МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ФОНД ПОДГОТОВКИ КАДРОВ

В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько, А. А. Цыплаков

МИКРОЭКОНОМИКА
ТРЕТИЙ УРОВЕНЬ

в 2 томах

Том I

Ответственный редактор
доктор экономических наук *Г. М. Мкртчян*

*Рекомендовано к изданию учебно-методическим объединением
по классическому университетскому образованию
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению «Экономика»*

Новосибирск
Издательство СО РАН
2008

УДК 330(075.8)
ББК 65.012я73
Б92

Бусыгин В. П., Желободько Е. В., Цыплаков А. А.

Микроэкономика: третий уровень: в 2 томах: Т. I: учебник. — Новосибирск: Издательство СО РАН, 2008. — 525 с.

ISBN 978—5—7692—0976—5

Учебник содержит систематическое изложение микроэкономической теории и предназначен для методического обеспечения курсов по микроэкономике продвинутого уровня. В его основе лежит опыт преподавания различных дисциплин микроэкономической направленности на экономических факультетах Новосибирского государственного университета (г. Новосибирск) и Государственного университета — Высшей школы экономики (г. Москва).

В первый из двух томов учебника вошла первая часть — «Классические рынки».

Учебник подготовлен при содействии Национального фонда подготовки кадров (НФПК) в рамках программы «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах» Инновационного проекта развития образования

ISBN 978—5—7692—0976—5

Оглавление

Эта страница должна быть пустой!

Предисловие

В настоящее время многие российские вузы перешли на двухступенчатую систему образования и предлагают различные программы подготовки магистров. Курс микроэкономики является базовым для любой магистерской программы по экономике и включен в образовательный стандарт в качестве обязательного, однако с его методическим обеспечением есть проблемы: на русском языке пока отсутствуют пособия соответствующего уровня.

Конечно, на российском книжном рынке мы в изобилии находим учебные пособия вводного и промежуточного уровня как по экономической теории в целом, так и по отдельным ее разделам (микроэкономика, макроэкономика, теория отраслевых рынков и т. д.). В этих пособиях можно найти изложение экономической теории на уровне, вполне доступном для тех, кто только начинает знакомиться с экономической наукой. Известным недостатком всех этих пособий является то, что рассуждения проводятся в основном с помощью графиков или простых примеров, иллюстрирующих изложение. При этом практически всегда остается не вполне понятным, какая именно модель лежит в основе проводимого анализа экономического явления, какие предположения следует сделать, чтобы получаемые выводы были корректными.

Данный учебник написан с целью заполнить эту брешь. Он предназначен прежде всего для методического обеспечения курсов по микроэкономике продвинутого уровня, предлагаемых в рамках магистерских программ, ориентированных на подготовку студентов в области экономической теории. Учебник составлен на основе лекций и семинаров по различным дисциплинам микроэкономической направленности, которые читались его авторами на экономических факультетах Новосибирского государственного университета (г. Новосибирск) и Государственного университета — Высшей школы экономики (г. Москва). Это курсы «Методы микроэкономического анализа», «Микроэкономика II» и «Микроэкономика III», «Теория отраслевых рынков II» и др. Содержащийся в этом учебнике материал в течение многих лет «обкатывался» в учебном процессе, причем существенная часть этого материала предлагалась студентам с начала 1990-х годов.

Теперь о том, как мы видим использование пособия в учебном процессе. Несомненно, что весь материал не может быть прочитан в каком-то одном (семестровом или даже двухсеместровом) курсе лекций. Но как нам представляется, большой объем пособия — это достоинство, позволяющее строить разные курсы. Тем самым, можно использовать единую логику, подход и систему обозначений в рамках серии курсов третьего уровня, покрывающих значительную часть микроэкономической теории. Так, на экономическом факультете НГУ курсы, которые соответствуют содержанию пособия, читаются в течение трех-четырех семестров, что вполне достаточно для изучения существенной части пособия. Кроме того, мы вовсе не рассчитываем на то, что весь материал внутри каждой главы будет подробно обсуждаться на лекциях и семинарских занятиях. Это принципиально невозможно. Перед преподавателем стоит задача выбрать тот материал, который соответствует выбранной им логике преподавания курса и уровню подготовки студентов.

