УДК 519.816

В.Г. Тоценко

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДОСТАТОЧНОСТИ СОГЛАСОВАННОСТИ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ РАНЖИРОВАНИЙ ПРИ ПРИНЯТИИ ГРУППОВЫХ РЕШЕНИЙ

Введение. Одна из задач поддержки принятия групповых решений — нахождение результирующего ранжирования r_{Σ} множества $A = \{a_i\}$, $i = (1, n)$ альтернатив на основе множества $R = \{r_j\}$, $j = (1, m)$, индивидуальных ранжирований, данных m экспертами. При этом необходимо решить следующие частные задачи: 1) вычислить количественные показатели степени согласованности множества R индивидуальных ранжирований; 2) определить достаточность степени согласованности множества R индивидуальных ранжирований; 3) найти групповое ранжирование r_{Σ} (при условии, что степень согласованности множества R индивидуальных ранжирований достаточна).

В настоящее время известны методы решения задач 1) и 3). Для количественной оценки степени согласованности двух индивидуальных ранжирований можно вычислить коэффициент ранговой корреляции Кендэла [1]. При $m > 2$ экспертов, выполнивших индивидуальные ранжирования, можно использовать коэффициент конкордации [2], для решения задачи 3) — методы Кондорсе, Борда [3] или Кемени [4].

Знание значений количественных показателей степени согласованности множества R индивидуальных ранжирований необходимо, но недостаточно для обоснованного определения группового решения. Действительно, что можно сказать о том, достаточно ли согласовано множество ранжирований, если коэффициент ранговой корреляции равен 0,2 (его значения лежат в пределах $(-1, 1)$) или коэффициент конкордации равен 0,4 (изменяется в пределах $(0, 1)$? Очевидно, для обоснованной оценки достаточности степени согласованности множества R ранжирований необходимо каким-то образом определить пороговое значение количественных показателей степени согласованности ранжирований, превышение которого означает возможность использования множества индивидуальных ранжирований для определения согласованного группового.

В настоящей статье вначале предлагается метод определения коэффициента конкордации с учетом компетентности экспертов, а затем — пороговых значений коэффициентов конкордации и ранговой корреляции множеств строгих индивидуальных ранжирований.

1. Вычисление коэффициента конкордации с учетом компетентности экспертов

1.1. Постановка задачи. Задача вычисления коэффициента конкордации с учетом компетентности экспертов формулируется следующим образом.

 ISSN 0572-2691

Дано: множество $R = \{r_j\}$, $j = (1, m)$, индивидуальных ранжирований альтернатив $a_i \in A$, $i = (1, n)$, определенных m экспертами с коэффициентами компетентности $c_j \in C$, $\sum_{j=1}^{m} c_j = 1$.

Требуется: вычислить коэффициент конкордации $w(R)$ множества R с учетом компетентности экспертов.

1.2. Сущность подхода. Для учета компетентности экспертов используем подход, предложенный в [4].

Выберем наибо́льший общий делитель η для коэффициентов компетентности экспертов $c_j \in C$, давших ранжирования. Тогда c_j для любого $1 \le j \le m$ можно представить в виде $c_j = k_j \eta$, где k_j — целое число. Число k_j можно рассматривать как количество экспертов с равной компетентностью η, в совокупности эквивалентных эксперту с компетентностью c_j. Поэтому множество $R = \{r_j\}$ индивидуальных ранжирований альтернатив $a_i \in A$ можно заменить множеством R_k ранжирований, в котором вместо одного ранжирования r_j записано k_j его копий. При этом задача вычисления коэффициента конкордации множества индивидуальных ранжирований, данных m экспертами разной компетентности, сводится к задаче определения коэффициента конкордации множества R_k ранжирований, данных

$$m_e = \sum_{j=1}^{m} k_j \tag{1}$$

равнокомпетентными экспертами, каждый из которых имеет коэффициент компетентности η. Учитывая, что

$$k_j = c_j / \eta, \tag{2}$$

а $\sum_{j=1}^{m} c_j = 1$, выражение (1) преобразуется к виду

$$m_e = 1/\eta. \tag{3}$$

Известно [2], что коэффициент конкордации W множества индивидуальных ранжирований n альтернатив, выполненных m равнокомпетентными экспертами, определяется выражением

$$W = 12S / m^2 (n^3 - n), \tag{4}$$

где S — сумма квадратов отклонений сумм рангов альтернатив от их (сумм рангов альтернатив) среднего значения.

