

*Teoría y definiciones

*Introducción

A lo largo de este texto utilizaremos las nociones de espacios topológicos y de grupos. Nuestra primera parte consta

*Espacios topológicos Vamos a usar la notación estándar de conjuntos. La pertenencia de un elemento x a un conjunto

La unión del conjunto A con B se representa por $A \cup B$, la intersección del conjunto A con el conjunto B se representa

$f(A) = \{y \in Y : \text{existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}$

será llamado imagen directa de A bajo f , análogamente dado $B \subset Y$ el conjunto

$f^{-1}(B) = \{x \in X : \text{tal que } f(x) \in B\}$

será llamado la imagen inversa del conjunto B bajo f .

Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ dada por, $f(1) = f(3) = 1$, $f(2) = f(4) = 3$. Esta función no es inyectiva ni sobreyectiva.

En general tomar la imagen inversa de una imagen directa o en orden alterno, no se obtiene como resultado el mismo conjunto.

$f(f^{-1}(B)) \subset B$

$A \subset f^{-1}(f(A))$.

La primera contención es igualdad si f es sobreyectiva y la segunda contención es igualdad si f es inyectiva, es claro.

En la práctica es usual no indicarse el dominio e imagen de una función pues implícitamente se da a entender que es el mismo.

Sea X un conjunto y $\tau \subset 2^X$ una familia de subconjuntos de X . Decimos que τ es una **topología** para X si cumple:
 \emptyset, X son elementos de τ .

Para cada subfamilia finita de τ , $\{A_i\}_{i=1}^n$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un elemento de τ .

Para cada subfamilia $\{A_i\}_{i \in I}$ donde I es un familia de índices arbitrario, se tiene que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un elemento de τ .

Por **espacio topológico** nos referimos a un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología para X . Denotaremos

La segunda condición se conoce como **cerradura bajo intersecciones finitas** o que **familia es cerrada bajo intersecciones finitas**.

Sean X un conjunto y la familia 2^X , el par formado por $(X, 2^X)$ es un espacio topológico y es llamado **espacio discreto**.

Además si X contiene mas de un punto, las familias 2^X y τ del ejemplo anterior son distintas pero se da la contención.

La topología guarda información importante del conjunto X que nos puede ayudar a distinguir propiedades de este espacio.

Cuando el contexto sea claro sobre el espacio topológico vamos prescindir de la notación de la topología y simplemente diremos

Ahora, un resultado que nos permitirá hablar de espacios topológicos en subconjuntos, esto nos permitirá de hablar de

Sea X un espacio topológico $Y \subset X$ entonces $\tau_Y = \{A \cap Y : A \in \tau\}$ es una topología para Y . Por **subespacio** Y de X .

El tema que no vamos a detallar es el de sistema de vecindades y bases. Para estos temas tenemos en la bibliografía.

Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Definimos una familia de conjuntos mediante las siguientes condiciones; dado $(x, y) \in X$

$B_r((x, y)) = \{(w, z) \in X : \|(x, y) - (w, z)\| < r\}$,

donde indicamos que es la norma usual de \mathbb{R}^2 y $z \neq 0$. Por otro lado si $y = 0$ tomamos el conjunto

$\beta((x, 0)) = B_r((x, r)) \cap X \cup \{(x, 0)\}$.

Hemos definido familias de conjuntos en torno a cada punto, esta familia de conjuntos es una base para una topología.

Notemos que en este espacio $R \times \{0\} \subset X$, pero la restricción al subespacio $R \times \{0\}$ nos da un conjunto discreto.

Para operadores topológicos utilizaremos la siguiente notación.

Sea X un espacio topológico y U subconjunto de X .

Diremos que U es **vecindad** de un punto x denotado por $U(x)$ si, $x \in U$ y $U \in \tau$. A la familia de conjuntos $U(x)$ de vecindades

Al conjunto **interior** de A en X lo denotaremos por

Al conjunto **clausura** de A en X lo denotaremos por,

Denotaremos por $Fr_X(A)$ al conjunto $\overline{A}^c \cap \overline{A}$ a este conjunto le llamaremos la **frontera** de A en X .

Cuando el contexto lo permita simplemente denotaremos por $Int(A)$ al interior, $Cl(A)$ la clausura y $Fr(A)$ a la frontera.

En topología general nos interesa clasificar espacios mediante las propiedades de sus topologías la manera de hacerlo es

Sea X espacio topológico y una función $h : X \rightarrow X$.

Dado B subconjunto de X , $h|_B$ denotará la restricción $h : B \rightarrow h(B)$ de h a B .

Decimos que h es **continua** si para cada conjunto abierto U se cumple que $h^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.

Sea h una función continua y biyectiva. Decimos que h es un **homeomorfismo** si la función inversa de h , $h^{-1} : X \rightarrow X$

Sean X un conjunto con mas de un punto y las topologías 2^X y $\tau = \{\emptyset, X\}$. Consideremos la función

dada por

Notemos que para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es un conjunto abierto en X_{2^X} , pero $Id_X^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ no lo es en X_τ . Si

dada por

si es continua pues $Id_X^{-1}(X) = X$ el cual es un conjunto abierto, el caso \emptyset es trivial. En particular, una función continua

*Invariantes topológicos

Los invariantes topológicos, son propiedades que una topología tiene y que estas se preservan mediante homeomorfismos.

Además es importante mencionar el hecho de que un espacio pueda tener una propiedad \mathcal{P} para una topología en particular.

*Compacidad Sea X un espacio topológico. Una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ se dice ser una **cubierta abierta** para

$A \subset \bigcup_i U_i$.

Por **subcubierta abierta** nos referimos a una subfamilia

tal que;