Multiple Integrals

aaron.ilizarbe.s

Las integrales de más de una varibale son muy comunes en la física, estos problemas pueden abordarse usando generalizaciones de los métodos vistos anteriormente. Por ejemplo, consideremos la integral:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \tag{1}$$

Escribimos:

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx \tag{2}$$

y,

$$I = \int_0^1 F(y) dy \tag{3}$$

Es decir, para calcular numéricamente la integral, primerp evaluamos $F(y)$ y luego usamos este valor para evaluarlo en la inegral (3). Por ejemplo, si hacemos la integral usando la cuadratura Gaussiana con el mismo número N de puntos para ambas x, y integrales, tenemos:

$$F(y) \simeq \sum_{i=1}^{N} \omega_i f(x_i, y) \quad \text{y} \quad I \simeq \sum_{j=1}^{N} \omega_j F(y_j) \tag{4}$$

Una forma alternativa para ver el cálculo es la sustitución de la primera suma en la segunda para tener la fórmula del producto de Gauss-Legendre:

$$I \simeq \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \omega_i \omega_j f(x_i, y_j) \tag{5}$$

Esta expresión tiene una forma similar a la integración estándar para integrales simples, con una suma sobre valores de la función $f(x, y)$ en el conjunto de puntos de muestra, multiplicando por los pesos apropiados. (5) representa un tipo de cuadratura Gaussiana bidimensional, con pesos $\omega_i \omega_j$ distribuida sobre una red bidimensional de puntos. Véase la Figura 1.

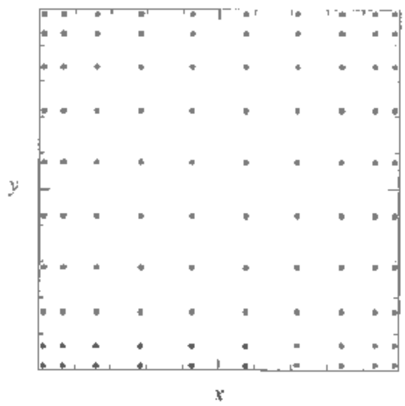

Figura 1: Puntos de muestra para cuadratura Gaussiana en dos dimensiones

En principio, no hay razón para que los puntos de muestra estén en un cuadrícula. Pueden estar en cualquier lado, podemos usar cualquier conjunto de ubicaciones 2D y pesos adecuados que den una buena estimación de la integral. Para una dimensión la mejor opción es la cuadratura Gaussiana, para dos, tres y más dimensiones, debemos preguntarnos cuál es la mejor elección. Esta respuesta no se conoce en general, hay algunos resultados para casos particulares, pero no una respuesta general. Una elección común es la *Secuencia de Sobol.* Esta secuencia y conjuntos de puntos similares son conocidos como *conjuntos de puntos de baja discrepancia* o a veces *Conjunto de puntos cuasi-aleatorios.*

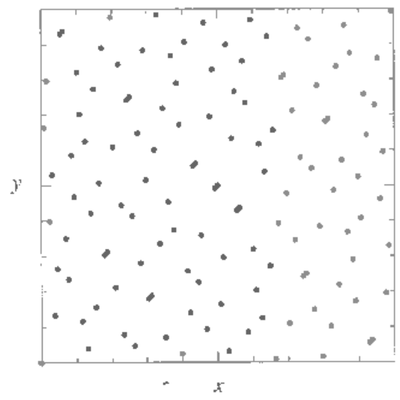

Figura 2: Secuencia de Sobol, N = 128

Otra elección común de puntos muestra es escogerlos completamente aleatorios, el método de integracíon de Monte Carlo.

Si ahora consideramos una integral, en la cual los límites dependen las variables:

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y dx f(x,y) \tag{6}$$

Podemos usar el mismo enfoque como antes para evaluar esta integral. Definimos:

$$F(y) = \int_0^y = f(x,y)dx \tag{7}$$

tal que,

$$I = \int_0^1 F(y)dy \tag{8}$$

y entonces resolver ambas integrales con un método conocido, como la cuadratura de Gauss. Nuevamente, el resultado es una regla de integación bidimensional, pero ahora con puntos de muestra arreglados en un espacio triangular.

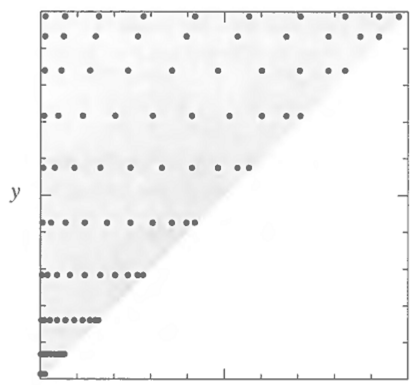

Figura 3: Integración sobre un dominio no rectangular

Este método funcionará y será una respuesta razonable, pero no será la ideal. En particular, note cómo los puntos muestra son amontonados en la esquina inferior izquierda del dominio de integración y cómo se apartan en la parte superior. Esto significa que, en igualdad de condiciones, tendremos una precisión menor en la parte superior del dominio de la integral.