Доказано, что значение S для любого множества индивидуальных ранжирований не может быть больше величины $m^2(n^3 - n)/12$, причем S имеет это значение лишь тогда, когда множество индивидуальных ранжирований полностью согласовано. При этом, как следует из (4), коэффициент конкордации принимает максимальное значение, равное 1.

Среднее значение суммы рангов альтернатив θ_0 равно

$$\theta_0 = m_e (n+1)/2 = (n+1)/2\eta. \tag{5}$$

Сумма рангов i-й альтернативы по множеству ранжирований R с учетом (2) равна

$$\theta_i = (1/\eta)\sum_{j=1}^{m} c_j r_{ij}, \tag{6}$$

где r_{ij} — ранг i-й альтернативы в индивидуальном ранжировании, данном j-м экспертом.

С учетом (3)–(6) после несложных преобразований получаем

$$w(R) = \left\{12\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n+1}{2} - \sum_{j=1}^{m} c_j r_{ij}\right]^2\right\} / n(n^2-1). \tag{7}$$

Пример 1. Множество $R = \{(a, b, c, d, e); (e, d, c, b, a); (d, c, b, a, e)\}$ сформировано множеством экспертов $E = \{e_j\}$, $j = (1, 3)$, с коэффициентами компетентности $c_1 = 0{,}2$; $c_2 = 0{,}3$; $c_3 = 0{,}5$. Необходимо вычислить коэффициент конкордации $w(R)$ без учета компетентности экспертов и коэффициент $w_k(R)$ с учетом коэффициентов относительной компетентности экспертов.

Используя (4), получаем $w(R) = 0{,}1111$. С помощью (7) вычисляем $w_k(R) = 0{,}2375$. Этот пример свидетельствует о том, что учет компетентности экспертов существенно изменяет количественную оценку степени согласованности множества индивидуальных ранжирований.

2. Пороговые значения коэффициента конкордации

2.1. Сущность подхода. Использование статистического подхода для определения пороговых значений этого коэффициента не представляется возможным вследствие небольшого количества индивидуальных ранжирований (единицы), имеющих место на практике.

Поэтому воспользуемся подходом, аналогичным предложенному в [6] к определению пороговых значений коэффициента согласованности множества кардинальних оценок, согласно которому определяются два пороговых значения. Первое, называемое порогом обнаружения T_0, определяет условия наличия полезной информации во множестве экспертных оценок. Превышение второго порогового значения, называемого порогом применения T_u, означает достаточную с точки зрения лица, принимающего решения (ЛПР), точность результирующего группового ранжирования. В качестве порогов обнаружения и применения используются коэффициенты согласованности специальным образом построенных множеств экспертных оценок. Понятно, что структура этих множеств существенно зависит от алгоритмов вычисления соответствующих количественных показателей согласованности.

2.2. Порог обнаружения. Полностью согласованным называется множество R^0 индивидуальных ранжирований, если ранг каждой альтернативы, определенный по каждому индивидуальному ранжированию $r_j \in R^{(0)}$, одинаков.

Полному отсутствию информации во множестве индивидуальных ранжирований соответствует случай, когда все альтернативы имеют одинаковые суммы рангов, что может быть только тогда, когда сумма рангов каждой альтернативы равна среднему значению суммы рангов альтернатив. При этом для всех альтернатив отклонения суммы рангов от среднего значения суммы рангов равны 0, поэтому $S = 0$, $w(R) = 0$, т.е. множество индивидуальных ранжирований полно-

ISSN 0572-2691

стью рассогласовано. Примером может быть следующее множество индивидуальных ранжирований: $r_1 = (a, b, c, d, e)$; $r_2 = (e, d, c, b, a)$; $r_3 = (b, a, d, c, e)$; $r_4 = (e, c, d, a, b)$. Нетрудно убедиться, что для данного примера сумма рангов каждой альтернативы равна 12.

