Índice general

Teoría y definiciones **1**
Espacios topológicos 2
Topología métrica 8
Topología cociente 10
Grupos 12
Grupos conmutadores, grupos derivados 18
Grupos topológicos 21
Topología compacto-abierta 24
Homogeneidad de espacios topológicos 25

Simplicidad del grupo Homeo(S^1) **29**
El grupo topológico Homeo(S^1) 30
Simplicidad del grupo Homeo(S^1) 33

La simplicidad de grupos de homeomorfismos **37**
Conjunto de Cantor 38
La simplicidad del grupo de Homeomorfismos del conjunto de Cantor 40

Teoría y definiciones

Introducción

A lo largo de este texto utilizaremos los resultados de topología general y teoría de grupos. Nuestra primera meta consta de introducir notación y teoremas correspondientes a espacios topológicos, operadores topológicos, homemorfismos y finalmente llegar a espacios generados. El siguiente paso es usar teoría de grupos y vamos a retomar temas como los homomorfismos de grupos, grupos derivados para terminar en grupos simples.

Al final de este capítulo, hablaremos brevemente de grupos topológicos, en concreto de un espacio de homeomorfismos de un espacio topológico en donde vamos a demostrar mediante la topología compacto-abierta la continuidad de las operaciones de grupo. La bibliografía en que nos basamos es estándar, de libros de cursos o libros de las editoriales de la UNAM.

Espacios topológicos

Vamos a usar la notación estándar de conjuntos. La pertenencia de un elemento x a un conjunto X se denota por $x \in X$. Dados dos conjuntos A y B denotaremos la contención del conjunto A en el conjunto B por $A \subset B$ y la igualdad de conjuntos $A = B$ representa que se dan las contenciones $A \subset B$ y $B \subset A$.

La unión del conjunto A con B se representa por $A \cup B$, la intersección del conjunto A con el conjunto B se representa por $A \cap B$. $A \setminus B$ representa el conjunto de los elementos que están en A pero que no están en B en particular a $X \setminus B$ le diremos el complemento de B en X, finalmente $\mathcal{P}(X)$ representa el conjunto potencia de X, es decir, la familia $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$. Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función, para cualquier $A \subset X$ el conjunto,

$$f(A) = \{y \in Y : \text{ existe } x \in A \text{ y } f(x) = y\}$$

será llamado imagen directa de A bajo f. Por otro lado dado $B \subset Y$ el conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

será llamado la imagen inversa del conjunto B bajo f.

Observación 1. En general tomar la imagen inversa de una imagen directa o en orden alterno, no se obtiene como resultado el mismo conjunto. Pero se tiene que

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)) &\subset B \\ A &\subset f^{-1}(f(A)). \end{aligned}$$

La primera contención es igualdad si f es sobreyectiva y la segunda contención es igualdad si f es inyectiva, es claro que si f es biyectiva tenemos las dos igualdades.

Ejemplo 2. Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ dada por, $f(1) = f(3) = 1$, $f(2) = f(4) = 3$. Esta función no es inyectiva ni sobreyectiva. Consideremos a $\{1, 4\}$, notemos que $f^{-1}(\{1, 4\}) = \{1, 3\}$ pero $f(f^{-1}(\{1, 4\})) = \{1\}$. Por otro lado, consideremos a $\{1, 2\}$ y notemos que $f(\{1, 2\}) = \{1, 3\}$ pero que $f^{-1}(\{1, 3\}) = \{1, 2, 3, 4\}$.

En la práctica es usual no indicarse el dominio e imagen de una función pues implícitamente se da a entender que el lector no tiene inconveniente.

Definición 3. Sea X un conjunto y $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que τ es una **topología** para X si τ cumple que;

1. $\emptyset$, X son elementos de τ.
2. Para cada subfamilia finita de τ, $\{A_i\}_{i=1}^n$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un elemento de τ.
3. Para cada subfamilia $\{A_i\}_{i \in J}$ donde I es un familia de índices arbitrario, se tiene que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un elemento de τ.

Por **espacio topológico** nos referimos a un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología para X. Denotaremos al espacio (X, τ) por X_τ. A los elementos U de τ les llamaremos **conjuntos abiertos**. Un conjunto V se dice **cerrado** si es complemento de un conjunto abierto es decir existe U conjunto abierto tal que $V = X \setminus U$.

Nota 4. La segunda condición se conoce como **cerradura bajo intersecciones finitas** o que **familia es cerrada bajo intersecciones finitas.** La tercera condición se conoce como **cerradura bajo uniones arbitrarias** o que **la familia es cerrada bajo uniones arbitrarias.**

Ejemplo 5. Sean X un conjunto y la familia 2^X, el par formado por $(X, 2^X)$ es un espacio topológico y es llamado **espacio discreto**. Por otro lado sea $\tau = \{\emptyset, X\}$, esta familia cumple la definición de topología, el espacio (X, τ) es llamado **espacio indiscreto**.

Además, si X contiene más de un punto, las familias 2^X y τ del ejemplo anterior son distintas pero se da la contención $\tau \subset 2^X$ notemos que en consecuencia un conjunto puede tener mas de una topología y entre ellas distintas.

La topología guarda información importante del conjunto X que nos puede ayudar a distinguir propiedades. En el ejemplo, los espacios discreto e indiscreto no distinguen mucho sobre X, estas dos topologías en este aspecto son triviales.

Convención 6. Cuando el contexto sea claro sobre el espacio topológico vamos prescindir de la notación de la topología y simplemente diremos que X es espacio topológico.

Ahora, un resultado que nos permitirá hablar de espacios topológicos en en subconjuntos, esto nos permitirá de hablar sin ambigüedades respecto a los ejemplos concretos que estudiaremos.

Teorema 7. Sea X un espacio topológico $Y \subset X$ entonces $\tau_Y = \{A \cap U : U \in \tau\}$ es una topología para Y. Por **subespacio** Y de X nos referimos al espacio (Y, τ_Y).

Convención 8. El tema que no vamos a estudiar los temas de bases y sistema de vecindades. Para estos temas tenemos en la bibliografía [13] capitulo 2, página 58 para bases de vecindades y capitulo 3, página 73 para bases para una topología.

La familia de conjuntos que a continuación vamos a detallar, nos da una manera de obtener espacios topológicos mediante un sistema de vecindades. Este ejemplo es muy rico en propiedades y en ocasiones un fuerte contraejemplo.

Ejemplo 9. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Definimos una familia de conjuntos mediante las siguientes condiciones;

1. dado $(x, y) \in X$ y $r > 0$ si $y > 0$ definimos el conjunto,

$$B_r((x, y), r) = \{(w, z) \in X : \|(x, y) - (w, z)\| < r\},$$

   donde hacemos énfasis que es la norma usual de $\mathbb{R}^2$ y $z \neq 0$.

2. Si $y = 0$ tomamos el conjunto ;

$$\beta((x, 0)) = B_r((x, r), r) \cup \{(x, 0)\}.$$

Hemos definido una familia de conjuntos sobre los puntos de X, esta familia de conjuntos induce una base para una topología sobre X y este espacio es conocido como **plano de Moore**.

Notemos que en este espacio $\mathbb{R} \times \{0\} \subset X$, pero la restricción al subespacio $\mathbb{R} \times \{0\}$ nos da un conjunto discreto mientras que la restricción al plano $\{(x, y) \in X : y > 0\}$ es el plano positivo en $\mathbb{R}^2$.

Vamos a referir el tema de axiomas de separación a los libros de [13] en el capítulo IX y [16] capítulo 5 puesto que hay que en los axiomas de separación hay que ser claros con la nomenclatura T_i. Pero nosotros vamos a trabajar con espacios métricos. Por lo que basta que hablemos de los espacios Hausdorff.

Para operadores topológicos utilizaremos la siguiente notación.

Definición 10. Sea X un espacio topológico y U subconjunto de X.

- Diremos que U es **vecindad abierta** de un punto x a, si $x \in U$ y $U \in \tau$. A la familia de vecindades de un punto x la denotaremos mediante $\mathcal{N}_x$.
- Al conjunto **interior** de A en X lo denotaremos por

$$\mathrm{Int}_X(A) = \{x \in A : \text{ existe } U \in \mathcal{N}_x \text{ tal que } U \subset A\}.$$

- Al conjunto **clausura** de A en X lo denotaremos por,

$$\mathrm{Cl}_X(A) = \{x \in A : \text{para toda } U \in \mathcal{N}_x \text{ se cumple que } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

- Denotaremos por $\mathrm{Fr}_X(A)$ al conjunto $\mathrm{Cl}_X(A^c) \cap \mathrm{Cl}_X(A)$ a este conjunto le llamaremos la **frontera** de A en X.

Convención 11. Cuando el contexto lo permita simplemente denotaremos por $\mathrm{Int}(A)$ al interior, $\mathrm{CL}(A)$ la clausura y $\mathrm{Fr}(A)$ a la frontera de A en X.

Definición 12. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es un espacio T_2 o Hausdorff si para cada x e $y \in X$ distintos existen U vecindad de X Y V vecindad de y tal que $U \cap V = \emptyset$.

En esta parte de la topología nos interesa estudiar los espacios mediante de las propiedades de X o de τ (incluso ambas) y compararlas mediante las de otros espacios, esto es, poder demostrar que un espacio desconocido tenga propiedades de espacios ya conocidos, por lo que podemos clasificar por medio relaciones entre espacios y trabajar con un espacio ya conocido o mas estudiado. Esta noción coloquialmente conocida como trabajar salvo homeomorfismo.

Definición 13. Sea X espacio topológico y una función $h : X \to X$.

1. Dado B subconjunto de X, $h|_B$ denotará la restricción $h : B \to h(B)$ de h a B.

2. Decimos que h es **continua** si para cada conjunto abierto U se cumple que $h^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.

3. Sea h una función continua y biyectiva. Decimos que h es un **homeomorfismo** si la función inversa de h, $h^{-1} : X \to X$ es continua.

Ejemplo 14. Sean X un conjunto con mas de un punto y las topologías 2^X y $\tau = \{\emptyset, X\}$. Consideremos la función

$$Id_X : X_\tau \to X_{2^X}$$

dada por

$$Id_X(x) = x.$$

Notemos que para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es un conjunto abierto en X_{2^X}, pero $Id_X^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ no lo es en X_τ. Sin embargo reescribiendo la función anterior de la siguiente manera,

$$Id_X : X_{2^X} \to X_\tau$$

dada por

$$Id_X(x) = x,$$

si es continua pues $Id_X^{-1}(X) = X$ el cual es un conjunto abierto, el caso $\emptyset$ es trivial. En particular, una función continua y biyectiva no siempre tiene inversa continua.

El siguiente resultado es conocido como el **lema de pegadura**

Proposición 15. Sean $\mathcal{U} = \{A_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de abiertos tales que $\bigcup \mathcal{U} = X$ y $f : X \to Y$ una función. Si $f_\alpha = f|_{A_\alpha}$ es continua para todo $\alpha \in A$ entonces f es continua.

Una curva cerrada simple es una trayectoria α tal que su restricción al intervalo abierto $(0,1)$ es inyectiva pero $\alpha(0) = \alpha(1)$.

Invariantes topológicos

Los invariantes topológicos son propiedades que una topología tiene y que éstas se preservan mediante homeomorfismos. Esto es sean X, Y espacios y $\mathcal{P}$ una propiedad topológica tal que X posee a $\mathcal{P}$ se dice que $\mathcal{P}$ es un **invariante topológico** si para todo homemorfismo $h : X \to Y$, Y tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

Además es importante mencionar el hecho de que un espacio pueda tener una propiedad $\mathcal{P}$ para una topología en particular, y no poseer la propiedad con otra topología definida en el mismo conjunto. Veremos dos de las propiedades más estudiadas e importantes del análisis moderno.

Compacidad

Definición 16. Sean X un espacio topológico y A subconjunto de X. Una familia de abiertos $(U_i)_{i\in I}$ es una **cubierta abierta** para A si $A \subset \bigcup_i U_i$. Por **subcubierta abierta** nos referimos a una subfamilia $(U_{i_j})_{j\in J}$ de $(U_i)_{i\in I}$ tal que $A \subset \bigcup_j U_{i_j}$.

Decimos que un espacio topológico es **compacto** si para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta abierta y finita para X. Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es compacto si lo es como subespacio.

Un teorema importante respecto a funciones continuas y conjuntos compactos es el siguiente teorema y puede consultarse en la página 121 de [16].

Teorema 17. Sea C un subconjunto compacto de X, para toda función continua $f : X \to Y$ el conjunto $f(C)$ es un conjunto compacto en Y.

Esto puede encontrarse en página 120 de [16].

Teorema 18. Sean X un espacio y un subconjunto $B \subset X$.

1. Si X es compacto y si B es cerrado entonces es compacto.
2. Si X es T_2 y si B es compacto entonces B es cerrado.

Una demostración puede encontrarse en [13], capítulo VIII, teorema 1.22. En palabras simples, la imagen continua de un conjunto compacto es compacta. Para el tema de funciones continuas. Ahora un resultado en $\mathbb{R}^n$ sobre la continuidad y espacios compactos.

