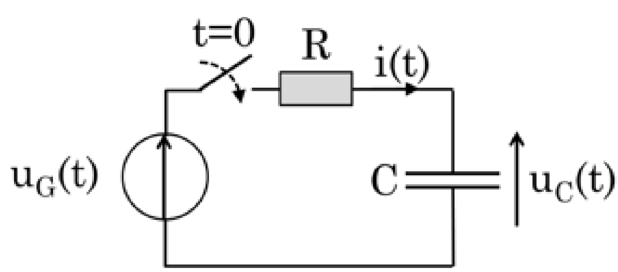
$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (E)$$

où F est une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+2}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.

Il est d'usage de noter y la fonction inconnue et x la variable réelle dont dépend la solution.

Exemple 1 Voici un exemple vu dans le cours sur les circuits.

Equation différentielle relative au circuit RC :



Loi des mailles :

$u_G(t) - R \times i(t) - u_C(t) = 0 \qquad (1)$

Caractéristique courant/tension du condensateur :

$i(t) = C \times u_C'(t) \qquad (2)$

On insère (2) dans (1) :

$u_G(t) - R \times C \times u_C'(t) - u_C(t) = 0 \qquad (3)$

On réorganise :

$RC.u_C'(t) + u_C(t) = u_G(t) \qquad (4)$

On peut aussi l'écrire sous la forme canonique :

$u_C'(t) + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{1}{RC} u_G(t) \qquad (5)$

On remarquera que dans cet exemple, la variable dont dépend la solution est notée t.

Exemple 2 Voici un exemple d'une équation différentielle d'ordre 2, issu cette fois de la mécanique (ressort) :

$$y''(x) + 4y(x) = 0 \quad (E_1)$$

On cherche une fonction y qui vérifie cette équation (E_1), c'est à dire telle que $y''(x) = -4y(x)$.
On voit que la fonction $\phi : x \mapsto \cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ est solution de l' équation (E_1). En effet :

$$\phi'(x) = -2\sin(2x), \quad \phi''(x) = -4\cos(2x) = -4\phi(x)$$

Question : est-ce que ϕ est la seule solution de cette équation (E_1)?
Non, car la fonction $\psi : x \mapsto \sin(2x)$ est aussi solution de (E_1).
En effet :

$$\psi'(x) = 2\cos(2x), \quad \psi''(x) = -4\sin(2x) = -4\psi(x)$$

Comment trouver toutes les solutions de (E_1)?
On montrera que toutes les solutions de (E_1) sont de la forme :

$$x \mapsto C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles.

Vocabulaire
On désigne par :

- **Solution générale** d'une équation différentielle : tous les éléments de l'ensemble de solutions.
- **Solution particulière** : une des solutions de l'équation différentielle.
- Dans l'exemple 1, nous avons vu que l'équation différentielle (E_1) admet de nombreuses solutions. Pour choisir entre les différentes solutions d'une équation différentielle, il faut posséder d'autres données qui dépendent de la nature du problème, par exemple de **conditions initiales.**

  On appelle **problème de Cauchy**, le problème constitué par une équation différentielle d'ordre n et de n conditions initiales portant sur la fonction inconnue et ses dérivées.

Exemple 3 Reprenons l'exemple 2, mais en imposant que $y(0) = 1/5$ et $y'(0) = -2$.
Alors il existe une seule solution de l'équation différentielle (E_1) qui satisfait ces deux conditions initiales. Il s'agit de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{5}\cos(2x) - \sin(2x)$$

Les équations différentielles sont en général très difficiles à résoudre. C'est pourquoi nous nous intéresserons dans ce chapitre aux équations différentielles **linéaires du premier ordre ou du second ordre à coefficients constants**, c'est à dire de la forme :

- $a(x)y' + b(x)y = c(x)$: Equation différentielle linéaire du premier ordre.
- $ay'' + by' + cy = d(x)$: Equation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

2 Equation différentielle linéaire du premier ordre

2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre normalisée (ou canonique)

Dans la suite I désignera un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et a, b, c trois fonctions continues de I dans R.
L'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad (E)$$

admet pour forme **normalisée** (ou canonique), l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)} \qquad (E_N)$$

L'équation différentielle (E) est définie pour tout $x \in I$. En revanche, l'équation différentielle (E_N) n'est définie que pour les valeurs de x pour lesquelles $a(x)$ ne s'annule pas sur I.

