This is a empty comment

Capítulo 1

Introducción

Notación y teoremas importantes

A lo largo de este texto utilizaremos términos correspondientes al tema de espacios topológicos y grupos para ello consideramos importante convenir la notación necesaria. Vamos a introducir la notación del texto.

Espacios topológicos

Recomendamos los siguientes textos para desarrollar un estudio más detallado libros como. Vamos a usar la notación estándar de conjuntos, $\subset$ representa la contención de conjuntos, $\cup$ la unión, $\cap$ la intersección, dados dos conjuntos, A, B entonces $A \setminus B$ representará el conjunto de los elementos que están en A pero que no están en B en particular a $X \setminus K$ le diremos el complemento de K en X, finalmente 2^X representa el conjunto potencia de X.

Definición 1.0.1. Sea X un conjunto y $\tau \subset 2^X$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que τ es una **topología** para X si cumple que;

1. $\emptyset$, X son elementos de τ.
2. Para cada subfamilia finita de τ, $\{A_i\}_{i=1}^n$ se tiene que $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es un elemento de τ.
3. Para cada subfamilia $\{A_i\}_{i\in J}$ donde I es un familia de índices[1] se tiene que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es un elemento de τ.

Por **espacio topológico** nos referimos a un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una topología para X.

Observación 1.1. Para la primera condición, algunos autores recurren a uniones e intersecciones particulares de familias vacías, pero consideramos un exceso de notación y en nuestras pruebas eso no será necesario. La segunda condición se conoce como **cerradura bajo intersecciones finitas** o que **familia es cerrada bajo intersecciones finitas.** La tercera condición se conoce como **cerradura bajo uniones arbitrarias** o que **la familia es cerrada bajo uniones arbitrarias.**

Convenio 1.2. Cuando sea posible prescindir de la topología, simplemente diremos que X es espacio topológico.

Espacios métricos y las variedades (espacios muy parecidos a un $\mathbb{R}^m$) serán mencionados pero no serán estudiados, sin embargo para ellos preferimos las definiciones de estos temas como en; ***. Para operadores topológicos utilizaremos la siguiente notación.

Definición 1.2.1. Sea X un espacio topológico y U subconjunto de X.

- Diremos que U es **vecindad** de un punto x denotado por $U(x)$ si, $x \in U$ y $U \in \tau$. A la familia de conjuntos $U(x)$ de vecindades de un punto x la denotaremos mediante $\mathcal{N}(x)$.
- Al conjunto **interior** de A en X lo denotaremos por

$$Int_X(A) := \{x \in A : \text{existe } U(x) \text{ de manera que } U \subset A\}.$$

- Al conjunto **clausura** de A en X lo denotaremos por,

$$Cl_X(A) := \{x \in A : \text{existe } U(x) \text{ de manera que } U \cap A \neq \emptyset\}.$$

[1] no necesariamente finito

- Denotaremos por $Fr_X(A)$ al conjunto $\overline{A^c} \cap \overline{A}$ a este conjunto le llamaremos la **frontera** de A en X.

Convenio 1.3. Cuando sea posible prescindir del espacio topológico, simplemente denotaremos por $Int(A)$ al interior, $Cl(A)$ la clausura y $Fr(A)$ a la frontera de A en X.

En topología nos interesa estudiar las transformaciones de los espacios topológicos a manera de una clasificación, nuestro interés serán las funciones que nos permiten transformar un espacio en sí mismo.

Definición 1.3.1. Sea X espacio topológico y una función $h : X \to X$.

1. Dado $B \subset X$, $h|_B$ denotará la restricción $h : B \to h(B)$ de h a B.
2. Decimos que h es **continua** si para cada $U \in \tau$ se cumple que $h^{-1}(U) \in \tau$.
3. Sea h una función continua y biyectiva, decimos que h es un **homeomorfismo** si la función inversa de h, $h^{-1} : X \to X$ es continua.

