УДК 519.81

В.Г. Тоценко

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРУППОВЫХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ОРДИНАЛЬНЫХ ОЦЕНОК С УЧЕТОМ КОМПЕТЕНТНОСТИ ЭКСПЕРТОВ*

Введение

Проблема определения групповых ординальных оценок (ранжирований) по одному критерию рассматривалась еще в XVIII веке в трудах французских математиков Кондорсе и Борда [1, 2]. Каждым из них предложен свой метод решения задачи, причем, к сожалению, часто они дают различные результаты при одинаковых исходных данных. При этом компетентность экспертов не учитывалась, все эксперты считались одинаково компетентными. Проблема учета компетентности экспертов при определении группового ранжирования не решена до настоящего времени.

Методы определения индивидуальных многокритериальных ординальных оценок предложены в работах [3, 4].

В статье предлагаются методы определения групповых многокритериальных ординальных оценок с учетом компетентности экспертов и различной значимости критериев.

Задача решается в два этапа. На первом определяются групповые ранжирования по каждому из критериев, на втором — на основе групповых ранжирований по каждому критерию определяется результирующее многокритериальное ранжирование.

1. Определение групповых однокритериальных ранжирований. Сущность подхода

Задача формулируется следующим образом.

Дано: множество $E=\{e_j\}$, $j=(1,m)$, экспертов, множество $C=\{c_j\}$ нормированных коэффициентов относительной компетентности экспертов, множество $R_h=\{r_{jh}\}$ индивидуальных ранжирований альтернатив $a_i\in A$, $i=(1,n)$, по h-му критерию.

Требуется определить групповое ранжирование $r_{\psi h}$ по h-му критерию.

Для упрощения изложения метода решения этой задачи не будем указывать индекс критерия, по которому получены ранжирования.

Выберем наибольший общий делитель η для коэффициентов компетентности экспертов $c_j\in C$, давших ранжирования. Тогда c_j для любого $1\le j\le m$ можно представить в виде $c_j=k_j\eta$, где k_j — целое число. Число k_j можно рассматри-

---

* Работа выполнена при поддержке Фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 01.07/00060).

ISSN 0572-2691

вать как количество экспертов с равной компетентностью η, в совокупности эквивалентных эксперту с компетентностью c_j. Поэтому множество $R=\{r_j\}$ индивидуальных ранжирований альтернатив $a_i \in A$ можно заменить множеством R_k ранжирований, в котором вместо одного ранжирования r_j записано k_j его копий. При этом задача определения группового ранжирования с m экспертами разной компетентности сводится к задаче определения группового ранжирования с m' равнокомпетентными экспертами,

$$m' = \sum_{j=1}^{m} k_j,$$

каждый из которых имеет коэффициент компетентности η. Для решения этой задачи можно использовать известные методы, например Кондорсе или Борда [1, 2].

Покажем, как можно упростить эти методы, становящиеся весьма трудоемкими при больших количествах эквивалентных ранжирований.

1.1. Метод Борда. Известно [1], что согласно этому методу при анализе ранжирования r_j альтернативе, находящейся на последнем месте в ранжировании, присваивается ранг 0, той, которая находится на предпоследнем месте — ранг -1, и т.д., альтернатива, которая занимает в ранжировании первое место, получает ранг $-(n-1)$. Сумма рангов альтернативы a_i, полученная в m ранжированиях, равна

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{m} \rho_{ij},$$

где ρ_{ij} — ранг, полученный альтернативой a_i в ранжировании r_j.

При переходе от ранжирования r_j, данного j-м экспертом с коэффициентом компетентности $c_j = k_j \eta$, к эквивалентному множеству ранжирований, содержащему k_j одинаковых ранжирований r_j, данных экспертами с коэффициентами компетентности η, альтернатива a_i получит ранг

$$k_j \rho_{ij} = (c_j / \eta) \rho_{ij},$$

а с учетом ранжирований, определенных всеми экспертами, сумма рангов альтернативы a_i будет равна

$$\textstyle\sum_i = (1/\eta) \sum_{j=1}^{m} c_j \rho_{ij}.$$

Поскольку суммы рангов всех альтернатив умножаются на $1/\eta$, то ранжирование величин $\sum_i$ совпадает с ранжированием величин $\sum_{j=1}^{m} c_j \rho_{ij}$. Таким образом, учет компетентности экспертов при использовании алгоритма Борда заключается в том, что при определении сумм рангов альтернатив ранг, порождаемый ранжированием, данным j-м экспертом, умножается на коэффициент его относительной компетентности.