Teorema 19. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $K \subset A$. Si f es una función continua y K es un conjunto compacto entonces f es uniformemente continua sobre K.

Una demostración de este teorema se puede encontrar en [4] capitulo 2, Teorema 2.5

Conexidad

Decimos que X es **disconexo** si existe abiertos U y V ajenos y no vacíos tales que $X = U \cup V$. Decimos que un espacio X es **conexo** si no es disconexo. Un subconjunto $Y \subset X$ es conexo (o disconexo) si lo es como subespacio.

El siguiente teorema se encuentra en [16] como Theorem 26.3.

Teorema 20. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Dado C un subconjunto conexo de X se tiene que $f(C)$ es un conjunto conexo.

Lo anterior se resume en que la imagen continua de un conjunto conexo es conexa. Vamos a continuar con el tema de la topología métrica, es un tema que con el cual se introducen los cursos de análisis matemático y nuestras primera nociones de topología.

Topología métrica

Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \to [0, \infty)$ es una función que satisface las siguientes condiciones;

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

A la función d le llamamos una **métrica** para X. Al par (X, d) le denotaremos por X_d.

Observación 21. La notación X_d hacemos énfasis es que X es el conjunto con métrica d, más adelante veremos que un espacio métrico es un espacio topológico por lo que X_d es el equivalente a X_τ donde τ es la generada por la métrica salvo que ahora indicamos la cualidad métrica de esta topología.

Ejemplo 22. Dados $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, la norma euclidiana,

$$d(\vec{a}, \vec{b}) := \|\vec{a} - \vec{b}\|$$

define una métrica en $\mathbb{R}^n$.

En general espacios normados son espacios métricos.

Ejemplo 23. Sean X un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida mediante:

$$d(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad a \neq b; \\ 0, & \text{si} \quad a = b. \end{cases}$$

d es conocida como la **métrica discreta** y X_d como **espacio métrico discreto**.

Ejemplo 24. Sea X_d espacio métrico. Definimos,

$$\bar{d}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 < d(a,b); \\ d(a,b) & \text{si} \quad d(a,b) < 1. \end{cases}$$

$\bar{d}$ es una métrica para X con $\bar{d}(a,b) \leq 1$ para cuales quiera a, $b \in X$.

En general tenemos que una métrica es equivalente a una métrica acotada. Esto es un paso interesante, puesto que en $\mathbb{R}^n$ un espacio es compacto si y solo si es cerrado y acotado, el conocido teorema de Heine-Borel. En espacios métricos podemos construir un espacio discreto, cerrado y acotado de tal manera que no sea compacto.

Definición 25. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X_d$. Definimos a la **bola abierta** de centro x y radio ε como

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

De manera parecida definimos a la **bola cerrada** de centro x y radio ε como

$$\overline{B}_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

Para diferenciar las métricas que X pueda tener (y por tanto las bolas de X) denotaremos $B_d(x, \varepsilon)$ y diremos que es una d-**bola.** En caso de que no haya confusión simplemente denotaremos $B(x, \varepsilon)$. Tenemos los conceptos necesarios para definir una topología para un espacio métrico.

Proposición 26. Sea X espacio métrico. La familia $\{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ de todas las d-bolas es base para una topología sobre X.

Esto puede demostrarse usando el teorema 5.4 de [16].

Teorema 27. Si x, $y \in X_d$ con $x \neq y$ entonces existen vecindades U de x y V de y tales que $U \cap V = \emptyset$.

Dados x, y puntos distintos en un espacio métrico. Consideremos a $D = d(x, y)$ del hecho que $B(x, D/2) \cap B(y, D/2) = \emptyset$.

Observación 28. El teorema anterior nos dice que los espacios métricos son espacios Hausdorff.

Terminamos esta parte con la siguiente definición que es muy usada en los artículos de [9], [15] y [10].

Definición 29. Decimos que X es un **continuo** si es un espacio métrico, compacto y conexo.

Al estudiar espacios métricos nos vemos en la opción de no estudiar los axiomas de separación, que es una parte muy importante de la topología general. De nuevo, recomendamos el siguiente texto donde se puede profundizar este tema. Es claro que no hablar de este tema nos deja un estudio sesgado, pero usaremos solo un axioma de separación hasta la parte de la topología del grupo de homeomorfismos de la circunferencia. Incluso, solo es necesario concordar el tercer axioma separación.

Topología cociente

En topología se estudia distintas maneras de obtener espacios topológicos como el subespacio, los productos pero otra mas compleja es la topología generada por funciones o familia de funciones, en sí es obtener un espacio topológico donde una función o una familia de funciones son continuas. En [7], se explica de manera completa este tema, desde el capitulo 3 hasta el 5. Sin embargo tomaremos las definiciones de [13] y de [12] pues son mas extensos en detalles y de lectura mas cómoda.

Definición 30. Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. La topología mas fina en Y para la cual f es continua se llama **topología de identificación** inducida por f. A f se le llama **identificación**.

Dado X un espacio y $A \subset X$, consideremos a $Y = (X \setminus A) \cup \{A\}$, el subespacio A ha sido colapsado a un punto $\{A\}$, sea

$$q(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in X \setminus A \\ A \text{ si } x \in A. \end{cases}$$

la topología final inducida por q es llamada la **topología identificación**; el espacio resultante se llama **espacio de identificación** y a q se le llama **identificación**.

Los resultados sobre la topología de identificación se pueden consultar en [13] página 87. Veamos ahora los espacios cocientes. Sean X espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia en X. Recordemos que una relación de equivalencia induce una partición de un conjunto en subconjuntos ajenos que son las clases de equivalencia, las cuales se definen por $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$. La familia de las clases de equivalencia es denotado por $X/\sim$ es decir,

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\},$$

tenemos una función sobreyectiva,

$$f : X \to X/\sim$$

dada por

$$f(x) = [x].$$

Definición 31. Con la topología de identificación inducida por f a la familia $X/\sim$ se llama espacio cociente de X bajo la relación $\sim$.

Ejemplo 32. Sea $f : \mathbb{R} \to S^1$ la función exponencial, $f(s) = e^{2\pi is}$ es una identificación talque $f(s) = f(t)$ si y solo si $t - s \in \mathbb{Z}$.

El siguiente teorema se encuentra en [13] como teorema IV.2.16.

Teorema 33. Sea $f : X \to Y$ una identificación. Si se define una relación tal que $x \sim y$ si y solo si $f(x) = f(y)$, entonces f determina un homeomorfismo $\tilde{f} : X/\sim \to Y$.

Ejemplo 34. Consideremos a $\mathbb{Z}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ y la relación; $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$. Esta relación es de equivalencia. En efecto,

1. $x - x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
2. Supongamos que $x - y \in \mathbb{Z}$, entonces claramente $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$ y por tanto $y \sim x$.
3. Si $x - y \in \mathbb{Z}$ y $y - z \in \mathbb{Z}$ resta notar que
$$x - z = x - y + y - z$$
el cual es un numero entero. Por tanto $x \sim z$.

Del teorema anterior y de la función exponencial se tiene que $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong S^1$. La función $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$ dada por $\pi(x) = [x]$ está bien definida y es una función cociente. Definimos a Homeo($\mathbb{R}$) los homeomorfismos monótonos crecientes de la recta que cumplen la propiedad,

$$\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1.$$

Este homeomorfismo induce un homeomorfismo,

$$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

dado por $f = \pi(\tilde{f})$. Notemos que de esto se induce un homeomorfismo de la circunferencia en la circunferencia $f : S^1 \to S^1$. Un homeomorfismo de este tipo se dice que **preserva orientación** si es creciente y no la preserva si es decreciente.

Concluimos esta sección con toda la notación referente a topología que vamos a usar o se usan en los artículos consultados. En caso dado se use otro resultado será tratado en la respectiva sección.

Grupos

En este texto estudiaremos resultados de teoría de grupos, para ello planteamos la notación necesaria para desarrollar dichos temas. Se recomienda al lector para el desarrollo de este tema las siguientes referencias bibliográficas, para la secuencia del desarrollo de los temas usamos a [17] y la notación de [3].

Definición 35. Sea G un conjunto no vacío. Por grupo nos referimos a una terna $(G, \circ, e)$ donde $\circ : G \times G \to G$ una operación en G y e un elemento distinguido de G tales que;

1. La operación $\circ$ es asociativa.

2. para cada $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $\circ(g,h) = \circ(h,g) = e$. A h se le llamara un inverso de g.

3. Para todo $g \in G$ se cumple que $\circ(g,e) = \circ(e,g) = g$.

Convención 36. Para evitar entrar en resultados introductorios de grupos como con los teoremas de la unicidad de los elementos e y los inversos recurrimos a [17] y además denotaremos simplemente por gh a la operación $\circ(g,h)$, en otras palabras, hacemos el abuso de notación, $\circ(g,h) := gh$.

Una cuestión muy sencilla es que si tomamos un conjunto con un solo elemento $G = \{g\}$ de manera simple podemos definir, $\circ(g,g) = g$ por lo que es g es el elemento identidad y g es su propio inverso bajo $\circ$ y $\{g\}$ es un grupo.

Pero, si G es un grupo con mas de un elemento, no es necesario que bajo la operación de G se tenga que $gg = g$. Aunque si pasa cuando $g = e$, por lo que tenemos una clase de no vacía de grupos contenidos en un grupo. Lo anterior muestra la necesidad de los inversos y del elemento e en los posibles grupos contenidos (como conjuntos) en un grupo arbitrario G.

Definición 37. Sea G un grupo y subconjunto H de G. Decimos que H es **subgrupo** de G denotado por $H \leq G$, si la operación $\circ : H \times H \to G$ es una operación de grupo en H.

En otras palabras, H es por si mismo un grupo. Sea e_H la identidad bajo H entonces para e_G la identidad de G se tiene por definición que $e_H e_G = e_H$ en G y también en H, por la unicidad de la identidad, e_G es la identidad en H y ahora sin ambigüedad, $e_H = e_G$ para todo subgrupo de G, por simplicidad diremos a e para referirnos a e_G. Sea $h \in H$ y h_H^{-1} su inverso en H, notemos que $h_G^{-1}h = e = h_H^{-1}h$. Finalmente note que $\{e\}$ es un subgrupo contenido en todo subgrupo de G.

Observación 38. Sea $X \subset G$ denotemos por $\langle X \rangle$ a la intersección de los subgrupos de G que contienen a X. $\langle X \rangle$ es un subgrupo de G que contiene a X. Dicho grupo es llamado el **grupo generado por** X. Si X es finito, $X = \{a_1, \cdots, a_n\}$ entonces $\langle X \rangle$ es denotado por $\langle a_1, \cdots, a_n \rangle$. Más aún si $X = \emptyset$ notemos que $\langle X \rangle = \{e_G\}$ el grupo trivial.

El siguiente resultado es tomado de [2] como proposición 3.3.1.

Proposición 39. Si H es un subgrupo que contiene a X entonces $\langle X \rangle \subset H$.

La proposición anterior nos da una propiedad minimal respecto a la contención de X. En otras palabras $\langle X \rangle$ es el mínimo subgrupo que contiene a X.

Definición 40. Sea G un grupo y $X \subset G$ no vacío. Una **palabra** en X es un elemento $w \in G$ de la forma

$$w = x_1^{a_i} \cdots x_n^{a_n},$$

donde $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_i \in X$ y $a_i \in \mathbb{Z}$ para toda i. Denotamos por $\mathbf{W}(X)$ el conjunto de todas la palabras de X. Observemos que $X \subset \mathbf{W}(X)$ además nos es conveniente definir a $\mathbf{W}(\emptyset) := \{e_G\}$.

El siguiente resultado puede encontrarse en imate página 85 3.3.4

Teorema 41. Sea $X \subset G$ se tiene que $\langle X \rangle = \mathbf{W}(X)$.

De esta manera tenemos una descripción de los elementos de $\langle X \rangle$ es decir, para cada $w \in \langle X \rangle$ se tiene una representación mediante,

$$w = x_1^{a_i} \cdots x_n^{a_n},$$

incluso se puede tomar a los elementos $a_i \in \{-1, 1\}$ en algunos caso es importante tener la simetría de X, el conjunto $X^- = \{x^{-1} | x \in X\}$ pero dependerá de la utilidad de la descripción. Ahora estableceremos la notación para clases laterales que nos permitirá desarrollar el resto de nuestro trabajo.

Definición 42. Sea G un grupo y subconjuntos H, K de G.

1. El conjunto KH se define como $KH = \{kh : k \in K \text{ y } h \in H\}$. En particular cuando K conste de un solo elemento, $K = \{k\}$ denotaremos al conjunto KH por kH.