Ahora, un resultado que nos permitirá hablar de espacios topológicos en en subconjuntos, esto nos permitirá de hablar sin ambigüedades respecto a los ejemplos concretos que estudiaremos.

Teorema 1.4. Sea X un espacio topológico $Y \subset X$ entonces existe una topología τ_Y tal que (Y, τ_Y) es un espacio topológico. Por **subespacio** Y de X nos referimos al espacio (Y, τ_Y).

Definición 1.4.1. Sea X un espacio topológico.

1. Decimos que X es **compacto** si para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta finita que cubre a X. Decimos que $K \subset X$ es compacto si lo es como subespacio.
2. Decimos que X es **disconexo** si existe abiertos U y V ajenos y no vacíos tales que $X = U \cup V$. Decimos que un espacio X es **conexo** si no es disconexo. Un subconjunto $Y \subset X$ es conexo (o disconexo) si lo es como subespacio.
3. Decimos que X es un **continuo** si es un espacio métrico, compacto y conexo.

Grupos

En este texto estudiaremos nociones de álgebra moderna, para ello planteamos la notación necesaria para desarrollar dichos temas. Para el desarrollo de esto temas recomendamos la siguiente literatura donde nos hemos basado ***

Definición 1.4.2. Sea G un conjunto no vacío. Por grupo nos referimos a una terna $(G, \circ, e)$ con $\circ : G \times G \to G$ una operación en G y e un elemento de G tales que

1. La operación $\circ$ es asociativa.
2. para cada $g \in G$ existe $h \in G$ tal que $\circ(g, h) = \circ(h, g) = e$. A h se le llamara un inverso de g.
3. Para todo $g \in G$ se cumple que $\circ(g, e) = \circ(e, g) = g$.

Convenio 1.5. Para evitar entrar en resultados interesantes que no usaremos de manera explícita recurrimos a completar el tema con los teoremas que hablan de la unicidad de los elementos e y g como en [1]. A partir de ahora denotaremos simplemente por gh a la operación $\circ(g, h)$, en otras palabras, hacemos el abuso de notación, $\circ(g, h) := gh$.

Ahora estableceremos la notación para los subgrupos y clases laterales que nos permitirá desarrollar el resto de nuestro trabajo.

Definición 1.5.1. Sea G un grupo y subconjuntos H, K de G.

1. Decimos que H es **subgrupo** de G denotado por $H \leq G$, si la operación $\circ : H \times H \to G$ es una operación cerrada en H.
2. El conjunto KH se define como $KH = \{kh : k \in K \text{ y } h \in H\}$. En particular cuando K conste de un solo punto, $K = \{k\}$ denotaremos al conjunto KH por kH.
3. Para todo $g \in G$ el conjunto $gH = \{gh : h \in H\}$ le llamaremos **clase lateral izquierda**; análogamente por **clase lateral derecha** nos referimos al conjunto $Hg = \{hg : h \in H\}$. A la familia $G/H_der = \{gH : g \in G\}$ le llamaremos la familia de clases laterales derechas de H y análogamente a $G/H_izq = \{Hg : g \in G\}$ le llamaremos la familia de clases laterales derechas de H.

Observación 1.6. De la definición anterior tenemos unas observaciones interesantes.

1. Las clases de un conjunto forma una partición de G y por tanto las clases inducen una relación de equivalencia.

2. Más aún existe una correspondencia entre clases laterales. Sea

$$\begin{aligned} \varphi : G/H_d &\to G/H_i \\ gH &\mapsto Hg^{-1} \end{aligned}$$

esta función cambia una clase lateral derecha a una izquierda. Veamos que es una función biyectiva. La función es sobre, pues para $g \in G$ y para el elemento Hg tenemos que g^{-1} es tal que $\varphi(g^{-1}H) = Hg$. Resta ver que es inyectiva, sean g_1H y g_1H clases derechas y supongamos que