Пример 1. Пусть эксперты, коэффициенты относительной компетентности которых равны соответственно $c_1 = 0{,}4$; $c_2 = 0{,}3$; $c_3 = 0{,}2$; $c_4 = 0{,}1$, проранжировали альтернативы следующим образом: $r_1 = (a_1; a_2; a_3; a_4; a_5)$; $r_2 = (a_5; a_4; a_3; a_2; a_1)$; $r_3 = (a_4; a_3; a_2; a_1; a_5)$; $r_4 = (a_3; a_2; a_1; a_5; a_4)$.

Ранги, присваиваемые экспертами альтернативам с учетом компетентности, показаны в табл. 1.

Таблица 1

Альтернативы / Эксперты	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e_1	−1,6	−1,2	−0,8	−0,4	0
e_2	0	−0,3	−0,6	−0,9	−1,2
e_3	−0,2	−0,4	−1,2	−1,6	0
e_4	−0,2	−0,3	−0,4	0	−0,1
$\sum$	−2	−2,2	−3	−2,9	−1,3

Групповое ранжирование с учетом компетентности экспертов имеет вид $a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_5$ ($a_g \succ a_z$ означает, что альтернатива a_g превосходит альтернативу a_z).

Ранги, присваиваемые экспертами альтернативам без учета компетентности, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Альтернативы / Эксперты	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e_1	−4	−3	−2	−1	0
e_2	0	−1	−2	−3	−4
e_3	−1	−2	−3	−4	0
e_4	−2	−3	−4	0	−1
$\sum$	−7	−9	−11	−8	−5

Групповое ранжирование без учета компетентности экспертов имеет вид $a_3 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_1 \succ a_5$.

1.2. Метод Кондорсе. Известно, что при использовании этого метода нужно построить матрицу D парных сравнений, строки и столбцы которой обозначены альтернативами, а элементы определяются следующим образом [2]:

$$d_{ih} = \begin{cases} 1, \text{ если } s_{ih} > s_{hi} \\ 0, \text{ если } s_{ih} = s_{hi} \\ -1, \text{ если } s_{ih} < s_{hi} \end{cases}, \tag{1}$$

где s_{ih} — количество индивидуальных ранжирований, в которых $a_i \succ a_h$.

Рассмотрим пару альтернатив a_i, a_h. Определим величину

$$w_{ih} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ihj}, \tag{2}$$

где

$$\beta_{ihj} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \succ a_h \text{ в ранжировании } r_j \\ 0, \text{ если } a_i = a_h \text{ в ранжировании } r_j \\ -1, \text{ если } a_i \prec a_h \text{ в ранжировании } r_j \end{cases}. \tag{3}$$

Тогда (1) с учетом (2) и (3) можно представить в таком виде:

$$d_{ih} = \begin{cases} 1, \text{ если } w_{ih} > 0 \\ 0, \text{ если } w_{ih} = 0 \\ -1, \text{ если } w_{ih} < 0 \end{cases}. \tag{4}$$

При переходе от ранжирования r_j, данного j-м экспертом с коэффициентом компетентности $c_j = k_j\eta$, к эквивалентному множеству ранжирований, содержащему k_j одинаковых ранжирований r_j, получаем

$$w_{ih} = \sum_{j=1}^{m} k_j \beta_{ihj} = (1/\eta)\sum_{j=1}^{m} c_j \beta_{ihj}.$$

Окончательно правило формирования матрицы парных сравнений определяется выражением

$$d_{ih} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_{ihj} > 0 \\ 0, \text{ если } \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_{ihj} = 0 \\ -1, \text{ если } \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_{ihj} < 0 \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Пример 2. Для условий примера 1 найти групповые ранжирования с учетом компетентности и без него методом Кондорсе.

Табл. 3 описывает матрицу парных сравнений с учетом компетентности экспертов (групповое ранжирование имеет вид $a_3 \succ a_2 \succ (a_1 = a_4) \succ a_5$), табл. 4 — без учета (групповое ранжирование имеет вид $a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ (a_4 = a_5)$).

Таблица 3

Ранжирование	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	−1	−1	0	1
a_2	1	0	−1	0	1
a_3	1	1	0	0	1
a_4	0	0	0	0	1
a_5	−1	−1	−1	−1	0

Таблица 4

Ранжирование	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	0	−1	−1	0	1
a_2	1	0	−1	0	1
a_3	1	1	0	0	1
a_4	0	0	0	0	0
a_5	−1	−1	−1	0	0

2. Многокритериальная групповая ординальная оценка с учетом компетентности экспертов

Задача формулируется следующим образом.

Дано: 1) множество альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = (1, n)$; 2) множество $E = \{e_j\}$, $j = (1, m)$, экспертов; 3) множество $C = \{c_j\}$ коэффициентов относительной компетентности экспертов, $\sum_{j=1}^{m} c_j = 1$; 4) множество $G = \{g_h\}$, $h = (1, p)$, независимых по предпочтениям критериев; 5) множество $V = \{v_h\}$ коэффициентов относительной важности критериев, $\sum_{h=1}^{p} v_h = 1$; 6) множество $R = \{R_h\}$, $R_h = \{r_{hj}\}$, множеств ранжирований альтернатив по критериям.

