Notas de clase: Lunes 08 de Mayo

---

1 Repaso matemáticas: Ejercicios lógicos

Negación

Dada una proposición o declaración p la **negación** de p se denota por $\neg q$ y es el valor de verdad contrario al de p.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Table 1: Tabla de verdad de la negación

Conjunción

Dos proposiciones arbitrarias p y q que se combinan mediante la palabra *y* para formar una nueva proposición cuyo valor de verdad depende de p y q. El valor de $p \wedge q$ es verdadero cuando p como q es verdadero. La tabla de verdad en este caso es,

Disyunción

Dos proposiciones arbitrarias p y q que se combinan mediante la palabra *o* para formar una nueva proposición cuyo valor de verdad depende de p y q. El valor de $p \vee q$ es verdadero cuando alguna de las p o q es verdadera. La tabla de verdad en este caso es,

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table 2: Tabla de verdad de la conjunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table 3: Tabla de verdad de la disyunción

Ejercicio:

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

p	q	$\neg(p \vee \neg q)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

2 Pruebas de hipótesis

Una hipótesis es una afirmación que requiere ser puesta a prueba para determinar si es cierta o es falsa. Las pruebas que nosotros vamos a poner a prueba son mediante datos u observaciones. Esto con la idea de tomar mejores decisiones basadas en evidencias.

Recordatorio: Sea H_0 el evento de lanzar un dado y registrar el valor de la cara del dado y sea H_1 el evento de lanzar consecutivamente 5 veces una moneda y registrar la cantidad de veces que sale cruz.

Ahora queremos contestar preguntas del tipo, dado un número en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ¿cómo podemos determinar de que evento corresponde el número?

x	0	1	2	3	4	5	6
H_0 : Dado	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
H_1 : Moneda	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32	0

Table 4: Tabla de probabilidades

En general vamos a tener el esquema

$$H_0 : (\text{hipótesis nula}) \text{ vs } H_1 : (\text{hipótesis alternativa})$$

A H_0 es llamada hipótesis nula y es la que queremos poner a prueba o es la que es de nuestro interés. Mientras que H_1 es llamada hipótesis alternativa que nos sirve para poner a prueba a H_0 mediante probabilidades.

3 Definición:

Una **hipótesis estadística** o simplemente hipótesis es una afirmación o conjetura acerca de la distribución de una o mas variables aleatorias. Una hipótesis es simple si especifica por completo la distribución de probabilidad, en caso contrario es llamada hipótesis compuesta. Una **prueba de hipótesis** es una regla para decidir si se acepta o se rechaza una hipótesis nula en contra de una hipótesis alternativa.

Ejercicios

De una hipótesis nula y una alternativa para los siguientes casos.

1. La cantidad de oficinas en el país que usan cierto software es de al menos 62%.

2. Si el auto cobro de una tienda es mas rápida que un cajero atendido por una persona.

4 Tipos de errores

1. El error de tipo I es cuando se rechaza a H_0 siendo esta verdadera.
2. El error de tipo II es cuando no se rechaza a H_0 siendo esta falsa.

De estos errores tenemos, la siguiente tabla.

p	H_0 cierta	H_0 falsa
Rechazar H_0	α	Decisión correcta
Aceptar H_0	Decisión correcta	β

Table 5: Regiones críticas

En este caso queremos α y β como probabilidades que podemos usar para saber si bien estamos cometiendo un error de algún tipo.

Ejemplo

Supongamos que tenemos el lanzamiento de una moneda. Denotemos esto por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la moneda cae águila} \\ 0 & \text{si la moneda cae sol.} \end{cases}$$

Tomemos 100 lanzamientos, o sea $X_1, \dots X_100$. Queremos inferir sobre p la probabilidad del lanzamiento.

$$\begin{aligned}
\beta(\mu_1) &= \mathbb{P}\left(\text{No rechazar } H_0 \text{ cuando } \mu = \mu_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|Z| < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2} | \mu = \mu_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\mu_0 - z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \overline{X} < \mu_0 + z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} | \mu = \mu_1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= \Phi\left(z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

1. ¿Cuál es la distribución de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{100} X_i$.
2. ¿Cuál es el valor esperado?
3. Si $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{100} X_i$ ¿A que parámetro y que tipo de estimador es?

Ejercicios

Consideremos $X_1, \dots X_{30}$ variables independientes distribuidas $Norm(\theta, 1)$. Encuentre el nivel de confianza de los intervalos.

1. $\left[\hat{\Theta} - \frac{2.14}{\sqrt{30}}, \hat{\Theta} + \frac{2.14}{\sqrt{30}}\right]$.
2. $\left[\hat{\Theta} - \frac{1.85\sigma}{\sqrt{N}}, \hat{\Theta} + \frac{1.85\sigma}{\sqrt{N}}\right]$.

Sea X una $Norm(\mu, \sigma)$. Para $N = 15$ se encontró que,

$$\sum_{n=1}^{N} X_n = 250$$

$$\sum_{n=1}^{N} X_n^2 = 10,000$$

encuentre el intervalo de confianza del 95% para μ.

Sea $\hat{\theta}$ la media muestral de un conjunto de N datos si se sabe que provienen de una $Norm(\theta, 3^2)$, encuentre N tal que

$$\mathbb{P}(\hat{\Theta} - 1 < \theta < \hat{\Theta} + 1) = .95$$

5 Valor critico

6 p-valor