Exemple 4 Considérons l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$2xy'(x) + y(x) = 0 \qquad (E)$$

Elle admet pour équation normalisée associée :

$$y'(x) + \frac{1}{2x}y(x) = 0 \qquad (E_N)$$

(E) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors que (E') est définie sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
On cherchera dans un premier temps les solutions de (E_N) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On étudiera ensuite l'existence de solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ avec des solutions de (E_N).
Cet exemple sera repris un peu plus loin.

Nous nous intéresserons dans la suite à des équations différentielles normalisées.

2.2 Equation différentielle linéaire du premier ordre homogène

Définition 2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a une fonction continue sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire homogène du premier ordre** une équation de la forme :

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (E_H)$$

On dit que la fonction ϕ est solution de (E_H) sur l'intervalle I si ϕ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \phi'(x) + a(x)\phi(x) = 0$.

Remarque 1 La fonction nulle est solution de (E_H).

Théorème 1 L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ de l' équation différentielle linéaire homogène du premier ordre (E_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Preuve :

Théorème 2 L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ de l' équation différentielle linéaire homogène du premier ordre (E_H) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Le théorème suivant nous donne la 'forme' des éléments de $\mathcal{S}_H$, c'est à dire la 'forme' des solutions de (E_H).

Théorème 3 L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ de l' équation différentielle linéaire homogène du premier ordre (E_H) est donné par :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto ke^{-A(x)}\} \text{ avec } k \in \mathbb{R}, A \text{ primitive de } a \text{ sur } I$$

Il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Preuve :

Remarque 2

- La fonction $x \mapsto ke^{-A(x)}$ est appelée **solution générale** de (E_H).
- Il existe une unique solution ϕ qui prend une valeur donnée en un point donné de I, ceci conduit à déterminer une valeur de la constante k.

Exemple 5 Déterminer la solution générale sur $\mathbb{R}$ de :

$$y' - \frac{1}{1+x^2}y = 0$$

Exemple 6 Déterminer la solution générale de :

$$(x^2+1)y' + xy = 0 \quad (E_H)$$

Exemple 7 Reprenons l'exemple 3 et déterminons sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ la solution générale de l'équation :

$$y'(x) + \frac{1}{2x}y(x) = 0 \qquad (E_N)$$

2.3 Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

Définition 3 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a et b deux fonctions continues sur I.
On appelle **équation différentielle linéaire non homogène (ou avec second membre) du premier ordre** une équation de la forme :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (E)$$

On dit que la fonction ϕ est solution de (E) sur l'intervalle I si ϕ est dérivable sur I et $\forall x \in I, \phi'(x) + a(x)\phi(x) = b(x)$.
On appelle équation différentielle homogène associée à (E) l'équation différentielle :

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (E_H)$$

Rappelons que l'on appelle solution particulière de (E), une solution de (E). Ceci s'oppose à solution générale de (E), qui désigne l'expression générale des solutions de (E).
Le théorème qui suit indique que :
la solution générale de (E) est la somme de la solution de l'équation homogène (E_H) associée à (E) et d'une solution particulière de (E).

Théorème 4 Soit ϕ_{part} une solution particulière sur I de l'équation différentielle (E) et A une primitive de a sur I.
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \{x \mapsto \underbrace{ke^{-A(x)}}_{\text{sol de } (E_H)} + \underbrace{\phi_{part}(x)}_{\text{sol particulière de } (E)}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{\text{Solution générale de } \mathcal{S} = \text{Solution particulière de } \mathcal{S} + \text{ Solution générale de l'équation homogène}}$$

Preuve :

Remarque 3 S n'est pas un espace vectoriel (il s'agit d'un espace affine).

