



Notas de clase: Jueves 11 de Mayo

Contents

1	Repaso matemático: Transformaciones invertibles	2
2	Teorema de Bayes	3
3	Independencia de eventos	3
4	Probabilidad condicional	5

1 Repaso matemático: Transformaciones invertibles

Decimos que una función $f : A \rightarrow B$ es **invertible** si existe una función $g : B \rightarrow A$ de manera que $f(g(b)) = b$ y $g(f(a)) = a$ para los elementos b en B y a en A .

1. $f(x) = x^3$ y $g(y) = \sqrt[3]{y}$,
2. $f(x) = \sin(x)$ y $g(y) = \arcsin(y)$

¿Son las funciones $f(x) = 5x - 3$, $g(y) = \frac{y+3}{5}$ funciones inversas?

Teorema de probabilidad total

Un espacio muestral Ω . Una colección de conjuntos B_1, \dots, B_m es una partición de Ω si

1. $B_i \neq \emptyset$ para toda i .
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ para toda i, j .
3. $\cup_{i=1}^m B_i = \Omega$.

El teorema de probabilidad total se enuncia de la siguiente manera, para todo conjunto A , se cumple que,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)$$

Ejemplos:

1. Una urna contiene 3 bolas blancas y 4 bolas negras. Se extraen dos bolas al azar una después de otra y sin reemplazo. Calcula la probabilidad de que,
 - la segunda bola sea negra dado que la primera bola fue negra.
 - la segunda bola sea del mismo color que la primera.
 - la segunda bola sea blanca

- la primera bola sea blanca dado que la segunda fue blanca.
2. Un estudiante contesta un examen de opción múltiple, cada pregunta tiene 4 respuestas. Si el estudiante sabe la pregunta contesta la opción correcta. Si no escoge al azar con una probabilidad de .6 de acertar.
 - (a) Calcula la probabilidad de que el estudiante tenga correcta una pregunta al azar.
 - (b) si el estudiantes obtuvo la respuesta correcta a una pregunta al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sabido verdaderamente la respuesta?
 3. Una urna contiene 4 bolas blancas y 6 azules. Se lanza un dado y se extraen bolas, tantas como se indica el dado. Considere la extracción sin orden y sin remplazo. Encuentra la probabilidad de que las bolas sean blancas.
 4. El problema de Monty Hall.

2 Teorema de Bayes

Sea A un evento con $\mathbb{P}(A) > 0$. Se cumple que,

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}$$

Ejemplo

En un laboratorio se desarrolla una prueba para detectar una enfermedad. Sean Enf el evento *el individuo está enfermo* y Neg el evento *la prueba es negativa*. Sobre la eficacia de esta prueba se sabe

1. $\mathbb{P}(Neg^c|Enf) = .95$
 2. $\mathbb{P}(Neg|Enf^c) = .96$
 3. $\mathbb{P}(Enf) = .01$
- ¿Qué significarían los siguientes eventos $\mathbb{P}(Enf|Neg)$ y $\mathbb{P}(Enf|Neg^c)$?
 - ¿Qué significarían los siguientes eventos $\mathbb{P}(Enf^c|Neg^c)$ y $\mathbb{P}(Enf^c|Neg)$?

3 Independencia de eventos

Decimos que dos eventos $A, B \subset \Omega$ son independientes si se cumple que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Observación: Ser independientes no implica que sean ajenos. De la misma manera dos eventos ajenos no implica que sean independientes.

Ejemplos:

1. El lanzamiento de una moneda 3 veces. Tiene como espacio muestral,

$$\Omega = \{aaa, aas, asa, saa, ass, sas, ssa, sss\}.$$

- (a) A : Caen a lo mas 2 águilas.
 - (b) B : Caen al menos 2 águilas.
 - (c) C : Caen 3 águilas o 3 soles.
2. Supongamos que las probabilidades de que una familia tenga un hijo o tenga una hija son iguales. Si la familia tiene dos hijos, considere los siguientes eventos.
 - (a) A : la familia tiene hijos de ambos sexos.
 - (b) y B : a lo mas uno de los hijos es varón.
 3. Supongamos que al lanzar una moneda *honesta* obtienen 5 águilas en sucesión. ¿Cuál es la probabilidad de que en el sexto lanzamiento también sea águila?

Ejercicios:

Los ejercicios son (+.25) para la tarea 4.

1. ¿son independientes dos a dos?

- Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y los eventos,
 - $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 - $B = \{1, 5, 6, 7\}$
 - $C = \{1, 2, 3, 5\}$
2. Se lanza un dado equilibrado dos veces. Determine si los siguientes pares de eventos son independientes.
- A : la suma de los dados es 6.
 - y B : el primer resultado es 4.
 - A : la suma de los dados es 7.
 - y B : el segundo resultado es 4.

R= Los dos primeros no, los dos segundos si.

3. Sean C y D dos eventos independientes, tales que $\mathbb{P}(C) = c$ y $\mathbb{P}(D) = d$, Calcula las probabilidades,
- (a) ninguno de estos dos eventos ocurra,
 - (b) solamente uno de los eventos ocurra,
 - (c) al menos uno de los eventos ocurra,
 - (d) los dos eventos ocurren,
 - (e) a lo mas uno de los eventos pasa
4. Deduzca la ecuación

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c) * \mathbb{P}(A_2^c) * \mathbb{P}(A_3^c)$$

4 Probabilidad condicional

Sean A y B dos eventos. Consideremos el caso cuando $\mathbb{P}(B) > 0$. la probabilidad condicional del evento A dado el evento B se define como,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ejercicios:

Los ejercicios son (+.25) para la tarea 4.

1. Sea $\mathbb{P}(A) = .5$ y $\mathbb{P}(A \cup B) = .6$, encuentre $\mathbb{P}(B)$ en cada caso,
 - (a) A y B son ajenos.
 - (b) A y B son independientes.
 - (c) $\mathbb{P}(A|B) = .4$
2. ¿Cierto o falso?
 - (a) $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A|B)$
 - (b) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)$
 - (c) $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(A|B)$
3. Crea un ejemplo donde se cumpla
 - (a) Con $\mathbb{P}(A|B) = 0$ $\mathbb{P}(A) > 0$
 - (b) $\mathbb{P}(A|B^c) = \mathbb{P}(A^c|B)$
4. ¿Qué significarían los siguientes eventos $\mathbb{P}(Efn^c|Neg^c)$ y $\mathbb{P}(Efn^c|Neg)$?