$$Hg_1^{-1} = \varphi(g_1H) = \varphi(g_2H) = Hg_2^{-1}$$

Sea $g_1h_1 \in g_1H$ notemos que

$$g_1h_1(h_1^{-1}g_1^{-1}) = e$$

como $Hg_2^{-1} = Hg_1^{-1}$ existe h_2 tal que $h_2g_2^{-1} = h_1^{-1}g_1^{-1}$, así

$$g_1h_1(h_2g_2^{-1}) = e$$

es decir, $g_1h_1 = g_2h_2^{-1}$ dando la contención $g_1H \subset g_2H$, la contención recíproca es idéntica se deduce que $g_1H = g_2H$. Concluimos que φ es biyectiva.

Sin embargo, esta correspondencia no deja en claro que $gH = Hg$ un ejemplo de esto se puede encontrar en 111 imate.

3. Dado $g \in G$ y $h \in H$ si $ghg^{-1} \in H$ entonces existe $h_1 \in H$ tal que $ghg^{-1} = h_1$ es decir, $gh = h_1g$ que de acuerdo con la notación de clases, cada elemento de una clase izquierda es un elemento de la correspondiente clase derecha, de manera precisa $gH = Hg$.

La situación anterior es sorprendente y no solo es una curiosidad matemática, esto nos da la estructura de como clasificar grupos.

Definición 1.6.1. Sea G un grupo y H subgrupo de G.

1. Decimos que g **normaliza** a H si $gHg^{-1} \subset H$. Al conjunto $N_G(H) = \{g \in G : gH = Hg\}$ le llamamos el **normalizador** de H en G.

2. Si $G = N_G(H)$ decimos que H es **normal** en G y denotaremos esto por $H \trianglelefteq G$.

Una manera de construir nuevos grupos por grupos establecidos es por medio de los cocientes. 113 imate

Teorema 1.7. Sea H subrupo normal de G entones el conjunto G/H es un grupo.

También, es necesario establecer las funciones entre grupos que preservan estructura de grupo en si mismo.

Definición 1.7.1. Sea G un grupo.

1. Una función $\varphi : G \to G$ es un **morfismo** de grupos si

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h).$$

2. Definimos al **Kernel** de φ al conjunto $Ker(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = e\}$.

3. Diremos que un morfismo de grupos φ es:

   - **Monomorfismo:** si φ es inyectiva.
   - **Epimorfismo:** si φ es sobreyectiva
   - **Isomorfismo:** si φ es biyectiva.

Los siguientes términos son importantes, tanto desde la historia del estudio de los grupos, como para definir a las acciones sobre conjuntos.

Definición 1.7.2. Sea X un conjunto no vacío y G un grupo.

1. A la familia $S_X = \{f : X \to X | f \text{ es biyectiva }\}$ le llamaremos el **grupo simétrico** de X. Si X es finito de cardinalidad n denotamos a S_X por S_n.
2. Decimos que G **actúa** sobre X si existe un morfismo de grupos $\varphi : G \to S_X$. Si G actúa sobre X entonces diremos que X es un G-conjunto.

Nota 1.8. S_X es un grupo con la composición de funciones.

El resultado siguiente es equivalente a la definición de acción, puede consultar esto en

Teorema 1.9. Sea X un G conjunto, entonces existe una función $\alpha : G \times X \to X$ que satisface

1. $\alpha(e, x) = x$
2. $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$

A dicha función le llamaremos una **acción** de G sobre X.

Nota 1.10. De manera recíproca al teorema, si existe una acción de G sobre X entonces existe un morfismo de grupos $\varphi : G \to S_X$.

Grupos conmutadores

Sea G un grupo y g, $h \in G$. Definimos al **conmutador** de g y h como el elemento

$$[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}.$$

Definición 1.10.1. Dados dos subconjutos H y K de G, definimos al grupo $[H, K]$ como el grupo generado por los elementos $\{[h, k] : h \in H \text{ y } k \in K \in G\}$. En particular al grupo $[G, G]$ le llamaremos el **primer grupo derivado** de G.

