Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

3 марта 2023 г.

План лекции

- Часть 1. Фестиваль свободного творчества по применению теоремы об огибающей. Модели Леонтьева
- Часть 2. Абстрактные технологические множества. Сложение треугольников.

Три задачи производителя

Три задачи производителя

Напомню, что у нас есть три задачи оптимизации в теории производителя

- минимизация издержек при заданном выпуске y

$$px \to \min_x, \quad F(x) \geqslant y$$

- следующая за ней максимизация прибыли

$$qy - TC(y|p) \to \max_y$$

- максимизация прибыли в один шаг

$$qy - px \to \max_{x,y}, \quad F(x) \geqslant y$$

Тут $(\vec{x}, \vec{y})$ это факторы и конечные товары, а $(\vec{p}, \vec{q})$ это их соответствующие цены.

Минимизация издержек

Минимизация издержек

Напомню, что минимизация издержек создает функцию спроса на факторы производства:

- если ваша фирма строительная, то она создает спрос на кирпичи и цемент
- если ваша фирма ресторан, то она создает спрос на ингредиенты
- если ваша фирма школа, она создает спрос на труд (преподавателей)

Вопрос: является ли спрос монотонным по собственным ценам? Не может ли у нас случиться как с парадоксом Гиффена?

Минимизация издержек

$$px \to \min_x, \quad F(x) \geqslant y$$

где $F(x)$ - функция описывающая превращение факторов x в конечный товар y

Ответим сначала на два вопроса:

- Что является координатой максимума?
- Что является значением в максимуме?
- Что является пространством параметров?

Подсказка: это функции от параметров задачи p, y.

Минимизация издержек

Правильные ответы

- координата максимума: условный спрос $\tilde{x}(p|y)$
- значение в максимуме: функция издержек $TC(p|y)$
- пространство параметров: p, y

Новое обозначение «вертикальная палка» означает «условно на что то», она отделяет второстепенные параметры функции от первостепенных. Для каждой функции они свои.

Минимизация издержек

Теперь применим теорему об огибающей.

$$px \to \min_x, \quad F(x) \geqslant y$$

Заметим, что в пространстве параметра p опорные функции - линейны. И мы ищем минимум. Значит у нас получается нижняя огибающая линейного семейства, она вогнутая.

Соответственно, функция издержек вогнута по ценам факторов (нарисуй картинку). Более того, наклон функции издержек $TC(p|y)$ по цене равен просто оптимальному $\tilde{x}(p|y)$.

Минимизация издержек

Итак, функция издержек вогнута по ценам факторов, а наклон функции издержек $TC(p|y)$ по цене равен просто оптимальному $\tilde{x}(p|y)$.

Поскольку у вогнутой функции в Гессиане, грубо говоря, на диагонали стоят отрицательные числа, получается что условный спрос $\tilde{x}(p|y)$ всегда убывает по собственным ценам.

В теории производителя не бывает парадоксов Гиффена.

Максимизация прибыли

Максимизация прибыли

Напомню, что максимизация прибыли создает функцию предложения конечного товара:

- если ваша фирма строительная, то она создает предложение квартир и домов
- если ваша фирма ресторан, то она создает предложение обедов
- если ваша фирма школа, она создает предложение образовательных услуг

Вопрос: является ли предложение монотонным по собственным ценам?

Максимизация прибыли

$$qy - TC(y|p) \to \max_y$$

Ответим сначала на три вопроса:

- Что является координатой максимума?
- Что является значением в максимуме?
- Что является пространством параметров?

Подсказка: это функции от параметров задачи q, p.

Максимизация прибыли

Правильные ответы

- координата максимума: предложение $y(q|p)$
- значение в максимуме: прибыль $\pi(q|p)$
- пространство параметров: q, p

напомню что q это цена конечного товара, а p это цена фактора.

Максимизация прибыли

Теперь применим теорему об огибающей.

$$qy - TC(y|p) \to \max_y$$

Заметим, что в пространстве параметра q опорные функции - линейны. И мы ищем максимум. Значит у нас получается верхняя огибающая линейного семейства, она выпукла.

Соответственно, функция прибыли выпукла по ценам конечных товаров (нарисуй картинку). Более того, наклон функции прибыли $\pi(q|p)$ по цене q равен просто оптимальному $y(q|p)$.

Максимизация прибыли

Итак, функция прибыли выпукла по ценам конечных товаров, а наклон функции прибыли по цене равен просто оптимальному уровню производства.

Поскольку у выпуклой функции в Гессиане, грубо говоря, на диагонали стоят положительные числа, получается что предложение всегда возрастает по собственным ценам.

Максимизация прибыли вош.

