УДК 658.562

В. В. Циганок
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України
вул. М. Шпака, 2, 03113 Київ, Україна

Комбінаторний алгоритм парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом

В статті запропоновано метод парних порівнянь зі зворотним зв'язком з експертом, який можна віднести до комбінаторного типу. Метод полягає в знаходженні ідеально узгодженої матриці парних порівнянь, до якої, погоджуючись з думкою експерта, можливо привести вхідну (неузгоджену) матрицю парних порівнянь. Запропонований метод прагне звести кількість звернень за думкою експерта до мінімуму.

Ключові слова: *парні порівняння, ідеально узгоджена матриця парних порівнянь, інформаційно-вагомі множини елементів матриці парних порівнянь.*

В процесі аналізу та визначення кількісних і якісних показників алгоритмів експертної оцінки інформації, зокрема алгоритмів зі зворотним зв'язком з експертом [1-3], були відмічені деякі недоліки цих алгоритмів. Одним з основних недоліків є значна кількість ітерацій алгоритмів і, як наслідок, – велика кількість запитань експертові у випадках, коли узгодженість вхідної матриці парних порівнянь (МПП) не висока, або/та у випадках, коли у вхідній матриці зустрічаються протиріччя в ранжуванні деяких альтернатив.

Цей недолік алгоритмів спонукав замислитись над створенням нового алгоритму, який би прагнув звести кількість запитань експертові до мінімуму.

Перед тим як розпочати опис запропонованого алгоритму, звернемо увагу на поняття *ідеально узгодженої матриці* парних порівнянь (ІУМПП), яке введено в [2]. Скористуємося цим означенням і сформулюємо деякі властивості ІУМПП.

Перед тим як сформулювати першу властивість будемо розмірковувати наступним чином: припустимо, що оцінки альтернатив $<A_1;\ A_2;\ \ldots\ A_n>$ апріорі відомі, тоді для того щоб МПП була ідеально узгодженою потрібно, щоб кожний елемент цієї матриці був однозначно визначеним через значення цих оцінок альтернатив.

Властивість 1. Матриця парних порівнянь M розмірністю (n x n) є ідеально узгодженою тоді, і тільки тоді, якщо знайдеться такий кортеж <A_1; A_2; … A_n>, що для $\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ виконується рівність

$$m_{ij} = f(A_i; A_j), \qquad (1)$$

де m – елементи матриці M, f – функція, вид якої залежить від вибраних системи та шкали оцінки альтернатив, її вигляд впливає на формування МПП.

Наприклад, коли при формуванні МПП експертові задається питання «Як на вашу думку, у скільки разів значення A_i перевищує значення A_j ?» (мультиплікативні порівняння [2]), то рівність (1) має вигляд:

$$m_{ij} = A_i / A_j, \qquad (2)$$

а в випадку запитання «на скільки значення A_i перевищує значення A_j ?» (адитивні порівняння [2]) – (1) приймає вигляд:

$$m_{ij} = A_i - A_j. \qquad (3)$$

Інколи застосовуються й інші види функції f [3].

Із (1), шляхом простих перетворень, можна отримати залежність між елементами ІУМПП, яку відобразимо у властивості 2.

Властивість 2. Якщо матриця парних порівнянь M – ідеально узгоджена, то для $\forall i,j,k \in \{1,2,\dots,n\}$ виконується рівність

$$m_{ij} = f(m_{ik}; m_{jk}). \qquad (4)$$

Для мультиплікативних порівнянь ця рівність має вигляд:

$$m_{ij} = m_{ik} / m_{jk}, \qquad (5)$$

а для адитивних:

$$m_{ij} = m_{ik} - m_{jk}. \qquad (6)$$

Для прикладу, покажемо перетворення, які приводять до рівності (5). Із властивості 1 та виразу (2) випливає, що для $\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$: $A_i = m_{ik} \cdot A_k$ і $A_j = m_{jk} \cdot A_k$. Шляхом підстановки A_i та A_j в (2), отримаємо, що для $\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$ в ІУМПП виконується рівність $m_{ij} = m_{ik} / m_{jk}$. Аналогічними перетвореннями можливо також вивести і вираз (6).

Суть алгоритму

Оскільки в ІУМПП частина її елементів пов'язані між собою у відповідності до (4), то існує можливість знайти таку множину елементів ІУМПП мінімальної потужності, використовуючи яку, можна визначити решту елементів ІУМПП.