Очевидно, множество индивидуальных ранжирований будет нести минимальную информацию тогда, когда S будет иметь минимальную, отличную от среднего значения, величину. Это может быть результатом изменения на минимальную, отличную от нуля величину суммы квадратов отклонений сумм рангов альтернатив от среднего значения вследствие того, что в одном, и только одном из индивидуальных ранжирований полностью несогласованного множества две альтернативы, стоящие на соседних позициях, поменяются местами. Например, рассмотренное выше полностью рассогласованное множество индивидуальных ранжирований будет преобразовано к виду $r_1 = (a, b, c, d, e)$; $r_2 = (e, d, c, b, a)$; $r_3 = (b, a, d, c, e)$; $r_4 = (e, c, d, b, a)$. При этом сумма рангов одной из них увеличится на 1, а второй на столько же уменьшится. Так как суммы рангов непереставленных объектов, а также среднее значение суммы рангов остались такими же, как и в полностью несогласованном множестве, то $S = 2$ и, как следует из (4), порог обнаружения равен

$$T_0 = w_0 = 24 / m^2 (n^3 - n). \tag{8}$$

2.3. Порог применения. Порог применения T_u используем для определения достаточности согласованности пары индивидуальных ранжирований в целях определения результирующего ранжирования с требуемой точностью. Особенность определения точности экспертной информации состоит в принципиальном отсутствии эталона, сравнение с которым позволило бы определить точность результатов, как это имеет место при обычных измерениях. Это вызвано тем, что экспертная оценка сугубо индивидуальна и не может быть определена внешним наблюдателем.

При определении порога применения используем подход, предложенный в [5], заключающийся в том, что в качестве этого порога применяется коэффициент конкордации множества R_u ранжирований, которое выражает взгляды ЛПР на требования к точности определения заключительного ранжирования. При формировании множества R_u будем исходить из следующих соображений.

Самые высокие требования к степени согласованности очевидно состоят в полном совпадении индивидуальных ранжирований. При этом $w(R_u) = 1$. Такой случай редко встречается на практике. Поэтому естественно формулировать требования к степени согласованности в виде количества объектов, имеющих в разных ранжированиях разные ранги. Существенно, что при этом результирующее ранжирование, определенное выбранным методом, должно совпадать с тем, которое было бы определено по полностью согласованному множеству индивидуальных ранжирований.

Характерная особенность ординальных оценок (рангов) объектов заключается в том, что ранг не может измениться только у одного объекта. Ранг объекта a_i в некотором ранжировании может измениться только благодаря перестановке его с объектом a_j, в результате эти объекты поменяются рангами.

Пусть эксперты ранжируют n объектов. Будем полагать, что для определения группового ранжирования используется метод Борда, оперирующий понятиями рангов объектов. Для дальнейшего изложения нам потребуется понятие расстояния $l(r_i, r_j)$ между ранжированиями r_i, r_j, данными одним экспертом. В [4] предложен способ определения расстояния между ранжированиями, основанный на представлении ранжирований матрицами отношений. В связи с этим для задания ранжирования удобнее использовать ранги объектов вместо матрицы отношений.

Метод определения достаточности степени согласованности множества индивидуальных ранжирований не самоцель, а излагается в связи с необходимостью организации обратной связи с экспертами для улучшения согласованности этого множества. Поэтому при определении расстояния между ранжированиями используем понятие перестановки объектов.

Определение 1. Расстоянием $l(r_i, r_j)$ между ранжированиями r_i, r_j называется количество перестановок объектов a_{ih}, a_{ik}, имеющих в ранжировании r_i ранги ρ_{ih}, $\rho_{ik} = \rho_{ih} + 1$ соответственно, которые нужно выполнить, чтобы преобразовать ранжирование r_i в ранжирование r_j.

Пример 2. $r_i = a, b, c, d, e$; $r_j = c, b, a, e, d$. Преобразование $r_i \to r_j$ осуществляется следующим образом: $(a, b, c, d, e) \to (a, b, c, e, d) \to (b, a, c, e, d) \to$ $\to (b, c, a, e, d) \to (c, b, a, e, d)$, поэтому $l(r_i, r_j) = 4$.

Определение 2. Множеством $R_{r_i}(l)$ ранжирований, порожденным ранжированием r_i и расстоянием l, называется множество ранжирований, у каждого из которых расстояние от r_i равно l.

Так, для $r_i = a, b, c, d, e$ имеем $R_{r_i}(1) = \{(b, a, c, d, e); (a, c, b, d, e); (a, b, d, c, e);$ $(a, b, c, e, d)\}$; $R_{r_i}(2) = \{(c, b, a, d, e); (a, d, c, b, e); (a, b, e, d, c)\}$; $R_{r_i}(3) = \{(d, b, c, a, e);$ $(a, e, c, d, b)\}$; $R_{r_i}(4) = \{(e, b, c, d, a)\}$.

