Notas de clase: Lunes 24 de Abril

---

1 Repaso matemático: El concepto de infinito

El concepto de infinito es un tema complejo de la teoría de conjuntos y un término difícil de manejar en ciertos aspectos, por ejemplo, nos permite definir a los límites,

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

que exista un límite, nos indica que a partir de cierto índice, una sucesión numérica está aproximando un elemento, consideremos a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

este límite existe y es cero, una manera de entender este límite, es que, cuando n es muy grande entonces $|1/n - 0|$ es despreciable mediante un error. Los conjuntos de números son los primeros acercamientos con el infinito. Los números para contar,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

estos números son infinitos dado que no son una cantidad finita, por mas obvio que esto suene, el conjunto $\mathbb{N}$ tiene la propiedad que si un elemento k está en $\mathbb{N}$ entonces $k + 1 \in \mathbb{N}$. Este infinito no es tan *grande* como se pudiera creer. Existen otros conjuntos de números que son más grandes, incluso hay conjuntos que son *aparentemente mas grades* pero tiene la misma cantidad elementos. El conjunto de las fracciones,

$$\mathbb{Q} = \{p/q : q, p \in \mathbb{N}\}$$

notemos que todo número $n \in \mathbb{N}$ se puede escribir como $n/1$, de donde $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Aún así la cantidad de elementos que hay en $\mathbb{Q}$ es la misma que la de $\mathbb{N}$. La cardinalidad de $\mathbb{N}$ es denotada por $\aleph_0$ (a la cardinalidad de un conjunto se le llama número cardinal). Lo que dijimos anteriormente es que la cardinalidad de $\mathbb{Q}$ (o la cantidad de elementos de $\mathbb{Q}$) es $\aleph_0$. A $\aleph_0$ es llamado el primer infinito numerable. Los números reales son la unión de los números $\mathbb{Q}$ con su complemento, denotado por $\mathbb{I}$, los números irracionales tiene la propiedad de que no pueden ser escritos como una fracción pero la mas interesante es que existe una sucesión de fracciones, que en el límite lo aproximan. Esto es, si $x \in \mathbb{I}$ existen $a_n \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

Los números reales son muchos mas que los racionales o naturales, su cardinalidad es llamada c_0 y es el primer infinito no numerable conocido hasta ahora. Es un problema conocido como la hipótesis del continuo. A partir de ahora, vamos a pensar en dos tipos de conjuntos infinitos,

1. **Contables:** Los que tiene la cardinalidad de $\mathbb{N}$.

2. **No contables:** Los que tienen la cardinalidad de $\mathbb{R}$.

En caso de no se infinito, es decir un conjunto finito, vamos decir que su cardinalidad es un número entero positivo.

2 Propiedades de la probabilidad clásica

Vamos a usar ahora la combinatoria para dar probabilidades.

Definición:

Un **experimento aleatorio** es aquel que, cuando se le repite bajo las mismas condiciones, el resultado que se observa no siempre es el mismo y tampoco es predecible. En ocasiones se entiende a un experimento aleatorio el cual tiene un mecanismo de azar de manera intrínseca.

Definición:
El **espacio muestral**, también llamado **espacio muestra**, de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento y se le denota, generalmente, por la letra griega Ω (omega mayúscula). A un resultado particular del experimento se le denota por la letra ω (omega minúscula).

La probabilidad clásica la vamos a definir como,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Las primeras propiedades que tenemos de la probabilidad son,

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$,
2. Considera una cantidad infinita numerable de conjuntos ajenos A_n entonces

$$\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

Propiedad: Para cualquier evento A, se tiene que,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Propiedad: $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
Propiedad: Si $A \subset B$, se tiene que

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Propiedad: Si $A \subset B$, se tiene que,

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

Propiedad: Dados eventos A, B, se tiene que,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Ejercicios: $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$.

Ejercicio: Marcos y Eric van a enfrentarse en un torneo de tenis. El ganador del torneo es el primero que gane dos partidos seguidos o quien gane tres juegos. Encuentre el número de formas en que puede ocurrir el torneo. Dibuje el diagrama de árbol asociado.

Ejercicio: Encuentre el número m de palabras de siete letras que pueden formarse con las letras de la palabra *BENZENE*.

Ejercicios: Suponga que desea formar todas las *palabras* posibles de cinco letras con las letras de la palabra *BABBY*. ¿Cuántas distintas?

Ejercicios: Una panadería elabora M = 4 tipos de galleta: a) manzana, b) plátano, c) zanahoria y d) dátil. Encuentre el número de formas en que una persona puede comprar r = 8 galletas.