Notas de clase: Jueves 11 de Mayo

Contents

1 Repaso matemático: Transformaciones invertibles

Decimos que una función $f : A \to B$ es **invertible** si existe una función $g : B \to B$ de manera que $f(g(b)) = b$ y $g(f(a)) = a$ para los elementos b en B y a en A.

1. $f(x) = x^3$ y $g(y) = \sqrt[3]{y}$,
2. $f(x) = \sin(x)$ y $g(y) = \arcsin(y)$

¿Son las funciones $f(x) = 5x - 3$, $g(y) = \frac{y+3}{5}$ funciones inversas?

Teorema de probabilidad total

Un espacios muestral Ω. Una colección de conjuntos $B_1, \ldots, B_m$ es una partición de Ω si

1. $B_i \neq \emptyset$ para toda i.
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ para toda i.
3. $\cup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

El teorema de probabilidad total se enuncia de la siguiente manera, para todo conjunto A, se cumple que,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Ejemplos:

1. Una urna contiene 3 bolas blancas y 4 bolas negras. Se extraen dos bolas al azar una después de otra y sin reemplazo. Calcula la probabilidad de que,

    - la segunda bola sea negra dado que la primera bola fue negra.
    - la segunda bola sea del mismo color que la primera.
    - la segunda bola sea blanca

- la primera bola sea blanca dado que la segunda fue blanca.

2. Un estudiante contesta un examen de opción múltiple, cada pregunta tiene 4 respuestas. Si el estudiante sabe la pregunta contesta la opción correcta. Si no escoge al azar con una probabilidad de .6 de acertar.

   (a) Calcula la probabilidad de que el estudiante tenga correcta una pregunta al azar.
   (b) si el estudiantes obtuvo la respuesta correcta a una pregunta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sabido verdaderamente la respuesta?

3. Una urna contiene 4 bolas blancas y 6 azules. Se lanza un dado y se extraen bolas, tantas como se indica el dado. Considere la extracción sin orden y sin remplazo. Encuentra la probabilidad de que las bolas sean blancas.

4. El problema de Monty Hall.

2 Teorema de Bayes

Sea A un evento con $\mathbb{P}(A) > 0$. Se cumple que,

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}$$

Ejemplo

En un laboratorio se desarrolla una prueba para detectar una enfermedad. Sean Enf el evento *el individuo está enfermo* y Neg el evento *la prueba es negativa.* Sobre la eficacia de esta prueba se sabe

1. $\mathbb{P}(Neg^c|Enf) = .95$
2. $\mathbb{P}(Neg|Efn^c) = .96$
3. $\mathbb{P}(Efn) = .01$

- ¿Qué significarían los siguientes eventos $\mathbb{P}(Efn|Neg)$ y $\mathbb{P}(Efn|Neg^c)$?
- ¿Qué significarían los siguientes eventos $\mathbb{P}(Efn^c|Neg^c)$ y $\mathbb{P}(Efn^c|Neg)$?

3 Independencia de eventos

Decimos que dos eventos A, $B \subset \Omega$ son independientes si se cumple que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Observación: Ser independientes no implica que sean ajenos. De la misma manera dos eventos ajenos no implica que sean independientes.

Ejemplos:

1. El lanzamiento de una moneda 3 veces. Tiene como espacio muestral,

   $$\Omega = \{aaa, aas, asa, saa, ass, sas, ssa, sss\}.$$

   (a) A : *Caen a lo mas 2 águilas.*

   (b) B : *Caen al menos 2 águilas.*

   (c) C : *Caen 3 águilas o 3 soles.*

2. Supongamos que las probabilidades de que una familia tenga un hijo o tenga una hija son iguales. Si la familia tiene dos hijos, considere los siguientes eventos.

   (a) A : *la familia tiene hijos de ambos sexos.*

   (b) y B : *a lo mas uno de los hijos es varón.*

3. Supongamos que al lanzar una moneda *honesta* obtienen 5 águilas en sucesión. ¿Cuál es la probabilidad de que en el sexto lanzamiento también sea águila?

Ejercicios:

Los ejercicios son (+.25) para la tarea 4.

1. ¿son independientes dos a dos?

- Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y los eventos,
- $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- $B = \{1, 5, 6, 7\}$
- $C = \{1, 2, 3, 5\}$

2. Se lanza un dado equilibrado dos veces. Determine si los siguientes pares de eventos son independientes.

   - A : *la suma de los dados es 6.*
   - y B : *el primer resultado es 4.*

   - A : *la suma de los dados es 7.*
   - y B : *el segundo resultado es 4.*

   R= Los dos primeros no, los dos segundos si.

3. Sean C y D dos eventos independientes, tales que $\mathbb{P}(C) = c$ y $\mathbb{P}(D) = d$, Calcula las probabilidades,

   (a) ninguno de estos dos eventos ocurra,
   (b) solamente uno de los eventos ocurra,
   (c) al menos uno de los eventos ocurra,
   (d) los dos eventos ocurren,
   (e) a lo mas uno de los eventos pasa

4. Deduzca la ecuación

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c) * \mathbb{P}(A_2^c) * \mathbb{P}(A_3^c)$$

4 Probabilidad condicional

Sean A y B dos eventos. Consideremos el caso cuando $\mathbb{P}(B) > 0$. *la probabilidad condicional del evento A dado el evento B* se define como,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ejercicios:

Los ejercicios son (+.25) para la tarea 4.

1. Sea $\mathbb{P}(A) = .5$ y $\mathbb{P}(A \cup B) = .6$, encuentre $\mathbb{P}(B)$ en cada caso,
   (a) A y B son ajenos.
   (b) A y B son independientes.
   (c) $\mathbb{P}(A|B) = .4$
2. ¿Cierto o falso?
   (a) $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A|B)$
   (b) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$
   (c) $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(A|B)$
3. Crea un ejemplo donde se cumpla
   (a) Con $\mathbb{P}(A|B) = 0$ $\mathbb{P}(A) > 0$
   (b) $\mathbb{P}(A|B^c) = \mathbb{P}(A^c|B)$
4. ¿Qué significarían los siguientes eventos $\mathbb{P}(Efn^c|Neg^c)$ y $\mathbb{P}(Efn^c|Neg)$?