С этой точки зрения существует много различных вариантов использования материала учебника. В первую очередь это касается теорем. Многие из них несколько сложны для понимания при первом знакомстве с ними либо их доказательства чрезмерно громоздкие. Предлагается поэтому обсуждать во время лекций доказательства только отдельных, сравнительно простых и важных для понимания соответствующих разделов курса теорем. Другой вариант — останавливаться только на основных идеях, лежащих в основе доказательства, опуская рутинные моменты и технические детали. Еще один вариант, возможно наиболее предпочтительный — формулировки теорем можно приводить не при самых слабых предположениях, при которых они справедливы, подчеркивая содержательно важные условиями и моменты. Можно также ограничится конкретными сравнительно простыми примерами, ссылаясь на общие теоретические результаты, которые эти примеры иллюстрируют. Последний вариант особенно уместен в преподавании микроэкономических курсов, которые ориентированы на специализированные разделы микроэкономики, такие как «Теория отраслевых рынков» и «Экономика общественного сектора».

До известной степени подобная структуризация материала в данном учебнике уже осуществлена. Так, некоторые доказательства вынесены в приложения либо в отдельные параграфы, содержание которых не влияет на понимание остального материала. К примеру, доказательство существования функции Неймана—Моргенштерна может быть безболезненно опущено; представляется, что приводить его имеет смысл только в курсе, который специально посвящен этим вопросам.

Теперь о принципах, которых мы придерживались при написании пособия. Материал учебника довольно стандартен для первого магистерского курса по микроэкономике. Так, мы последовательно придерживаемся неоклассической парадигмы. Эта парадигма включает в себя методологический индивидуализм, принципиальную несравнимость полезностей различных индивидуумов (с чем связана необходимость использования концепции оптимальности Парето), моделирование поведения экономических субъектов как целеполагающего и рационального, а также равновесный подход. Авторы пособия исходят из того, что нет никаких других предпочтений, кроме индивидуальных. Соответственно нормативный аспект анализа ограничивается использованием концепции Парето (т. е. практически не рассматриваются вопросы справедливости, проблематика общественного выбора, различные аксиоматические подходы к анализу благосостояния). Другими словами, стараясь быть последовательными, мы оставили за кадром многие интересные интересные сюжеты и альтернативные подходы (неравновесный анализ, кооперативные игры, модели частично рационального поведения, альтруизм, эволюционный подход и т. п.), предполагая, что читаемые на основе учебника курсы могут быть дополнены курсами, построенными в другой логике и основанными на других парадигмах.

Далее, нашим приоритетом была логическая связность и последовательность изложения. Мы исходили из того, что прежде чем анализировать модель, следует ее по возможности четко изложить и оговорить все используемые предположения. Предпочтение отдавалось тем моделям, которые вписываются в эту общую логику. В дополнение к концепции рационального поведения, другой основной концепцией в пособии является концепция общего равновесия: рассматриваемые модели экономических феноменов должны конкретизировать классическую модель общего равновесия или же являться ее естественными модификациями. Там, где этот основной принцип не может быть использован (в ситуациях «стратегического взаимодействия»), используется инструментарий теории некооперативных игр: изучаемое экономическое явление представляется в виде игры и анализируются решения этой игры (причем в качестве основной концепции решения выступает равновесие по Нэшу и его классические обобщения).

Несколько слов о содержании пособия и организации материала. Базовый инструментарий дают первые пять глав, посвященные анализу поведения потребителя, поведения производителя, общего равновесия (мир Вальраса) и квазилинейной экономики (мир Маршалла) соответственно. Кроме того, в приложении к пособию излагаются основные сведения из теории игр, которые необходимы для понимания основного материала. (Это приложение целиком автономно и может быть использовано как пособие для вводного курса теории некооперативных игр.)

