1 Fonctions 2π-périodiques

1.1 Définition

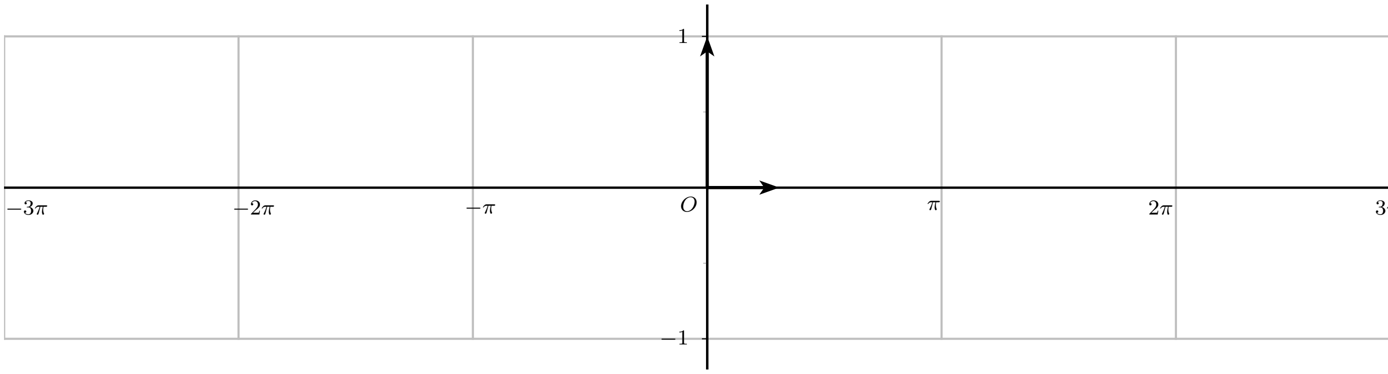
DÉFINITION 1
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
La fonction f est 2π-périodique **si et seulement si**, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t + 2\pi) = f(t)$.

Remarques

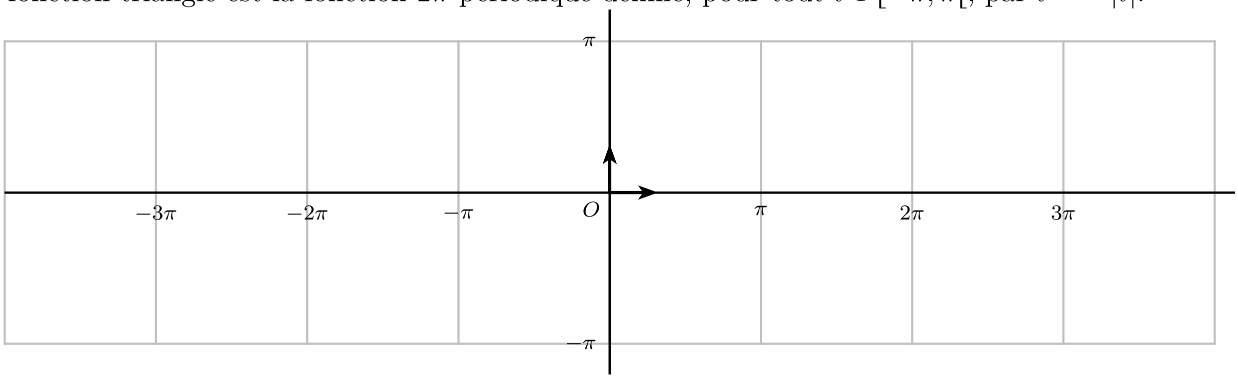
- **Si** g est une fonction définie sur un intervalle du type $[a, a + 2\pi[$ **alors** il existe une unique fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f_{|[a,a+2\pi[} = g$.
- **Si** g est une fonction définie sur un intervalle du type $[a, a + 2\pi]$ telle que $g(a) = g(a + 2\pi)$ **alors** il existe une unique fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f_{|[a,a+2\pi[} = g$.