2. Para todo $g \in G$ el conjunto $gH = \{gh : h \in H\}$ le llamaremos **clase lateral izquierda**; análogamente por **clase lateral derecha** nos referimos al conjunto $Hg = \{hg : h \in H\}$. A la familia $H_{der} \setminus G = \{gH : g \in G\}$ le llamaremos la familia de clases laterales derechas de H y análogamente a $H_{izq} \setminus G = \{Hg : g \in G\}$ le llamaremos la familia de clases laterales derechas de H.

Observación 43. De la definición anterior tenemos unas observaciones.

1. Las clases de un conjunto forma una partición de G y por tanto las clases inducen una relación de equivalencia.

2. Más aún existe una correspondencia entre clases laterales. Sea

$$\begin{aligned} \varphi : G/H_d &\to G/H_i \\ gH &\mapsto Hg^{-1} \end{aligned}$$

esta es una función cambia una clase lateral derecha a una izquierda. Veamos que es una función biyectiva. La función es sobre, pues para Hg y para el elemento $g \in G$ tenemos que g^{-1} es tal que $\varphi(g^{-1}H) = Hg$. Resta ver que es inyectiva, sean g_1H y g_1H clases derechas y supongamos que

$$Hg_1^{-1} = \varphi(g_1H) = \varphi(g_2H) = Hg_2^{-1}$$

Sea $g_1h_1 \in g_1H$ notemos que

$$g_1h_1(h_1^{-1}g_1^{-1}) = e$$

como $Hg_2^{-1} = Hg_1^{-1}$ existe h_2 tal que $h_2g_2^{-1} = h_1^{-1}g_1^{-1}$, así en la ecuación previa tenemos que,

$$g_1h_1(h_2g_2^{-1}) = e$$

es decir, $g_1h_1 = g_2h_2^{-1}$ dando la contención $g_1H \subset g_2H$, la contención recíproca es idéntica se obtiene que $g_1H = g_2H$. Concluimos que φ es biyectiva.

Sin embargo, esta correspondencia no deja en claro que $gH = Hg$ un ejemplo de esto se puede encontrar en 111 imate.

3. Dado $g \in G$ y $h \in H$ si $ghg^{-1} \in H$ entonces existe $h_1 \in H$ tal que $ghg^{-1} = h_1$ es decir, $gh = h_1g$ que de acuerdo con la notación de clases, cada elemento de una clase izquierda es un elemento de la correspondiente clase derecha, de manera precisa $gH = Hg$.

La situación anterior es sorprendente y no solo es una curiosidad matemática, esto nos da la estructura de como clasificar grupos.

Definición 44. Sea G un grupo y H subgrupo de G.

1. Dado $g \in G$, denotaremos a gHg^{-1} por H^g, en particular cuando $H = \{h\}$ a gHg^{-1} lo denotaremos simplemente por h^g al elemento h^g le llamaremos el **conjugado** de h por g.
2. Decimos que g **normaliza** a H si $H^g \subset H$. Al conjunto $N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$ le llamamos el **normalizador** de H en G.
3. Si $G = N_G(H)$ decimos que H es **normal** en G y denotaremos esto por $H \trianglelefteq G$.

Observación 45. Sean g_1, g_2 y H conjunto. Notemos que

$$\begin{aligned} H^{g_1 g_2} &= g_1 g_2 H (g_1 g_2)^{-1} = g_1 g_2 H g_2^{-1} g_1^{-1} \\ &= (g_2 H g_2^{-1})^{g_1} \\ &= (H^{g_2})^{g_1} \end{aligned}$$

Donde $H^{g_1 g_2}$ no necesariamente es $(H^{g_1})^{g_2}$.

Los homomorfismos de grupos son funciones importantes, estas funciones permiten preservar la estructura de grupo a otro justo como los homeomorfismos entre espacios topológicos.

Definición 46. Sean $(G, \circ_G, e_G)$ y $(H, \circ_H, e_H)$ dos grupos.

1. Una función $\varphi : G \to H$ es un **homomorfismo** de grupos si
$$\varphi(\circ_G(g_1, g_2)) = \circ_H(\varphi(g), \varphi(h)).$$
2. El **núcleo** de un homomorfismo φ es el conjunto
$$\mathrm{Null}(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = e\}.$$
3. Diremos que un homomorfismo de grupos φ es:
   - **Monomorfismo:** si φ es inyectiva.
   - **Epimorfismo:** si φ es sobreyectiva
   - **Isomorfismo:** si φ es monomorfismo y epimorfismo al mismo timpo.

Un isomorfismo tiene como función una inversa, esta función inversa cumpe ser isomorfismo tambén. De esta manera podemos pensar a los grupos salvo isomorfismo cuando sea posible, en otras palabras, en analogía a espacios topológicos queremos estudiar a un grupo por medio de otro conocido mediante algún isomorfismo.

Ejemplo 47. Sea G un grupo generado por un solo elemento g de orden finito n entonces G es isomorfo al grupo de los enteros modulo n, denotado usualmente por $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Un isomorfismo esta dado por

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathbb{Z}_n \\ g^k &\mapsto [k], \end{aligned}$$

esto es a cada elemento de G que se escribe como pontencia de g se le asocia la clase $[k]$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_n$. Más aún, si G es inifitamene generado entonces

$$\begin{aligned} \varphi : G &\to \mathbb{Z} \\ g^k &\mapsto k, \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Una manera de construir nuevos grupos por grupos establecidos es por medio de los cocientes, el siguiente resultado es muy importante no solo por que nos ayuda a entender la teoría de Galois, nos da una manera de construir nuevos grupos y puede consultarse en [8]

Teorema 48. Sea H subrupo normal de G entones el conjunto G/H tiene una estructura un grupo y hace de la proyección $\pi : G \to G/H$ un homomorfismo de grupos.

La normalidad es muy importante en el teorema anterior. Una parte de la teoría de cubrientes nos permite definir el siguiente homomorfismo de grupos.

Ejemplo 49. Del ejemplo 34 consideremos a $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y al subgrupo de homeomorfismos que preservan orientación que vamos a de notarlo por $\mathrm{Homeo}^+(S^1)$. De la teoría de cubrientes para $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo que preserva la orientación se tiene que existe una función $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\pi(\tilde{f}) = f$, esto es $f([x]) = [\tilde{f}(x)]$ y que satisface la relación,

$$\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1.$$

Tenemos un morfismo de grupos $\varphi : Hom_+(S^1) \to Hom(S^1)$. Recíprocamente toda función $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente que satisface la relación, $\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x)+1$, induce un homeomorfismo en S^1. Finalemente concluimos con la observación, φ es un epimorfismo de grupos.

Los siguientes términos son importantes, tanto desde la historia del estudio de los grupos, como para definir a las acciones sobre conjuntos.

Definición 50. Sea X un conjunto no vacío y G grupo, una **acción** es una función $\alpha : G \times X \to X$ que satisface,

1. $\alpha(e, x) = x$
2. $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$

Si en un conjunto X se tiene una acción de un grupo G decimos que X es un G-**conjunto**.

Ejemplo 51. Sean G un grupo y H un subgrupo. H actua sobre G por la acción $* : H \times G \to G$ dada por $*(h, g) = hg$, una traslación a la izquierda. Más aún si H es normal en G acuta sobre G/H mediante $* : G \times G/H \to G/H$ dada por $*(g, tH) = (gt)H$.

Grupos conmutadores, grupos derivados

Para este trabajo usaremos a los conjugados de un elemento y los conmutadores. Para ello vamos a estudiar un poco de notación y de teoría para acortar nuestras demostraciones.

Definición 52. Sea G un grupo y g, $h \in G$. Definimos al **conmutador** de g y h como el elemento

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Dados dos subconjutos H y K de G, definimos al grupo $[H, K]$ como el grupo generado por los elementos $\{[h, k] : h \in H \text{ y } k \in K \in G\}$. En particular al grupo $[G, G]$ le llamaremos el **primer grupo derivado** de G y vamos a denotarlo por G' . Además, cuando $G' = G$ diremos que el grupo G es **perfecto**, en este caso, todo elemento de G es producto de un numero finito de conmutadores.

Observación 53. Haremos unas observaciones de la definición anterior. Sean G un grupo y g, x, $y \in G$ con $[x, y]$ su conmutador.

1. El inverso de un conmutador,

$$\begin{aligned}
[x, y]^{-1} &= (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} \\
&= (yx^{-1}y^{-1})^{-1}x^{-1} \\
&= (x^{-1}y^{-1})^{-1}y^{-1}x^{-1} \\
&= (y^{-1})^{-1}xy^{-1}x^{-1} \\
&= yxy^{-1}x^{-1} = [y, x].
\end{aligned}$$

2. El conjugado de un conmutador,

$$
\begin{aligned}
[x,y]^g &= g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1} \\
&= (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1}) \\
&= [y^g, x^g].
\end{aligned}
$$

3. El conmutador bajo homeomorfismos. Sea $\phi : G \to G$ un morfismo de grupos, notemos que,

$$
\begin{aligned}
\phi([x,y]) &= \phi(xyx^{-1}y^{-1}) \\
&= \phi(x)\phi(y)\phi(x^{-1})\phi(y^{-1}) \\
&= \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1} \\
&= [\phi(x), \phi(y)],
\end{aligned}
$$

más aún sea $x \in [G,G]$ es decir existen a_i, $b_i \in G$, $i = 1, \cdots n$ tales que

$$x = [a_1, b_1]^{m_1} \cdots [a_n, b_n]^{m_n},$$

notemos que para todo morfismo de grupos, ϕ se cumple que

$$\phi(x) = [\phi(a_1), \phi(b_1)]^{m_1} \cdots [\phi(a_n), \phi(b_n)]^{m_n} \in [G,G].$$

Por tanto $\phi([G,G]) \subset [G,G]$.

4. $[G,G]$ es normal en G. Sea $g \in G$ y consideremos el automorfismo interno

$$
\begin{aligned}
\gamma_g : G &\to G \\
x &\mapsto x^g
\end{aligned}
$$

claramente se tiene que $\gamma_g([G,G]) = g[G,G]g^{-1}$ y por el inciso anterior $g[G,G]g^{-1} = \gamma_g([G,G]) \subset [G,G]$, concluimos así la normalidad.

Una relación interesante entre conjuntos generador y el derivado del grupo generado.

Proposición 54. Sea G un grupo generado por un conjunto balanceado X entonces para G' el primer subgrupo conmutador es generado por conjugados de conmutadores de elementos de X. Esto es

$$G' = \langle \{[a,b]^g : g \in G \text{ y } a, b \in X\} \rangle$$

Demostración. Sea $W = \langle \{[a,b]^g : g \in G \text{ y } x, y \in X\}$. Notemos que para a, $b \in X$ y $g \in G$ de la observación anterior tenemos que,

$$[x,y]^g = [x^g, y^g]$$

G' es un grupo que contiene al conjunto generador de W por tanto $W \subset G'$. Para la otra contención lo haremos por casos esto para facilitar la complejidad del argumento final.

Sean $a, b \in G$ y supongamos el caso en que $b \in X$. Estudiaremos el resultado por la cantidad de factores de a. Como X genera a G, existen $s_1 \cdots s_n \in X$ tales que $a = s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n}$ con $\alpha_i \in \{1, -1\}$, notemos que $(s^{-1})^1 = s^{-1}$ entonces para hacer sencilla la escritura sin pérdida de generalidad vamos escribir $\alpha_i = 1$ para $i \in \{1, \cdots, n\}$. Por inducción fuerte sobre n veremos el resultado, notemos que en el caso $n = 1$, el conmutador de a y b es tal que,

$$[a,b] = [s_1, b] \in W$$

y para el caso $n = 2$,

$$\begin{aligned}
[s_1 s_2, b] &= (s_1 s_2) b (s_2^{-1} s_1^{-1}) b^{-1} \\
&= s_1 (s_2 b s_2 b^{-1})(b s_1^{-1} b^{-1} s_1) s_1^{-1} \\
&= s_1 ([s_2, b]) s_1^{-1} s_1 ([b, s_1^{-1}]) s_1^{-1} \\
&= ([s_2, b]^{s_1})([b, s_1^{-1}]^{s_1})
\end{aligned}$$

notemos que s_1 como exponente es un conjugado y no como potencia del elemento. De lo anterior $[a,b]$ es un producto de conjugados de elementos de X por tanto $[a,b] \in W$. Para el caso $n = 3$ tenemos que

$$\begin{aligned}
[s_1 s_2 s_3, b] &= (s_1 s_2 s_3) b (s_3 s_2 s_1) b^{-1} \\
&= s_1 (s_2 s_3 b s_3^{-1} s_2^{-1} b^{-1})(b s_1 b^{-1} s_1^{-1}) s_1 \\
&= s_1 [s_2 s_3, b][b, s_1] s_1 \\
&= ([s_2 s_3, b]^{s_1})([b, s_1]^{s_1})
\end{aligned}$$

