Mandelbrot set 的生成与探索

明安图

统计学　319101841

摘要

Mandelbrot 集是使得函数 $f(z) = z^2 + c$ 从 $z = 0$ 时开始迭代不会趋于无穷的复数 c 的集合. 本文基于 bmp 位图提供了一种 Mandelbrot set 可视化算法以及具体实现方法

关键词： Mandelbrot set

1　引言

Mandelbrot 集的图像表现出一个精心设计的无限复杂的边界，在放大倍率增加的情况下，它揭示了越来越精细的递归细节; 在数学上，人们会说曼德布洛特集合的边界是分形曲线. 此递归细节的“样式”取决于所检查的集合边界的区域. 曼德布洛特集合图像可以通过对复数进行采样和测试来创建，用于每个采样点 c, 序列 $f(0), f(f(0)) \cdots$ 是否趋于无穷.

2　问题背景介绍

Mandekbrot set 起源于复杂动力学, 法国数学家皮埃尔 · 法图 (Pierre Fatou) 和加斯顿 · 朱莉娅（Gaston Julia）在 20 世纪初首次研究了这一领域。这个分形于 1978 年由 Robert W. Brooks 和 Peter Matelski 首次定义和绘制，作为对 Kleinian 群研究的一部分 [2].Mandelbrot 集是复平面上 c 值的集合，对于这个集合，二次映射迭代下的临界点轨道

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

保持有界. 即如果 c 属于 Mandelbrot 集，当且仅当对于所有 $n \geq 0, |z_n| \leq 2$.

3　数学理论

Mandelbrot set 基于以下定理 [1]:

Theorem 1 *0 的轨道趋于无穷当且仅当它在某些点上的模大于 2*

该定理特定于 $z \to z^2 + c$，但可以通过改变阈值 2 来适应其他多项式族. 算法伪代码如下:

Algorithm 1 Mandelbrot set algorithm

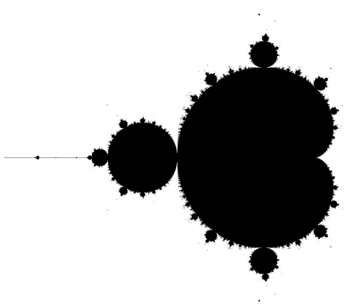
Input: Iteration N

Output: Mandelbrot set

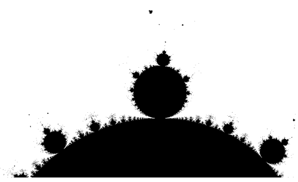
```
z ← 0
for each pixel p(a, b) of the image do
    c ← a + bi
    for i = 1 → N do
        if |z| > 2 then
            p ← white
            go to the next pixel
        else
            z → z^2 + c
        end if
    end for
    if z reached its natural end then
        p ← black
        go to the next pixel
    end if
end for
```

4 数值算例

迭代 100 次后的图像



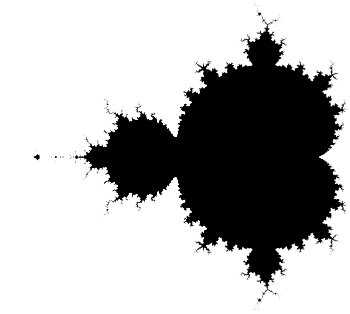
(a) 全图



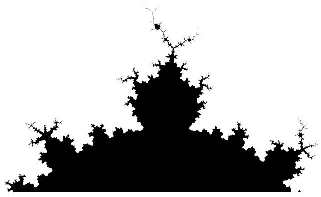
(b) 局部

图 1: 迭代 100 次

迭代 20 次的图像



(a) 全图



(b) 局部

图 2: 迭代 20 次

5 结论

比较上面的结果, 可以发现, 随着迭代次数的增加, 图像的光滑程度下降了, 边界上的小图与主图的连接部分变窄. 说明 Mandelbrot 集在当迭代次数趋于无穷时, 各个部分之间是完全相切的.

参考文献

[1] Arnaud Cheritat. Mandelbrot set. https://www.math.univ-toulouse.fr/~cheritat/wiki-draw/index.php-Mandelbrot_set#cite_note-3. Accessed on February 25 2014.

[2] Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set.