В гл. 1 «Выбор: альтернативы и предпочтения» приводятся базовые понятия теории потребительского поведения, формально-логические основания теории рационального выбора.

В гл. 2 «Поведение потребителя» и гл. 3 «Поведение производителя (неоклассическая теория фирмы)» рассматриваются классические задачи потребителя и производителя. Свойства и методы анализа этих задач являются обязательным багажом экономиста-теоретика. В силу этого данные разделы изложены довольно детально и последовательно.

В гл. 4 «Классические (совершенные) рынки. Общее равновесие» особый акцент сделан на связи между оптимумом Парето и равновесием (двух так называемых теоремах благосостояния). Это одна из наиболее методологически отточенных частей пособия.

Гл. 5 «Квазилинейная экономика и частное равновесие» представляет собой в значительной степени ноу-хау авторов. Она систематизирует все те представления о частном равновесии, источником которых является Альфред Маршалл, а также отдельные результаты по теории общего равновесия при квазилинейности функций полезности, содержащиеся в литературе. Введение понятия квазилинейной экономики позволило внести единообразие в изложение ряда классических микроэкономических моделей в других главах (моделей общественных благ с квазилинейными предпочтениями, модели оптимального налогообложения Рамсея, моделей рынков с несовершенной конкуренцией).

Гл. 6 и 7 последовательно вводят риск в те модели, которые изложены в гл. 2 и 4.

Перечисленные главы составляют первую часть пособия, «Классические рынки».

Вторая часть пособия, «Фиаско рынка», объединяет главы, основной тематикой которых являются несовершенства в работе рыночного механизма, его фиаско. Эта тематика обычно относится к разделу микроэкономической теории известному под названием *Public Economics* («Экономика общественного сектора»).

Гл. 8 «Налоги» анализирует искажения, связанные с налогами, и проблему минимизации этих искажений (теорию оптимального налогообложения). В ней вводится ряд понятий, используемых в последующих главах второй части.

Гл. 9 и 10 посвящены экстерналиям и общественным благам. В них анализируются причины фиаско некоординируемого рыночного механизма, а также различные альтернативные механизмы координации.

Особенностью этих трех глав является то, что анализ практически нигде не выходит за рамки общего равновесия, что, как нам кажется, выгодно отличает наш подход от подходов других авторов учебников по микроэкономике. Благодаря этому, например, вопросы налогообложения излагаются существенно более аккуратно и логично, чем принято в курсах экономики общественного сектора.

В гл. 11 «Рынки с асимметричной информацией» анализируются последствия неодинаковой информированности экономических субъектов о свойствах обмениваемых благ. В ней рассматривается как двусторонняя монополия (торг), так и конкурентный рынок (модель Акерлофа).

Третья часть «Рынки несовершенной конкуренции» посвящена методам анализа ситуаций, когда участники обмена обладают рыночной властью, то есть способностью влиять на условия сделок, в которых они участвуют. При этом в центре внимания оказывается стратегическое поведение экономических субъектов, обладающих рыночной властью, в связи с чем активно используется инструментарий теории некооперативных игр.

В гл. 12 «Монополия» и 13, «Олигополия» приводятся собственно методы анализа рыночных структур с несовершенной конкуренцией — монополии и олигополии. Акцент делается, прежде всего, на методы анализа последствий той или иной организации рынка в терминах уровней благосостояния. Рассуждения целиком проводятся в рамках моделей квазилинейной сепарабельной экономики, что обеспечивает корректность использования понятия излишка (для оценки соответствующих искажений и чистых потерь) и анализа отдельного рынка вне связи с остальной экономикой.

Гл. 14 и 15 посвящены моделям найма и затрагивает темы информационной асимметрии и теории контрактов.

Пособие также содержит «Математическое приложение» — сводку основных сведений из математики, используемых нами в анализе, упоминавшееся выше приложение по теории некооперативных игр, а также словарь, в котором указаны английские эквиваленты употребляемых в нашем учебнике терминов.