Exemples

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Les applications $t \longmapsto e^{int}$, $t \longmapsto \cos(nt)$ et $t \longmapsto \sin(nt)$ sont 2π-périodiques.
- La fonction créneau est la fonction 2π-périodique définie par : $t \longmapsto f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in]0, \pi[\\ -1 & \text{si} \quad t \in]\pi, 2\pi[\\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \text{ ou } t = \pi \end{cases}$.



- La fonction triangle est la fonction 2π-périodique définie, pour tout $t \in [-\pi, \pi[$, par $t \longmapsto |t|$.



1.2 Continuité, continuité par morceaux

DÉFINITION 2

- Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{C})$.
  f est continue par morceaux sur $[a, b]$ **si et seulement si** il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f est continue sur $]a_{i-1}, a_i[$ et f admet une limite finie à droite en a_{i-1} et à gauche en a_i.
- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
  f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** f est continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Remarques

- Une fonction 2π-périodique est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** elle l'est sur un intervalle du type $[a, a+2\pi]$.
- Une fonction 2π-périodique est continue sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** elle l'est sur un intervalle du type $[a, a+2\pi]$.

DÉFINITION 3
On dit qu'une fonction 2π-périodique continue par morceaux f vérifie la condition de Dirichlet **si et seulement si**, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right).$$

Remarques

- **Si** f est continue par morceaux **alors** f vérifie la condition de Dirichlet en tout point de continuité.
- En particulier, **si** f est continue **alors** f vérifie la condition de Dirichlet.

DÉFINITION 4

- On note $\mathcal{CM}_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions continues par morceaux 2π-périodiques.
- On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions continues 2π-périodiques.
- On note $\mathcal{D}_{2\pi}$ la sous-algèbre de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques vérifiant la condition de Dirichlet.

Remarque

$\mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{D}_{2\pi} \subset \mathcal{CM}_{2\pi}$

DÉFINITION 5
Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux.
On définit $\widetilde{f}$ la **régularisée** de f par :

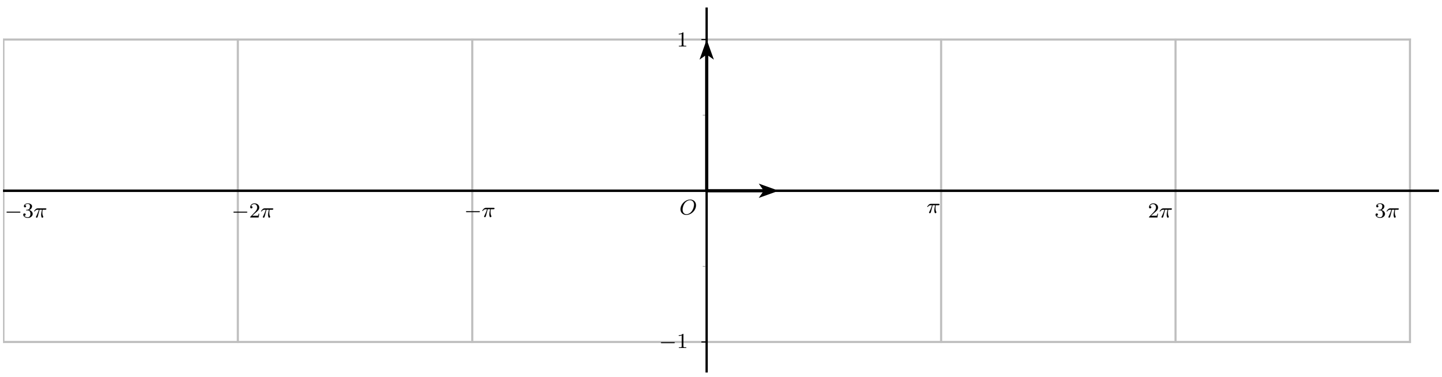
$$\forall t \in \mathbb{R},\ \widetilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right).$$

Remarques

- f et $\widetilde{f}$ coïncident en tout point de continuité de f.
- **Si** f est continue **alors** $f = \widetilde{f}$.
- $\mathcal{D}_{2\pi} = \{f \in \mathcal{CM}_{2\pi} \mid f = \widetilde{f}\}$

Exemples

- La fonction créneau est égale à sa régularisée.
- Déterminer la régularisée de la fonction f, 2π-périodique, définie par : $t \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [0, \pi[\\ -1 \text{ si } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$.