Нетрудно убедиться, что $|R_{r_i}(l)| = n - l$.

Возникает вопрос, каким должно быть l, чтобы результирующее ранжирование, полученное методом Борда, совпадало с вычисленным по полностью согласованному множеству ранжирований?

В полностью согласованном множестве ранжирований каждый объект имеет во всех m ранжированиях одинаковые ранги. Следовательно, суммы рангов объектов отличаются точно на m от суммы рангов объектов, являющихся их непосредственными соседями, т.е. имеющих ранги, отличающиеся на 1. Ранжирование объектов в результирующем ранжировании при использовании метода Борда совпадает с ранжированием их сумм рангов. Перестановка соседних объектов увеличивает сумму рангов одного и на столько же уменьшает сумму рангов другого. Поэтому изменение результирующего ранжирования по сравнению с полученным по полностью согласованному множеству будет тогда и только тогда, когда изменения сумм рангов объектов превысят половину разности сумм рангов соседних объектов, т.е. $m/2$. Следовательно, величина l при формировании множества $R_{r_i}(l)$ должна удовлетворять условию $l \le]m/2[$.

Определение 3. Порогом применения $T_u(l)$ множества индивидуальных ранжирований n объектов называется значение коэффициента конкордации множества $R_{r_i}(l) \cup r_i$ ранжирований для $m = n - l + 1$ экспертов.

Пример 3. $n = 5$; $l = 1$; $r_i = (a, b, c, d, e)$; $R_{r_i}(l) = \{(b, a, c, d, e); (a, c, b, d, e);$ $(a, b, d, c, e); (a, b, c, e, d)\}$; $T_u(1) = 0{,}848$. При тех же исходных данных, но для $l = 2$ имеем $R_{r_i}(2) = \{(c, b, a, d, e); (a, d, c, b, e); (a, b, e, d, c)\}$; $T_u(2) = 0{,}575$. Нетрудно видеть, что значение $T_u(l)$ определяется величинами l и m и не зависит от конкретного вида ранжирования r_i.

 ISSN 0572-2691

3. Пороговые значения коэффициента ранговой корреляции

3.1. Порог обнаружения. Для определения порога обнаружения построим пару ранжирований (r_i^τ, r_j^τ), несущую минимально возможное количество информации, которое может быть зарегистрировано внешним наблюдателем. Пару (r_i^τ, r_j^τ) естественно строить на основе полностью рассогласованной пары (r_i^0, r_j^0), не несущей поэтому никакой информации. Приведем пример такой пары ранжирований: $r_i^0 = (b, d, a, c)$; $r_j^0 = (c, a, d, b)$. Используя метод Борда, можно убедиться, что при этом ранги всех альтернатив одинаковы.

В качестве порога обнаружения примем коэффициент τ ранговой корреляции пары ранжирований (r_i^τ, r_j^τ), отличающейся от полностью несогласованной пары (r_i^0, r_j^0), которая имеет коэффициент ранговой корреляции $\tau_0 = -1$, на минимально возможную величину, вызывающую изменение ранга одной альтернативы.

Известно [1], что для определения коэффициента τ ранговой корреляции двух строгих ранжирований следует представить индивидуальные ранжирования в виде матриц, определенных следующим образом:

$$d_{hu} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_h \text{ превосходит } a_u, \\ -1, & \text{если } a_u \text{ превосходит } a_h. \end{cases}$$

При этом коэффициент ранговой корреляции определяется выражением

$$\tau = \left(\sum_{h=1}^{n} \sum_{u=1}^{n} d_{hu}^i d_{hu}^j \right) / \, n(n-1), \tag{9}$$

где d_{hu}^i, d_{hu}^j — элементы матриц, задающих индивидуальные ранжирования r_i, r_j соответственно.