Авторы не стремились расставить темы в порядке возрастания сложности или следовать сложившейся в учебниках и курсах микроэкономики последовательности их изложения, поскольку исходили из того, что потенциальный читатель уже достаточно хорошо знаќом с обсуждаемыми идеями на содержательном уровне и частично — на формальном.

Практически в каждом параграфе пособия читателю предлагаются задачи для самостоятельного решения. В частности, это задачи на доказательство вариантов утверждений из основного текста, которые, как представляется, важны для успешного овладения методами микроэкономического анализа. В конце некоторых глав приведены общие «Задачи к главе», опирающиеся на материал более чем одного параграфа или стоящие несколько в стороне от обсуждаемых в главе вопросов.

Ссылки на литературу в пособии делятся на две категории. Внутри глав в сносках приведены исторические ссылки и ссылки на отдельные источники теоретических результатов. В конце пособия приводится список монографий и учебников, материал которых в той или иной степени повлиял на наше изложение микроэкономической теории. Там же указаны источники отдельных задач (с сокращенными обозначениями в квадратных скобках).

В заключение мы хотим поблагодарить всех тех, благодаря кому стало возможным появление этого учебника. Мы особо признательны Сергею Гелиевичу Коковину, с которым сотрудничаем уже много лет, и которого вполне можно назвать одним из авторов. Так, он является соавтором учебного пособия «Методы микроэкономического анализа», легшего в основу нескольких глав данного

учебника. Кроме того, ему принадлежит авторство большого количества использованных нами задач. Коковин оказывал нам активную поддержку на протяжении всего срока работы над учебником. В то же время, мы целиком берем на себя ответственность за возможные огрехи в изложении тех разделов, которые разрабатывали в сотрудничестве с С. Г. Коковиным, и отдаем себе отчет в том, что не со всеми изложенными взглядами он может согласиться. Также мы благодарны Сергею Юрьевичу Ковалеву, который вместе с нами преподавал и преподает те курсы, которые легли в основу пособия. Ему тоже принадлежит авторство ряда задач.

Особо благодарны мы руководителям тех учебных заведений, в которых нам посчастливилось работать и которые оказывали нам различную поддержку, позволяя, в частности, не втискивать нашу педагогическую деятельность в «прокрустово ложе» (во многом довольно убогих) стандартов, а также студентам, помогавшим нам сделать изложение материала более доступным. Во время работы над пособием большим подспорьем для нас были гранты, которые стимулировали нас финансово и давали доступ к необходимой литературе. Гранты были получены благодаря участию в следующих проектах:

- TEMPUS (TACIS) JEP 08508-94 «Перестройка и совершенствование подготовки экономистов в НГУ» (1994—1997 гг.);
- «Совершенствование преподавания социально-экономических дисциплин в вузах» в рамках «Инновационного проекта развития образования» (2002—2004 гг.);
- Инновационная образовательная программа ГУ-ВШЭ «Формирование системы аналитических компетенций для инноваций в бизнесе и государственном управлении» (2006 г.).

И конечно же мы благодарны авторам тех учебников и научных работ по микроэкономике, которые оказали на нас большое влияние, которые стали нашими заочными учителями в области экономической теории, заменив очных (ввиду их фактического отсутствия в то время, когда мы сами были студентами). В том что касается такого влияния, нам особо хотелось бы отметить французскую школу, идущую от Мориса Аллэ (Эдмон Маленво, Жан-Жак Лаффон, Жан Тироль, Бернар Саланьи). В этом ряду особое место занимает Эдмон Маленво, учебник которого «Лекции по микроэкономическому анализу» был одним из первых серьезных пособий по микроэкономике, переведенных на русский язык. В переводе этого учебника активно участвовал В. П. Бусыгин. Этот учебник особенно сильно повлиял на наше изложение теории экстерналий и общественных благ.

Кроме того, нам, конечно, не удалось избежать сильного влияния трех известных англоязычных учебников для магистратуры:

- Hal Varian, Microeconomic Analysis;
- Andreu Mas-Colell, Michael D. Whinston, Jerry R. Green, Microeconomic theory;
- David M. Kreps, A Course in Microeconomic Theory.