Максимизация прибыли вош

Напомню, что максимизация прибыли создает функцию предложения конечного товара и спрос на факторы:

- если ваша фирма строительная, то она создает предложение квартир и домов и спрос на кирпич и цемент
- если ваша фирма ресторан, то она создает предложение обедов и спрос на ингридиенты
- если ваша фирма школа, она создает предложение образовательных услуг и спрос на труд преподавателей

Вопрос: является ли спрос и предложение монотонным по (соответствующим) собственным ценам?

Максимизация прибыли вош

$$qy - px \to \max_{x,y}, \quad F(x) \geqslant y$$

Ответим сначала на три вопроса:

- Что является координатой максимума?
- Что является значением в максимуме?
- Что является пространством параметров?

Подсказка: это функции от параметров задачи q, p.

Максимизация прибыли вош

Правильные ответы

- координата максимума: спрос и предложение $x(p|q), y(q|p)$
- значение в максимуме: прибыль $\pi(p, q)$
- пространство параметров: p, q

напомню что q это цена конечного товара, а p это цена фактора.

Максимизация прибыли вош

Теперь применим теорему об огибающей.

$$qy - px \to \max_{x,y}, \quad F(x) \geqslant y$$

Заметим, что в пространстве параметров p, q опорные функции - линейны. И мы ищем максимум. Значит у нас получается верхняя огибающая линейного семейства, она выпукла.

Соответственно, функция прибыли выпукла по ценам вообще всех товаров. Более того, наклон функции прибыли $\pi(p, q)$ по цене p равен просто оптимальному $-x$ а по цене q просто оптимальному y.

Максимизация прибыли вош

Итак, функция прибыли выпукла по вообще всем ценам (p, q), а наклон функции прибыли по цене равен просто оптимальному $(-x, y)$.

Поскольку у выпуклой функции в Гессиане, грубо говоря, на диагонали стоят положительные числа, получается что $-x$ возрастает по p, а y возрастает по q.

Что и требовалось доказать.

А что если фирма монополист?

А что если фирма монополист?

Напомню, что глядя на цены конечных товаров q, фирма цено-получатель выбирает уровень производства y так чтобы

$$q = MC(y).$$

А фирма монополист выбирает согласно правилу обратной эластичности

$$\frac{q(y) - MC(y)}{q(y)} = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

При этом, вывод самой функции издержек TC(y) не зависит от того, монополист фирма или цено-получатель, это просто эффективное расходование ресурсов, поверьте мне.

Модели Леонтьева

Модели Леонтьева

Василий Леонтьев американский экономист российского происхождения, создатель теории межотраслевого анализа.

После эмиграции и начала второй мировой войны работал консультантом по экономическому планированию для военно-воздушных сил США.

Модели Леонтьева

Итак, модели Леонтьева построены на следующем предположении:

- фирма потребляет факторы $\vec{x}$ и только один конечный товар
- технология описывается функцией минимум

$$\min(\frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n}).$$

То есть, для производства одной единицы конечного товара, требуется $a_1, \dots, a_n$ единиц соответствующих факторов. Это хорошо подходит для моделирования впк страны.

Модели Леонтьева

Можно заметить, что

- независимо от цен, факторы потребляются в фиксированных пропорциях
- функция издержек линейна по уровню производства
- прибыль линейна по по уровню производства

Это значит, что прибыль особо не помаксимизируешь, оптимальный y уйдет в бесконечность. Но зато это хорошо подходит для плановой экономики, скажем, СССР.

Модели Леонтьева

Раз экономика плановая, забудем про цены ненадолго.

- пусть есть n отраслей (заводов)
- они производят n видов продукции (товаров)
- каждый завод i производит x_i из $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
- эффективное производство можно записать как

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n.$$

Часть из них может быть прямо ресурс, как уголь и сталь.

Часть из них может быть промежуточным товаром, как гвозди.

Часть из них может быть каким-то понятным конечным товаром, например, легковым автомобилем или табуреткой.

Модели Леонтьева

Запишем все при помощи матрицы $A = \{a_{ij}\}$

$$x - y = Ax$$

где x это общий (валовый) спрос а y это конечный (чистый).

Разница между двумя спросами $x - y$ это те факторы которые были потреблены в эффективном производственном процессе.

Они то и описываются линейными уравнениями Ax.

Модели Леонтьева

Наконец, обратим систему

$$x = (I - A)^{-1} y$$

и мы получим связь между количеством чистого (y) и валового (x) товара.

Модели Леонтьева

Рассмотрим пример с 2 отраслями: производство угля и стали.

Уголь требуется для производства стали, а некоторое количество стали — в виде инструментов — для добычи угля.

Предположим, что условия таковы: для производства 1 т стали нужно 3 т угля, а для 1 т угля — .1 т стали.

