

Teoría y definiciones

Introducción

A lo largo de este texto utilizaremos las nociones de espacios topológicos y de grupos. Nuestra primera parte consta de introducir notación y teoremas correspondientes a espacios topológicos, conexidad y homomorfismos. De grupos, hablaremos de morfismos de grupos y grupos simples. Nuestra bibliografía es estándar, esto es, libros de cursos o libros que son reconocidos como base para algunos cursos.

Espacios topológicos

Vamos a usar la notación estándar de conjuntos. La pertenencia de un elemento x a un conjunto X se denota por $x \in X$. Dados dos conjuntos A y B denotaremos la contención del conjunto A en el conjunto B por $A \subset B$ y la igualdad de conjuntos $A = B$ representa que se dan las contenciones $A \subset B$ y $B \subset A$.

La unión del conjunto A con B se representa por $A \cup B$, la intersección del conjunto A con el conjunto B se representa por $A \cap B$. $A \setminus B$ representa el conjunto de los elementos que están en A pero que no están en B en particular a $X \setminus B$ le diremos el complemento de B en X , finalmente 2^X representa el conjunto potencia de X , es decir, la familia $2^X = \{A : A \subset X\}$. Sean X, Y conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una función, para cualquier $A \subset X$ el conjunto,

$$f(A) = \{y \in Y : \text{existe } x \in A \text{ de manera que } f(x) = y\}$$

será llamado imagen directa de A bajo f , análogamente dado $B \subset Y$ el conjunto

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \text{tal que } f(x) \in B\}$$

será llamado la imagen inversa del conjunto B bajo f .

Ejemplo 0.1. Sea $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ dada por, $f(1) = f(3) = 1$, $f(2) = f(4) = 3$. Esta función no es inyectiva ni sobreyectiva. Consideremos a $\{1, 4\}$, notemos que $f^{-1}(\{1, 4\}) = \{1, 3\}$ pero $f(f^{-1}(\{1, 4\})) = \{1\}$. Por otro lado, consideremos a $\{1, 2\}$ y notemos que $f(\{1, 2\}) = \{1, 3\}$ pero que $f^{-1}(\{1, 3\}) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Observación 0.2. En general tomar la imagen inversa de una imagen directa o en orden alterno, no se obtiene como resultado el mismo conjunto. Pero se tiene que

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(B)) &\subset B \\ A &\subset f^{-1}(f(A)). \end{aligned}$$

La primera contención es igualdad si f es sobreyectiva y la segunda contención es igualdad si f es inyectiva, es claro que si f es biyectiva tenemos las dos igualdades.

En la práctica es usual no indicarse el dominio e imagen de una función pues implícitamente se da a entender que el lector no tiene inconveniente o que es claro del contexto.

Definición 0.3. Sea X un conjunto y $\tau \subset 2^X$ una familia de subconjuntos de X . Decimos que τ es una **topología** para X si cumple que;

1. \emptyset, X son elementos de τ .
2. Para cada subfamilia finita de τ , $\{A_i\}_{i=1}^n$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un elemento de τ .
3. Para cada subfamilia $\{A_i\}_{i \in I}$ donde I es un familia de índices arbitrario, se tiene que $\bigcup_{i \in I} A_i$ es un elemento de τ .

Por **espacio topológico** nos referimos a un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología para X . Denotaremos al espacio (X, τ) por X_τ . A los elementos U de τ les llamaremos **conjuntos abiertos**. Un conjunto V se dice **cerrado** si es complemento de un conjunto abierto es decir existe U conjunto abierto tal que $V = X \setminus U$.

Nota 0.4. La segunda condición se conoce como **cerradura bajo intersecciones finitas** o que **familia es cerrada bajo intersecciones finitas**. La tercera condición se conoce como **cerradura bajo uniones arbitrarias** o que **la familia es cerrada bajo uniones arbitrarias**.

Ejemplo 0.5. Sea X un conjunto y consideremos la familia 2^X , el espacio topológico formado por $(X, 2^X)$ es llamado **espacio discreto**. Por otro lado sea $\tau = \{\emptyset, X\}$, esta familia cumple la definición de topología, el espacio (X, τ) es llamado **espacio indiscreto**.

Además si X contiene mas de un punto, las familias 2^X y τ del ejemplo anterior son distintas pero se da la contención $\tau \subset 2^X$. En consecuencia un conjunto puede tener mas de una topología y distintas.