Зазначимо, що в будь-якій МПП елементи m_{ii} визначаються однозначно, виходячи з (5) $m_{ii} = 1$, або з (6) $m_{ii} = 0$. Фактично, вони не несуть інформації, тому що порівнювати альтернативу A_i саму з собою – не має сенсу.

Крім того, у значній кількості випадків, якщо є інформація про порівняння деякої альтернативи A_i з деякою альтернативою A_j в будь-якій МПП, то нема рації повторно порівнювати A_j з A_i , а припустити, що ці порівняння взаємно узгоджені. Тоді, для визначення симетричного відносно головної діагоналі елемента МПП можна скористатись співвідношенням для ІУМПП. Тобто, якщо елемент m_{ij} – відомий, то m_{ji} можна визначити з (5): $m_{ji} = 1 / m_{ij}$; або з (6): $m_{ji} = -m_{ij}$. Ці співвідношення співпадають зі співвідношеннями, отриманими в [3].

Із зазначеного вище випливає, що в МПП розміром (n x n) кількість інформаційно значимих елементів є $(n^2 - n) / 2$. Далі приділимо увагу знаходженню кількості інформаційно значимих елементів в ІУМПП.

Для наочності зобразимо шукану множину елементів ІУМПП у вигляді графа *Г*. Вершинам графа відповідають номери альтернатив, а ребра мають ваги, що відповідають елементам ІУМПП. Із попередніх міркувань випливає, що *Г* - неорієнтований граф і не має петель.

Отже потрібно знайти:

1) яким властивостям повинен відповідати *Г*, щоб була можливість знайти ваги ребер, яких немає в наявності в цьому графі, і
2) яка мінімальна кількість ребер є достатньою для знаходження всіх можливих ваг ребер в *Г*.

У графічній формі вираз (4) можна зобразити рисунком 1.

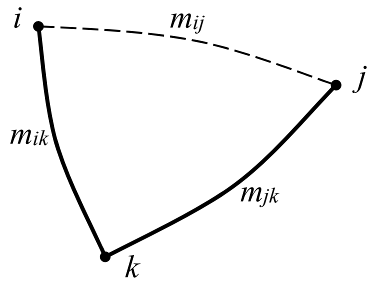


рис.1.

З рис.1 видно, що для знаходження невідомої ваги m_{ij} потрібно, щоб в графі були наявні дві дуги з їх вагами, що з'єднують вершини з деякою вершиною k. Іншими словами, між двома вершинами необхідно мати шлях довжиною 2.

Тепер перенесемо це міркування на граф *Г* і сформулюємо його властивість, що використовується у алгоритмі.

Для знаходження ваги відсутнього ребра в графі між деякими вершинами i та j необхідна наявність шляху будь-якої довжини між цими вершинами (якщо довжина шляху більше ніж 2, то шукана вага знаходиться за декілька кроків). Наприклад, на рис.2 зображено частину графа *Г*, де між вершинами i та j є шлях деякої довжини, то для знаходження m_{ij} можна спочатку знайти $m_{il} = f(m_{ik}; m_{lk})$, потім m_{ir}, … , m_{ip} і, нарешті, $m_{ij} = f(m_{ip}; m_{jp})$.

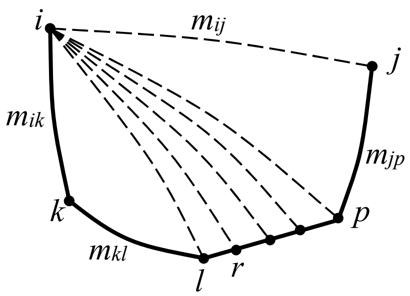


рис.2.

Отже, властивість графа *Г*, необхідна і достатня для знаходження ваг ребер, яких немає в наявності в цьому графі: між будь-якими двома вершинами графа існує шлях.

Оскільки *Г* має n вершин (по кількості альтернатив, що оцінюються), то мінімальна кількість ребер, яка може з'єднати n вершин є $(n - 1)$.

Отже, відповідь на друге питання: кількість ребер в *Г* рівна $(n - 1)$.

Таким чином, будуючи графи, які мають вищезгадані властивості, ми можемо знайти множини елементів ІУМПП мінімальної потужності, які несуть інформацію про всю ІУМПП в цілому, тобто використовуючи елементи, що входять в такі множини, можливо однозначно обчислити решту елементів ІУМПП.