De la primera parte para $s_2 s_3$ se tiene que,

$$[s_1 s_2 s_3, b] = ([s_3, b]^{s_2})([b, s_2^{-1}]^{s_2})([b, s_1^{-1}]^{s_1})$$

nuevamente tenemos que $[a,b] \in W$. Por inducción fuerte, supongamos que se cumple para $1,\cdots,n-1$ veremos el caso n,

$$\begin{aligned}
[s_1\cdots s_n, b] &= (s_1\cdots s_n)b(s_n\cdots s_1)^{-1}b^{-1} \\
&= (s_1\cdots s_n)b(s_n^{-1}\cdots s_2^{-1}b^{-1}bs_1^{-1})b^{-1}(s_1s_1^{-1}) \\
&= s_1(s_2\cdots s_n)b(s_n^{-1}\cdots s_2^{-1})b^{-1}(bs_1^{-1}b^{-1}s_1)s_1^{-1} \\
&= ([s_2\cdots s_n, b]^{s_1})([b, s_1^{-1}]^{s_1})
\end{aligned}$$

por hipótesis de inducción tenemos que $[s_2\cdots s_n, b]$ es producto de conjugados de conmutadores de X, a saber

$$\begin{aligned}
[a,b] = [s_1\cdots s_n, b] =&[s_n, b]^{(s_1\cdots s_{n-1})}[b, s_{n-1}^{-1}]^{(s_1\cdots s_{n-1})}* \\
&[b, s_{n-2}^{-1}]^{(s_1\cdots s_{n-2})}[b, s_{n-3}^{-1}]^{(s_1\cdots s_{n-3})}\cdots[b, s_1^{-1}]^{s_1}
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos que cada factor es un conjugado de un conmutador de elementos de X tenemos que $[a,b] \in W$ y terminamos la hipótesis de inducción. En general si $b \notin X$, se tiene que $b = t_1\cdots t_m$ donde cada $t_i \in X$. Notemos que de la inducción obtuvimos la expresión

$$\begin{aligned}
[a,b] =&[s_n, b]^{(s_1\cdots s_{n-1})}[b, s_{n-1}^{-1}]^{(s_1\cdots s_{n-1})}* \\
&[b, s_{n-2}^{-1}]^{(s_1\cdots s_{n-2})}[b, s_{n-3}^{-1}]^{(s_1\cdots s_{n-3})}\cdots[b, s_1^{-1}]^{s_1}
\end{aligned}$$

donde los términos $[s_n, b]$ y $[b, s_j]$ cumplen que $s_1,\ldots,s_n \in X$. Notemos que $[b, s_j^{-1}] = [t_1\cdots t_m, s_j^{-1}]$ se reducen al caso que demostramos anteriormente y notemos que $[s_n, b]^{-1} = [t_1\cdots t_n, s_n]$ aplica el mismo argumento, como W es grupo $[s_n, b] \in W$ entonces $[a,b]$ se factoriza como producto de elementos de W. Por tanto W contiene a todos los conmutadores de G, como G' es el minimo grupo que contiene a ese conjunto se tiene que $G' \subset W$. Dando así la igualdad.

□

Grupos topológicos

La estructura matemática que resulta de considerar una topología en un grupo es muy interesante, para nuestros fines no podremos profundizar en este tema, simplemente hacemos mención acerca de ciertas propiedades de grupos topológicos que usaremos.

Definición 55. Sea X un grupo decimos que X es un **grupo topológico** si existe una topología en X de manera que las funciones

1. Multiplicación,

$$\begin{aligned} \circ : X \times X &\to X \\ (x,y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

2. Inversión

$$\begin{aligned} {}^{-1} : X &\to X \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas.

Propiedades topológicas de un grupo topológico

En esta sección vamos a demostrar unos resultados que vamos a usar y que son omitidos (quizás a propósito) por los autores de [1] y [5]. Consideramos a estos resultados un paso de formalidad completo a los artículos citados.

Observación 56. Sea G un grupo topológico.

1. Sea $Q(e)$ la componente conexa de la identidad. Como la función multiplicación es continua se sigue que, para toda $h \in G$ el conjunto $hQ(e)$ es conexo y contiene al elemento h.

2. $g \in Q(e)$ si y solo si $e \in Q(g)$. En particular $Q(g) = Q(e)$.

3. Si $h \in Q(e)$ entonces $e \in Q(h^{-1})$. En particular $h \in Q(e)$ si y solo si $h^{-1} \in Q(e)$.

Demostración. Sea $g \in Q(e)$, notemos que $Q(e)$ es un conjunto conexo que tiene a g por tanto $Q(e) \subset Q(g)$, en particular $e \in Q(g)$. El recíproco es idéntico y se omite. Para la otra parte, notemos que $h^{-1}Q(e)$ es un conjunto conexo que tiene a h^{-1} por tanto $h^{-1}Q(e) \subset Q(h^{-1})$, como $h \in Q(e)$ se sigue que el elemento,

$$h^{-1}h \in h^{-1}Q(e)$$

y así $e \in Q(h^{-1})$. □

Lema 57. La componente conexa de la identidad es un grupo.

Demostración. Veremos que el conjunto $Q(e)$ es cerrado bajo la operación de G. Sean g, $h \in Q(e)$, por la observación previa resta ver que $e \in Q(gh)$. Tenemos que $ghQ(e) \subset gQ(h) \subset Q(gh)$ por otro lado notemos que,

$$gh(h^{-1}) \in ghQ(e)$$

y así $g \in ghQ(e)$, por tanto tenemos la contención $ghQ(e) \subset Q(g) = Q(e)$, concluimos que $gh \in Q(e)$. □

Lema 58. Sea $(X, \tau, \circ)$ grupo topológico y U abierto en X, para todo $h \in X$ el conjunto hU es abierto.

Demostración. Sea h en X, las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \varphi_h : X &\to X \\ g &\mapsto hg \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi_h : X &\to X \\ g &\mapsto h^{-1}g \end{aligned}$$

son continuas e inversas una de otra. Resta notar que $\varphi_h(U) = hU$ y la imagen directa de φ es la imagen inversa de su función inversa $\varphi_h(U) = \phi_h^{-1}(U)$ que por continuidad es un conjunto abierto. Tenemos así que hU es un conjunto abierto.

□

Proposición 59. Sea $(X, \tau, \circ)$ un grupo topológico conexo. Para toda vecindad U de e se cumple que $\langle U \rangle = X$.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}_e$, resta ver que $G \subset \langle U \rangle$. Para ello veremos que $\langle U \rangle$ es un conjunto abierto y cerrado en X y usaremos la conexidad de X para concluir la igualdad.

Sea $g \in \langle U \rangle$, por definición de subgrupo generado, para todo subgrupo H de X que contiene a U se cumple que

1. $g \in H$,
2. al ser cerrado como subgrupo tenemos que, para toda $u \in U$ el elemento gu está en H, por tanto $gU \subset H$.
3. Por el lema 58 el conjunto gU es abierto.

Más aún, $g = ge \in gU$, de esta manera se que tiene que gU es vecindad de g y junto con la contención $gU \subset H$ de la definición de grupo generado tenemos que $gU \subset \langle U \rangle$ y por tanto $\langle U \rangle$ es un conjunto abierto.

Para ver que $\langle U \rangle$ es cerrado, sea $h \in \overline{\langle U \rangle}$ y consideremos al conjunto hU que, por el lema 58 es abierto y en particular es vecindad de h y por definición del conjunto cerradura tenemos que, $hU \cap \langle U \rangle \neq \emptyset$. De esta manera, sea $g \in hU \cap \langle U \rangle$ en particular, como $g \in hU$ existe $u \in U$ tal que $g = hu$, consideremos lo siguiente, $h = gu^{-1} \in \langle U \rangle U = \langle U \rangle$ por tanto $\overline{\langle U \rangle} \subset \langle U \rangle$. Tenemos que $\langle U \rangle$ es un conjunto cerrado y abierto en un espacio conexo, entonces o $\langle U \rangle = \emptyset$ o $\langle U \rangle = X$ como $e \in \langle U \rangle$ concluimos que $\langle U \rangle = X$. □

Topología compacto-abierta

Tomamos el resultado siguiente de [12] páginas 105-110. Sean X, Y espacios topológicos, Y^X la familia de funciones $f : X \to Y$, para cada $A \subset X$ y $B \subset Y$ denotamos a

$$\mathcal{U}(A, B) = \{f \in Y^X | f(A) \subset B\}$$

en caso de que $A = \{a\}$ denotamos simplemente por $\mathcal{U}(a, B) = \{f \in Y^X | f(a) \in B\}$.

Proposición 60. La colección de las familias de la forma $\mathcal{U}(K, B)$ donde K es un compacto de X y Uun abierto de Y es una subbase para una topología en Y^X. Dicha topología será llamada **topología compacto-abierta**.

Observación 61. Un hecho interesante es que la topología compacto abierta es mas fina que la topología producto y es mas gruesa que la topología caja, pero en el caso de un producto finito la tres topologías coinciden.

Definición 62. Sea X_d un espacio métrico compacto. Definimos a la métrica de la convergencia uniforme como;

$$d(f, g) = \max_{x \in X}\{d(f(x), g(x))\}$$

donde f y g son funciones continuas.

Ahora vamos a evitar desarrollar una parte de la teoría. Queremos solo usar una equivalencia entre la topología compacto abierta y la generada por la métrica uniforme. Para ello sugerimos revisar [11] página 321 hasta 325, también [16] desde las páginas 278 hasta 284. Para revisar la referencia de Willard, de tener en cuenta el capítulo 10, el libro de Munkres es adecuado para una introducción al tema y el libro de Willard es un libro detallado.

Definición 63. Sean (Y, d) un espacio métrico y X un espacio topológico. Sea $f \in Y^X$, C subespacio compacto de X y $\varepsilon > 0$. Definimos a $B_C(f, \varepsilon)$ como la familia de funciones $g \in Y^X$ para las cuales,

$$\sup\{d(f(x), g(x)) | x \in C\} < \varepsilon.$$

Las familias $B_C(f, \varepsilon)$ forman una base para una topología sobre Y^X la cual será llamada la **topología de la convergencia compacta**.

El siguiente resultado puede consultarse en [16] página 284 o [11] página 325.

Teorema 64. Para un espacio de funciones, X^Y donde X es compacto, la topología de la convergencia compacta es la topología compacto abierta.

El siguiente teorema puede encontrarse en [11] como teorema 46.7

Teorema 65. Sean X un espacio topológico e Y_d métrico. Para el espacio de funciones Y^X se tiene la siguiente inclusión de topologías:

$$(\text{uniforme}) \subset (\text{convergencia compacta})$$

Si X es compacto entonces las topologías coinciden.

Este teorema puede estudiarse en [11] como teorema 46.8 o en [16] como theorem 43.7

Teorema 66. Sean X un espacio topológico e Y_d métrico. Sobre el subespacio de funciones continuas de X a Y se tiene que la topología de la convergencia compacta y de la convergencia uniforme coinciden.

Continuamos con la homogeneidad de un espacio topológico.

Homogeneidad de espacios topológicos

Sea X un espacio topológico, decimos que X es homogéneo entre dos puntos distintos x e y si existe un homeomorfismo, $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.

Nota 67. $\text{Homeo}(X)$ denotará el grupo de homeomorfismos $h : X \to X$ y la función identidad $\text{Id}_X : X \to X$ denotará el neutro de $\text{Homeo}(X)$. Notemos que $\text{Homeo}(X)$ es un grupo con la composición de funciones.

Demostración. El resultado es directo que la composición de funciones biyectivas es biyectiva y que composición de funciones continuas es continua. $\square$

Definición 68. Sea $K \subset X$ y $h : X \to X$ un homeomorfismo. Decimos que K es un **conjunto de soporte** para h (o que h está soportado en K) si,

1. $X \setminus K$ es no vacío y
2. $h|_{X\setminus K} = \mathrm{Id}|_{X\setminus K}$.

Al conjunto $\mathrm{Sop}(h) = \mathrm{Cl}\left(\{x \in X : h(x) \neq x\}\right)$, le llamaremos el **soporte** de h. Si h no es la función identidad entonces $\mathrm{Sop}(h)$ es no vacío y para K un conjunto de soporte para h se tiene que

$$\mathrm{Sop}(h) \cap (X \setminus K) = \emptyset$$

por tanto $\mathrm{Sop}(h) \subset K$ el conjunto $\mathrm{Sop}(h)$ es un conjunto mínimo de los conjuntos de soporte para una homeomorfismo. A la familia de homeomorfismos, $g : X \to X$, para los cuales existe $U \in \tau$ tal que $g|_U = \mathrm{Id}|_U$ le denotaremos por $\mathrm{Homeo}^0(X)$.

Observación 69. Sea $g : X \to X$ un homeomorfismo que está soportado en K.

1. Como la función g^{-1} es una función biyectiva tenemos que,

   $$\{x \in X : g(x) \neq x\} = \{x \in X : x \neq g^{-1}(x)\}$$

   Al tomar cerradura, se tiene que $\mathrm{Sop}(g) = \mathrm{Sop}(g^{-1})$, g y g^{-1} tienen el mismo soporte.