La topología guarda información importante del conjunto X que nos puede ayudar a distinguir propiedades de este conjunto. En el ejemplo, los espacios discreto e indiscreto no distinguen mucho sobre X , estas dos topologías en este aspecto son triviales.

Convenio 0.6. Cuando el contexto sea claro sobre el espacio topológico vamos prescindir de la notación de la topología y simplemente diremos que X es espacio topológico.

Ahora, un resultado que nos permitirá hablar de espacios topológicos en subconjuntos, esto nos permitirá de hablar sin ambigüedades respecto a los ejemplos concretos que estudiaremos.

Teorema 0.7. Sea X un espacio topológico $Y \subset X$ entonces $\tau_Y = \{A \cap U : U \in \tau\}$ es una topología para Y . Por **subespacio** Y de X nos referimos al espacio (Y, τ_Y) .

Convenio 0.8. El tema que no vamos a detallar es el de sistema de vecindades y bases. Para estos temas tenemos en la bibliografía [?] capítulo 2, página 58 para bases de vecindades y capítulo 3, página 73 para bases para una topología.

Ejemplo 0.9. Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Definimos una familia de conjuntos mediante las siguientes condiciones; dado $(x, y) \in X$ y $r > 0$ si $y > 0$ definimos el conjunto,

$$B_r((x, y), r) = \{(w, z) \in X : \|(x, y) - (w, z)\| < r\},$$

donde indicamos que es la norma usual de \mathbb{R}^2 y $z \neq 0$. Por otro lado si $y = 0$ tomamos el conjunto

$$\beta((x, 0)) = B_r((x, r), r) \cup \{(x, 0)\}.$$

Hemos definido familias de conjuntos en torno a cada punto, esta familia de conjuntos es una base para una topología sobre X y el espacio es conocido como **plano de Moore**.

Notemos que en este espacio $\mathbb{R} \times \{0\} \subset X$, pero la restricción al subespacio $\mathbb{R} \times \{0\}$ nos da un conjunto discreto mientras que la restricción al plano $\{(x, y) \in X : y > 0\}$ es el plano positivo en \mathbb{R}^2 .

Para operadores topológicos utilizaremos la siguiente notación.

Definición 0.10. Sea X un espacio topológico y U subconjunto de X .

- Diremos que U es **vecindad** de un punto x denotado por $U(x)$ si, $x \in U$ y $U \in \tau$. A la familia de conjuntos $U(x)$ de vecindades de un punto x la denotaremos mediante $\mathcal{N}(x)$.
- Al conjunto **interior** de A en X lo denotaremos por

$$Int_X(A) := \{x \in A : \text{existe } U(x) \text{ de manera que } U \subset A\}.$$

- Al conjunto **clausura** de A en X lo denotaremos por,

$$Cl_X(A) := \{x \in A : \text{para toda } U(x) \text{ se cumple que } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

- Denotaremos por $Fr_X(A)$ al conjunto $\overline{A^c} \cap \overline{A}$ a este conjunto le llamaremos la **frontera** de A en X .

Convenio 0.11. Cuando el contexto lo permita simplemente denotaremos por $Int(A)$ al interior, $Cl(A)$ la clausura y $Fr(A)$ a la frontera de A en X .

En topología general nos interesa clasificar espacios mediante las propiedades de sus topologías la manera de hacerlos es por funciones llamadas homeomorfismos. Esto nos permite pensar que un espacio es como uno similar usar las propiedades conocidas. Esto se suele hacer cuando un autor menciona frases como salvo homeomorfismo.

Definición 0.12. Sea X espacio topológico y una función $h : X \rightarrow X$.

1. Dado B subconjunto de X , $h|_B$ denotará la restricción $h : B \rightarrow h(B)$ de h a B .

2. Decimos que h es **continua** si para cada conjunto abierto U se cumple que $h^{-1}(U)$ es un conjunto abierto.
3. Sea h una función continua y biyectiva. Decimos que h es un **homeomorfismo** si la función inversa de h , $h^{-1} : X \rightarrow X$ es continua.

Ejemplo 0.13. Sean X un conjunto con mas de un punto y las topologías 2^X y $\tau = \{\emptyset, X\}$. Consideremos la función

$$Id_X : X_\tau \rightarrow X_{2^X}$$

dada por

$$Id_X(x) = x.$$

Notemos que para cada $x \in X$ el conjunto $\{x\}$ es un conjunto abierto en X_{2^X} , pero $Id_X^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ no lo es en X_τ . Sin embargo reescribiendo la función anterior de la siguiente manera,

$$Id_X : X_{2^X} \rightarrow X_\tau$$

dada por

$$Id_X(x) = x,$$

si es continua pues $Id_X^{-1}(X) = X$ el cual es un conjunto abierto, el caso \emptyset es trivial. En particular, una función continua y biyectiva no siempre tiene inversa continua.