Тепер, коли маємо множини «інформаційно-вагомих» елементів, будемо по черзі для кожної такої множини ставити у відповідність ІУМПП, в якій інформаційно-вагомі елементи запозичені з вхідної (реальної) МПП, а решта елементів обчислені.

Всі отримані таким чином ІУМПП зберігаємо в наборі даних для подальшого використання.

Слід зазначити, що цей набір даних формуємо, виключаючи повтори ІУМПП і упорядковуючи по кількості елементів в ІУМПП, що не співпадають з відповідними елементами реальної МПП.

На цьому підготовчий етап алгоритму закінчується. Наступний етап алгоритму пов'язаний з аналізом сформованого набору ІУМПП і з пошуком в ньому такої ІУМПП, в яку б перетворювалась реальна МПП шляхом зміни (збільшення або зменшення) частини її елементів, погоджуючи ці зміни з думкою експерта.

У випадку, коли при перегляді набору буде знайдено ІУМПП, яка відповідає поставленим вимогам, то ця матриця і стане результатом роботи алгоритму.

Тепер звернемо увагу на те, яким чином запропонований алгоритм прагне мінімізувати кількість запитань до експерта. Це відбувається за рахунок того, що в першу чергу в наборі даних розглядаються ІУМПП, в котрих кількість елементів, якими вони відрізняються від реальної МПП – мінімальна. Зазначимо, що кількість запитань експертові була б мінімально можливою тільки у випадку, якщо б експерт завжди погоджувався на пропозиції алгоритму про зміни деяких переваг значень альтернатив над іншими. Але, оскільки експерт на запит алгоритму про зміну переваги може давати також і негативні відповіді, а передбачити, в яких випадках це станеться та мінімізувати кількість цих випадків практично неможливо, то спроба досягти абсолютної мінімізації кількості питань до експерта не завжди буде вдалою.

Тепер, для більш докладного опису, покажемо роботу алгоритму на конкретному прикладі (див. додаток 1).

Опис алгоритму

Отже, нехай маємо реальну матрицю M_0, отриману при попарному порівнянні деяких чотирьох альтернатив ($n = 4$). Причому, при формуванні M_0 експертові задавались питання виду: «На скільки деяких умовних одиниць одна альтернатива переважає іншу?». Будемо брати до уваги, наприклад, тільки елементи матриці, розташовані праворуч від головної діагоналі, а решта елементів M_0 не несуть інформації і можуть бути обчислені на основі тих, що розглядаються.

Таким чином, на підготовчому етапі алгоритму розглядаємо множину елементів M_0, що знаходяться справа від головної діагоналі: $\{m_{ij} \mid i < j\}$. В нашому прикладі - це множина елементів $\{m_{12}; m_{13}; m_{14}; m_{23}; m_{24}; m_{34}\}$, з якої, перебираючи всі можливі варіанти, будемо формувати інформаційно-вагомі підмножини елементів, що ляжуть в основу формування ІУМПП. Кількість елементів в цих підмножинах рівна $(n - 1)$, тобто 3.

Зупинимося більш докладно на алгоритмі перевірки підмножини на предмет її інформаційної вагомості, тобто на алгоритмі перевірки графа, що відповідає цій підмножині, на предмет наявності шляху між будь-якими двома його вершинами.

Позначимо через x_{ab} – індекс елементу m з вищезгаданої підмножини, де $a \in \{1;2;\ldots;(n-1)\}$ – порядковий номер елементу у цій підмножині, а $b \in \{1;2\}$ – номер індексу в парі. Нехай S – множина індексів x; c, d – лічильники в циклах, тоді блок-схема алгоритму матиме вигляд, що показано в додатку 2.

Отже, із всіх можливих варіантів підмножин (до речі, їх кількість в загальному випадку дорівнює $C_{n(n-1)/2}^{(n-1)}$) за допомогою щойно показаного алгоритму відбираємо тільки інформаційно-вагомі підмножини. Далі, на основі цих підмножин, сформуємо ідеально узгоджені матриці. Їх формування полягає у обчисленні решти (в прикладі, що розглядається – трьох) невідомих елементів матриці (беремо до уваги елементи, що розміщені праворуч від головної діагоналі). Ці невідомі елементи обчислюються, виходячи із співвідношення (4), в нашому конкретному прикладі – із співвідношення (6).

