Jueves 13 de Abril

Teoría de conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos que cumplen una cierta propiedad de tipo boleana y es usual denotarlos por letras mayúsculas por ejemplo A o B. Los objetos que están en un conjunto son llamados *elementos*.

Sea $P(x)$ la propiedad que define a A esto se entiende de la siguiente manera, si paraun elemento x la condición $P(x)$ es verdadera entonces a es un elemento de A. Si no entonces a entonces no está en A. Por convenio, no existen conjuntos para los cuales su condición existe un elemento $P(x)$ falsa y verdadera al mismo tiempo.

Si un elemento a pertenece a un conjunto A esto es denotado por $a \in A$, donde $\in$ representa la pertenencia de un elemento a un conjunto.

Investigación:

Realiza un resumen sobre 'la paradoja del barbero'. Menciona los aspectos que creas son importantes. La extención de este documento no debe superar una cuartilla. Considera además,

- referencias,
- claridad de exposición y
- la correcta explicación del problema y de la solución.

Subconjuntos

Dado un conjunto de elementos B definida por una propiedad $Q(x)$, decimos que una subcolección de elementos A es un subconjunto de B si todo elemento de $a \in A$ cumple que $Q(a)$ es verdadera.

Ejemplo: Considera a los números numeros pares y denota este conjunto por $2\mathbb{Z}$, la propiedad que define a $2\mathbb{Z}$ es ser múltiplo de 2 o que todo elemento de $2\mathbb{Z}$ es divisible por 2. $2\mathbb{Z}$ es un conjunto de número que en particular no tiene números impares.

Más aún, si ahora consideramos a los múltiplos de 4, $4\mathbb{Z}$ tenemos la misma observación. Sin embargo, nota que todo elemento de $4\mathbb{Z}$ es divible por 2, todo elemento de $4\mathbb{Z}$ es un elemento de $2\mathbb{Z}$. Pero por ejemplo, -2, 2, 6, -6, ... no son divisbles por 4. Existen elementos de $2\mathbb{Z}$ que no son elementos de $4\mathbb{Z}$.

Cuando un conjunto es subconjunto de otro se escribe por $A \subset B$. Dos conjuntos son iguales si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Operaciones con conjuntos

Dados A y B conjuntos con propiedades P y Q que las definen. Las operaciones entre conjuntos son las siguientes.

Unión: El conjunto **unión** es definido por la propiedad `P(a) o Q(a)` es verdadera y se denota por $A \cup B$.

Intersección: El conjunto intersección es definido por la propiedad `P(a) y Q(a)` es verdadera y se denota por $A \cap B$.

Estas **operaciones** son básicas para conjuntos, cualquier otra operación mas compleja se resume a alguna de las dos anteriores. Ahora conjuntos relacionados.

Diferencia: El conjunto **diferencia** es definido por la propiedad (`P(a)` es verdadero y `Q(a)` es falsa) es verdadera y se denota por $A \setminus B$.

Complemento: El conjunto **complento** de A es definido por la propiedad (`P(a)` es falsa) es verdadera y se denota por A^c.

Las relaciones entre estos conjuntos es $A \setminus B = A \cap B^c$.

Conjunto universo: El cojunto universo es el conjunto de todos los elementos, además tiene la propiedad siguiente. Si A es un conjunto de puntos, entonces el conjunto universo es la unión $A \cup A^c$. En particular todo conjunto es subcunjunto del conjunto universo.

Conjunto vacío

El conjunto vacío es el conjunto con la propiedad `P(x)`dada por $x \neq x$. Es decir, un elemento x está en el conjunto vacío si $x \neq x$. Por convenio no tenemos elementos con está propiedad. Por tanto ningún elemento pertenece al conjunto vacío, pero para coherencia de la teoría se denota por $\emptyset$.

Decimos que dos conjuntos A y B son ajenos si $A \cap B = \emptyset$.

Leyes de DMorgan

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Leyes distributivas

- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Producto cartesiano El producto cartesiano de dos conjuntos A y B, denotado por $A \times B$, se define como la colección de todas las parejas ordenadas (a, b), en donde a es un elemento de A y b es un elemento de B. En símbolos,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

En caso de mas conjuntos se denota por la cantidad de ellos, por ejemplo, si tenemos n conjuntos, $A_1, \ldots, A_n$ entonces el producto cartesiano de n conjuntos es

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, \text{donde } i = 1, \cdots n\}.$$

Probabilidad clásica

Sea Ω un espacio muestral finito, se define la probabilidad del evento A como

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

Ejercicio: Supongamos el evento aleatorio que consiste de lanzar un dado y luego seleccionar al azar una letra del alfabeto. Considera un alfabeto de 26 letras. ¿Cual es el espacio muestral?

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par con una vocal?
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un dígito con el día de tu nacimiento o de sacar una letra de tu primer nombre?
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un dígito con el día de tu nacimiento y de sacar una letra de tu primer nombre?

Principio de multiplicación Si un procedimiento puede hacerse de n maneras distintas y un segundo procedimineto B pude realizarse de m maneras distintas entonces el total de formas que puede efectuarse el primer pricedimiento seguido del segundo procedimiento es $n * m$

Ejercicio: Un hombre tiene 4 pantalones distintos, 6 camisas y 2 pares de zapatos. ¿De cuantas maneras puede vestirse?

Ejercicio: Del evento del dado y las letras. ¿Cual es el total de eventos posibles de este experimento?

Ordenaciones con repetición: Con orden y con reemplazo

Son experimentos aleatorios de los cuales realizamos extracciones pero una vez hecha la extracción el elemento es regresado al conjunto. Por ejemplo, considera una urna de n objetos distintos y realiza k extracciones.

Ejemplo: Contraseñas En un conjunto de 60 caracteres, ¿Cuántas contraseñas de longitud 4 y 5 pueden hacerse?

Ejemplo de una extracción sin repetición. Supongamos que tenemos una enciclopedia que consta de 5 tomos, ¿De cuantas maneras pueden acomodarse en un librero?

Ordenaciones con repetición: Con orden y sin reemplazo

Estos eventos son los que en la extracción el objeto no es devuelto al conjunto. *Ejercicio* Con las letras de la palabra **PELOTA** ¿cuántas palabras pueden escribirse aunque no tengan sentido gramatical?