2. Sea K un conjunto de soporte para g. Para la función inversa $g^{-1} : g(K) \to K$ tenemos que,

   $$\mathrm{Id}|_{X\setminus K} = g|_{X\setminus K},$$

   como la función identidad es su propia inversa tenemos que

   $$g^{-1}|_{X\setminus K} = g|_{X\setminus K},$$

   del inciso anterior tenemos que $\mathrm{Sop}(g^{-1}) \subset K$ tenemos que g^{-1} está soportado en K. Además notemos que

$$K \cap (X \setminus g(K)) = K \cap g(X \setminus K) = K \cap X \setminus K = \emptyset$$

por tanto $K \subset g(K)$. Por otro lado

$$g(K) \cap (X \setminus K) = g(K) \cap g(X \setminus K) = g(K \cap X \setminus K) = \emptyset$$

tenemos que $K = g(K)$.

3. Si f y g son dos funciones con soportadas en K entonces $fg(K) = K = gf(K)$. Por inducción esto se tiene para una cantidad finita es decir, $f_1 \cdots f_n$ entonces $f_{\sigma(1)} \cdots f_{\sigma(n)}(K) = K$ para σ una permutación de índices.

Observación 70. La composición de funciones con soportes ajenos. Sean f, g dos homemorfismos tales que K_f y K_g son conjuntos de soporte respectivamente y tales que $K_f \cap K_g = \emptyset$ y $K_f \cup K_g \neq X$ entonces para $h = fg$ se cumple que, $h = g$ en K_g, $h = K_f$ en K_f y h tiene soporte en $K_f \cup K_g$. Esto se puede hacer para una cantidad finita de pares de funciones $f_n g_n$. Para la primera parte, notemos que $h(K_f) = fg(K_f)$, como $g(K_f) \subset g(X \setminus K_g)$ tenemos que $g|_{K_f} = Id$, por tanto $h|_{K_f} = f|_{K_f}$. El resultado es análogo a para $h|_{K_g} = g|_{K_g}$. Para la última parte, notemos que

$$h(X \setminus (K_f \cup K_g) = h(X \setminus K_f) \cap h(X \setminus K_g))$$

de la primera parte tenemos que, dado $x \in (X \setminus K_f) \cap (X \setminus K_g)$

$$fg(x) = f(x) = x.$$

Por tanto, se tiene que h está soportado en $K_f \cup K_g$. De manera inductiva supongamos que $(f_i)_{i=1}^n$ y $(g_i)_{i=1}^n$ son familias de funciones tales que están soportadas en K y W respectivamente. Para $h = g_1 f_1 \cdots g_n f_n$ se cumple que $h = g_1 \cdots g_n$ en W y $h = f_1 \cdots f_n$ en K. Notemos que,

$$h(K) = g_1 f_1 \cdots g_n f_n(K)$$

se tiene que $f_i(K) = K \subset X \setminus W$ para $i = 1, \cdots, n$ por tanto para

$$g_n(f_n(K)) = f_n(K),$$

al componer por $g_{n-1}f_{n-1}$ y aplicando la observación 69

$$g_{n-1}f_{n-1}g_n(f_n(K)) = f_{n-1}f_n(K),$$

repitiendo este proceso una cantidad finita de veces, se tiene que

$$h(K) = f_1 \cdots f_{n-1}f_n(K).$$

Para el caso en que $h(W) = g_1 \cdots g_{n-1}g_n(W)$ es similar. Además si $x \in X(\setminus K) \cap (X \setminus W)$ entonces de la primera parte de esta observación,

$$h(x) = g_1f_1 \cdots g_nf_n(x) = g_1f_1 \cdots g_{n-1}f_{n-1}(x) \cdots = x$$

y h está soportado en $K \cup W$.

La observación anterior es una manera de generalizar a la propiedad (E) de [1]. El siguiente lema será usado en las secciones posteriores, es importante, no solo nos deja manipular el soporte de un homeomorfismo bajo una conjugación sino que nos da la herramienta importante sobre ciertos conmutadores de homeomorfismos para el teorema 1 del trabajo de Anderson en [1], también es importante mencionar que Epstein en [5] tambien lo usa. Este lema se encuentra en [1] como property (A).

Lema 71. Sean $K \subset X$ y $g \in \mathrm{Homeo}^0(X)$ soportado en K. Para cualquier $h \in \mathrm{Homeo}(X)$ se tiene que,

1. $g^{h^{-1}}$ está soportado en $h^{-1}(K)$.
2. Si $h^{-1}(K) \cap K = \emptyset$ y $h^{-1}(K) \cup K \neq X$ entonces
   a) $[h^{-1}, g^{-1}]$ está soportado en $h^{-1}(K) \cup K$,
   b) $[h^{-1}, g^{-1}]|_K = g|_K$ y
   c) $[h^{-1}, g^{-1}]|_{h^{-1}(K)} = h^{-1}g^{-1}h|_{h^{-1}(K)}$

Demostración. Para el primer inciso. Sea $x \in X \setminus h^{-1}(K) = h^{-1}(X \setminus K)$ de donde $h(x) \in X \setminus K$, como K es un conjunto de soporte para g tenemos que, $g(h(x)) = h(x)$ de esta manera al componer con la función h^{-1} por la izquierda obtenemos lo siguiente, $h^{-1}gh(x) = x$ y tenemos que,

$$g^h(x)|_{X\setminus h^{-1}(K)} = \mathrm{Id}_{X\setminus h^{-1}(K)},$$

por definición concluimos que $h^{-1}gh(x)$ está soportado en $h^{-1}(K)$. Ahora veremos el segundo inciso. De la primera parte tenemos que $h^{-1}g^{-1}h$ tiene soporte en $h^{-1}(K)$ y g en K los cuales son conjuntos ajenos por tanto de la observación observación 69, la observación anterior, tenemos que $[h^{-1}, g^{-1}]$ tiene soporte en $K \cup h^{-1}(K)$.

$\square$

Finalizamos este capitulo recordando que nuestra introducción pudiera no abarcar todos los resultados que vamos a mencionar, sin embargo mencionamos los libros que hemos consultado donde pudiera estar la demostración detallada o bien un estudio profundo de dicho tema.

Simplicidad del grupo $\mathrm{Homeo}(S^1)$

En 1999 E. Ghys en [6] dio una adaptación del trabajo de Epstein [5] para el grupo de homeomorfismos que preservan orientación para demostrar que el grupo de homeomorfismos del círculo es simple. Epstein en [5] trabajó en variedades, espacios topológicos muy parecidos a un espacio vectorial $\mathbb{R}^m$ sugerimos para ese tema la bibliografía dada en [14]. Recordemos al circulo unitario como al espacio $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$, denotado por S^1, el círculo unitario como un subespacio del plano $\mathbb{R}^2$ sin embargo como vimos anteriormente, este espacio es homeomorfo a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como en el ejemplo 34 más aún, a cualquier espacio homeomorfo a S^1 le llamaremos curva cerrada simple.

Convención 72. En esta sección vamos hacer el abuso de notación.

- A partir de ahora y lo que resta de la sección, $\mathrm{Homeo}(S^1)$ denotará al grupo $\{h : S^1 \to S^1 | h \text{ es homeomorfismo y preserva orientación}\}$. Por preservar la orientación nos referimos como en el ejemplo 34.
- Un conjunto es no degerado si tiene mas de un punto. A los subconjuntos cerrados conexos y no degenerados de S^1 serán llamados **sub-intervalos** de S^1.

Veremos ahora que el grupo de homeomorfismos del círculo es un grupo topológico con la topología compacto abierta (o métricas como según nos convenga) y la composición de funciones como operación de grupo.

El grupo topológico $\mathrm{Homeo}(S^1)$

Estudiaremos la topología compacto abierta en el espacio S^1 con el fin de ver que la terna $(\mathrm{Homeo}(S^1), \circ, \tau_{CA})$ es un grupo topológico. Para demostrar que operación inversión es continua usaremos la equivalencia métrica. Sea

$$\begin{aligned} {}^{-1} : S^1 &\to S^1 \\ g &\mapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

la funcón inversión de S^1. Sean $\varepsilon > 0$ y h, $g \in \mathrm{Homeo}(S^1)$. Veremos que existe $\delta > 0$ tal que si $d(g,h) < \delta$ se implica que $d(g^{-1}, h^{-1}) < \varepsilon$, en la métrica de la convergencia uniforme. Observemos que; si g es una función continua en un espacio compacto entonces g es uniformemente continua, además si g es un homeomorfismo entonces la función g^{-1} es uniformemente continua por tanto, de la continuidad uniforme de g^{-1} se tiene que, para todo $x \in S^1$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces,

$$\|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\| < \varepsilon.$$

Consideremos la bola $B_d(h, \delta)$ y x_0 fijo. Como h es biyectiva existe $z_0 \in S^1$ tal que $z = h^{-1}(x)$, por la definición de la métrica uniforme se cumple que,

$$\|h(z_0) - g(z_0)\| \leq d(h,g) < \delta$$

por tanto, de la continuidad de g^{-1} se sigue que,

$$|g^{-1}(h(z_0)) - g^{-1}(g(z_0))| < \varepsilon,$$

y notemos que

$$|g^{-1}(x_0) - h^{-1}(x_0)| = |g^{-1}(h(z_0)) - z_0| < \varepsilon.$$

Luego, tomando el máximo tenemos que $d(g,h) < \varepsilon$, de esta manera la función inversión es un función continua. Veremos ahora la continuidad de la multiplicación mediante la topología compacto-abierta. Antes, hacemos mención de un resultado que no demostraremos pero que nos será de utilidad y puede encontrarse en [16] como Lemma 43.3.

Lema 73. *En un espacio regular, si un conjunto F es compacto, U es un abierto y $F \subset U$ entonces existe un conjunto abierto V tal que $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Afirmamos que la operación composición

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Homeo}(S^1) \times \mathrm{Homeo}(S^1) &\to \mathrm{Homeo}(S^1) \\ (g,h) &\mapsto gh, \end{aligned}$$

es continua en la topología compacto-abierta. Sean g, $h \in \text{Homeo}(S^1)$ y consideremos un abierto básico en la topología compacto abierta que sea vecindad de gh, explícitamente sean K compacto de S^1 y U abierto en S^1 tal que

$$gh \in \mathcal{U}(K,U) = \{f \in \text{Homeo}(S^1) : f(K) \subset U\}$$

es claro que $gh(K) \subset U$ y como g es biyectiva, componiendo con la función g^{-1} se tiene que; $h(K) \subset g^{-1}(U)$, notemos que g y h son homeomorfismos por tanto $h(K)$ es compacto y $g^{-1}(U)$ es abierto, como S^1 es un espacio normal, existe V abierto en S^1 tal que

$$h(K) \subset V \subset \overline{V} \subset g^{-1}(U),$$

vamos a considerar al básico de $\text{Homeo}(S^1) \times Hom(S^1)$ dado por

$$\mathcal{W} := \mathcal{U}(\overline{V}, U) \times \mathcal{U}(K, V).$$

Como $\overline{V} \subset g^{-1}(U)$ componiendo con la función g se sigue que $g(\overline{V}) \subset U$ y como $h(K) \subset V$ tenemos que $(g,h) \in \mathcal{W}$. Veremos que la imagen de $\mathcal{W}$ bajo la operación $\circ$ está contenida en $\mathcal{U}(K,U)$. Sea $(f_1, f_2) \in \mathcal{W}$, tenemos las siguientes contenciones,

$$f_1(\overline{V}) \subset U$$
$$f_2(K) \subset V$$

componiendo la primera contención por f_1^{-1} se sigue que

$$f_2(K) \subset V \subset \overline{V} \subset f_1^{-1}(U)$$

finalmente resta notar que las contenciones anteriores se mantienen si componemos con f_1 esto es; $f_1 f_2(K) \subset U$, de esta manera $f_1 f_2 \in \mathcal{U}(K,U)(gh)$, es decir la función $\circ$ es continua. Concluimos que $(Hom(S^1), \tau_{CA})$ es un grupo topológico. Hablaremos ahora de un término importante, el soporte de un homeomorfismo, veremos unas propiedades sencillas que nos permitiran ahorrar tiempo en las explicaciones importantes.

En el ejemplo 34 hablamos de un espacio cociente que es homemorfo a la circunferencia y vimos que el grupo de homeomorfismos de la circunferencia es un grupo topológico, estudiaremos ahora que el grupo es conexo. Consideremos a S^1 como el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como en el ejemplo el ejemplo 34 y sean $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in Hom(S^1)$ existen f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ homeomorfismos monótonos y crecientes tales que $\pi(f) = \tilde{f}$ y $\pi(g) = \tilde{g}$. Consideremos a,

$$H(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x),$$

notemos que para un intervalo entero y un punto en él, se tiene que,

$$\begin{aligned} H(x+1,t) &= tg(x+1) + (1-t)f(x+1) = tg(x) + t + (1-t)f(x) + (1-t) \\ &= tg(x+1) + (1-t)f(x+1) + t + (1-t) = H(x,t) + 1. \end{aligned}$$

Como f y g homeomorfismos monótonos y crecientes dados $t_0 > 0$ fijo, x, $y \in S^1$ tales que $x < y$ se tiene que,

$$H(x,t_0) = t_0 g(x) + (1-t_0)f(x) < t_0 g(y) + (1-t_0)f(y) = H(y,t_0),$$

tenemos $H(x,t)$ también es monótono y por tanto $H(x,t)$ es una función biyectiva más aún la función inversa tambien es creciente. Al ser una combinación lineal de funciones es continua, tenemos que $\pi(H(x,t))$ es un homeomorfismo en S^1 y $\pi(H(x,t))$ es una homotopía entre g y f concluimos que $\mathrm{Homeo}(S^1)$ es un grupo topológico conexo.