В результаті цих обчислень отримаємо 16 ІУМПП, які зображені в табл.1 додатка 1.

Тепер виключимо повтори серед ІУМПП і упорядкуємо решту цих матриць за кількістю відмінностей з реальною матрицею. В нашому прикладі множини номерів матриць, що співпадають, такі: $\{1; 3; 4; 5; 7; 9; 12; 15\}$, $\{2; 6; 11\}$, $\{8\}$, $\{10; 13; 16\}$, $\{14\}$. В результаті отримаємо упорядковану послідовність з п'яти ІУМПП, яку зображено в табл.2 додатка 1. Зазначимо, щоб мати повну інформацію про кожну ІУМПП, достатньо зберігати тільки відмінності кожної ІУМПП від реальної МПП. Це може виглядати так, як показано в табл.3.1 додатка 1. Тут кожній ІУМПП ставиться у відповідність множина триелементних кортежів, кожен кортеж відповідає одному елементу матриці. Перший елемент кортежу – номер рядка, другий – номер стовпчика, а третій – значення елемента ІУМПП, що відрізняється від відповідного елемента реальної МПП.

Варто відмітити, що формування послідовності, її упорядкування відбуваються в процесі генерації матриць, тому всі 16 варіантів ІУМПП, що зображені в табл.1 додатка 1, ніколи одночасно не будуть присутні в пам'яті комп'ютера.

На цьому підготовчий етап алгоритму закінчується.

На наступному етапі реалізується зворотній зв'язок із експертом. Сформована на попередньому етапі послідовність ІУМПП аналізується, починаючи з першої матриці. У цьому випадку, кожний кортеж виду $<\alpha;\beta;\gamma>$ відповідає поставленому експертові запитанню типу: «Чи не погодились би Ви збільшити (зменшити) перевагу альтернативи α над альтернативою β?». «Збільшити» чи «зменшити» залежить від γ та значення елемента $m_{\alpha\beta}$ реальної матриці. Таким чином, позитивна відповідь експерта на таке запитання дає право в подальшому змінити елемент $m_{\alpha\beta}$ в визначену сторону (збільшення або зменшення), тим самим ця ж відповідь забороняє зміну цього ж елемента в іншу сторону. Негативна ж відповідь забороняє зміну $m_{\alpha\beta}$ в визначену запитанням сторону. Тому, після кожної відповіді експерта, будемо проводити аналіз решти кортежів, в яких першим елементом є саме α і другим саме β, на рахунок того, чи вони не суперечать думці експерта. Далі ми виключаємо з розгляду всю множину кортежів, що відповідають одній, і тій самій ІУМПП, якщо елемент γ кортежу, що аналізується, перебуває в «забороненому» діапазоні.

Очевидно, що порядок, за яким ставляться запитання експертові, має вплив на швидкість завершення алгоритму. Тому, можливо, потрібно ставити першими запитання, ймовірність позитивної відповіді на які – більша. Є припущення, що для більш швидкого завершення алгоритму в першу чергу потрібно ставити саме те запитання, де абсолютна різниця між γ і $m_{\alpha\beta}$ – мінімальна, тобто потрібно упорядкувати кортежі $<\alpha;\beta;\gamma>$ в кожній із множин по збільшенню значення $|\gamma-m_{\alpha\beta}|$. Це питання потребує подальшого комплексного вивчення.

Повернемося до конкретного прикладу. Розглянемо перший кортеж (табл.3.1 додатка 1) і, згідно з інформацією, яку він містить, сформулюємо запитання до експерта: «Чи не погодитесь Ви зменшити перевагу 2-ї альтернативи над 4-ю ?». При позитивній відповіді (експерт погоджується зменшити перевагу) змінюємо елемент m_{24} реальної матриці з 4 на 3. Таким чином, реальна матриця стає ідеально узгодженою, і алгоритм завершує роботу.

Для більш детального пояснення роботи алгоритму припустимо, що на попереднє запитання експерт дав негативну відповідь. У цьому випадку з упорядкованої послідовності (табл.3.1 додатка 1) видаляємо всі множини, до яких належать кортежі $< 2 ; 4 ; \gamma >$, де $\gamma < m_{24}$ $(\gamma < 4)$. Такою множиною виявляється тільки перша множина, яка і видаляється. Послідовність приймає вигляд, як показано в табл.3.2 додатка 1.

