

Master - Arbeit

Title of Master Thesis

vorgelegt von

David Symhoven

an der



FACHBEREICH PHYSIK
LEHRSTUHL FÜR PLASMA AND COMPUTATIONAL PHYSICS

Gutachter:

PROF.DR.HARTMUT RUHL

München, 2017

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst zu haben und keine anderen als die in der Arbeit angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

München, Datum der Abgabe

München, 31.03.2017, David Symhoven

Abstract:
Blah Blah Blah Mr. Freeman

Symbole und Konstanten

Plank'sches Wirkungsquantum	h	$6.62606957(29) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Plank'sches Wirkungsquantum	\hbar	$1.054571726(47) \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Boltzmann - Konstante	k_B	$1.3806488(13) \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Avogadro - Konstante	N_A	$6.02214129(27) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Permittivität des Vakuums	ϵ_0	$8.85418781762 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
atomare Masseneinheit	u	$1.660538921(73) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenvolt	eV	$1.602176565(35) \cdot 10^{-19} \text{ J}$
1 Angström	\AA	10^{-10} m
1 Nanosekunde	ns	10^{-9} s
1 Pikosekunde	ps	10^{-12} s
1 Femtosekunde	fs	10^{-15} s
Ort	\vec{r}	$[\text{m}]$
Geschwindigkeit	\vec{v}	$[\text{m s}^{-1}]$
Beschleunigung	\vec{a}	$[\text{m s}^{-2}]$
Impuls	\vec{p}	$[\text{kg m s}^{-1}]$
Kraft	\vec{F}	$[\text{N}]$
Masse	m	$[\text{kg}]$
Energie	E	$[\text{J}]$
Temperatur	T	$[\text{K}]$
Druck	p	$[\text{N m}^{-2}]$
Entropie	S	$[\text{J K}^{-1}]$
Potential	V	nicht eindeutig
chemisches Potential	μ	nicht eindeutig
Zeit	t	$[\text{s}]$
diskretisierte Zeit	Δt	$[\text{s}]$
Frequenz	ω	$[\text{s}^{-1}]$
Gesamtteilchenanzahl	N	
Anzahl der Freiheitsgerade	f	
Nabla - Operator	∇	$\left(\frac{\partial}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial r_n} \right)$
Laplace - Operator	Δ	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}$
Hamilton - Operator	\mathcal{H}	$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r})$
Lagrange - Funktion	\mathcal{L}	$\mathcal{L} = T - V$

Inhaltsverzeichnis

Deklaration	ii
1 Einleitung	2
2 Grundlagen	3
2.1 Liénard-Wiechert Potentiale	3
2.2 Numerik	3
2.2.1 Bewegungsgleichung	3
2.2.2 Euler-Verfahren	3
2.2.3 Leap-Frog-Verfahren	6
2.2.4 Boris-Pusher	6
2.2.5 Vay-Pusher	6
2.3 Hybride Felder	6
2.3.1 Maxwell-Gleichungen	6
2.3.2 Maxwell-Solver	6
2.3.3 Nah-und Fernfelder	6
Literaturverzeichnis	8

Einleitung

Now it's going loose ...^[1]

Grundlagen

2.1 Liénard-Wiechert Potentiale

2.2 Numerik

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit dem numerischen Aspekt der Arbeit. Wir stellen die zugrunde liegende Bewegungsgleichung und deren Historie vor. Anschließend gehen wir auf diverse Methoden ein, mit Hilfe derer sich Differentialgleichungen lösen lassen. Über die vergangenen Jahre wurden unzählige Verfahren entwickelt, wobei jedes seine Stärken und Schwächen hat. Deshalb sollte zunächst immer wohl überlegt sein, was erreicht werden soll. Einige Methoden sind sehr einfach, dafür unpräzise, andere sind sehr aufwändig zu implementieren, dafür sehr genau. Eine Methode für alle Probleme gibt es leider nicht.

Im Anschluss wollen wir dann noch die numerische Komplexität ausgewählter Algorithmen definieren und berechnen.

2.2.1 Bewegungsgleichung

Wie aus der Mechanik bekannt, ist die Dynamik eines Teilchens durch die auf ihn wirkenden Kräfte vorgeschrieben. In unserem Fall wirkt eine Kraft aufgrund von elektrischen und magnetischen Feldern. Dies können zum einen externe Felder, aber auch Felder sein, die durch die Bewegung anderer Teilchen entstehen, wie wir im Abschnitt 2.1 bereits gesehen haben.