Invariantes topológicos

Los invariantes topológicos, son propiedades que una topología tiene y que estas se preservan mediante homeomorfismos. Esto es sean X, Y espacios y \mathcal{P} una propiedad topológica tal que X posee a \mathcal{P} se dice que \mathcal{P} es un **invariante topológico** si para todo homomorfismo $h : X \rightarrow Y$, Y tiene la propiedad \mathcal{P} .

Además es importante mencionar el hecho de que un espacio pueda tener una propiedad \mathcal{P} para una topología en particular y no poseer la propiedad con otra topología definida en el mismo conjunto. Veremos dos que son de las mas conocidas y de las mas importantes para el análisis moderno.

Compacidad

Definición 0.14. Sea X un espacio topológico. Una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ se dice ser una **cubierta abierta** para un conjunto A si

$$A \subset \bigcup_i U_i.$$

Por **subcubierta abierta** nos referimos a una subfamilia

$$\{U_{i_j}\}_{j \in J} \subset \{U_i\}_{i \in I}$$

tal que;

$$A \subset \bigcup_j U_{i_j}.$$

Decimos que X es **compacto** si para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta finita que cubre a X . Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es compacto si lo es como subespacio.

Un teorema importante respecto a funciones continuas y conjuntos compactos es el siguiente.

Teorema 0.15. Sea C un subconjunto compacto de X , para toda función continua $f : X \rightarrow X$ el conjunto $f(C)$ es un conjunto compacto.

Una demostración puede encontrarse en [?] VIII.1.22 Teorema. En palabras simples, la imagen continua de un conjunto compacto es compacta. Otro resultado que es importante.

Para el tema de funciones continuas Una demostración de este teorema se puede encontrar en capítulo 2, Teorema 2.5

Teorema 0.16. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $K \subset A$. Si f es una función continua y K es un conjunto compacto entonces f es uniformemente continua sobre K .

Conexidad

Decimos que X es **disconexo** si existe abiertos U y V ajenos y no vacíos tales que $X = U \cup V$. Decimos que un espacio X es **conexo** si no es desconexo. Un subconjunto $Y \subset X$ es conexo (o desconexo) si lo es como subespacio.
teo 26.3 Willard.

Teorema 0.17. Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Dado C un subconjunto conexo de X se tiene que $f(C)$ es un conjunto conexo.

Topología métrica

Un **espacio métrico** es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ es una función que satisface las siguientes condiciones;

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

A la función d le llamamos una **métrica** para X . Al par (X, d) le denotaremos por X_d .

Observación 0.18. La notación X_d hacemos énfasis es que X es el conjunto con métrica d , más adelante veremos que un espacio métrico es un espacio topológico por lo que X_d es el equivalente a X_τ donde τ es la generada por la métrica salvo que ahora indicamos la cualidad métrica de esta topología.

Ejemplo 0.19. Dados $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, la norma euclidiana,

$$d(\vec{a}, \vec{b}) := \|\vec{a} - \vec{b}\|$$

define una métrica en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 0.20. Sean X un conjunto no vacío y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante:

$$d(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{si } a \neq b; \\ 0, & \text{si } a = b. \end{cases}$$

d es conocida como la **métrica discreta** y X_d como **espacio métrico discreto**.

Ejemplo 0.21. - Sea X_d espacio métrico. Definimos,

$$\bar{d}(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < d(a, b); \\ d(a, b) & \text{si } d(a, b) < 1. \end{cases}$$

\bar{d} es una métrica para X con $\bar{d}(a, b) \leq 1$ para cuales quiera $a, b \in X$.

Definición 0.22. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X_d$. Definimos a la **bola abierta** de centro x y radio ε como

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

De manera parecida definimos a la **bola cerrada** de centro x y radio ε como

$$\bar{B}_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Para diferenciar la métrica que X pueda tener (y por tanto las bolas de X) denotaremos $B_d(x, \varepsilon)$ y diremos que es una **d-bola**. En caso de que no haya confusión simplemente denotaremos $B(x, \varepsilon)$. Tenemos los conceptos necesarios para definir una topología para un espacio métrico.