Нетрудно видеть, что для пары (r_i^0, r_j^0) полностью несогласованных индивидуальных ранжирований все произведения $d_{hu}^i d_{hu}^j$ равны -1, поэтому для этой пары $\tau = -1$. Очевидно, что минимальное отличие пары (r_i^τ, r_j^τ) от пары (r_i^0, r_j^0) полностью несогласованных индивидуальных ранжирований будет иметь место, если в одном из ранжирований r_i^0 или r_j^0 поменять местами две альтернативы. Тогда пара ранжирований $r_i^0 = (b, a, d, c)$; $r_j^0 = (c, a, d, b)$ преобразуется, например, в пару $r_i^\tau = (b, d, a, c)$; $r_j^\tau = (c, a, b, d)$. При этом два произведения $d_{hu}^i d_{hu}^j$ (в нашем примере $d_{24}^i d_{24}^j$ и $d_{42}^i d_{42}^j$) поменяют знак, вследствие чего, как следует из (9),

$$T_0 = \tau = [4 / n(n-1)] - 1. \tag{10}$$

3.2. Порог применения. В качестве порога применения T_u примем коэффициент ранговой корреляции пары ранжирований (r_i^u, r_j^u), отличающейся от полностью согласованной пары ранжирований (r_i^1, r_j^1) рангами u пар альтернатив (обычно $u = 1, 2$). Из способа построения матриц, задающих индивидуальные ранжирования, следует что если индивидуальное ранжирование отличается от полностью согласованного рангами u пар альтернатив, например, полностью согласованную пару ($r_i^1 = (b, d, a, c)$; $r_j^1 = (b, d, a, c)$) преобразовать в пару ($r_i^{u1} = (b, d, a, c)$; $r_j^{u1} = (d, b, a, c)$) при $u = 1$ или в пару ($r_i^{u2} = (b, d, a, c)$; $r_j^{u2} = (d, b, c, a)$) при $u = 2$, то $2u$ произведений $d_{hu}^i d_{hu}^j$ поменяют знак, в результате, как следует из (9), $T_u = 1 - 4u / n(n-1)$.

Заключение. Предложенные подходы могут использоваться при решении родственных задач: определения пороговых значений коэффициентов конкордации и ранговой корреляции Кендэла при применении метода Кондорсе или Кемени, при наличии связанных рангов, а также пороговых значений коэффициента ранговой корреляции Спирмена.

В.Г. Тоценко

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ДОСТАТНОСТІ УЗГОДЖЕНОСТІ ІНДИВІДУАЛЬНИХ РАНЖУВАНЬ ПРИ ПРИЙНЯТТІ ГРУПОВИХ РІШЕНЬ

Запропоновано методи обчислення коефіцієнта конкордації з урахуванням компетентності експертів, а також порогових значень коефіцієнтів конкордації і рангової кореляції при визначенні результуючого ранжування методом Борда. Поріг визначення використовується для встановлення наявності корисної інформації у множині індивідуальних ранжувань, поріг застосування використовується для визначення відповідності множини індивідуальних ранжувань уявленням особи, що приймає рішення, щодо припустимих відмінностей оцінок, даних різними експертами.

V.G. Totsenko

METHOD OF DETERMINATION OF SUFFICIENCY OF THE CONSISTENCY OF INDIVIDUAL RANKINGS WHILE MAKING GROUP DECISIONS

Methods of calculation of threshold values of concordation factors and rank correlation are offered at determination of resulting ranking by Borda method. The threshold of detection serves for determination of the presence of useful information in a set of individual rankings. The threshold of application is used for definition of conformity of a set of individual rankings to the ideas of decision making person about admissible distinctions of the estimates given by different experts.

1. *Кендэл М.* Ранговые корреляции. — М. : Статистика, 1975. — 214 с.
2. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация. Методы получения и анализа. — М. : Радио и связь, 1982. — 184 с.
3. *Гюйбо Д.Т.* Теории общего интереса и логическая проблема агрегирования: Пер. с англ. // Мат. методы в социальных науках. — М. : Прогресс, 1973. — 167 с.
4. *Kemeny J.* Mathematics without numbers // Daedalus. — 1959. — **88**. — P. 17–31.
5. *Тоценко В.Г.* Методы определения групповых многокритериальных ординальных оценок с учетом компетентности экспертов // Проблемы управления и информатики. — 2005. — № 5. — С. 84–89 (*Totsenko V.G.* Methods to determine group multicriterla ordinal estimates with account of expert competence // Journ. of Automat. and Inform. Sci. — 2005. — **37**, N 10. — P. 19–23).
6. *Totsenko V.G.* The agreement degree of estimations set with regard of experts competency // Proc. Fourth Int. Symp. on the Analytic Hierarchy Process. Vancouver, Canada : Simon Fraser University, July 12–15, 1996. — P. 229–242.

Получено 23.02.2006