Simplicidad del grupo $\mathrm{Homeo}(S^1)$

Estamos en condiciones para demostrar la simplicidad del grupo de homeomorfismo del circulo. El siguiente lema nos será útil en la demostración de la simplicidad del grupo de homeomorfismos de la circunferencia que preservan orientación.

Lema 74. Sea N subgrupo normal de $Hom(S^1)$. Dado $n \in N$ un homemorfismo distinto de la identidad entonces existe J un subintervalo de S^1 tal que $n(J) \cap J = \emptyset$.

Demostración. Sea $n : S^1 \to S^1$ homeomorfismo distinto de la función identidad por tanto existe $x \in S^1$ tal que $n(x) \neq x$. Por la continuidad de n existe U abierto de S^1 tal que $n|_U$ no es la identidad, sin pérdida de generalidad podemos suponer que U es un intervalo abierto de S^1. Por otro lado, como el espacio S^1 es espacio métrico y compacto se tiene que es normal, sin pérdida de generalidad existe un intervalo abierto V vecindad de $n(x)$ tal que $\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$.

Como $Hom(S^1)$ actúa de manera transitiva sobre intervalos de S^1 existe un homeomorfismo h tal que $h(U) = V$, en particular se tiene que, $\overline{V} = \overline{h(U)} = h(\overline{U})$ resta notar que,

$$\emptyset = \overline{U} \cap \overline{V} = \overline{U} \cap \overline{h(U)} = \overline{U} \cap h(\overline{U}).$$

Haciendo $J = \overline{U}$ se concluye el resultado. □

Observación 75. Sean N subgrupo normal de un grupo G y $n \in N$. Para cualquier $g \in G$ el elemento n^g es por definición un elemento de N más aún $[n, g] = ngn^{-1}g^{-1}$ también es elemento de N.

Lema 76. Sea N subgrupo normal de $Hom(S^1)$. Dado $f \in Hom(S^1)$ soportado en un subintervalo I de S^1 existe $n \in N$ tal que $n(I) \cap I = \emptyset$.

Demostración. Sean $n_0 \in N$ distinto de la identidad, del lema anterior existe un intervalo I tal que $n_0(I) \cap I = \emptyset$. Como $\mathrm{Homeo}(S^1)$ actúa transitivamente en los subintervalos de S^1 existe h en $\mathrm{Homeo}(S^1)$ tal que $h(I) = J$, como h es un homeomorfismo al tomar la función inversa de h se obtiene que $I = h^{-1}(J)$, sustituyendo esto en la parte previa se obtiene que,

$$n_0(h^{-1}(J)) \cap I = \emptyset,$$

del hecho de que h es biyectiva, tomando ahora la imagen directa bajo h se tiene que,

$$h(n_0(h^{-1}(J)) \cap I) = h(n_0(h^{-1}(J))) \cap h(I) = \emptyset,$$

es decir $h(n_0(h^{-1}(J))) \cap J = \emptyset$. Consideremos a $n = n_0^h$, tenemos que n es un homeomorfismo que cumple la propiedad deseada y $n \in N$.

□

En resumen, dado un homeomorfismo soportado un sub intervalo I, podemos encontrar otro homeomorfismo tal que separa los puntos de I. La técnica de considerar conjugados es muy usada en los artículos consultados y en este texto.

Observación 77. Sean f_1 y $f_2 \in Hom(S^1)$ soportados en I, un sub intervalo de S^1, de la demostración del lema 76 también existen n_1, $n_2 \in N$ tal que I, $n_2(I)$ y $n_2(I)$ son ajenos. Notemos del lema anterior para f_1 existe n_1 que cumple el resultado y que $I \cup n_1(I)$ es un conjunto de soporte para f_2 del lema anterior tenemos que existe $n_2 \in N$ tal que

$$n_2(n_1(I) \cup I) \cap (n_1(I) \cup I) = \emptyset$$

notemos que

$$n_2(I) \cap I \subset n_2(n_1(I) \cup I) \cap (n_1(I) \cup I),$$

y

$$n_2(I) \cap n_1(I) \subset n_2(n_1(I) \cup I) \cap (n_1(I) \cup I).$$

Lema 78. Sea N un subgrupo normal de Homeo(S^1). Se tiene que el conmutador de dos elementos de Homeo(S^1) soportados en un mismo intervalo es un elemento de N.

Demostración. Sean f_1 y $f_2 \in$ Homeo(S^1) soportados en I, un sub intervalo de S^1, luego por el lema 76 existen n_1, $n_2 \in N$ tales que I, $n_1^{-1}(I)$ y $n_2^{-1}(I)$ son conjuntos disjuntos. Definimos a $g_1 = [n_1^{-1}, f_1^{-1}]$ y a $g_2 = [h_2^{-1}, f_2^{-1}]$ que por normalidad son elementos de N. Además por el lema **??** se tiene que,

1. $g_1 = f_1$ y $g_2 = f_2$ en I,
2. g_1 está soportando en $n_1(I) \cup I$ y que
3. g_2 está soportando en $n_2(I) \cup I$.

Como I, $n_1(I)$ y $n_2(I)$ son conjuntos ajenos, dado $x \in n_1(I)$ se cumple que,

$$[g_1, g_2](x) = [(f_1^{-1})^{[n_1^{-1}]}, \mathrm{Id}_{S^1}](x) = \mathrm{Id}_{S^1}(x)$$

y

$$[f_1, f_2](x) = \mathrm{Id}_{S^1}(x).$$

El caso es análogo si $x \in n_2(I)$, por tanto al estudiar los puntos del conjunto de soporte en cada caso concluimos que,

$$[g_1, g_2] = [f_1, f_2].$$

$\square$

Vamos a usar una observación que previamente argumentamos.

Observación 79. De la proposición 54 si un grupo G es generado por un subconjunto X, su primer grupo derivado G' es generado por conjugados de conmutadores de elementos de X.

Este lema es una parte de Theorem 4.3 que se puede consultar en [1].

Lema 80. Sea N un subgrupo normal de $Hom(S^1)$. Dados I_1, I_2 e I_3 intervalos que cubren a S_1 que cumplen,

1. $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$,

2. pero no vacía dos a dos.

Denotemos a $I_{12} = I_1 \cap I_2$, $I_{23} = I_2 \cap I_3$ y $I_{31} = I_3 \cap I_1$ y consideremos a

$$G_j = \langle \{ g \in Hom(S^1) : g \text{ está soportando en } I_{ji} \} \rangle$$

donde $j = 1, 2, 3$, los subgrupos generados por los elementos que tienen soporte I_{ji} respectivamente. Se cumple para $G = \langle G_1 \cup G_2 \cup G_3 \rangle$ que

$$G' \subset N.$$

Demostración. Para ello, notemos de la observación anterior G' es generado por los conjugados de los conmutadores de $G_1 \cup G_2 \cup G_3$. Sea $g \in G'$ del lema **??** tenemos que

$$g = \prod_i^n [h_i^{k_{2_i}}, f_i^{k_{1_i}}]$$

donde h_i y $f_i \in G_1 \cup G_2 \cup G_3$ y k_{1_i} y $k_{2_i} \in Hom(S^1)$ notemos que, tanto h_i como f_i tienen soporte contenido en un mismo intervalo, del lema 78 obtenemos que,

$$[h_i^{k_{2_i}}, f_i^{k_{1_i}}] \in N,$$

para $i = 1, \cdots n$. Por tanto $g \in N$ y en consecuencia $G' \subset N$. □

El siguiente teorema es presentado en [1] como Theorem 4.3.

Teorema 81. El grupo $\mathrm{Homeo}^+(S^1)$ de homeomorfismos que preservan la orientación es simple.

Demostración. Sean N un subgrupo normal de $\mathrm{Homeo}^+(S^1)$ y I_1, I_2 e I_3 intervalos que cubren a S_1 que cumplen las propiedades del lema 80. Sean $K_1 \subset I_{12}$, $K_2 \subset I_{23}$ y $K_3 \subset I_{31}$ conjuntos compactos no vacíos, la unión

$$K = \cup_j K_i,$$

es un conjunto compacto. Considerando al abierto,

$$U = \cup_j \mathrm{Int}(I_{ji}),$$

tenemos al elemento básico $\mathcal{U}(K, U)$ y claramente $Id_{S^1} \in \mathcal{U}(K, U)$ así este conjunto básico es no vacío. Por la equivalencia entre la topología compacto-abierta y la de convergencia uniforme existe $\varepsilon > 0$ tal que en métrica uniforme se tiene que $B_\varepsilon(Id) \subset \mathcal{U}(K, U)$.

Sean $f \in B_\varepsilon(Id)$, x, y y z en I_{12}, I_{23} y I_{31} respectivamente, notemos que $f(x)$, $f(y)$ y $f(z)$ están en los interiores de las intersecciones I_{ji} respectivamente, además existen g_1, g_2 y $g_3 \in \mathrm{Homeo}(S^1)$ tal que tienen soporte en I_{12}, I_{23} y I_{31} respectivamente y son f en vecindades de x, y y z. Más aún se tiene que

$$g_3^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1} f \equiv Id \in G,$$

por tanto $B_\varepsilon(Id) \subset G$. Como $Hom_+(S^1)$ es un grupo conexo tenemos que $\langle B_\varepsilon(Id) \rangle = \mathrm{Homeo}^+(S^1)$ de esta manera tenemos que $\mathrm{Homeo}^+(S^1) = G$.

$\square$

En [1] en proposition 5.11, se demuestra que el grupo de homeomorfismos $Hom(S^1)$ es perfecto, es decir que coincide con su primer grupo conmutador por tanto $Hom(S^1)' = G'$. Del lema 78 para todo N subgrupo normal de $\mathrm{Homeo}(S^1)$ se tiene que $Hom(S^1)' \subset N$ tenemos así que el grupo $Hom(S^1)'$ es simple.

Convención 82. Estudiar la demostración de proposición 5.11 en [1] está fuera de nuestros fines, requiere agregar en síntesis la sección 5 de [1] que nos habla de la dinámica del grupo $Hom(S^1)$ sobre S^1, es un tema rico en matemática como proposition 5.9 como también en técnicas sobre el uso de conmutadores, pero haría de nuestra sección un texto largo para concluir el teorema anterior, en este texto estamos estudiando la simplicidad de grupos.

La simplicidad de grupos de homeomorfismos

Vamos a usar los resultados de [1] para demostrar la simplicidad de los grupos de homeomorfismos del conjunto de Cantor y de la curva de Sierpiński. Estos espacios son interesantes pues comparten propiedad muy similares.

Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor, un ejemplo muy importante para el análisis metemático, es un espacio topológico que mediante su topología es posible clasificar otros espacios con ciertas propiedades iguales a las de él. Vamos a usar un resultado para la construcción del conjunto de Cantor el siguiente teorema puede encontrarse en [16] como theorem 17.4.

Teorema 83. La intersección anidada de conjuntos compactos anidados es no vacía.

Además de el siguiente resultado que se encuentra en [13] capítulo VIII como Teorema 1.18.

Teorema 84. Sea X un espacio Hausdorff, toda intersección no vacía de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

Por tanto, de los resultados anteriores tenemos que en un espacio compacto y Hausdorff la inteserción anidada de conjuntos compactos es compacta.

Construcción del conjunto de Cantor ternario

Vamos a definir conjuntos de manera recursiva, para el primer paso sean $I = [0, 1]$ y $J_1 = (1/3, 2/3)$. Definimos los conjuntos

1. $F_{11} = [0, 1/3]$ y $F_{12} = [2/3, 1]$. Notemos que la longitud de estos intervalos es $1/3$.

2. $C_1 = I \setminus J_1 = F_{11} \cup F_{12}$.

En el primer paso, al intervalo unitario I lo dividimos en tres y le hemos quitado el intervalo de en medio identificado como J_1. Para el segundo paso, para los intervalos F_{11} y F_{12} vamos a dividirlos en tres subintervalos, los intervalos $J(F_{11}) = (1/3^2, 2/3^2)$ y $J(F_{12}) = (7/3^2, 8/3^2)$. Definimos a los intervalos

1. $J_2{=}J(F_{11}) \cup J(F_{12})$,

2. $F_{21} = [0, 1/3^2]$, $F_{22} = [2/3^2, 3/3^2]$, $F_{23} = [6/3^2, 7/3^2]$ y $F_{24} = [8/3^2, 1]$, notemos que la longitud de estos intervalos es $1/3^2$.