Формулюємо наступне запитання експертові: «Чи не погодитесь Ви збільшити (з алгебраїчної точки зору) перевагу 1-ї альтернативи над 4-ю ?» і отримуємо від експерта позитивну відповідь. Після цього видаляємо з послідовності множини (звичайно, якщо вони є), які містять в собі кортежі $< 1 ; 4 ; \gamma >$, де $\gamma < m_{14}$ $(\gamma < -2)$. Крім того – помічаємо всі кортежі $< 1 ; 4 ; \gamma >$, де $\gamma > m_{14}$ $(\gamma > -2)$, щоб в подальшому, якщо буде потрібно, вже без додаткової згоди експерта мати можливість збільшити перевагу 1-ї альтернативи над 4-ю (в таблиці ці помітки зроблено шляхом підкреслення). Формулюємо наступне запитання: «Чи не погодитесь Ви збільшити перевагу 3-ї альтернативи над 4-ю ?» і отримуємо, наприклад, негативну відповідь. Видаляємо всі множини, до яких належать кортежі $< 3 ; 4 ; \gamma >$, де $\gamma > 0$. Послідовність приймає вигляд, як показано в табл.3.3 додатка 1.

Припустимо, що на запитання «Чи не погодитесь Ви зменшити перевагу 1-ї альтернативи над 2-ю ?» отримуємо теж негативну відповідь. Тоді послідовність прийме вигляд, як в табл.3.4 додатка 1.

Далі експертові ставиться запитання «Чи не погодитесь Ви збільшити перевагу 1-ї альтернативи над 3-ю ?». Наприклад, відповідь – «так». Проводиться перевірка на видалення множин, що містять «недопустимі» кортежі, і пошук кортежів для помітки, але таких не знаходимо. Запитання про збільшення переваги 1-ї альтернативи над 4-ю не задаємо експертові (відповідь відома – «так»), а формулюємо запитання: «Чи не погодитесь Ви збільшити перевагу 2-ї альтернативи над 3-ю ?». Якщо відповідь експерта –«ні», то в цьому випадку експертові видається повідомлення, що протиріччя, які мають місце в реальній МПП, погоджуючись з його думкою, виправити не вдалося. В іншому випадку, коли на останнє запитання отримуємо позитивну відповідь експерта, то рішення по узгодженню реальної МПП знайдено. Це рішення полягає в зміні трьох елементів реальної МПП, а сама МПП при цьому стає ідеально узгодженою і приймає вигляд матриці №5 з табл.2 додатка 1.

На цьому представлений алгоритм завершує роботу.

Деякі особливості реалізації

Попередньо зазначимо, що представлений алгоритм є алгоритмом комбінаторного типу. Він потребує значних обчислювальних ресурсів, як швидкодії процесора, так і об'єму оперативної пам'яті комп'ютера. У зв'язку з можливістю використання реалізації алгоритму на комп'ютерах, які, наприклад, не мають достатнього об'єму доступної оперативної пам'яті, в алгоритмі, перед тим, як зберегти чергову множину кортежів (яка відповідає деякій ІУМПП), передбачено перевірку на наявність необхідного об'єму оперативної пам'яті. У випадку її недостатності проводиться видалення множини кортежів, яка на той момент має максимальну потужність (знаходиться останньою в упорядкованій послідовності), і вже після цієї дії чергова множина кортежів зберігається у пам'яті.

До особливостей реалізації алгоритму слід віднести можливість брати до розгляду не всі ІУМПП, а тільки ті, що відрізняються від реальної МПП попередньо визначеною кількістю елементів, наприклад, елементів, що відрізняються, не більше половини загальної кількості інформаційно-вагомих елементів в матриці. Іншими словами, зберігати і розглядати тільки ті множини, потужність яких не перевищує деякого значення. Ця особливість дає змогу значно скоротити необхідні для виконання алгоритму ресурси комп'ютера, хоча, як і попередня особливість реалізації, звичайно, впливає на точність та ймовірність отримання позитивного виходу алгоритму.