Il existe un moyen d'obtenir une solution particulière à travers un processus calculatoire appelé **méthode de la variation de la constante.**

2.4 Méthode de la variation de la constante

Considérons l'équation différentielle du premier ordre pour $x \in I$:

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \qquad (E)$$

et son équation homogène associée :

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0 \qquad (E_H)$$

Soit ϕ_H la solution générale de (E_H), on sait qu'elle s'écrit comme $x \mapsto Ce^{-A(x)}$ où A est une primitive de a et C une constante.
On va montrer qu'il existe une solution particulière de (E) de la forme :

$$\phi_{part} : x \in I \mapsto \underbrace{C(x)}_{\text{La constante } c \text{ varie}} e^{-A(x)}$$

$$\begin{array}{lll} & \forall x \in I & \phi_{part}(x) + a(x)\phi_{part}(x) = b(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I & (C(x)e^{-A(x)})' + a(x)C(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I & C'(x)e^{-A(x)} - C(x)a(x)e^{-A(x)} + a(x)C(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I & C'(x)e^{-A(x)} = b(x) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I & C(x) = \int \frac{b(x)}{e^{-A(x)}}dx \text{ car } e^{-A(x)} \text{ ne s'annule pas sur } I \end{array}$$

L'équation différentielle (E) admet dont une solution particulière de la forme :
$\phi_{part} : x \in I \mapsto C(x)e^{-A(x)}$

Exemple 8 Résoudre l'équation différentielle :

$$y' + \frac{y}{x} = x - \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \qquad (E)$$

avec $y(1) = 0$.

2.5 Principe de superposition

Le résultat suivant peut se révéler très utile dans la pratique car il permet de ramener la résolution d'une équation différentielle au second membre "compliqué" à la résolution de plusieurs équations différentielles aux seconds membres plus simples.

Proposition 1 Principe de superposition
Soit I un intervalle et $a, b_1, b_2, \ldots, b_m$ des fonctions continues sur I. Si pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, l'application ϕ_k est une solution particulière de l'équation différentielle :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b_k(x)$$

alors $\sum_{k=1}^{m} \phi_k$ est une solution particulière sur I de l'équation différentielle :

$$y'(x) + a(x)y(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k(x)$$

Preuve :

2.6 Cas particulier

On se place toujours sur I intervalle de $\mathbb{R}$ avec a, b deux fonctions continues sur I et on s'intéresse à l'équation diffŕentielle du premier ordre :

$$y'(x) + ay(x) = b(x) \qquad (E)$$

soit le cas particulier où : $a(x) = a$ **avec** a **réel.**
La solution générale de l'équation homogène est $x \mapsto ke^{-ax}$ avec k réel.

1. Si le second membre est une fonction polynômiale P de degré n

   On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto Q(x)$ où Q est une fonction polynomiale de degré n.

2. Si le second membre est de la forme αe^{rx} $(\alpha, r \in \mathbb{R})$, on cherche une solution particulière :

   - si $r \neq -a$, sous la forme : $x \mapsto Be^{rx}$ où B est une constante à déterminer
   - si $r = -a$, sous la forme : $x \mapsto Bxe^{rx}$ où B est une constante à déterminer

3. Si le second membre est de la forme $P(x)e^{rx}$ ($r \in \mathbb{R}$ et P fonction polynomiale), on cherche une solution particulière :

   - si $r \neq -a$, sous la forme : $x \mapsto Q(x)e^{rx}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P
   - si $r = -a$, sous la forme : $x \mapsto xQ(x)e^{rx}$ où Q est une fonction polynomiale de même degré que P

Exemple 9 Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes après avoir donné sur quel intervalle la solution est définie :

1. $y'(x) + 4y(x) = \frac{4}{3}$
2. $y'(x) + y(x) = e^{3x}$
3. $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}$
4. $y' + 2y = 2x + e^{x}$, $y(0) = -1$
5. $y' - xy = x$, $y(0) = 2$

Exemple 10 Reprenons l'exercice sur les circuits, vu dans l'exemple 1.