1.3 Dérivabilité, fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 6

- Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{C})$.
  f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ **si et seulement si** il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_{i-1}, a_i]$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
  f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** f l'est sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Remarque
Une fonction 2π-périodique est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si** elle l'est sur un segment du type $[a, a + 2\pi]$.

Définition 7
Soient f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $[a, a + 2\pi]$ un intervalle.
La fonction f est alors dérivable sur $[a, a + 2\pi]$ sauf en un nombre fini de points.
On appelle **pseudo-dérivée** de f, la fonction, noté $D(f)$ définie par

$$D(f)(t) = f'(t) \text{ si } f \text{ est dérivable en } t \text{ et } D(f)(t) = 0 \text{ sinon.}$$

Exemple
Déterminer la pseudo dérivée de la fonction triangle.

1.4 Intégration

Proposition 1
Pour toute fonction f, 2π-périodique continue par morceaux, on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+2\pi} f = \int_0^{2\pi} f.$$

Cette valeur s'appelle l'intégrale de f sur une période et se note $\displaystyle\int_{2\pi} f$.

Remarques

- **Si** $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ est paire **alors** $\displaystyle\int_{2\pi} f = 2\int_0^{\pi} f$.
- **Si** $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ est impaire **alors** $\displaystyle\int_{2\pi} f = 0$.

1.5 L'espace vectoriel $\mathcal{D}_{2\pi}$

Formes sesquilinéaires hermitiennes définies positives

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .
La notion de produit scalaire d'un espace vectoriel réel ne peut s'étendre sans modifications au cas complexe.
Une forme bilinéaire symétrique φ non nulle de E ne peut être réelle positive. En effet, pour $x \in E$ tel que $\varphi(x, x) \neq 0$, on aurait $\varphi(x, x) > 0$ et $\varphi(ix, ix) = -\varphi(x, x) < 0$.

DÉFINITION 8
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .
On appelle **forme sesquilinéaire** sur E toute application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

- pour tout $a \in E$, l'application $y \longmapsto \varphi(a, y)$ est linéaire c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \varphi(a, \alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(a, x) + \beta\varphi(a, y)$$

- pour tout $b \in E$, l'application $x \longmapsto \varphi(x, b)$ est semi-linéaire c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ \varphi(\alpha x + \beta y, b) = \overline{\alpha}\varphi(x, b) + \overline{\beta}\varphi(y, b)$$

DÉFINITION 9
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel .
On appelle produit scalaire (ou **produit scalaire hermitien**) sur E une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, c'est-à-dire, une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$:

1. **sesquilinéaire**
2. **hermitienne :**
$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$$
3. **définie** : $\forall x \in E,\ (\varphi(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E)$
4. **positive** : $\forall x \in E,\ \varphi(x, x) \geqslant 0$

Remarques

- **Si** une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ est hermitienne et linéaire par rapport à la deuxième place **alors** elle est sesquilinéaire.
- On notera souvent le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.
- Un espace préhilbertien complexe est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- Soient $x, y \in E$. Les vecteurs x et y sont orthogonaux **si et seulement si** $(x|y) = 0$
- L'inégalité de Cauchy-Schwarz reste valable dans le cas d'un produit scalaire hermitien.
- L'application $\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{(x|x)} \end{array}$ est bien définie et est une norme.

L'espace préhilbertien complexe $\mathcal{D}_{2\pi}$

PROPOSITION 2
L'application $(.|.)$ définie, pour tous $f, g \in \mathcal{D}_{2\pi}$, par : $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} \overline{f}g$,
est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{D}_{2\pi}$.