Модели Леонтьева

Пусть $y = (100, 100)$ это желаемое количество стали и угля.

$$x - y = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ .1 & 0 \end{pmatrix}$$

Мораль сей басни: поскольку часть стали и угля будет уничтожена в процессе производства друг друга, отраслям надо заказать, на самом деле, больше стали и угля...

$$x = (I - A)^{-1} y \approx (571, 157).$$

... гораздо больше!

Технологические множества

Раньше я пытался описать технологию одним из двух способов:

$$x = G(\vec{y}), \quad F(\vec{x}) = y,$$

то есть либо один фактор, либо один конечный товар. Нам хотелось бы описать более сложные технологии, в которых есть много факторов и много конечных товаров.

Технологические множества

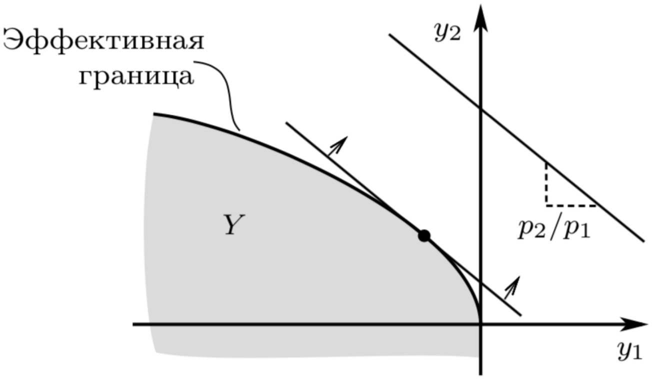
Оказывается, что удобнее всего отказаться от разделения между факторами и товарами и думать о них одинаково, а наша технология будет описывать, как можно одни товары превращать в другие.

Пусть есть n товаров, которые можно произвести в количествах, описываемых точкой в $\mathbb{R}^n$ (не в $\mathbb{R}^n_+$), поскольку какие-то товары окажутся факторами, потраченными при производстве других.

Технологические множества

Одна технология – это одна точка. Множество всех допустимых технологий – это область в $\mathbb{R}^n$, то есть технологическое множество. Эффективное производство (то, что раньше описывалось F или G) теперь описывается границей этого множества, то есть технологической границей, см. иллюстрацию ниже.

Технологические множества



Формально технологическая граница состоит из точек $y \in Y$, таких, что не существует $y' \in Y$, так что $y'_i \geqslant y_i$ по всем координатам i и $y'_j > y_j$ по хотя бы одной координате j.

Lemma 1

Технологическая граница ищется как все точки $z \in Y$ т.ч.

$$z \in argmax\ \vec{q} \cdot \vec{y}, \quad \vec{y} \in Y,$$

для хотя бы одного вектора цен $\vec{q} \geqslant 0, \vec{q} \neq 0$.

Аксиомы производителя

Аксиомы производителя

Фирма воспринимает технологическое множество и максимизирует прибыль:

$$\vec{q} \cdot y \to \max, \quad \vec{y} \in Y.$$

Чтобы задача была выпуклой, нам понадобятся некоторые аксиомы.

Аксиомы производителя

Definition 2

Аксиомы технологического множества Y:

- A1: Y содержит $\vec{0}$ - A2: свобода расходования

$$y \in Y, y' < y \quad \Rightarrow \quad y' \in Y$$

- A3: невозрастающая отдача от масштаба:

$$y \in Y \Rightarrow \lambda Y \in Y, \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

- A4: непусто, замкнуто

- A5: отсутствие рога изобилия: $Y \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset$.

Аксиомы производителя

Все эти аксиомы нужны, чтобы вывести из них свойства задачи максимизации полезности, которые нам хорошо известны наперед: непрерывность и выпуклость. Гладкость тоже желательна, но, на самом деле, можно обойтись выпуклостью Y, поскольку выпуклые функции почти всюду дифференцируемы.

Аксиомы производителя

Theorem 3 (БЖЦ)

Если выполнены аксиомы A1-A5, то технологическое множество выпукло. Более того, если производится один товар, то функция F, описывающая технологическую границу, непрерывна и вогнута.

Максимизация полезности

Максимизация полезности

В такой абстрактной постановке удобно анализировать задачу максимизации полезности:

$$\pi(q, y) = \vec{q} \cdot \vec{y} \to \max, \quad y \in Y$$

Как обычно, нас интересуют два объекта:

- координаты оптимума $y^*(\vec{q})$ - это **функция предложения**
- значение целевой функции $\pi^*(\vec{q}) = \pi(\vec{q}, y^*(\vec{q}))$

Максимизация полезности

В такой абстрактной постановке удобно анализировать задачу максимизации полезности:

$$\pi(q, y) = \vec{q} \cdot \vec{y} \to \max, \quad y \in Y$$

Как обычно, нас интересуют два объекта:

- координаты оптимума $y^*(\vec{q})$ - это абстрактная функция предложения
- значение целевой функции $\pi^*(\vec{q}) = \pi(\vec{q}, y^*(\vec{q}))$

Вопрос: В каком пространстве происходит огибание?