Exemple 11 Déterminer la solution générale de : $y' + 3y = x\cos x \quad (E)$

- Défini sur $\mathbb{R}$
- Cas particulier où $a(x) = 3$ (coefficient constant)
- **Equation homogène** : $y'(x) + 3y(x) = 0$ (E_H)
  solution de la forme $\phi_H : x \mapsto ke^{-3x}$, $k \in \mathbb{R}$
- **Solution particulière** :
  On remarque que :
  $$x\cos x = \mathcal{R}e(xe^{ix})$$
  On va se placer provisoirement dans $\mathbb{C}$ et chercher d'abord une solution particulière de :
  $$y' + 3y = xe^{ix} \quad (E')$$
  Elle sera du type $\phi_{part} : x \mapsto (ax + b)e^{ix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.
  $$\begin{aligned} \phi_{part} \text{ solution de } (E') &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, ae^{ix} + (ax+b)ie^{ix} + 3(ax+b)e^{ix} = xe^{ix} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (a(i+3)x + a + b(i+3))e^{ix} = xe^{ix} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a(i+3)x + a + b(i+3) = x \end{aligned}$$
  $$\begin{cases} a(i+3) = 1 \\ a + b(i+3) = 0 \end{cases}$$
  $$\begin{cases} a = (3-i)/10 \\ b = (-4+3i)/50 \end{cases}$$
  D'où solution particulière de (E') : $\phi_{part} x \mapsto (\frac{3-i}{10}x + \frac{-4+3i}{50})e^{ix}$.
  La partie réelle est la fonction : $x \mapsto (\frac{3}{10}x - \frac{2}{25})\cos x + (\frac{1}{10}x - \frac{3}{50})\sin x$
- Conclusion : Solution générale de (E) :
  $$y = ke^{-3x} + (\frac{3}{10}x - \frac{2}{25})\cos x + (\frac{1}{10}x - \frac{3}{50})\sin x, \quad k \in \mathbb{R}$$

2.7 *Etude détaillée d'un exemple :*

Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle du premier ordre :

$$xy'(x) + (3x+1)y(x) = e^{-3x} \quad (E)$$

- Mise sous forme normalisée (E_N)

- Résolution de l'équation homogène :

- Recherche d'une solution particulière :

- Solution générale de (E_N) :

- Etude des solutions de (E) :

2.8 Théorème de Cauchy

Théorème 5 Théorème de Cauchy
Soit I un intervalle et a, b deux fonctions continues sur I.
Quels que soient $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il **existe une unique** solution sur I au problème de Cauchy constitué de l'équation différentielle :

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \quad (E)$$

et de la condition initiale $y(t_0) = \alpha$.

3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Définition

Définition 4 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.
On appelle **équation differentielle linéaire du second ordre à coefficients constants** une équation de la forme :

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \qquad (E)$$

On dit que la fonction ϕ est solution de (E) sur l'intervalle I si :
ϕ est deux fois dérivable sur I et $\forall x \in I, \phi''(x) + a\phi'(x) + b\phi(x) = f(x)$.

Exemple 12 $y'' + y' - 2y = x^2$, (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$.

3.2 Principe de résolution

Soit (E) : $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants définie sur I.

Définition 5 L'équation :

$$(E_H) : \quad y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$

est appelée équation homogène associée à (E).

Certains résultats du paragraphe précédent restent valables et se démontrent de manière analogue :

- L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_H$ de l'équation différentielle homogène associée (E_H) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
- $\boxed{\text{Solution générale de } (E) = \text{Solution générale de } (E_H) + \text{une solution particulière de } (E)}$
- Le principe de superposition reste valable.