Переваги та недоліки алгоритму:

<u>переваги</u>

- при позитивному виході алгоритму результатом його роботи завжди є <u>ідеально</u> узгоджена матриця;
- алгоритм дозволяє прийти до ідеально узгодженої матриці, зводячи до мінімуму кількість запитань після кожної відповіді експерта;
- алгоритм дозволяє виправляти багатократні помилки та помилки зі значним відхиленням значення від узгодженого, а також помилки, пов'язані з невірним ранжуванням альтернатив;
- можливість пристосування до різних типів шкал;

<u>недоліки</u>

- алгоритм потребує значних обчислювальних ресурсів комп'ютера, а саме, важливими є продуктивність процесора та об'єм доступної оперативної пам'яті (значним по часу є підготовчий етап, при якому в оперативній пам'яті формуються дані для подальшого використання);
- завершення алгоритму з позитивним результатом відбувається тільки при досягненні стовідсоткової узгодженості;
- враховуючи потужність сучасних ПК, використовувати алгоритм має сенс при розмірах вхідної (реальної) матриці парних порівнянь не більше як 7x7*.

Перспективи вдосконалення

Автор вважає, що для більш швидкого досягнення мети алгоритму і подальшого скорочення кількості запитань експертові потрібно зробити механізм даного методу менш чутливим до незначних відхилень значень елементів реальної матриці від відповідних елементів ідеально узгодженої матриці. В цьому контексті постає питання: які відхилення можна вважати незначними? Напевне, необхідно

---

* Цей недолік відносний, тому що враховуючи ергономічні вимоги до роботи експертів та досить швидкий ріст кількості парних порівнянь при збільшенні кількості альтернатив, максимальний розмір матриці, що обробляється є 7x7. Якщо є необхідність оцінки більш ніж семи альтернатив, то альтернативи групуються, де кількість в групі не перевищує семи.

знайти таку величину відхилення, яка б при найнеуспішніших комбінаціях все ж залишала б узгодженість всієї матриці у допустимих межах.

Всі ці питання залишаються для подальшого вирішення в процесі вдосконалення алгоритму.

Реалізація такого виду алгоритмів на персональних комп'ютерах ще декілька років тому через велику трудомісткість обчислень була неможливою, але зараз алгоритми такого плану безперечно заслуговують на увагу.

1. *Тоценко В.Г., Цыганок В.В.* Метод парных сравнений с обратной связью с экспертом // Проблемы управления и информатики. – 1999. - № 3. – с. 111-125.

2. *Тоценко В.Г.* Генерация алгоритмов парных сравнений для моделирования предпочтений эксперта при поддержке принятия решений, часть 1. // Электронное моделирование. – 2000. - № 3.

3. *Тоценко В.Г.* Генерация алгоритмов парных сравнений для моделирования предпочтений эксперта при поддержке принятия решений, часть 2. // Электронное моделирование. – 2000. - № 4.

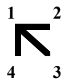
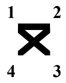
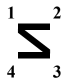
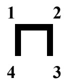
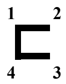
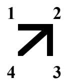
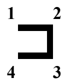
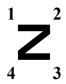
Надійшла до редакції 16.01.2000

Додаток 1.

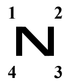
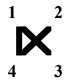
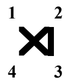
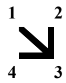
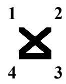
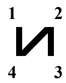
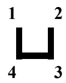
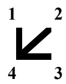
реальна матриця M_0

$$\begin{array}{rrrrl} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \\ 0 & -5 & -2 & -2 & \mathbf{1} \\ 5 & 0 & 3 & 4 & \mathbf{2} \\ 2 & -3 & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ 2 & -4 & 0 & 0 & \mathbf{4} \end{array}$$

Таблиця 1.

№ матриці	Ідеально узгоджені матриці	Вигляд графу Γ
1	$\begin{array}{rrrr} 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-5}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} \\ 5 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ 2 & -3 & 0 & \mathbf{0} \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}$	
2	$\begin{array}{rrrr} 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-5}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} & \mathbf{-1} \\ 5 & 0 & \mathbf{3} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} \\ 2 & -3 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}$	
3	$\begin{array}{rrrr} 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-5}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} & \mathbf{-2} \\ 5 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ 2 & -3 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{0}$} \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}$	
4	$\begin{array}{rrrr} 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-5}$} & \mathbf{-2} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} \\ 5 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} & \mathbf{3} \\ 2 & -3 & 0 & \mathbf{0} \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}$	
5	$\begin{array}{rrrr} 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-5}$} & \mathbf{-2} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} \\ 5 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{3} \\ 2 & -3 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{0}$} \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}$	
6	$\begin{array}{rrrr} 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-5}$} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ 5 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} \\ 2 & -3 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}$	
7	$\begin{array}{rrrr} 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-5}$} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ 5 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} & \mathbf{3} \\ 2 & -3 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{0}$} \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}$	
8	$\begin{array}{rrrr} 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-5}$} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ 5 & 0 & \mathbf{4} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} \\ 1 & -4 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{0}$} \\ 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}$	