3. $C_2 = I \setminus J_2$.

En el segundo paso, para los dos intervalos restantes del paso anterior, F_{11} y F_{12}, dividimos cada intervalo en tres y retiramos el intervalo de en medio es decir, a F_{12} le quitamos el intervalo $J(F_{11})$ obteniendo ahora dos intervalos F_{21} y F_{22}. Para el intervalo F_{22} le hemos quitado el intervalo $J(F_{22})$ de este modo tenemos dos intervalos F_{23} y F_{24}. La notación representa lo siguiente, F_{ij} se define como la j-ésima componente restante obtenida en el paso i.

Repitiendo de manera infinita, obtenemos sucesiones de conjuntos $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(C_n)_{n=1}^{\infty}$. La familia de intervalos J_n es la unión disjunta de 2^{n-1} intervalos abiertos y C_n es una sucesión decreciente de intervalos cerrados, donde cada C_n es unión disjunta de 2^n intervalos cerrados. La longitud de cada J_n y C_n es $1/3^n$.

Consideremos finalmente a $J = \bigcup_n^{\infty} J_n$ definimos al **conjunto Cantor ternario** como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = I \setminus J.$$

En lo siguiente veremos que el conjunto de Cantor es un espacio topológico con una propiedad de universal.

Topología del conjunto de Cantor

El intervalo I es un conjunto compacto por el teorema de Hein-Borel, [4] Teorema 2.6. Cada conjunto F_{ij} es un subintervalo cerrado y acotado de I por tanto es compacto. Además cada C_n es una unión finita de conjuntos compactos en consecuencia cada conjunto C_n es un conjunto compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Por construcción se cumple que, dados $n < m$ índices, $C_m \subset C_n$. Tenemos por tanto que los C_n forman una familia de conjuntos compactos, no vacíos y anidados de esta manera el conjunto C es un conjunto compacto.

El conjunto de Cantor también cumple ser totalmente disconexo, [16] example 26.13.b. En otras palabras, para cada $x \in C$ se tiene que $Q(x) = \{x\}$. El siguiente teorema es importante muy importante y una demostración se encuentra en [16] en la página 216.

Teorema 85. Salvo homeomorfismo el conjunto de Cantor es el único espacio métrico, totalmente disconexo, compacto y perfecto.

Con el trabajo de Anderson en [1] el grupo de homeomorfismos del Cantor es simple, vamos a estudiar sus resultados que nos darán la simplicidad de grupos.

La simplicidad de grupos de Homeomorfismos

A partir de ahora a menos que se indique lo contrario vamos a añadir la hipótesis de que X es un espacio Hausdorff además $\text{Homeo}^0(X)$ denotará a la familia de los homeomorfismos $h : X \to X$ tal que existe U abierto en X de manera que $h|_U = \text{Id}_U$. Vamos a introducir una de las nociones importantes y fundamentales del trabajo de Anderson. En la siguiente definición un conjunto es considerado degenerado si consiste en un conjunto con un solo elemento.

Definición 86. Sean X espacio topológico. Denotamos a 2^X la colección de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Sea $\mathcal{K} \subset 2^X$ tal que;

1. los elementos de $\mathcal{K}$ son no degenerados y homeomorfos unos con otros,
2. para cada U abierto de X existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $K \subset U$,
3. para $K \in \mathcal{K}$, $\text{Cl}(K^c) \in \mathcal{K}$.

Diremos que $\mathcal{K}$ es una **estructura de rotación** para X o que X tiene una **$\mathcal{K}$-estructura de rotación**.

Vamos a recurrir a un teorema sobre dimensión y sistemas de vecindades. Para ello puede consultarse a [16] theorem 29.7 y example 29.8.

Teorema 87. El conjuto de Cantor tiene un sitema de vecindades de abiertos y cerrados.

Vamos a usar esta propiedad del conjunto de Cantor, existe una base $\mathcal{K}$ de conjuntos abiertos y cerrados, notemos que las propiedades 2 y 3 de la definición se satisfacen por ser base para una topología. Resta ver la primera parte y tan solo el hecho de que son homeomorfos. Dados K y W conjuntos en $\mathcal{K}$ notemos que cada conjunto es cerrado y por tanto son compactos, se hereda la total disconexión y perfección como subespacios también son métricos, por el teorema 85 existe $f : K \to W$ homeomorfismo.

Notemos que los argumentos son aplicables a $\mathcal{C} \setminus K$ y $\mathcal{C} \setminus W$, por tanto existe un homeomorfismo $h : \mathcal{C} \setminus K \to \mathcal{C} \setminus W$ del lema del pegado de funciones tenemos que existe un homeomorfismo $f \cup h : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ y que manda a K en W. Se tiene que el conjunto de Cantor tiene una $\mathcal{K}$ estructura de rotación.

Observación 88. Sea $g \in \text{Homeo}^0(X)$ distinto de la identidad entonces existe un elemento $K \in \mathcal{K}$ de manera que g está soportado en K. Para esto, sea $g \in \text{Homeo}^0(X)$ existe un abierto U en X tal que $g|_U = \text{Id}_U$, por la definición de $\mathcal{K}$-estructura existe un conjunto $K_1 \in \mathcal{K}$ tal que $K_1 \subset U$ y tomando complementos de esto último se tiene que

$$\text{Sop}(g) \subset X \setminus U \subset X \setminus K_1$$

al tomar la cerradura de cada conjunto tenemos que,

$$X \setminus U \subset \overline{X \setminus K_1}$$

puesto que $X \setminus U$ es cerrado, por la tercera condición de $\mathcal{K}$ estructura se sigue que $\overline{X \setminus K_1} \in \mathcal{K}$ y por tanto g está soportado en un elemento $K = \overline{X \setminus K_1}$ de $\mathcal{K}$.

Lema 89. Sea $h \in \text{Homeo}(X)$ distinto de la identidad, entonces existe $K \in \mathcal{K}$ tal que $h(K) \cap K = \emptyset$.

Demostración. Como h es distinto de la identidad, existe $x \in X$ tal que $h(x) \neq x$. Más aún, como X es un espacio Hausdorff sin pédida de generalidad existen U y V vecindades de x e y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$, por la continuidad de h se cumple que $h(U) \subset V$, de la definición de $\mathcal{K}$ estructura, existe K tal que $K \subset U$ y por tanto $h(K) \subset V$ tenemos así que, $K \cap h(K) = \emptyset$. □

Observación 90. Del lema anterior notemos que aplicando la función h^{-1}, la inversa de la función h, tenemos que $K \cap h^{-1}(K) = \emptyset$, teniendo así que,

$$K \cap (h^{-1}(K) \cup h(K)) = \emptyset.$$

Definición 91. Sea X un espacio con $\mathcal{K}$-estructura de rotación. Si existe una sucesión de conjuntos $(K_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{K}$ tal que,

1. $(K_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos.
2. Existe U abierto en X tal que $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}} K_i \subset U$.
3. $\mathrm{Cl}(\cup\mathcal{K}) - \cup\mathcal{K} = \{p\}$ con $p \in X$ y es tal que para cualquier vecindad U de p contiene todas excepto una cantidad finita de elementos de $\mathcal{K}$.

Decimos que X tiene una **sucesión de rotación** y a $(K_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ le diremos una **sucesión de rotación** en X.

Sean $\mathcal{C}$ un conjunto de Cantor y β una base de abiertos y cerrados para $\mathcal{C}$. Definiremos a una familia de conjuntos,

1. Sea F_{24} de la construcción del Cantor, como $\mathcal{K}$ es base existe $K_0 \subset \mathcal{C} \cap F_{24}$.
2. Consideremos también los conjuntos F_{22} y F_{23} nuevamente, como $\mathcal{K}$ es base existen K_1 y K_{-1} tales que $K_1 \subset \mathcal{C} \cap F_{22}$ y $K_{-1} \subset \mathcal{C} \cap F_{23}$.
3. Por este proceso existen K_i y K_{-i} conjuntos abiertos y cerrados tales que $K_i \subset F_{i2}$ y $K_{-i} \subset F_{i3}$.

Sea $p = 0$, es claro que $p \in \mathcal{C}$, la familia de conjuntos $(K_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de rotación para el conjunto de Cantor. En efecto se cumple las primeras dos condiciones de la definición por la construcción de los conjuntos K_i, note además que los conjuntos son abiertos y cerrados. Resta ver $0 \in \mathrm{Cl}(\bigcup_i K_i)$.

Sea $r > 0$ y consideremos a $B_r(0) \subset \mathcal{C}$. Como la sucesión $1/3^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/3^n < r$ para $n \geq N$, por tanto existen F_{n2} y F_{n3} tales que los extremos derechos de estos intervalos son menores que r y en consecuencia K_n y K_{-n} están contenidos en $B_r(0)$ para $n \geq N$. De esta manera se tiene que $\mathrm{Cl}(\cup\mathcal{K}) - \cup\mathcal{K} = \{0\}$ tenemos que $\mathcal{C}$ tiene una sucesión de rotación.

Recordemos la notación, dado G subgrupo de Homeo, G^0 es una familia de homeomorfismos para los cuales existe un abierto donde son la identidad.

Definición 92. Sean X un espacio con una $\mathcal{K}$-estructura y G un subgrupo de Homeo(X). Decimos que X tiene **rotación-**$(G, \mathcal{K})$ si para cualquier $K \in \mathcal{K}$ existe una sucesión de rotación $(K_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que

1. $\cup_{i\in\mathbb{Z}} K_i \subset K$ y

2. existen h_1, $h_2 \in G^0$ con soporte en K tales que;

   a) $h_1(K_i) = K_{i+1}$ para cada i.

   b)
      - $h_2|_{K_0} = h_1|_{K_0}$,
      - $h_2|_{K_{2i}} = (h_1^2)^{-1}|_{K_{2i}}$,
      - para toda $i > 0$ y $h_2|_{K_{2i-1}} = h_1^2|_{K_{2i-1}}$ para toda $i > 0$.

   c) Si para cada i, $f_i \in \mathrm{Homeo}^0(X)$ soportado en K_i, entonces existe $f \in \mathrm{Homeo}^0(X)$ soportado en $\cup K_i$ tal que $f|_{K_i} = f_i|_{K_i}$ para cada i.

   d) Para cualquier $K' \in \mathcal{K}$ existe $\varphi \in \mathrm{Homeo}(X)$ tal que $\varphi(K') = K$.

Usaremos en muchas ocasiones el lema 71 que vimos anteriormente y es importante tener en cuenta la observación 70.

Lema 93. Sean $K \subset X$ y $g \in \mathrm{Homeo}^0(X)$ soportado en K. Para cualquier $h \in \mathrm{Homeo}(X)$ se tiene que,

1. $g^{h^{-1}}$ está soportado en $h^{-1}(K)$.

2. Si $h^{-1}(K) \cap K = \emptyset$ y $h^{-1}(K) \cup K \neq X$ entonces

   a) $[h^{-1}, g^{-1}]$ está soportado en $h^{-1}(K) \cup K$,

   b) $[h^{-1}, g^{-1}]|_K = g|_K$ y

   c) $[h^{-1}, g^{-1}]|_{h^{-1}(K)} = g^{h^{-1}}|_{h^{-1}(K)}$

y la observación siguiente

Observación 94. La composición de funciones con soportes ajenos. Sean f, g dos homemorfismos tales que K_f y K_g son conjuntos de soporte respectivamente y tales que $K_f \cap K_g = \emptyset$ y $K_f \cup K_g \neq X$ entonces para $h = fg$ se cumple que, $h = g$ en K_g, $h = K_f$ en K_f y h tiene soporte en $K_f \cup K_g$.

Nota 95. Para el siguiente resultado es importante mencionar que, cuando nos referimos que g es el producto de cuatro conjugados de h y h^{-1} esto se tiene salvo el orden en los factores.

Lema 96. Sea X un espacio con rotación $(G, \mathcal{K})$ y $h \in \mathrm{Homeo}(X)$ no trivial, existe $K_0 \in \mathcal{K}$ tal que para todo $g \in G_0$ soportado en K_0 se tiene que g es el producto de cuatro conjugados de h y h^{-1}.