При работе над изложением теории монополии и олигополии большое впечатление на нас произвел учебник Элмара Вольфштеттера, который в то время еще не был издан и были доступны только отдельные его главы (в виде электронных документов).

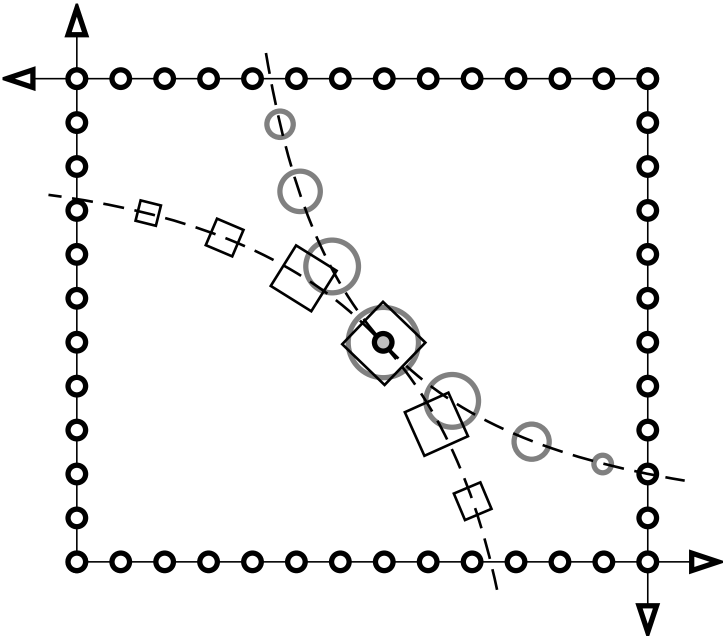
Еще раз подчеркнем, что всем им мы очень признательны.

Вместе с тем, хотелось бы отметить, что, как нам представляется, в каждом разделе имеются достаточно оригинальные подходы к изложению даже традиционного материала. Так, например, мы отказались при исследовании моделей несовершенной конкуренции от традиции полагаться только на условия первого (второго порядка) и предложили альтернативные доказательства как существующих утверждений, так и их обобщений на основе альтернативного метода (аналога выявленных предпочтений), который существенно упрощает эти доказательства, делает их (и сами методы анализа) более понятными. При изложении теории общего равновесия (теории цен) — ядра традиционной микроэкономики — мы отказались от априорной классификации благ (блага, антиблага и т. д.), что привело к необходимости существенно пересмотреть подходы к изложению теорем существования равновесия, теорем благосостояния, использовать нетрадиционные техники анализа таких моделей.

Мы вполне уверены, что вдумчивый читатель может найти неточности и недостатки в изложении материала. Надеемся на помощь таких читателей в совершенствовании учебника и будем благодарны за любые замечания по его структуре и содержанию.

Часть 1

Классические рынки



Эта страница должна быть пустой!

Глава

Выбор: альтернативы и предпочтения

1

1.1. Введение

Экономические явления — следствия решений отдельных субъектов экономики. Поскольку мотивы этих решений, как правило, скрыты от постороннего наблюдателя, можно формулировать различные предположения относительно этих мотивов. Неоклассическая традиция в экономической науке исходит из предположения, что в каждой ситуации принимаемые решения являются результатом сознательного выбора рациональных индивидуумов и поэтому их можно предсказывать и моделировать.

Микроэкономическая теория, которая рассматривает экономические явления не агрегированно, а на уровне отдельных экономических субъектов, тесно связана с понятием выбора (или, как еще говорят, принятия решений), его структурой и последствиями. Так, в микроэкономических моделях потребители рассматриваются как субъекты, выбирающие, что и в каких количествах потреблять и как распределять свое время и другие принадлежащие им ресурсы. Производители выбирают, какие технологии использовать, что и в каких количествах производить. Наемные работники в моделях найма выбирают уровень усилий, а наниматели — как стимулировать нужные им усилия с помощью контракта.

