Ejercicios Repaso Algorítmica

Autor: Francisco Javier Marqués Gaona y Germán Ruano García

1. Indicar cuáles son ciertas:

1- $n^2 \in O(n^3)$
2- $n^3 \in O(n^2)$
3- $200n + 1000 \in O(n)$
4- $(n)! \in O((n+3)!)$
5- $f(n) \in O(7n) \Rightarrow f(n) \in O(n)$
6- $3n \in O(300n)$
7- $\log(n) \in O(n^{1/4})$
8- $n^{1/4} \in O(\log(n))$
9- $n^2 \in \Omega(n^3)$
10- $n^3 \in \Omega(n^2)$
11- $200n + 1000 \in \Omega(n)$
12- $(n)! \in \Omega((n+3)!)$
13- $f(n) \in \Omega(7n) \Rightarrow f(n) \in \Omega(n)$
14- $3n \in \Omega(300n)$
15- $\log(n) \in \Omega(n^{1/4})$
16- $n^{1/4} \in \Omega(\log(n))$

Dadas estas relaciones las denominamos como $g(n) \in O(f(n))$, por ejemplo para $n^2 \in O(n^3)$, $g(n) = n^2$ y $f(n) = n^3$. Debemos estudiar su límite.

$$\lim_{n\to\infty} g(n)/f(n) = L$$

Donde L puede valer:

- $L = 0$, entonces $g \in O(f)$
- $L = \infty$, entonces $g \in \Omega(f)$
- $L = K \neq 0$, entonces $g \in O(f)$ y $g \in \Omega(f)$

1- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = 0 \Rightarrow g \in O(f)$, por lo tanto es cierta

2- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \infty \Rightarrow g \in \Omega(f)$, por lo tanto es falsa

3- $\lim_{n\to\infty} \frac{200n+1000}{n} = 200 \neq 0 \Rightarrow g \in O(f)$ y $g \in \Omega(f)$, por lo tanto es cierta

4- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+3)(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = 0 \Rightarrow g \in O(f)$, por lo tanto es cierta

5- Si $f(n)$ se trata de una función polinómica con exponente $c=1 \Rightarrow$ Cierta
Si $f(n)$ se trata de una función logarítmica $\Rightarrow$ Cierta

6- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{300n} = 0'01 \neq 0 \Rightarrow g \in O(f)$ y $g \in \Omega(f)$, por lo tanto es cierta

7- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{\sqrt[4]{n}} = 0$ (Usando la regla de L'Hopital) $\Rightarrow g \in O(f)$, por lo tanto es cierta

8- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\log(n)} = \infty$ (Usando la regla de L'Hopital) $\Rightarrow g \in \Omega(f)$, por lo tanto es falsa

9- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = 0 \Rightarrow g \in O(f)$, por lo tanto es falsa

10- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \infty \Rightarrow g \in \Omega(f)$, por lo tanto es cierta

11- $\lim_{n\to\infty} \frac{200n+1000}{n} = 200 \neq 0 \Rightarrow g \in O(f)$ y $g \in \Omega(f)$, por lo tanto es cierta

12- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+3)(n+2)(n+1)\cancel{n!}} = 0 \Rightarrow g \in O(f)$, por lo tanto es falsa

13- Si $f(n)$ se trata de una función polinómica con exponente $\geq 1 \Rightarrow$ Cierta

14- $\lim_{n\to\infty} \frac{3n}{300n} = 0'01 \neq 0 \Rightarrow g \in O(f)$ y $g \in \Omega(f)$, por lo tanto es cierta

15- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt[4]{n}} = 0$ (Usando la regla de L'Hopital) $\Rightarrow g \in O(f)$, por lo tanto es falsa

16- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\log n} = \infty$ (Usando la regla de L'Hopital) $\Rightarrow g \in \Omega(f)$, por lo tanto es cierto

2. Sea a una constante real, $0 < a < 1$. Usar las relaciones $\subset$ y $=$ para ordenar los órdenes de complejidad de las siguientes funciones:

$n^2 \log(n)$, $n^3 \log(n)$, n^3, n^{3+a}, $(1+a)^n$, $(n^4+4n+\log_3 n)^3$, $\frac{n^2}{\log(n)}$, 3^n

$$\frac{n^2}{\log(n)} \subset n^2\log(n) \subset n^3 \subseteq n^{3+a} \subseteq n^3\log(n) \subset (n^4+4n+\log_3 n)^3 \subset (1+a)^n \subset 3^n$$

3. Encontrar el orden de complejidad de las siguientes recurrencias:

a) $t(0) = 0$

$t(1) = 5$

$t(n) = 2t(n-1) + n$ para $n \geq 2$

Tenemos que $a = 2$; $b = 1$; $c = 1$; $K = 1$

La solución debe encontrarse en:

$$t(n) \in \begin{cases} \Theta(n^K) & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{K+1}) & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n \text{ div } b}) & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Como $a = 2 > 1$, entonces $t(n) \in \Theta(2^{n/1})$, es decir $\boxed{t(n) \in \Theta(2^n)}$

b) $t(0) = 0$

$t(1) = 5$

$t(2) = 40$

$t(n) = t(n-1) + 2n^3$ para $n \geq 3$

Tenemos que $a = 1$; $b = 1$; $c = 2$; $K = 3$

La solución debe encontrarse en:

$$t(n) \in \begin{cases} \Theta(n^K) & \text{si } a < 1 \\ \Theta(n^{K+1}) & \text{si } a = 1 \\ \Theta(a^{n \text{ div } b}) & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

Como $a = 1$, entonces $t(n) \in \Theta(n^{3+1})$, es decir $\boxed{t(n) \in \Theta(n^4)}$

c) $t(0) = 0$

$t(1) = 2$

$t(n) = t(n/2) + 10n^2$ para $n \geq 2$

Tenemos que $a = 1$; $b = 2$; $c = 10$; $K = 2$

La solución debe encontrarse en:

$$t(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < b^k \\ \Theta(n^k \log n) & \text{si } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$

Como $a = 1 < \underset{b^k}{4}$, entonces $\boxed{t(n) \in \Theta(n^2)}$

Relación límites/órdenes. Ejercicio 0. Hacer lo mismo para $\Omega()$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \Omega(f) = \Omega(g)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Rightarrow \Omega(f) \supset \Omega(g)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty \Rightarrow \Omega(f) \subset \Omega(g)$