Таблиця 1 (продовження)

№ матриці	Ідеально узгоджені матриці	Вигляд графу Γ
9	$\begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{-5} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} \\ 5 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} & \mathbf{3} \\ 2 & -3 & 0 & \mathbf{0} \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}$	
10	$\begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{-6} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} \\ 6 & 0 & \mathbf{4} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} \\ 2 & -4 & 0 & \mathbf{0} \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}$	
11	$\begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{-5} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} & \mathbf{-1} \\ 5 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} \\ 2 & -3 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}$	
12	$\begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{-5} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} & \mathbf{-2} \\ 5 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} & \mathbf{3} \\ 2 & -3 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{0}$} \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}$	
13	$\begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{-6} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} & \mathbf{-2} \\ 6 & 0 & \mathbf{4} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} \\ 2 & -4 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{0}$} \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}$	
14	$\begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{-6} & \mathbf{-3} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} \\ 6 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} \\ 3 & -3 & 0 & \mathbf{1} \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array}$	
15	$\begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} \\ 5 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} & \mathbf{3} \\ 2 & -3 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{0}$} \\ 2 & -3 & 0 & 0 \end{array}$	
16	$\begin{array}{rrrr} 0 & \mathbf{-6} & \mathbf{-2} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-2}$} \\ 6 & 0 & \mathbf{4} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} \\ 2 & -4 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{0}$} \\ 2 & -4 & 0 & 0 \end{array}$	

$\colorbox{lightgray}{$$}$ - елемент, що запозичено з реальної матриці

Таблиця 2.

№ п/п	Ідеально узгоджені матриці	Кількість відмінностей з реальною матрицею
1	$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \hline 5 & 0 & \mathbf{3} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{3}$} \\ \hline 2 & -3 & 0 & \mathbf{0} \\ \hline 2 & -3 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	1
2	$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \mathbf{-5} & \mathbf{-2} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-1}$} \\ \hline 5 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline 2 & -3 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{1}$} \\ \hline 1 & -4 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$	2
3	$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-6}$} & \mathbf{-2} & \mathbf{-2} \\ \hline 6 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} & \mathbf{4} \\ \hline 2 & -4 & 0 & \mathbf{0} \\ \hline 2 & -4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	2
4	$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-6}$} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-3}$} & \mathbf{-2} \\ \hline 6 & 0 & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline 3 & -3 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{1}$} \\ \hline 2 & -4 & -1 & 0 \\ \hline \end{array}$	3
5	$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \mathbf{-5} & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{-1}$} & \mathbf{-1} \\ \hline 5 & 0 & \colorbox{lightgray}{$\mathbf{4}$} & \mathbf{4} \\ \hline 1 & -4 & 0 & \mathbf{0} \\ \hline 1 & -4 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$	3

$\colorbox{lightgray}{}$ - елемент, що відрізняється від реальної матриці

Таблиця 3.1.

№ п/п	Упорядкована послідовність, що зберігається в пам'яті комп'ютера
1	{<2;4;3>}
2	{<1;4;-1>, <3;4;1>}
3	{<1;2;-6>, <2;3;4>}
4	{<1;2;-6>, <1;3;-3>, <3;4;1>}
5	{<1;3;-1>, <1;4;-1>, <2;3;4>}

Таблиця 3.2.

№ п/п	Упорядкована послідовність, що зберігається в пам'яті комп'ютера
1	{<1;4;-1>, <3;4;1>}
2	{<1;2;-6>, <2;3;4>}
3	{<1;2;-6>, <1;3;-3>, <3;4;1>}
4	{<1;3;-1>, <1;4;-1>, <2;3;4>}