Осуществляя выбор, индивидуум руководствуется некоторыми мотивами, внутренними критериями, которые в микроэкономике принято называть предпочтениями. При этом предполагается, что предпочтения удовлетворяют некоторым естественным ограничениям, отражающим те или иные предположения о рациональности.

В дальнейшем множество всех мыслимых действий (альтернатив), которые доступны осуществляющему выбор индивидууму, будем обозначать через через X, а отдельную альтернативу из этого множества — через $\mathbf{x}$. В типичной ситуации выбора индивидууму доступны не все альтернативы, а только некоторое более узкое подмножество A ($A \subset X$). Другими словами, выбор индивидуума ограничен. Он должен выбрать из A некоторую альтернативу $\mathbf{x}$, которую считает в определенном смысле наиболее подходящей для себя.

Существует два основных подхода к формализации выбора и предпочтений. Один из них исходит из того, что индивидуум может делать некоторые оценочные суждения относительно пары альтернатив («лучше», «хуже»), что формально моделируется при помощи бинарных отношений. При таком подходе предположение о рациональности выбора сводится к выполнению двух основных принципов:

- бинарные отношения, отражающие предпочтения индивидуума, упорядочивают некоторым образом альтернативы из множества X;
- в соответствии с этим упорядочением индивидуум выбирает наилучшую альтернативу среди тех, которые ему доступны (т. е. среди альтернатив из A).

Другой подход состоит в непосредственном описании выбора. Такое описание задается при помощи **правила выбора** $C(\cdot)$, указывающее для данной ситуации выбора A множество $C(A)$ тех альтернатив, которые могут быть выбраны в данной ситуации ($C(A) \subset A$). Вообще говоря, $C(A)$ может содержать несколько равнозначных альтернатив, таких что индивидууму все равно, какую из них выбрать; $C(A)$ может быть и пустым, если индивидуум не может сделать выбор[1].

Описание предпочтений правилом выбора не очень компактно и в определенном смысле тавтологично: чтобы было возможно моделировать выбор, нужно для каждой потенциально возможной ситуации выбора знать $C(A)$. Однако если считать индивидуума рациональным, то можно предположить, что правило выбора удовлетворяет некоторым естественным свойствам, что позволяет сделать описание выбора более компактным и тем самым — операциональным.

В дальнейшем мы будем следовать первому подходу. (В Приложении 1.А к главе мы исследуем связь двух подходов и покажем, что они в определенном смысле эквивалентны.)

[1] Здесь, в частности, можно вспомнить известный пример осла, который не может выбрать из двух одинаковых охапок сена. (Этот пример приписывают средневековому французскому философу Ж. Буридану, но подобная ситуация обсуждалась еще Аристотелем.)

Если задана модель выбора, то можно изучать, каким свойствам удовлетворяет выбор и как изменяется выбор при изменении множества доступных альтернатив (так называемая сравнительная статика).

При описании предпочтений индивидуума часто удобно представлять их так называемой функцией (индикатором) полезности. С понятием «полезность» ранние исследователи экономического поведения связывали возможность такого количественного описания альтернатив, которое, как температура в физике, отражает присущие им глубинные свойства. Предполагалось, что возможно измерение и сопоставление полезностей многих индивидуумов по единой шкале и уместны вопросы о том, насколько выросла полезность. Такой наивный кардиналистский вариант концепции полезности сегодня представляется несостоятельным. Современная теория является по существу ординалистской и трактует функцию полезности фактически лишь как удобное описание предпочтений индивидуума. При таком описании значение имеет только соотношение полезностей (больше/меньше), а не их величины. Если предпочтения можно представить функцией полезности, то существует бесконечно много других функций полезности, представляющих те же предпочтения, и нельзя утверждать, что одна из них является более «правильной», чем другая.

Однако в приложениях теории часто предполагают, что предпочтения обладают некоторыми свойствами, при которых они представимы функциями полезности особого вида. В этом смысле можно говорить о современном кардиналистском подходе, когда для моделирования предпочтений выбирается такая функция полезности, с которой удобнее обращаться[2].