Protocole de résolution :

- on présente le type de l'équation différentielle
- on résout l'équation homogène associée de solution ϕ_H
- on détermine une solution particulière : ϕ_{part}
- on exprime la solution générale $\phi = \phi_H + \phi_{part}$
- on vérifie les conditions initiales.

3.3 *Résolution de l'équation homogène associée* $(E_H) : y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

Remarque : cherchons les fonctions exponentielles $\phi : x \mapsto e^{rx}$ solutions de (E_H) avec $r \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\phi \text{ solution de } (E_H) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad (r^2 + ar + b)e^{rx} = 0\\ &\Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0 \quad (EC)\end{aligned}$$

Définition 6 L'équation :

$$r^2 + ar + b = 0 \quad (EC)$$

est appelée équation caractéristique associée à (E_H).

3.3.1 *Cas complexe*

Le théorème suivant donne l'ensemble des solutions de (E_H).

Théorème 6 Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $(E_H) : y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède deux racines distinctes α et β alors les solutions de (E_H) sont de la forme :
$$y : x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$
- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède une racine double α alors les solutions de (E_H) sont de la forme :
$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\alpha x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

Preuve de théorème 6 :
Notons α, β les deux racines de l'équation $r^2 + ar + b = 0$.
Donc

$$(r - \alpha)(r - \beta) = r^2 + r(-\alpha - \beta) + \alpha\beta = r^2 + ar + b$$

$$a = -\alpha - \beta \text{ et } b = \alpha\beta$$

Soient $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction deux fois dérivable et $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$z : x \mapsto y(x)e^{-\alpha x}$$

z est deux fois dérivable et pour touut x on a :

$$z'(x) = y'(x)e^{-\alpha x} - \alpha y(x)e^{-\alpha x} = (y'(x) - \alpha y(x))e^{-\alpha x}$$

$$\begin{aligned} z''(x) &= (y''(x) - \alpha y'(x))e^{-\alpha x} - \alpha(y'(x) - \alpha y(x))e^{-\alpha x} \\ &= (y''(x) - 2\alpha y'(x) + \alpha^2 y(x))e^{-\alpha x} \\ (z''(x) + (\alpha - \beta)z'(x))e^{\alpha x} &= (y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y) + (\alpha - \beta)(y' - \alpha y) \\ &= y''(x) + ay'(x) + by(x) \end{aligned}$$

car $-a = \alpha + \beta$ et $\alpha\beta = b$
Ainsi y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$z'' + (\alpha - \beta)z' = 0 \quad (E')$$

- Cas $\alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned} z \text{ solution de l'équation } (E') &\Leftrightarrow z'(x) = ke^{(\beta-\alpha)x} \\ &\Leftrightarrow z(x) = \frac{k}{\beta - \alpha}e^{(\beta-\alpha)x} + \lambda, \quad k, \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Par suite, on obtient que y est donnée par :

$$y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$$

avec λ et $\mu = \frac{k}{\beta-\alpha} \in \mathbb{C}$

- Cas $\alpha = \beta$

$(E') \quad z'' + (\alpha - \beta)z' = 0 \Leftrightarrow z'' = 0$

$$z \text{ solution de l'équation } (E') \Leftrightarrow z(x) = \lambda x + \mu$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

On obtient alors y de la forme :

$$y : x \mapsto z(x)e^{\alpha x} = (\lambda x + \mu)e^{\alpha x}$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Exemple 13 Résoudre l'équation différentielle $y'' + (1+2i)y' + (i-1)y = 0$

Exemple 14 Mouvement à accélération centrale.
Dans le plan muni d'une repère orthonormé $(0, i, j)$ on considère un point matériel de masse m soumis à une force $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k > 0$ et $m > 0$.
D'après le principe fondamental de la dynamique :

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$$

En notant par $z(t)$ l'affixe de M à l'instant t on a :

$$mz''(t) = -kz(t)$$

c'est à dire :

$$z''(t) + \frac{k}{m}z(t) = 0 \quad (E_H)$$

3.3.2 Cas réel

Théorème 7 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $(E_H) : y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède deux racines réelles distinctes α et β alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_H) sont de la forme :

$$y : x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède une racine double α alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_H) sont de la forme :

$$y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\alpha x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega$ (avec $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$) alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_H) sont de la forme :

$$y : x \mapsto (\lambda \cos \omega x + \mu \sin \omega x)e^{\alpha x} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Preuve :

Les deux premiers cas se traitent comme dans le cadre complexe.