La norme associée, notée $\|\cdot\|_2$, est définie, pour tout $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$, par : $\|f\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\displaystyle\int_{2\pi} |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Preuve de la proposition 2

- φ est hermitienne en effet :

$$\begin{aligned}\forall f,g \in \mathcal{D}_{2\pi},\quad \varphi(f\,,g) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\overline{f}g\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} g\,\overline{f}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\overline{\overline{g}}\,\overline{f}\\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\overline{g}f}\\ &= \overline{\varphi(g,f)}\end{aligned}$$

- φ est sesquilinéaire en effet :

$$\begin{aligned}\forall f,g,h \in \mathcal{D}_{2\pi},\ \forall \alpha,\beta\in\mathbb{C},\ \varphi(f,\alpha g+\beta h) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\overline{f}\,(\alpha g+\beta h)\\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{2\pi}\overline{f}\,g + \frac{\beta}{2\pi}\int_{2\pi}\overline{f}\,h\\ &= \alpha\varphi(f,g)+\beta\varphi(f,h)\end{aligned}$$

φ est donc linéaire par rapport à la seconde place, de plus elle est hermitienne.
Finalement φ est sesquilinéaire.

- φ est positive en effet :

$$\forall f\in\mathcal{D}_{2\pi},\ \varphi(f,f) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\overline{f}\,f = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f\,|^2 \geqslant 0$$

(car $|f\,|^2$ est une application positive et $0\leqslant 2\pi$)

- φ est définie en effet :
  - ⋆ Soit $f\in\mathcal{D}_{2\pi}$ telle que $\varphi(f,f)=0$.

    On a alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|f\,|^2 = 0$
    $|f\,|^2$ est une application positive, continue par morceaux et d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$.
    Cette application est donc nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points sur $[0,2\pi]$.
    Soit $0=a_0<a_1<\ldots<a_n=2\pi$ une subdivision adaptée à f.
    Soit $i\in[\![1,n]\!]$.
    - ⋄ $\forall t\in]a_{i-1},a_i[,\ f(t)=0$.
    - ⋄ $f(a_i)=\dfrac{1}{2}(f(a_i^+)+f(a_i^-))=0$

    On en déduit que f est nulle sur $]0,2\pi]$.
    Par périodicité on obtient : $f=\widetilde{0}$

Remarques

- Cette application est aussi un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{C}_{2\pi}$, par contre ne l'est pas sur $\mathcal{CM}_{2\pi}$.
- On peut définir d'autres normes sur $\mathcal{D}_{2\pi}$, par exemple :

$$\forall f\in\mathcal{D}_{2\pi},\ \|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|f| \quad\text{et}\quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,2\pi]}(|f(t)|)$$

Les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes, cependant on a la relation suivante :

$$\forall f\in\mathcal{D}_{2\pi},\quad \|f\|_1\leqslant\|f\|_2\leqslant\|f\|_\infty$$

Proposition 3

- $\left(t \mapsto e^{int}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{C}_{2\pi}$ (donc de $\mathcal{D}_{2\pi}$).
- $(t \mapsto 1, t \mapsto \cos(nt), t \mapsto \sin(nt))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale de $\mathcal{C}_{2\pi}$ (donc de $\mathcal{D}_{2\pi}$).

Preuve :

Posons :

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $e_n \, : \, t \mapsto e^{int}$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n : t \mapsto \cos(nt)$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n : t \mapsto \sin(nt)$

On remarque que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$\int_{2\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots$$

$$\int_{2\pi} \cos(kt)\mathrm{d}t = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_{2\pi} \sin(kt)\mathrm{d}t = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots$$

Montrons que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée

- Soit $n \in \mathbb{Z}$.

$$(e_n|e_n) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots$$

- Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}(e_n|e_m) &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \cdots\end{aligned}$$

Finalement, pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, $(e_n|e_m) = \cdots\cdots$.

La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc orthonormée.

Montrons que $(\gamma_0, \gamma_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale

- Soient $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}(\gamma_n|\gamma_m) &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \cdots\end{aligned}$$

- Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}(\sigma_n|\sigma_m) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\end{aligned}$$

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(\gamma_n|\sigma_m) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\end{aligned}$$

On en déduit que les vecteurs de la famille $(\gamma_0, \gamma_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont orthogonaux deux à deux. Cette famille est donc orthogonale, de plus c'est une famille de vecteurs non nuls, donc elle est libre.