Вопрос: Чему равен градиент $\pi^*(\vec{q})$?

Вопрос: Какова форма функции $\pi^*(\vec{q})$?

Сложение технологических множеств

Сложение технологических множеств

Предположим, что у нас есть два завода. Первый обладает технологией Y_1, второй обладает технологией Y_2. Теперь представим себе, что компания владеет этими двумя заводами и может свободно перемещать товары с одного завода на другой и комбинировать любые технологические цепочки.

Как описать технологическое множество $Y_1 + Y_2$, соответствующее этой компании?

Сложение технологических множеств

Definition 4

Для двух множества A и B, их **евклидова сумма** $A + B$ определяется как:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in b\}.$$

Сложение технологических множеств

Действительно, компания может «сложить» в векторном смысле любые два вектора из множеств A, B.

Первый вектор $a \in A$ означает, что партия товаров была произведена на первом заводе и была отправлена на склад. Второй вектор $b \in B$ означает, что партия товаров была произведена на втором заводе и тоже отправлена на склад.

На складе партии будут объединены и суммарный объем будет соответствовать вектору $a + b$.

Сложение технологических множеств

Lemma 5

Арифметическая сумма двух выпуклых множеств выпукла.

Любая взвешенная сумма двух векторов из $A + B$ представляется как сумма двух взвешенных пар векторов из A и B с теми же весами.

$$\alpha(a + b) + (1 - \alpha)(a' + b') = [\alpha a + (1 - \alpha)a'] + [\alpha b + (1 - \alpha)b']$$

Соответственно, она тоже лежит в $A + B$.

Сложение технологических границ

Сложение технологических границ

Предположим далее, что Y_1 описывается производственной функцией F_1, а Y_2 описывается производственной функцией F_2. Как будет выглядеть производственная функция для $Y_1 + Y_2$?

Какие есть кандидаты?

- $F_1 + F_2$
- $\max(F_1 + F_2)$
- $\nabla F_1 = \nabla F_2$

Сложение технологических границ

Легко видеть, что производственная функция F множества $Y_1 + Y_2$ определяется как верхняя огибающая семейства опорных функций:

$$F(x_1, \dots, x_n) := \max_{\hat{x}} \left(F_1(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) + F_2(x_1 - \hat{x}_1, \dots, x_n - \hat{x}_n) \right),$$

то есть мы сначала решаем сколько произвести на первом заводе, а потом производим остальное на втором заводе.

Что нам говорит Теорема об Огибающей?

Сложение технологических границ

$$F(x_1, \ldots, x_n) := \max_{\hat{x}} (F_1(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) + F_2(x_1 - \hat{x}_1, \ldots, x_n - \hat{x}_n))$$

Наклон огибающей равен наклону опорной функции в точке касания:

$$\nabla F = \nabla F_2.$$

Сложение технологических границ

С другой стороны, можно сказать, что

$$F(x_1, \ldots, x_n) := \max_{\hat{x}} \left(F_2(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) + F_1(x_1 - \hat{x}_1, \ldots, x_n - \hat{x}_n) \right),$$

то есть мы сначала решаем сколько произвести на первом заводе, а потом производим остальное на втором заводе

Сложение технологических границ

$$F(x_1, \ldots, x_n) := \max_{\hat{x}} \left(F_2(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) + F_1(x_1 - \hat{x}_1, \ldots, x_n - \hat{x}_n) \right)$$

И снова Теорема об Огибающей:

$$\nabla F = \nabla F_1.$$

Сложение технологических границ

Получается, что необходимым условием для того, чтобы точка лежала на границе объединенного технологического множества $\vec{y} \in Y_1 + Y_2$ является то, что, при разложении $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$ этой точки на вектор $\vec{y}_1 \in Y_1$ и вектор $\vec{y}_2 \in Y_2$:

$$\nabla F_1(\vec{y}_1) = \nabla F_2(\vec{y}_2).$$

Сложение технологических границ

С другой стороны, очевидно, что при разложении $\vec{y} = \vec{y}_1 + \vec{y}_2$ этой точки, $\vec{y}_1$ на границе Y_1, а $\vec{y}_2$ лежит на границе Y_2.

Таким образом, для того, чтобы описать суммарную технологическую границу, надо сложить только те пары точек $y_1 = F_1(\vec{x}_1)$ и $y_2 \in F_2(\vec{x}_2)$, в которых наклоны равны, и сосчитать $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, y_1 + y_2)$.

Сложение треугольников (на доске)

Конец