Traitons le cas où l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ possède deux racines complexes conjugués $\alpha \pm i\omega$.
Les fonctions complexes solutions de (E_H) sont les fonctions de la forme, pour tout x :

$$\begin{aligned} y(x) &= \lambda e^{(\alpha + i\omega\lambda)x} + \mu e^{(\alpha - i\omega)x} \\ &= ((\lambda + \mu)\cos(\omega x) + i(\lambda - \mu)\sin(\omega x))e^{\alpha x}, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Parmi celles-ci, les fonctions réelles vérifient :
$y(0) \in \mathbb{R}$ et $y(\pi/(2\omega)) \in \mathbb{R}$ ce qui donne :

$$y(0) = \lambda + \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda - \mu \in i\mathbb{R}$$

Par suite :

$$Im(\lambda) + Im(\mu) = 0 \text{ et } Re(\lambda) = Re(\mu)$$

Posons alors $\nu = \lambda + \mu \in \mathbb{R}$ et $\delta = i(\lambda - \mu) \in \mathbb{R}$.
La fonction y est alors de la forme, pour tout x :

$$y(x) = (\nu \cos(\omega x) + \delta \sin(\omega x))e^{\alpha x} \quad \nu, \delta \in \mathbb{R}$$

Inversement :
une telle fonction est solution de l'équation (E_H) car on peut transformer son écriture en celle d'une solution complexe de (E_H).

Exemple 15 Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = 0$

Exemple 16 Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$

Exemple 17 Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

4 Solution particulière de l'équation avec second membre

Selon l'expression du second membre, on peut envisager les solutions particulières suivantes :

Proposition 2 Soient $a, b, \alpha, r \in \mathbb{C}$ et on considére l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

- Si le second membre est de la forme d'une **fonction polynômiale** de degé n : on cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction polynômiale de degré n.
- Si $f(x) = \alpha e^{rx}$
  - si r **n'est pas une racine** du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
  $$x \mapsto Be^{rx}, \quad B \in \mathbb{C}$$
  - si r est **une racine simple** du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
  $$x \mapsto Bxe^{rx}, \quad B \in \mathbb{C}$$

  - si r est **une racine double** du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
$$x \mapsto Bx^2e^{rx}, \quad B \in \mathbb{C}$$

- si $f(x) = e^{rx}(\lambda \cos(\theta x) + \mu \sin(\theta x))$ avec $\theta \in \mathbb{R}^*$
  - si $r + i\theta$ et $r - i\theta$ **ne sont pas racines** du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
$$x \mapsto e^{rx}(\alpha \cos(\theta x) + \beta \sin(\theta x))$$
  - si $r + i\theta$ et $r - i\theta$ **sont racines** du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
$$x \mapsto xe^{rx}(\alpha \cos(\theta x) + \beta \sin(\theta x))$$
- si $f(x) = e^{rx}P(x)$ avec P polyôme de degré n
  - si r **n'est pas racine** du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
$$x \mapsto e^{rx}Q(x)$$
avec Q polynôme de degré n
  - si r **est racine simple** du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
$$x \mapsto e^{rx}xQ(x)$$
avec Q polynôme de degré n
  - si r **est racine double** du polynôme caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme :
$$x \mapsto e^{rx}x^2Q(x)$$
avec Q polynôme de degré n

Exemple 18 Déterminer les solutions réelles de :

- $y'' + 3y' + 2y = 2\text{ch } x \quad (E)$
- $y'' + 2y' + 2y = \cos x + \sin x \quad (E)$
- $y'' + y' + y = e^x \cos x \quad (E)$

Exemple 19 Oscillateur linéaire libre

Etudier $y'' + 2my' + w_0^2 y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $m \geqslant 0$ et $w_0 > 0$
(m est un paramètre d'amortissement et w_0 un paramètre de pulsation propre)
Par exemple : la décharge d'un condensateur dans un circuit RLC série conduit à une équation ce ce type.