Unsere Systemdynamik wird durch die *Lorentz-Newton* Gleichung beschrieben

$$\begin{aligned}\frac{dx^\mu}{d\tau} &= u^\mu \\ \frac{du^\mu}{d\tau} &= F^\mu{}_\nu u^\nu + g^\mu,\end{aligned}\tag{2.1}$$

deren Herleitung länglich ist und wir deshalb auf Literatur verweisen möchten. Der Term $F^\mu{}_\nu$ beschreibt den elektromagnetischen Feldstärketensor

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.2}$$

Der Dämpfungsterm g^μ berücksichtigt den Fakt, dass bewegte Ladungen Felder abstrahlen und dadurch kinetische Energie verlieren. Die Strahlungsdämpfung wurde erstmals durch Max Abraham und Hendrick Lorentz in ihrer gleichnamigen Gleichung im Rahmen der klassischen Elektrodynamik behandelt. 1938 verallgemeinerte Dirac dann die Gleichung, unter Berücksichtigung der Relativitätstheorie. Wir wollen uns nun damit beschäftigen, wie wir die Bewegungsgleichung (2.1) numerisch integrieren können.

2.2.2 Euler-Verfahren

Das wohl einfachste aller Verfahren ist das explizite *Euler*-Verfahren. Es ist sehr schnell zu implementieren, aber auch sehr unpräzise, wie wir in Kürze sehen werden. Bevor wir uns aber

mit den Details des expliziten Euler-Verfahrens beschäftigen, müssen wir über die Voraussetzungen sprechen, die alle Verfahren gemeinsam haben. Ausgangspunkt ist immer ein System erster Ordnung der Form

$$\begin{aligned}\frac{dx^\mu}{d\tau} &= u^\mu \\ \frac{du^\mu}{d\tau} &= f^\mu(x^\nu, u^\nu) \\ x^\mu(\tau_0) &= x_0^\mu \\ u^\mu(\tau_0) &= u_0^\mu.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Systeme höherer Ordnung können immer auf ein System erster Ordnung reduziert werden. Um die Bewegungsgleichung numerisch lösen zu können, muss der Definitionsraum diskretisiert werden. Dazu wird das Zeitintervall in N äquidistante Teilintervalle h zerlegt, sodass

$$h := \Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$$

gilt. Die Idee ist nun, dass man ausgehend von den Startwerten x_0^μ und u_0^μ , iterativ jeden weiteren Punkt der Trajektorie $x_i^\mu = x^\mu(\tau_i)$ berechnet. Um diese Punkte berechnen zu können, müssen allerdings auch die Differentialoperatoren in (2.3) diskretisiert werden. Darin unterscheiden sich nun die Verfahren. Grundlage des Euler-Verfahrens bildet eine Taylorentwicklung erster Ordnung der Integrationsvariablen x^μ in der Variable τ um den Zeitpunkt τ_i

$$x^\mu(\tau_{i+1}) = x^\mu(\tau_i) + \frac{dx^\mu}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_i} \underbrace{(\tau_{i+1} - \tau_i)}_{=h} + \mathcal{O}(h^2).\tag{2.4}$$

Analoges Vorgehen für u^μ und auflösen nach $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ bzw. $\frac{du^\mu}{d\tau}$ liefert schließlich

$$\begin{aligned}\frac{x_{i+1}^\mu - x_i^\mu}{h} &= u_i^\mu \\ \frac{u_{i+1}^\mu - u_i^\mu}{h} &= f^\mu(x_i^\nu, u_i^\nu).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Diese Art der Diskretisierung ermöglicht eine sehr einfache Berechnung der Punkte x_i^μ gemäß

$$\begin{aligned}x_{i+1}^\mu &= x_i^\mu + h u_i^\mu \\ u_{i+1}^\mu &= u_i^\mu + h f^\mu(x_i^\nu, u_i^\nu).\end{aligned}\tag{2.6}$$

Um nun die Güte dieser Approximation zu bestimmen, benötigen wir den Begriff der *Konsistenz* - und *Konvergenzordnung*.

2.2.2.1 Konsistenz - und Konvergenzordnung

Definition 2.2.1 (Verfahrensfehler und Konsistenzordnung) Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a, b] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} y(\tau) &= f(\tau, y(\tau)), \\ y(\tau_0) &= y_0.\end{aligned}\tag{2.7}$$

(a) Die Größe

$$\eta(\tau, h) := y(\tau) + hf(\tau, y(\tau)) - y(\tau + h) \quad \text{für } \tau \in [a, b], \quad 0 < h \leq b - \tau\tag{2.8}$$

heißt lokaler Verfahrensfehler des Einschrittverfahrens im Punkt τ zur Schrittweite h .