Demostración. Sea $h \in \text{Homeo}(X)$ no trivial y $K \in \mathcal{K}$ como en el lema 89. Como X tiene rotación- $(G, \mathcal{K})$ existen una sucesión de rotación $(K_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, con $\cup_{i\in\mathbb{Z}} K_i \subset K$ y existen homeomorfismos ϕ_1, ϕ_2 soportados en K. Afirmamos que el conjunto K_0 de la sucesión es el conjunto que cumple con el lema, sea g_0 un homeomorfismo soportado en K_0. Vamos a construir un homeormorfismo auxiliar w. Consideremos los homeomorfismos,

$$f_i = \begin{cases} g^{\phi_1^i} & \text{para } i \geq 0 \\ e & \text{para } i < 0. \end{cases}$$

Del lema 93, f_i está soportado en $\phi_1^i(K_0) = K_i$, de la definición de rotacionalidad, existe un homeomorfismo f tal que

1. f está soportado en $\bigcup_i K_i$,
2. $f|_{K_i} = f_i|_{K_i}$,

Sea $\tilde{f} = [h^{-1}, f^{-1}]$, por el lema 93 tiene soporte en el conjunto

$$Y = \left(\bigcup_i h^{-1}(K_i)\right) \cup \left(\bigcup_i K_i\right).$$

Por otro lado definamos a $\tilde{h} = \phi_2^{h^{-1}} \phi_1^{-1}$ por el lema 93 tenemos que $\phi_2^{h^{-1}}$ tiene soporte en $h^{-1}(K)$ notemos además que ϕ_1^{-1} tiene soporte en K. De la observación 70 tenemos que $\tilde{h}$ tiene soporte en el conjunto Y. Finalmente vamos a definir a $w = [\tilde{h}^{-1}, \tilde{f}^{-1}]$ notemos que,

$$\begin{aligned} w &= \tilde{h}^{-1}\tilde{f}^{-1}\tilde{h}\tilde{f} = \tilde{h}^{-1}([h^{-1}, f^{-1}])^{-1}\tilde{h}([h^{-1}, f^{-1}]) \\ &= \tilde{h}^{-1}(f^{-1}h^{-1}fh)^{-1}\tilde{h}(h^{-1}f^{-1}hf) \\ &= (\tilde{h}^{-1}f^{-1}h^{-1}f\tilde{h})(\tilde{h}^{-1}h\tilde{h})(h^{-1})(f^{-1}hf) \\ &= (h^{-1})^{(\tilde{h}^{-1}f^{-1})}h^{(\tilde{h}^{-1})}(h^{-1})^{(\text{Id})}h^{(f^{-1})} \end{aligned}$$

Notemos que w es el producto de cuatro conjugados de h y h^{-1} en orden alterno. Para terminar es suficiente demostrar que $w = g$. Veremos la igualdad en el conjunto $\cup K_i$, para $\tilde{f}$ del lema 93 tenemos que

$$\tilde{f}|_{\cup_i K_i} = f|_{\cup_i K_i}$$

por tanto se tiene que $\tilde{f}|_{K_i} = f_i|_{K_i}$ para $i \geq 0$ y para $\tilde{h}$ de la observación 94 tenemos que, $\tilde{h}|_K = \phi_1^{-1}|_K$ y por tanto, para cada K_i se tiene que, $\tilde{h}|_{K_i} = \phi_1^{-1}|_{K_i}$, dado que los conjuntos K_i son ajenos tenemos entonces que

$$\tilde{h}|_{\cup_i K_i} = \phi_1^{-1}|_{\cup_i K_i}$$

de la observación 94 tenemos que

$$w|_{\cup_i K_i} = \tilde{h}^{-1}\tilde{f}^{-1}\tilde{h}\tilde{f}|_{\cup_i K_i} = \phi_1 f^{-1}\phi_1^{-1} f|_{\cup_i K_i}.$$

En particular para K_0, se tiene que $f|_{K_0} = f_0|_{K_0} = g|_{K_0}$ pero por definición de rotación-$(G, \mathcal{K})$ $\phi_1(K_0) = K_1$ y de la observación 94 tenemos que $\phi_1 g^{-1}\phi_1^{-1}(K_0) = \phi_1 \mathrm{Id} g|_{K_0} = \mathrm{Id}|_{K_0}$. De esta manera tenemos que $w|_{K_0} = g_0|_{K_0}$. Más aún, para $i > 0$ se tiene que, $w|_{K_i} = \phi_1 f^{-1}\phi_1^{-1} f|_{K_i}$, por construcción tenemos que $f|_{K_i} = f_i|_{K_i}$ por tanto

$$\begin{aligned} w(K_i) &= \phi_1 f^{-1}\phi_1^{-1} f_i(K_i) = \phi_1 f^{-1}\phi_1^{-1}(g^{\phi_1^i})(K_i) \\ &= \phi_1 f^{-1}\phi_1^{-1}(K_0) \\ &= \phi_1 f^{-1}(K_{i-1}) \end{aligned}$$

notemos que $f|_{K_{i-1}} = f_{i-1}|_{K_{i-1}}$, de esto se sigue que,

$$w(K_i) = \phi_1 f_{i-1}^{-1}(K_{i-1}) = K_i$$

tenemos por la observación 94 que,

$$\begin{aligned} w|_{K_i} &= \phi_1 f^{-1}\phi_1^{-1} f|_{K_i} = \phi_1 f_{i-1}^{-1}\phi_1^{-1} f_i|_{K_i} \\ &= \phi_1 (g^{-1})^{\phi_1^{i-1}} \phi_1^{-1}(g^{\phi_1^i})|_{K_i} \\ &= (g^{-1})^{\phi_1^i}(g^{\phi_1^i})|_{K_i} = \mathrm{Id}|_{K_i} \end{aligned}$$

tenemos que $w|_K = g|_K$. Veamos ahora en el conjunto $h^{-1}(K)$, del lema 93

$$\tilde{f}|_{\bigcup_i h^{-1}(K_i)} = (f^{-1})^{h^{-1}}|_{\bigcup_i h^{-1}(K_i)}.$$

y por la observación 94 para $\tilde{h}$ tenemos que,

$$\tilde{h}|_{\bigcup_i h^{-1}(K_i)} = \phi_2^{h^{-1}}|_{\bigcup_i h^{-1}(K_i)}$$

tenemos entonces que $w|_{\bigcup_i h^{-1}(K_i)} = (\phi_2^{-1})^{h^{-1}}(f)^{h^{-1}}\phi_2^{h^{-1}}(f^{-1})^{h^{-1}}|_{\bigcup_i h^{-1}(K_i)}$, pero

$$(\phi_2^{-1})^{h^{-1}}(f)^{h^{-1}}\phi_2^{h^{-1}}(f^{-1})^{h^{-1}} = (\phi_2^{-1}f\phi_2 f^{-1})^{h^{-1}}$$

entonces resta ver que ocurre con $\phi_2^{-1}f\phi_2 f^{-1}$ en $h^{-1}(K)$. De lo anterior $f^{-1}|_{K_0} = g_0^{-1}|_{K_0}$ y para $i > 0$ $f^{-1}|_{K_i} = f_i^{-1}|_{K_i} = (g_0^{-1})^{\phi_1^i}|_{K_i}$. Vamos a separar los casos en pares e impares en los índices también es importante recordar la relación entre ϕ_1 yϕ_2 en la definición de rotación. Para K_{2i} tenemos que

$$\begin{aligned}
\phi_2^{-1}f\phi_2 f^{-1}|_{K_{2i}} =& \phi_2^{-1}f\phi_1^{-2}f_{2i}^{-1}|_{K_{2i}} = \phi_2^{-1}f_{2i-2}\phi_1^{-2}f_{2i}^{-1}|_{K_{2i}}\\
=&\phi_1^2(\phi_1^{2i-2}g\phi_1^{-2i+2})\phi_1^{-2}(\phi_1^{2i}g^{-1}\phi_1^{-2i})|_{K_{2i}} =\\
=&g^{\phi_1^{2i}}(g^{-1})^{\phi_1^{2i}}|_{K_{2i}} = \mathrm{Id}|_{K_{2i}}
\end{aligned}$$

y para los conjuntos K_{2i-1} tenemos un proceso similar,

$$\begin{aligned}
\phi_2^{-1}f\phi_2 f^{-1}|_{K_{2i-1}} =& \phi_2^{-1}f\phi_1^{-2}f_{2i-1}^{-1}|_{K_{2i-1}} = \phi_2^{-1}f_{2i-2}\phi_1^{-2}f_{2i}^{-1}|_{K_{2i}}\\
=&\phi_1^{-2}(\phi_1^{2i+1}g\phi_1^{-2i-1})\phi_1^2(\phi_1^{2i-1}g^{-1}\phi_1^{-2i+1})|_{K_{2i-1}}\\
=&g^{\phi_1^{2i-1}}(g^{-1})^{\phi_1^{2i-1}}|_{K_{2i-1}}\\
=&\mathrm{Id}|_{K_{2i-1}}.
\end{aligned}$$

y para K_0 tenemos que,

$$\phi_2^{-1}f\phi_2 f^{-1}|_{K_0} = \phi_1^{-1}(\phi_1 g\phi_1^{-1})\phi_1(g^{-1})|_{K_0} = gg^{-1}|_{K_0} = \mathrm{Id}|_{K_0}$$

□

Este resultado se encuentra en [1] como propiedad (B).

Observación 97. Cualquier conjugado del producto de conjugados de producto de h y h^{-1} tiene el mismo numero de conjugados de h y h^{-1}. Si $f = (g_1 h^{-1} g_1^{-1}) \cdots (g_n h g_n^{-1})$ entonces para cualquier g en $Hom(X)$ se tiene que

$$\begin{aligned} gfg^{-1} &= g(g_1 h^{-1} g_1^{-1}) \cdots (g_n h g_n^{-1}) g^{-1} \\ &= (gg_1 h^{-1} g_1^{-1} g^{-1}) \cdots (gg_n h g_n^{-1} g^{-1}). \end{aligned}$$

Con este lema vamos a demostrar el siguiente resultado, que se encuentra como [1] Theorem 1.

Teorema 98. Sea X un espacio con rotación $(G, \mathcal{K})$ y $h \in \mathrm{Homeo}(X)$ no trivial. Para todo $g \in G^0$ se tiene que g es el producto de cuatro conjugados de h y h^{-1}.

Demostración. Sean $g \in Hom_0(X)$ soportado en $K \in \mathcal{K}$ y K_0 como en las hipótesis del lema, como X tiene rotación-$(G, \mathcal{K})$ existe $\varphi \in G$ tal que

$$\varphi(K) = K_0.$$

Tomando a $g_0 = g^{\varphi}$ por el lema 93 se tiene que g_0 está soportando en $\varphi(K) = K_0$, del lema 96 g_0 es producto de cuatro conjugados de h y h^{-1},

$$g_0 = h^{g_1} (h^{-1})^{g_2} h^{g_3} (h^{-1})^{g_4}$$

entonces

$$g = \left(h^{g_1} (h^{-1})^{g_2} h^{g_3} (h^{-1})^{g_4}\right)^{\varphi^{-1}}$$

de la observación 97 se tiene que g es producto de cuatro conjugados, es decir,

$$g = h^{\varphi^{-1} g_1} (h^{-1})^{\varphi^{-1} g_2} h^{\varphi^{-1} g_3} (h^{-1})^{\varphi^{-1} g_4}.$$

□

Corolario 99. El grupo de homeomorfismos del Cantor es simple.

Bibliografía

[1] Richard D Anderson. The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms. *American Journal of Mathematics*, 80(4):955–963, 1958.

[2] Diana Avella, Octavio Mendoza, Edith Corina Sáenz, and María José Souto. *Grupos I*. papirhos, IM-UNAM, México, 2014.

[3] Diana Avella, Octavio Mendoza, Edith Corina Sáenz, and María José Souto. *Grupos II*. papirhos, IM-UNAM, México, 2016.

[4] Javier Páez Cardenas. *Cáculo diferencial en varias variables*. Las prensas de la ciencia, 2017.

[5] David BA Epstein. The simplicity of certain groups of homeomorphisms. *Compositio Mathematica*, 22(2):165–173, 1970.

[6] Étienne Ghys. Groups acting on the circle. *Enseignement Mathematique*, 47(3/4):329–408, 2001.

[7] Salicrup Graciela. *Introducción a la Topología*. Sociedad Matemática Mexicana, México, DF., 1997.

[8] Larry C. Grove. *Introducción a la teoría de grupos*. Dover Publications, INC, 2004.

[9] J Krasinkiewicz. On homeomorphism of the sierpiński curve. *Commentationes Mathematicae*, 12(2), 1969.

[10] Robert L Moore. Concerning upper semi-continuous collections of continua. *Transactions of the American Mathematical Society*, 27(4):416–428, 1925.

[11] James R Munkres. Topología, 2. a edición, 2002.

[12] Juan Antonio Pérez. Topología de conjuntos, un primer curso, 2015.

[13] Carlos Prieto de Castro. *Topología básica.* segunda edicion, Ediciones Científicas Universitarias, México, DF., 2013.

[14] Héctor Sánchez Morgado and Oscar A Palmas Velasco. *Geometría riemanniana.* Universidad Nacional Autónoma de México, 2007.

[15] Gordon Thomas Whyburn. *Topological characterization of the Sierpinski curve.* United States Air Force, Office of Scientific Research, 1957.

[16] Stephen Willard. *General topology.* Courier Corporation, 2012.

[17] Felipe Zaldivar. *Algebra.* Aportaciones metemáticas, Instituto de matemáticas de la UNAM, 2018.