Instituto Artek

Probabilidad

Abril 18

Índice

Ejercicio:
¿De cuantas forma distintas pueden asignarse los premios, primero, segundo y tercero en una rifa de 10 boletos numerados de 1 al 10?

Ejercicio:
¿Cuantos equipos distintos de tres personas pueden escogerse de un grupo de 5 personas?

1. Repaso: Teoría de conjuntos y ordenaciones

Una propiedad $P(x)$ define a un conjunto A de la siguiente manera, si un elemento x satisface la condición $P(x)$ entonces a es un elemento de A. Si un elemento a pertenece a un conjunto A es denotado por $a \in A$. Si no, entonces a entonces $a \notin A$.

Subconjuntos

Dado un conjunto de elementos B definida por una propiedad $Q(x)$, decimos que una subcolección de elementos A es un subconjunto de B si todo elemento de $a \in A$ cumple que $Q(a)$.

Operaciones con conjuntos

Dados A y B conjuntos con propiedades P y Q que las definen. Las operaciones entre conjuntos son las siguientes.

1. **Unión:** El conjunto **unión** es definido por la propiedad $P(a)$ o $Q(a)$ es verdadera y se denota por $A \cup B$.
2. **Intersección:** El conjunto **intersección** es definido por la propiedad $P(a)$ y $Q(a)$ es verdadera y se denota por $A \cap B$.

Estas operaciones son básicas para conjuntos, cualquier otra operación mas compleja se resume a alguna de las dos anteriores. Ahora conjuntos relacionados.

1. **Diferencia:** El conjunto **diferencia** es definido por la propiedad ($P(a)$ es verdadero y $Q(a)$ es falsa) y se denota por $A \setminus B$.
2. **Complemento:** El conjunto **complemento** de A es definido por la propiedad ($P(a)$ es falsa) y se denota por A^c. Las relaciones entre estos conjuntos es $A \setminus B = A \cap B^c$.
3. **Conjunto universo:** El conjunto universo es el conjunto de todos los elementos, además tiene la propiedad siguiente. Si A es un conjunto de puntos, entonces el conjunto universo es la unión $A \cup A^c$. En particular todo conjunto es subconjunto del conjunto universo.

4. **Conjunto vacío**

   El **conjunto vacío** es el conjunto con la propiedad $P(x)$ dada por $x \neq x$. Es decir, un elemento x está en el conjunto vacío si $x \neq x$ y se denota por $\emptyset$.

Observaciones

Decimos que dos conjuntos A y B son ajenos si $A \cap B = \emptyset$.

Leyes de DMorgan

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Leyes distributivas

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, denotado por $A \times B$, se define como la colección de todas las parejas ordenadas (a, b), en donde a es un elemento de A y b es un elemento de B.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

En caso de mas conjuntos se denota por la cantidad de ellos, por ejemplo, si tenemos n conjuntos, $A_1, \ldots, A_n$ entonces el producto cartesiano de n conjuntos es

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, \text{ donde } i = 1, \cdots n\}.$$

Ejercicio: Con diagramas de Venn argumenta las siguientes igualdades.

1. Si $A \subset B$ entonces $B^c \subset A^c$.
2. $B \setminus A \subset A^c$.
3. $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.
4. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Probabilidad clásica

Sea Ω un espacio muestral finito, se define la probabilidad del evento A como

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Principio de multiplicación

Si un procedimiento puede hacerse de n maneras distintas y un segundo procedimineto B pude realizarse de m maneras distintas entonces el total de formas que puede efectuarse el primer procedimiento seguido del segundo procedimiento es $n * m$

Ordenaciones con repetición: Con orden y con reemplazo

Son experimentos aleatorios de los cuales realizamos extracciones de una población, cada extracción puede entenderse como hacer una observación sobre el objeto, una vez hecho el estudio el objeto es devuelto a la población.

Ordenaciones con repetición: Con orden y sin reemplazo

Estos eventos son los que en la extracción el objeto no es devuelto al conjunto.

Notación:

La notación factorial es la siguiente $n! = n * (n-1) * (n-2) \cdots 1$.

1.1. Muestras no exhaustivas

Supongamos que tenemos una urna con n objetos de los cuales se extraen uno a uno hasta obtener k objetos y un muestreo es sin remplazo. En la primera posición tenemos un total de n objetos, como la muestra es sin reemplazo, para la segunda posición tenemos ahora $n-1$, para la tercera posición tenemos $n-2$, así consecutivamente hasta extraer k nos restan $n-k+1$ objetos. Del principio multiplicativo tenemos que el número total de arreglos distintos es

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

En notación factorial notemos que se puede hacer,

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) * \frac{n-k\cdots 1}{n-k\cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Triángulo de Pascal y coeficiente binomial El símbolo siguiente denota la operación,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Supongamos nuevamente un conjunto de n elementos y supongamos que queremos una muestra de tamaño k. Ahora no nos interesa el orden y sin reemplazo. Es decir que en la muestra no tenemos elementos repetidos y ahora no nos interesa como están ordenamos. ¿Cuántas maneras distintas podemos obtener?

Ejercicio: $\binom{5}{3}$.

Ejercicio: ¿Cuántos equipos de 3 personas pueden hacerse de un grupo de 5 personas?

Ejercicio: ¿De cuantas maneras pueden clasificarse los tres primeros lugares en una carrera de 15 personas?

Ejercicio: Decimos que un número es capicúa si este pude leerse de izquierda a derecha o de derecha izquierda conservando el valor en ambos casos, por ejemplo; 3443, 111, 19655691. ¿Cuantos números capicúas hay de longitud 4? ¿De longitud 5?

2. Permutaciones

Son muestreos exhaustivas con orden y sin remplazo.

3. Combinaciones

Muestras exhaustivas sin orden y sin remplazo.

Resumen de fórmulas

Muestras	Con remplazo	Sin remplazo
Con orden	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
Sin Orden	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

4. Propiedades de la probabilidad clásica

Definición:
Un **experimento aleatorio** es aquel que, cuando se le repite bajo las mismas condiciones, el resultado que se observa no siempre es el mismo y tampoco es predecible. En ocasiones se entiende a un experimento aleatorio el cual tiene un mecanismo de azar de manera intrínseca.

Definición:
El **espacio muestral**, también llamado **espacio muestra**, de un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento y se le denota, generalmente, por la letra griega Ω (omega mayúscula). A un resultado particular del experimento se le denota por la letra ω (omega minúscula).

Propiedad: Para cualquier evento A, se tiene que,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - P(A).$$

Propiedad: $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
Propiedad: Si $A \subset B$, se tiene que

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Propiedad: Si $A \subset B$, se tiene que,

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

Propiedad: Dados eventos A, B, se tiene que,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B).$$