Observación 1.11. Haremos unas observaciones de la definición anterior. Sean G un grupo y g, x, $y \in G$ con $[x, y]$ su conmutador.

1. El inverso de un conmutador,
$$\begin{aligned}[x, y]^{-1} &= (xyx^{-1}y^{-1})^{-1}\\ &= (yx^{-1}y^{-1})^{-1}x^{-1}\\ &= (x^{-1}y^{-1})^{-1}y^{-1}x^{-1}\\ &= (y^{-1})^{-1}xy^{-1}x^{-1}\\ &= yxy^{-1}x^{-1} = [y, x].\end{aligned}$$
2. El conjugado de un conmutador,
$$\begin{aligned}g[x, y]g^{-1} &= g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1}\\ &= (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1})\\ &= [gyg^{-1}, gxg^{-1}].\end{aligned}$$
3. El conmutador bajo homeomorfismos. Sea $\phi : G \to G$ un morfismo de grupos, notemos que,
$$\begin{aligned}\phi([x, y]) &= \phi(xyx^{-1}y^{-1})\\ &= \phi(x)\phi(y)\phi(x^{-1})\phi(y^{-1})\\ &= \phi(x)\phi(y)\phi(x)^{-1}\phi(y)^{-1}\\ &= [\phi(x), \phi(y)],\end{aligned}$$
más aún sea $x \in [G, G]$ es decir existen a_i, $b_i \in G$, $i = 1, \cdots n$ tales que
$$x = [a_1, b_1]^{m_1} \cdots [a_n, b_n]^{m_n},$$

notemos que para todo morfismo de grupos, ϕ se cumple que

$$\phi(x) = [\phi(a_1), \phi(b_1)]^{m_1} \cdots [\phi(a_n), \phi(b_n)]^{m_n} \in [G, G].$$

Por tanto $\phi([G, G]) \subset [G, G]$.

4. $[G, G]$ es normal en G. Sea $g \in G$ y consideremos el automorfismo interno

$$\begin{aligned} \gamma_g : G &\to G \\ x &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

claramente se tiene que $\gamma_g([G, G]) = g[G, G]g^{-1}$ y por el inciso anterior $g[G, G]g^{-1} = \gamma_g([G, G]) \subset [G, G]$, concluimos así la normalidad.

Grupos topológicos

La estructura matemática que resulta de considerar una topología en un grupo es muy interesante, para nuestros fines no abundaremos en ello, simplemente hacemos mención acerca de ciertas propiedades de grupos topológicos que usaremos.

Definición 1.11.1. Sea X un grupo decimos que X es un **grupo topológico** si existe una topología en X de manera que las funciones

1. Multiplicación,

$$\begin{aligned} \circ : X \times X &\to X \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

2. Inversión

$$\begin{aligned} {}^{-1} : X \times X &\to X \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

son continuas.

Lemas y observaciones

Lema 1.12. Sea $(X, \tau, \circ)$ grupo topológico y U abierto en X, para todo $h \in X$ el conjunto hU es abierto.

Demostración. Sea h en X, las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \varphi_h : X &\to X \\ g &\mapsto hg \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \phi_h : X &\to X \\ g &\mapsto h^{-1}g \end{aligned}$$

son continuas e inversas una de otra. Resta notar que $\varphi_h(U) = hU$ y la imagen directa de φ es la imagen inversa de su función inversa $\varphi_h(U) = \phi_h^{-1}(U)$ que por continuidad es un conjunto abierto. Tenemos así que hU es un conjunto abierto.

□

Proposición 1.13. Sea $(X, \tau, \circ)$ un grupo topológico conexo. Para toda $U(e)$ se cumple que $\langle U \rangle = X$.

Demostración. Sea $U \in \mathcal{N}(e)$ resta ver que $G \subset \langle U \rangle$ para ello veremos que $\langle U \rangle$ es un conjunto abierto y cerrado en X que no es vacío así por la conexidad de X se tendrá la igualdad.