Требуется найти групповое ранжирование r_σ с учетом компетентности экспертов и относительной важности критериев.

Предлагается решать задачу в два этапа. На первом, используя методы, описанные в предыдущих разделах, определим групповые ранжирования по каждому из критериев с учетом компетентности экспертов. Содержание второго этапа состоит в определении результирующего группового ранжирования с учетом относительной важности критериев.

Задача, решаемая на втором этапе, формулируется следующим образом.

Дано: 1) множество $G = \{g_h\}$, $h = (1, p)$, независимых по предпочтениям критериев; 2) множество $V = \{v_h\}$ коэффициентов относительной важности критериев, $\sum_{h=1}^{p} v_h = 1$; 3) множество $\Psi = \{\psi_h\}$ групповых ранжирований альтернатив по критериям.

Требуется найти групповое ранжирование ψ_σ с учетом относительной важности критериев.

Выберем наибольший общий делитель λ для коэффициентов относительной важности критериев $g_h \in G$, по которым методами, описанными в предыдущем разделе, определены групповые ранжирования. Тогда v_h для любого $1 \le h \le p$ можно представить в виде $v_h = n_h \lambda$, где n_h — целое число.

При условии независимости критериев по предпочтениям существует аддитивная функция полезности [5, 6]. Поэтому число n_h можно рассматривать как количество критериев с равной значимостью λ, в совокупности эквивалентных критерию с коэффициентом значимости v_h, вследствие чего групповое ранжирование ψ_h альтернатив $a_i \in A$ по критерию g_h можно заменить множеством Ψ_h ранжирований, в котором вместо одного ранжирования ψ_h записано n_h его копий. Таким образом, задача определения многокритериального ранжирования с учетом коэффициентов относительной важности критериев $g_h \in G$ полностью аналогична рассмотренной задаче определения группового ранжирования с учетом компетентности экспертов. Поэтому для ее решения следует воспользоваться предложенными в разд. 1 методами, соблюдая аналогию между коэффициентами относительной важности критериев и коэффициентами относительной компетентности экспертов.

В.Г. Тоценко

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ГРУПОВИХ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНИХ ОРДИНАЛЬНИХ ОЦІНОК З УРАХУВАННЯМ КОМПЕТЕНТНОСТІ ЕКСПЕРТІВ

Запропоновано два методи визначення групових багатокритеріальних ординальних оцінок (ранжувань) з урахуванням компетентності експертів. Задача розв'язується у два етапи. На першому отримують групові ранжування з урахуванням компетентності експертів за кожним з критеріїв, на другому — багатокритеріальне ранжування з урахуванням різної значущості критеріїв. Підхід заснований на визначенні еквівалентних заданому множин ранжувань, які дано рівнокомпетентними експертами за рівнозначущими критеріями, з подальшим застосуванням методів Борда або Кондорсе.

V.G. Totsenko

METHODS TO DETERMINE GROUP MULTICRITERIA ORDINAL ESTIMATES WITH ACCOUNT OF EXPERT COMPETENCE

Two methods are suggested to determine group multicriteria ordinal estimates (rankings) with account of the expert competence. The problem is being solved in two stages. At the first stages group rankings are determined with account of expert competence on each criterion. At the second stage the multicriteria ranking with account of different significance of criteria are found. The approach is based on determination of ranking sets, given by experts of the same competence using the criteria of the same significance, which are equivalent to the initial ranking set, followed by applying the Borda or Condorcet methods.

1. *Borda J.C.* Mémoire sur les élections au scrutin // Historia de l'académie des sciences pour. — Paris, 1781. — 657 p.
2. *Вольский В.И., Лезина З.М.* Голосование в малых группах. Процедуры и методы сравнительного анализа. — М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 192 с.
3. *Roy B.* ELECTRE III: Un algorithme de classement fonde sur une representation floue des preferences en presence de criteres multiple // Cah. Cent. Etud. Recherce Oper. — 1978. — **20**. — P. 3–24.
4. *Ларичев О.И., Зуев Ю.А., Гнеденко Л.С.* Метод ЗАПРОС (ЗАмкнутые ПРоцедуры у Опорных Ситуаций) решения слабоструктурированных проблем выбора при многих критериях / АН СССР. ВНИИСИ. — Препр. — М., 1979. — 75 с.
5. *Leontief W.* Introduction to a theory of the internal structure of functional relationships // Econometrica. — 1947. — **15**. — P. 343–350.
6. *Gorman W.M.* Conditions for additive separability // Ibid. — 1968. — **36**. — P. 367–390.

Получено 29.06.2005