Montrons que la famille $(\gamma_0, \gamma_n, \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas orthonormée

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(\gamma_n|\gamma_n) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\end{aligned}$$

- $(\gamma_0|\gamma_0) = 1$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}(\sigma_n|\sigma_n) &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\end{aligned}$$

□

Dans la suite, on note :

- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n \,:\, t \mapsto e^{int}$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n : t \mapsto \cos(nt)$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_n : t \mapsto \sin(nt)$.

On a $(\gamma_0|\gamma_0) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(\gamma_n|\gamma_n) = \dfrac{1}{2}$ et $(\sigma_n|\sigma_n) = \dfrac{1}{2}$.

1.6 Polynômes trigonométriques

DÉFINITION 10

- On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(e_k)_{-n \leqslant k \leqslant n}$.
  $\mathcal{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$ (donc de $\mathcal{D}_{2\pi}$) de dimension $2n+1$.
  C'est le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathcal{P} = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}_n$ est le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques.

Remarque
Pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

PROPOSITION 4
Tout polynôme trigonométrique P de degré inférieur ou égal à n s'écrit de façon unique

- sous forme exponentielle : $P = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$, avec $c_{-n}, \ldots, c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.
  De plus, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, $c_k = (e_k|P) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} P(t)e^{-ikt}\mathrm{d}t$.
- sous forme trigonométrique : $P = \dfrac{a_0}{2}\gamma_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\gamma_k + b_k\sigma_k)$ avec $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$.
  De plus $a_0 = 2(\gamma_0|P) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{2\pi} P(t)\mathrm{d}t$ et,
  pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = 2(\gamma_k|P) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{2\pi} P(t)\cos(kt)\mathrm{d}t$ et $b_k = 2(\sigma_k|P) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{2\pi} P(t)\sin(kt)\mathrm{d}t$

Les coefficients a_k, b_k et c_k vérifient les relations suivantes :

- $c_0 = \frac{a_0}{2}$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$
- $a_0 = 2c_0$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_k = c_k + c_{-k}$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k = i(c_k - c_{-k})$

2 Coefficients de Fourier

2.1 Définition

DÉFINITION 11
Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.

- Les **coefficients de Fourier trigonométriques de f** sont :
  - ⋆ $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t$
  - ⋆ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{2\pi} f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$
- La **série de Fourier trigonométrique de** f est :
  $$\frac{a_0(f)}{2}\gamma_0 + \sum_{n \geqslant 1}(a_n(f)\gamma_n + b_n(f)\sigma_n)$$
  Cette série est notée (de façon abusive) :
  $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geqslant 1}(a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$$
- Les **coefficients de Fourier exponentiels de f** sont :
  - ⋆ $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$
- La **série de Fourier exponentielle de f** est :
  $$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)e_n$$
  Cette série est notée (de façon abusive) :
  $$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

Remarques

- Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. **Alors** f et sa régularisée $\widetilde{f}$ ont les mêmes coefficients de Fourier.
- **Si** $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ est paire **alors** on pensera à utiliser la parité de $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ pour calculer a_n et l'imparité de $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ pour en déduire $b_n = 0$.
- **Si** $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ est impaire **alors** on pensera à utiliser l'imparité de $t \mapsto f(t)\cos(nt)$ pour en déduire $a_n = 0$ et la parité de $t \mapsto f(t)\sin(nt)$ pour calculer b_n.

Exemples

- Déterminer la série de Fourier trigonométrique de la fonction créneau.
- Déterminer la série de Fourier trigonométrique de la fonction triangle.

Définition 12
Soient $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $p \in \mathbb{N}$.
On note $S_p(f)$ la p-ième somme partielle de la série de Fourier de f :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ S_p(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)) = \sum_{n=-p}^{p} c_n e^{int}$$

Remarque
Si $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ **alors** $S_p(f)$ est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques de degré au plus p.
En particulier, pour f fixée, l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ P & \longmapsto & \|f-P\|_2 \end{array}$ atteint son minimum en un unique vecteur de $\mathcal{P}_p$: $S_p(f)$.
On dit que $S_p(f)$ est la meilleure approximation quadratique de f par un élément de $\mathcal{P}_p$.