Sea $g \in \langle U \rangle$, por definición de grupo generado para todo subgrupo H de X que contiene a U se cumple también que $g \in H$ y este mismo al ser cerrado como subgrupo tenemos que $gU \subset H$ más aún por el lema 1.12 el conjunto gU es abierto.

Mostramos que, para todo H subgrupo que tiene a U se cumple la contensión $gU \subset H$ por definición de grupo generado tenemos que $gU \subset \langle U(e) \rangle$ y por tanto $\langle U(e) \rangle$ es un conjunto abierto.

Para ver que $\langle U \rangle$ es cerrado, sea $h \in \overline{\langle U \rangle}$ y consideremos al conjunto hU que, por el lema 1.12 es abierto y en particular $hU(h)$, se sigue entonces que por definición del conjunto cerradura que,

$$hU \cap \langle U \rangle \neq \emptyset.$$

Dado $g \in hU \cap \langle U \rangle$ por un lado tenemos que $g = hu$ con $u \in U$ de esta manera tenemos que

$$h = gu^{-1} \in \langle U \rangle U = \langle U \rangle$$

por tanto $\overline{\langle U \rangle} \subset \langle U \rangle$. Tenemos que $\langle U(e) \rangle$ es un conjunto cerrado a abierto en un espacio conexo, entonces o $\langle U \rangle = \emptyset$ o $\langle U \rangle = X$ como $e \in \langle U \rangle$ concluimos que $\langle U(e) \rangle = X$. □

Nota 1.14. $Hom(X)$ denotará el grupo de homeomorfismos $h : X \to X$ y la función identidad $Id_X : X \to X$ denotará el neutro de $Hom(X)$. Notemos que $Hom(X)$ es un grupo con la composición de funciones.

Demostración. El resultado es directo que la composición de funciones biyectivas es biyectiva y que composición de funciones continuas es continua. □

Definición 1.14.1. Sea $K \subset X$ y $h : X \to X$ un homeomorfismo. Decimos que h está **soportado** en K si,

1. $X \setminus K$ es no vacío y
2. $h|_{X \setminus K} = id|_{X \setminus K}$.

Al conjunto

$$Sup(h) = \overline{\{x \in X : h(x) \neq x\}},$$

le llamaremos el **soporte** de h. Al subgrupo de homeomorfismos, $g : X \to X$, para los cuales existe $U \in \tau$ tal que $g|_U = e|_U$ le denotaremos por $Hom_0(X)$.

Observación 1.15. Si $g : X \to X$ un homeomorfismo que está soportado en K, para la función inversa $g^{-1} : X \to X$ tenemos que

$$id|_{X \setminus K} = g^{-1}|_{g(X \setminus K)} = g^{-1}|_{X \setminus K}.$$

Es decir, g^{-1} está soportando en $g(K)$.

El siguiente lema será usado en las secciones posteriores, es importante para el desarrollo del trabajo de Anderson y Epstein en **referencia**

Lema 1.16. Sean $K \subset X$ y $g \in Hom_0(X)$ soportado en K.

1. Para cualquier $h \in Hom(X)$ se tiene que $h^{-1}gh$ está soportado en $h^{-1}(K)$.
2. Si $h^{-1}(K) \cap K = \emptyset$ entonces
   a) $[h, g]$ está soportado en $h^{-1}(K) \cup K$,
   b) $[h, g]|_K = g|_K$ y
   c) $[h, g]|_{h^{-1}(K)} = h^{-1}g^{-1}h|_{h^{-1}(K)}$

Demostración. Para el primer inciso. Sea $x \in X \setminus h^{-1}(K) = h^{-1}(X \setminus K)$ de donde $h(x) \in X \setminus K$ de la definición de soporte tenemos que,

$$g(h(x)) = h(x)$$

de esta manera al componer con la función h^{-1} por la izquierda tenemos que

$$h^{-1}gh(x) = x$$

tenemos que $h^{-1}gh(x)|_{X\setminus h^{-1}(K)} = id_{X\setminus h^{-1}(K)}$ y por tanto $h^{-1}gh(x)$ está soportado en $h^{-1}(K)$.

