Notas de clase: Lunes 24 de Abril

---

1 Repaso matemático: La negación de negaciones conduce a confuciones

Las proposiciones que manejamos las consideramos con dos posibles valores, **Verdadero** o **Falso**. Si tenemos una proposición, *el número* $x > 0$ tenemos que la negación es *es falso que el número* $x > 0$ pero podemos eliminar la palabra *no*. Quedando *el número* $x \leq 0$.

Cuantificadores. Considere dos, *para todo* y *existe*, estos dos son enunciados que evalúan una condición o una afirmación sobre una clase de objetos.

todos los nacidos en México son mexicanos, esto se puede traducir a *para toda persona* x *que nació en México,* x *es mexicano*, (hay mas maneras de escribirlo.) Pero esto no es lo mismo que *toda persona en México nació en México.* Pues hay muchos nacionalizados o emigrantes. Los cuantificadores se aplican a objetos.

1.1 Afirmaciones falsas

- *existe un mexicano que no nació en México.*
- *existen mexicanos que no nacieron en México.*
- *para todos los mexicanos, nacieron en México.*

Tenemos una manera de negar los cuantificadores, por ejemplo si $\varphi(x)$ es una sentencia con un valor boleano, entonces la siguiente expresión,

$$(x : \varphi(x))$$

nos denota si x cumple la condición φ, o sea que lo anterior puede ser falso o verdadero. Más aún con los cuantificadores universales tendríamos que,

$$(\forall x : \varphi(x))$$

esto nos evalúa si todos los elementos x cumplen una condición. En el caso de existencia de un elemento que cumple a condición,

$$(\exists x : \varphi(x))$$

negar una condición del primer tipo se hace de la siguiente manera

$$\neg(\forall x : \varphi(x)) = (\exists x : \neg(\varphi(x)))$$

y la del segundo tipo de la siguiente,

$$\neg(\exists x : \varphi(x)) = (\forall x : \neg(\varphi(x)))$$

La esperanza de una variable aleatoria nunca es negativa. ¿Cómo podemos poner la frase anterior en términos de una propiedad?

En este caso la clase de objetos son las variables aleatorias, en símbolos las letras X juegan el papel de x. ¿Quién sería φ? Una manera de hacer esto es $\varphi(X) = \mathbb{E}(X) \geq 0$. En términos de lógica se tiene a evaluar

$$(\forall X : \varphi(X))$$

es o no verdadera. Un contraejemplo es cuando podemos exhibir un elemento de manera que una cuantificación con $\exists$ sea verdadera pero con $\neg\varphi$, en ocasiones es mas sencillo que verificar esto que un $\forall$ puesto que solo necesitamos que exista uno. No siempre es posible hacer esto.

$$(\exists X : \neg(\varphi(x)))$$

Que en ocasiones es mas sencilla.

2 Estimación por intervalos

En la sección pasada nos interesaban las muestras aleatorias $(X_1, \ldots, X_n)$ de una población que fuera descrita por X, para la media poblacional μ podiamos estimar un error de manera que

$$\mathbb{P}\left(\hat{\theta}_1 < \mu < \hat{\theta}_1\right) = 1 - \alpha$$

donde $(1-\alpha)100\%$ es un nivel de confianza. Los términos $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son llamados limites limites inferior y superior. Esto también se traduce como *la probabilidad de que θ pertenezca al intervalo $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ es $(1-\alpha)$.* Esta es una de las principales diferencias con los métodos bayesianos, pues este enfoque considera que θ no es aleatorio mientras que los bayesianos si.

Lo anterior es conocido como *un intervalo para la media de una normal con varianza poblacional conocida.* Pues recordemos que cuando la muestra es muy grande, $\overline{X}$ tiene una distribución normal con media μ y varianza σ^2/n y así

$$\mathbb{P}\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

por el teorema limite central tenemos que la distribución limite

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \to \overline{X}^*,$$

cuando n es muy grande, es una $Norm(0,1)$, además se tiene que $s_*^2 = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^n X_i$ es un estimador insesgado de σ^2. También note que como $\frac{n}{n-1}$ para muestras grandes, este término se hace despreciable y $s_*^2 \approx s^2$.

3 Intervalo para la media de una distribución normal con varianza desconocida

Consideremos una muestra aleatoria $(X_1, \ldots, X_n)$ de una población que fuera descrita por X, queremos inferir a media poblacional μ pero ahora tenemos el caso en que no conocemos σ. Vamos a usar el hecho siguiente, la variable

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

es una variable t de student con $n-1$ grados de libertad. Un aspecto importante ahora es que el tamaño de la muestra no es fundamental ahora.

¿Cómo podemos calcular los limites de confianza tales que

$$\left(\hat{\theta}_1 < \mu < \hat{\theta}_1\right)$$

pero ahora usando la distribución t?

Ejemplo: En cierto estado de la república, 13 estaciones meteorológicas ubicadas aleatoriamente encuentran que la precipitación pluvial en un mes determinado fue , en promedio, de 33 cm con una desviación estándar de 1.5. Para la precipitación media el de confianza de 70%.