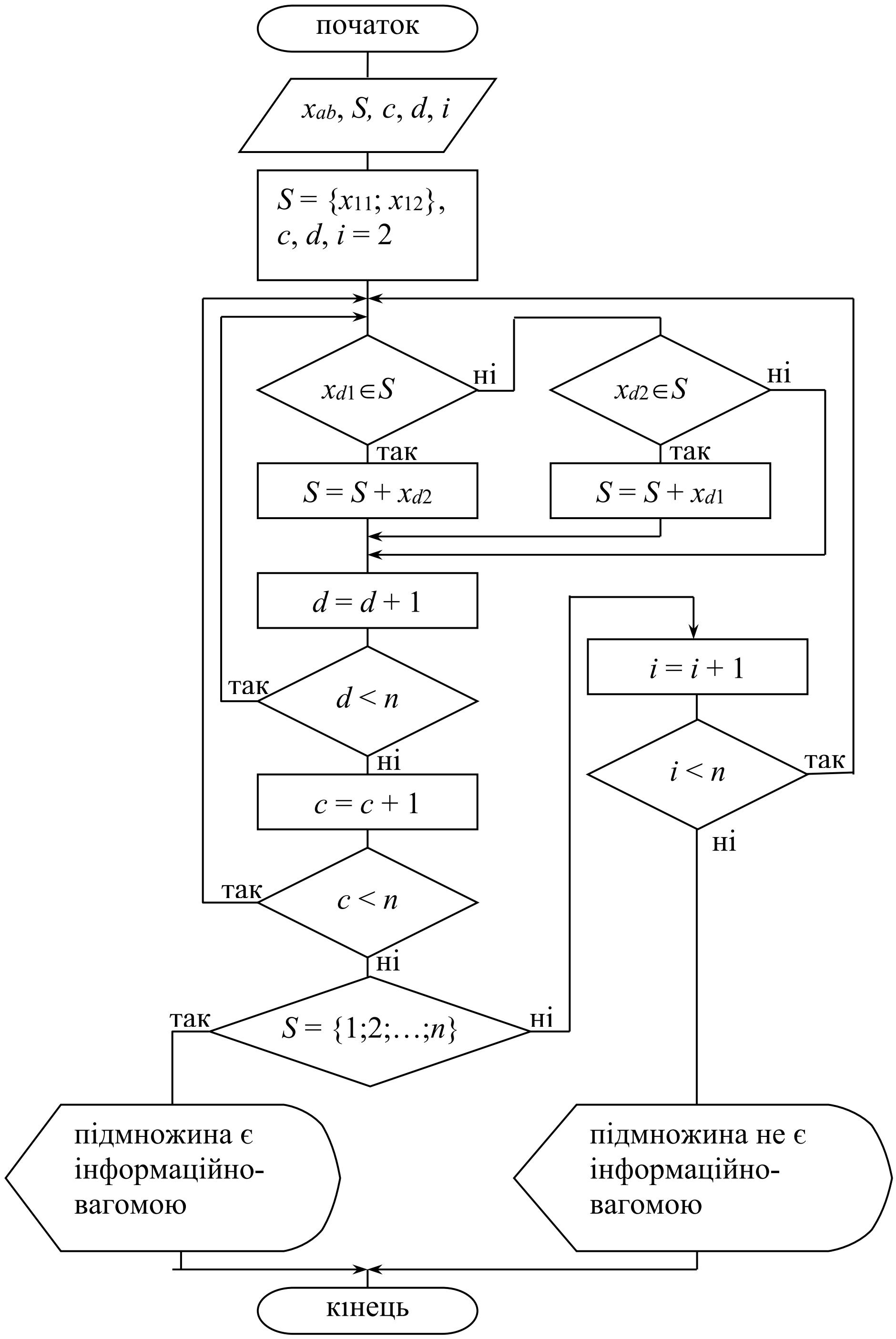
Таблиця 3.3.

№ п/п	Упорядкована послідовність, що зберігається в пам'яті комп'ютера
1	{<1;2;-6>, <2;3;4>}
2	{<1;3;-1>, <1;4;-1>, <2;3;4>}

Таблиця 3.4.

№ п/п	Упорядкована послідовність, що зберігається в пам'яті комп'ютера
1	{<1;3;-1>, <1;4;-1>, <2;3;4>}

Додаток 2


початок
x_{ab}, S, c, d, i
$S = \{x_{11}; x_{12}\}$,
c, d, $i = 2$
$x_{d1} \in S$
ні
$x_{d2} \in S$
ні
так
так
$S = S + x_{d2}$
$S = S + x_{d1}$
$d = d + 1$
$i = i + 1$
так
$d < n$
ні
$i < n$
так
ні
$c = c + 1$
так
$c < n$
ні
так
$S = \{1;2;\ldots;n\}$
ні
підмножина є інформаційно-вагомою
підмножина не є інформаційно-вагомою
кінець