- Cas $m = 0$ amortissement nul
  $(E) \quad y'' + w_0^2 y = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $w_0 > 0$
  Déjà étudiée dans l'exemple 17.
  Solution générale de (E) : $y(x) = \lambda \cos(w_0 x) + \mu \sin(w_0 x) = A \cos(w_0 x - \varphi)$
  On obtient un mouvement périodique d'amplitude A et de période propre $T_0 = 2\pi/w_0$
- Cas $m > 0$ et $\Delta < 0$ amortissement faible
  Si $m < w_0$ alors $\Delta = 4(m^2 - w_0^2) < 0$. On note $w = \sqrt{w_0^2 - m^2}$, et donc $\Delta = (2iw)^2$
  L'équation caractéristique a pour racines $-m \pm iw$.
  La solution générale de (E) est $y(x) = (\lambda \cos(wx) + \mu \sin(wx))e^{-mx} = A \cos(wx + \varphi)e^{-mx}$
  On parle d'un mouvement pseudo-périodique de pseudo-période $T = 2\pi/w$.

- Cas $m > 0$ et $\Delta = 0$ amortissement critique
  Si $m = w_0$ alors $\Delta = 0$. L'équation caractéristique a pour racine double $-m$.
  La solution générale de (E) est $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-mx}$.
  On parle de mouvement apériodique critique.
- Cas $m > 0$ et $\Delta > 0$ amortissement fort
  Si $m > w_0$ alors $\Delta = 4(m^2 - w_0^2) > 0$. On note $w = \sqrt{m^2 - w_0^2}$, et donc $\Delta = (2w)^2$
  L'équation caractéristique a pour racines $-m \pm w$.
  La solution générale de (E) est $y(x) = (\lambda e^{wx} + \mu e^{-wx})e^{-mx}$
  On parle de mouvement apériodique

5 Suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre

Nous allons revoir une notion déjà vue dans le chapitre sur les suites.

5.1 Suite arithmético-géométrique

Une suite u est dite arithmético- géométrique si elle vérifie une relation de récurrence affine du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b, \quad a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}$$

Remarquons que :

- si $a = 1$ on retombe dans le cas arithmétique
- si $b = 0$ on retombe dans le cas d'une suite géométrique

Théorème 8 Soit u une suite arithmético- géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b, \quad a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$$

- Si $a = 1$: u est arithmétique
- Si $a \neq 1$: l'équation $ax + b = x$ possède une seule solution $l \in \mathbb{C}$. La suite u est alors de la forme : $(l + \lambda a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$

Exemple 20 Donner l'expression générale de u_n pour la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2u_n + 1$

5.2 Suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre

Ce sont les suites vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}^*$.
Nous avions démontré le théorème suivant dans le chapitre des suites dans le cas réel :

Théorème 9 Soit S l'ensemble de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

avec $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*$.
Soit $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée. Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et toute suite de S a un terme général de la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine réelle double r_0 et toute suite de S a un terme général de la forme $u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ et toute suite de S a un terme général de la forme $u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

Dans le cas complexe, on démontrerait de manière analogue :

Théorème 10 Soit S l'ensemble de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}^*$.
Soit $ar^2 + br + c = 0$ l'équation caractéristique associée. Soit Δ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 et toute suite de S a un terme général de la forme $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double r_0 et toute suite de S a un terme général de la forme $u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}$.

Exemple 21 Exprimer le terme général des suites réelles u définies par :

- $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
- $u_0 = 0$ $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$
- La suite de Fibonacci $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$