2.2 Propriétés

Proposition 5
Soient $f, g \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

- $a_n(\lambda f + \mu g) = \lambda a_n(f) + \mu a_n(g)$
- $b_n(\lambda f + \mu g) = \lambda b_n(f) + \mu b_n(g)$
- $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$
- $a_n(\overline{f}) = \overline{a_n(f)}$
- $b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}$
- $c_n(\overline{f}) = \overline{c_n(f)}$

Proposition 6
Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_n(D(f)) = inc_n(f), \qquad a_n(D(f)) = nb_n(f), \qquad b_n(D(f)) = -na_n(f)$$

3 Convergence en moyenne quadratique

Proposition 7
Soient $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ et $S_n(f)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2$$

Conséquences

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |f|^2$ (Inégalité de Bessel)
- La série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right)$ est convergente.
- Les séries numériques $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |c_n(f)|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |c_{-n}(f)|^2$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n(f)|^2$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |b_n(f)|^2$ sont convergentes.
- On notera $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(|c_k(f)|^2 + |c_{-k}(f)|^2\right)$

Théorème 1 (Théorème de Parseval-admis)
Soient $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ et $S_n(f)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.

$$\|f - S_n(f)\|_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Corollaire 1 (Formules de Parseval)
Soit $f \in \mathcal{D}_{2\pi}$ (même dans $\mathcal{CM}_{2\pi}$).

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |f|^2$$

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |f|^2$$

4 Convergence ponctuelle

4.1 Fonctions développables en série de Fourier

Définition 13
Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et $S_n(f)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f.
On dit que la série de Fourier de f **converge** en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si la suite numérique $(S_n(f)(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
La limite est alors appelée somme de Fourier de f en t.
On note :

$$S(f)(t) = \lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$$

Définition 14
Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$.
On dit que f est **développable en série de Fourier** sur $\mathbb{R}$ si et seulement si sa série de Fourier converge sur $\mathbb{R}$ et que sa somme de Fourier $S(f)$ est égale à f. Dans ce cas, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt))$$

4.2 Séries trigonométriques

Proposition 8
Soit $f : t \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$.
Si les séries numériques $\sum c_n$ et $\sum c_{-n}$ sont absolument convergentes, **alors** f est définie, continue, 2π-périodique.
De plus f est développable en série de Fourier et on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_n$.

Proposition 9
Soit $f : t \longmapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$.
Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, **alors** f est définie, continue, 2π-périodique.
De plus f est développable en série de Fourier et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = a_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = b_n$.

4.3 Convergence normale

Théorème 2
Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ de classe $\mathcal{C}_1$ par morceaux.
La série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f.
On a donc :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

4.4 Théorème de Dirichlet

Théorème 3 (Théorème de Dirichlet-admis)
Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
La série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme $S(f)$ est égale à la régularisée de f.
On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$S(f)(t) = \widetilde{f}(t)$$
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$$

4.5 Applications

1. Calculer, en utilisant la fonction créneau, $A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. Calculer, en utilisant la fonction triangle, $B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

5 Généralisation à des fonctions T-périodiques

Soient T un réel strictement positif et f une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, T-périodique.
On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

f est entièrement déterminée par sa restriction à tout segment du type $[a, a+T[$.
On se ramène à une fonction g, 2π-périodique, en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(\omega x) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

ω s'appelle la pulsation.

- Les **coefficients de Fourier trigonométriques de f** sont :
  - ⋆ $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)\cos(n\omega t)\mathrm{d}t$
  - ⋆ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_T f(t)\sin(n\omega t)\mathrm{d}t$
- La **série de Fourier trigonométrique de f** est :
  $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}\left(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\right)$$
- Les **coefficients de Fourier exponentiels de f** sont :
  - ⋆ $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T f(t)e^{-in\omega t}\mathrm{d}t$
- La **série de Fourier exponentielle de f** est :
  $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$$