Proposición 0.23. Sea X espacio métrico. La familia $\{B_d(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ de todas las d-bolas es base para una topología sobre X .

Teorema 0.24. Si $x, y \in X_d$ con $x \neq y$ entonces existen vecindades $U(x)$ y $V(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$.

Observación 0.25. El teorema anterior nos dice que los espacios métricos son espacios Hausdorff.

Terminamos esta parte con la siguiente definición que es muy usada en los artículos de [?], Wjyburn y Moore

Definición 0.26. Decimos que X es un **continuo** si es un espacio métrico, compacto y conexo.

Al estudiar espacios métricos nos vemos en la opción de no estudiar los axiomas de separación, que es una parte muy importante de la topología general. De nuevo, recomendamos el siguiente texto donde se puede profundizar este tema. Es claro que no hablar de este tema nos deja un estudio sesgado, pero usaremos solo un axioma de separación hasta la parte de la topología del grupo de homeomorfismos de la circunferencia. Incluso, solo es necesario concordar el tercer axioma separación. Un espacio topológico es regular si dados un punto y un conjunto cerrado existen dos abiertos ajenos cada uno conteniendo al punto y al cerrado, un espacio es T_3 si es regular y es T_0 o espacio de Kolmogorov.

Topología conciente

En topología se estudia distintas maneras de obtener espacios topológicos una manera es el subespacio, otras mas complejas son las topologías generadas por funciones o familia de funciones, en sí es obtener un espacio topológico donde una función o una familia de funciones son continuas. Recomendamos acudir al texto Salicrup, donde se explica de manera adecuada esta técnica.

Sea X un espacio y $A \subset X$, consideremos a $Y = (X \setminus A) \cup \{A\}$, el subespacio A ha sido colapsado a un punto $\{A\}$; sea

$$q(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X \setminus A \\ A & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

la topología final inducida por q es llamada la **topología cociente**; el espacio resultante se llama **espacio cociente** y se denota por X/A , a q se le llama **proyección o función cociente**.

Ejemplo 0.27. Consideremos a \mathbb{Z} como subespacio de \mathbb{R} y al cociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} , este espacio cociente tiene un subespacio homeomorfo a S^1 por cada intervalo $[n, n+1]$ colapsando los números enteros a un punto. A este espacio se le conoce como **ariete hawaiano**

Un ejemplo mas complejo es el siguiente. Recordemos que una relación de equivalencia induce una partición de un conjunto en subconjuntos ajenos que son las clases de equivalencia, las cuales se definen por $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$. La familia de las clases de equivalencia es denotado por X/\sim ie,

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}.$$

Ejemplo 0.28. Nuevamente, consideremos a \mathbb{Z} como subespacio de \mathbb{R} y la relación; $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Z}$. Esta relación es de equivalencia. En efecto,

1. $x - x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
2. Supongamos que $x - y = z$ y $z \in \mathbb{Z}$ claramente $-z \in \mathbb{Z}$ y por tanto $y \sim x$
3. Si $x - y \in \mathbb{Z}$ y $y - z \in \mathbb{Z}$ resta notar que

$$x - z = x - y + y - z$$

el cual es un numero entero. Por tanto $x \sim z$.

La función $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ dada por $\pi(x) = [x]$ está bien definida y es una función cociente. Definimos a $Hom(\mathbb{R})$ los homeomorfismos monótonos crecientes de la recta que cumplen la propiedad,

$$\tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1.$$

Este homeomorfismo induce un homeomorfismo de

$$f : \mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{R}/\sim$$

dado por

$$f = \pi(\tilde{f}).$$

Esta composición está bien definida. Dada $y \in [x]$ tenemos que existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $y = x + r$, luego consideremos que

$$f([y]) = \pi(\tilde{f}(y)) = \pi(\tilde{f}(x + r)) = \pi(\tilde{f}(x) + r) = [\tilde{f}(x) + r] = [\tilde{f}(x)] = \pi(\tilde{f}(x))$$

El espacio cociente \mathbb{R}/\sim , es homeomorfo a S^1 . Notemos que de esto se induce un homeomorfismo de la circunferencia en la circunferencia $f : Hom_1(S^1) \rightarrow Hom(S^1)$.

Epstein en su trabajo de ***, del cual nos hemos basado en parte, trabajó en variedades (espacios muy parecidos a un espacio \mathbb{R}^m) sugerimos para ese tema las definiciones de ***. En una sección utilizaremos el trabajo de Epstein para ver la simplicidad del grupo de homeomorfismos del círculo.