(b) Das Einschrittverfahren besitzt die Konsistenzordnung $p \geq 1$, wenn für den lokalen Verfahrensfehler die Ungleichung

$$||\eta(\tau, h)|| \leq Ch^{p+1} \quad \text{für } \tau \in [a, b], \quad 0 < h \leq b - \tau, \quad (2.9)$$

mit einer von τ und h unabhängigen Konstanten $C \geq 0$ erfüllt ist.

Anschaulich ist der Verfahrensfehler die Differenz zwischen der exakten Lösung $y(\tau + h)$ und dem Ergebnis, das man durch das Einschrittverfahren erhält, wenn man von der exakten Lösung zum früheren Zeitpunkt $y(\tau)$ startet. Abbildung 2.1 veranschaulicht die Situation.

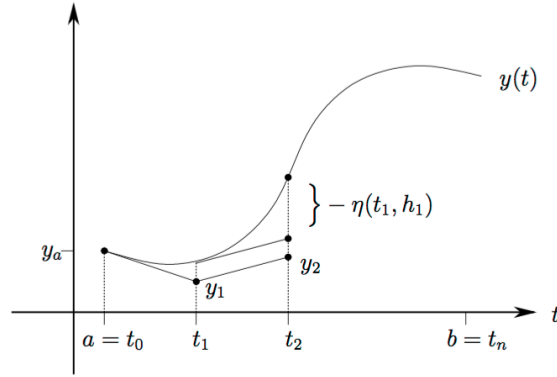


Abbildung 2.1: Veranschaulichung des Verfahrensfehlers eines Einschrittverfahrens. [2]

Wir wollen nun die Definitionen anwenden, um die Konsistenzordnung des Euler-Verfahrens zu bestimmen.

Ausgangspunkt ist das System (2.1). Dabei konzentrieren wir uns nur auf die Gleichung für u^μ , da x^μ einfach aus u^μ integriert werden kann. Nach Definition 2.2.1 gilt für unser System

$$y = u^\mu. \quad (2.10)$$

Wir erhalten

$$\eta(\tau, h) = u^\mu(\tau_i) + hf^\mu(x^\nu, u^\nu) - u^\mu(\tau_{i+1}). \quad (2.11)$$

Den letzten Term berechnen wir mithilfe einer Taylorentwicklung analog zu (2.4)

$$u^\mu(\tau_{i+1}) = u^\mu(\tau_i) + h \left. \frac{du^\mu}{d\tau} \right|_{s=\tau_i} + h^2 \left. \frac{d^2u^\mu}{d\tau^2} \right|_{s=\tau_i}. \quad (2.12)$$

Einsetzen von (2.12) in (2.11) liefert

$$\begin{aligned} \eta(\tau, h) &= u^\mu(\tau_i) + h \frac{du^\mu}{d\tau} - u^\mu(\tau_{i+1}) \\ \eta(\tau, h) &= u^\mu(\tau_i) + h \frac{du^\mu}{d\tau} - u^\mu(\tau_i) - h \frac{du^\mu}{d\tau} - h^2 \frac{d^2u^\mu}{d\tau^2} \\ \eta(\tau, h) &= -\frac{d^2u^\mu}{d\tau^2} h^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

da $\frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu(x^\nu, u^\nu)$ für das Euler-Verfahren gilt. Daraus folgt

$$|\eta(\tau, h)| \leq Ch^2 \quad \text{mit } C := \frac{1}{2} \max_{\tau \in \mathcal{D}(u^\mu)} \left| \frac{d^2u^\mu}{d\tau^2} \right|. \quad (2.14)$$

Das Euler-Verfahren hat also Konsistenzordnung eins.

2.2.3 Leap-Frog-Verfahren

2.2.4 Boris-Pusher

2.2.5 Vay-Pusher

2.3 Hybride Felder

2.3.1 Maxwell-Gleichungen

2.3.2 Maxwell-Solver

2.3.3 Nah-und Fernfelder

Abbildungsverzeichnis

2.1	Verfahrensfehler	5
-----	----------------------------	---

Literaturverzeichnis

- [1] M. P. Allen and D. J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*. Clarendon Press, New York, NY, USA, 1989.
- [2] Christian Kanzow. *Numerische Mathematik II*. 2005. [Online; accessed 13-Oktober-2016].