Ahora veremos el segundo inciso. Supongamos que $h^{-1}(K) \cap K = \emptyset$. Sea $x \in (X \setminus h^{-1}(K)) \cap (X \setminus K)$, como como g está soportando en K tenemos que

$$h(g(x)) = h(x),$$

más aún como en el inciso anterior tenemos $h(x) \in X \setminus K$ junto con que $g^{-1}|_{X\setminus K} = id$ (observación 1.15) se sigue que

$$g^{-1}(h(x)) = h(x)$$

finalmente componiendo con h^{-1} por la izquierda tenemos que

$$[h, g](x) = h^{-1}g^{-1}hg(x) = x$$

es decir,

$$[h, g]|_{(X\setminus h^{-1}(K))\cap(X\setminus K)} = id,$$

por tanto $[h, g]$ está soportado en $h^{-1}(K)\cup K$. Finalmente, de la observación 1.15 el homeomorfismo g^{-1} está soportado en $g(K)$ del primer inciso tenemos que $h^{-1}g^{-1}h$ está soportado en $h^{-1}(g(K))$ y de esta manera

$$h^{-1}g^{-1}h(h^{-1}(g(K))) = h^{-1}(K),$$

de donde tenemos que

$$[h, g]|_{h^{-1}(K)} = h^{-1}(K).$$

Además, notemos $h^{-1}g^{-1}h[g(K)] = id$ entonces

$$g(K) \subset sup(h^{-1}g^{-1}h)^c.$$

□

Observación 1.17. Cualquier conjugado del producto de conjugados de producto de h y h^{-1} tiene el mismo numero de conjugados de h y h^{-1}.

Demostración. Si $f = (g_1h^{-1}g_1^{-1}) \cdots (g_nhg_n^{-1})$ entonces para cualquier g en $Hom(X)$ se tiene que

$$\begin{aligned} gfg^{-1} &= g(g_1h^{-1}g_1^{-1}) \cdots (g_nhg_n^{-1})g^{-1} \\ &= (gg_1h^{-1}g_1^{-1}g^{-1}) \cdots (gg_nhg_n^{-1}g^{-1}). \end{aligned}$$

□

Observación 1.18. 1. $f_1gf_1^{-1} \in K$ por la normalidad de K.

2. Como $g^{-1}(U) \cap U = \emptyset$, tenemos que $g(u) \notin U$. Por tanto $f^{-1}(g(u)) = g(u)$ y así $g^{-1}f^{-1}g(u) = u$ y por tanto $g_1 = f_1$ en puntos $u \in U$.

Luego, consideremos a $f_0 = f_2ff_2^{-1}$, salvo homeomorfismo (por f) f_0 tiene soporte W_0, luego notemos que si $f_0 \in K$ se sigue que todo conjugado de f_0 está en K, por tanto $f \in K$. Resta ver que $f_0 \in K$, consideremos a

$$h(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si} \quad x \in W_0 \\ g_1^n f_0 g_1^{-n}(x) & \text{si} \quad x \in g_1^n(W_0) n \geq q, \\ x & \text{si} \quad x \in X \setminus \cup_{i=0}^{\infty} W_i \end{cases}$$

Finalmente, tenemos que $f_0 = g_1h^{-1}g_1^{-1}h$.

Finalizamos esta parte recordando que nuestra introducción no es auto contenida y es posible que no cubra resultados que vayamos a utilizar a detalle, sin embargo dejaremos la observación donde puede consultarse alguna demostración o un estudio profundo.

Bibliografía

[1] Larry C. Grove. *Algebra.* Dover Publications, INC, 2004.