В этой главе мы рассмотрим положения формальной модели выбора и ее основные компоненты в общем виде. В последующих главах, опираясь на свойства этой общей модели выбора, мы проведем анализ различных ее вариантов для частных случаев. Излагая основы теории выбора, будем для удобства делать акцент на ее использовании в моделях поведения потребителя, поскольку это область микроэкономики, которая наиболее тесно связана с моделированием выбора.

---

[2] Прежде всего мы здесь имеем в виду аддитивно-сепарабельные функции полезности, представляющие сепарабельные предпочтения, в частности, функции полезности Неймана—Моргенштерна или квазилинейные функции полезности.

1.2. Блага, множество допустимых альтернатив

Одним из базовых понятий экономической теории является понятие **блага**[3]. Понятие блага в микроэкономике, в отличие от обыденной речи, трактуется достаточно широко[4]. Предполагается, что блага различаются по следующим характеристикам:

- *физическим характеристикам/видам благ*, (например, хлеб и молоко или бумага разного качества);
- *времени*, когда они становятся доступными (просмотр фильма сегодня — это не то же самое, что просмотр этого же фильма завтра);
- *местам их расположения* (персики, продаваемые в Ташкенте, и такие же персики, продаваемые в Новосибирске, могут рассматриваться как разные блага);
- *состояниям природы* (зонтик завтра в случае, если завтра пойдет дождь, отличается от зонтика завтра, если будет солнечная погода) и т. д.

Кроме того, при моделировании важно четко представлять, какой информацией о свойствах благ обладают экономические субъекты. Классическая микроэкономика[5] исходит из предположения, что потребители обладают *полной* информацией о свойствах благ еще *до момента* их покупки[6]. Данное предположение значительно облегчает изучение процесса выбора. В случае же, когда информацию о свойствах блага потребитель получает лишь *в процессе потребления, но не в момент покупки* (например, покупка подержанной

[3] Отметим, что понятие «благо» не подразумевает оценочных суждений, как то: хорошо — плохо, благо — вред и т. п., оно просто отсылает к способности удовлетворять некоторые потребности (например, потребность курильщика в сигаретах) или, наоборот, вызывать неудовлетворенность (как, скажем, наличие на полу сигаретных окурков и т. п.). Естественно, здесь и далее мы говорим прежде всего об экономических благах, т. е. о благах, которые продаются и покупаются на рынках.

[4] См., напр., G. Debreu• *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, John Wiley & Sons, 1959 (Cowles Foundation Monograph No. 17).

[5] Здесь мы имеем в виду микроэкономику, как она сложилась к началу 1970-х гг., в «доинформационную эпоху», т. е. до появления так называемой информационной экономической теории в работах Дж. Акерлофа, М. Спенса, Дж. Стиглица и др.

[6] С классификацией благ в связи с информированностью потребителя об их характеристиках, важных с точки зрения его оценки этих благ, можно ознакомиться в работах P. Nelson• Information and Consumer Behavior, *Journal of Political Economy* **78** (1970): 311–329 и M. R. Darby and E. Karni• Free Competition and the Optimal Amount of Fraud, *Journal of Law and Economics* **16** (1973): 67–88.

техники с рук), описание процесса рационального выбора должно включать стратегический момент, обусловленный неопределенностью свойств/качества блага в момент выбора[7]. Ситуация еще больше усложняется если характеристики блага не только *ненаблюдаемы в момент выбора*, но и *невыявляемы в процессе потребления* (с некоторой долей условности примером благ с таким свойством, являются юридические, медицинские и другие подобные услуги)[8].

Для того чтобы описать процесс выбора, нам в первую очередь необходимо определиться с тем, что является альтернативой, непосредственным объектом предпочтения, выбора. Классический подход в качестве такового объекта рассматривает **потребительские наборы** (корзины). Этому подходу мы и будем следовать в дальнейшем[9].

Будем предполагать, что потребителю доступны l благ. Через x_i обозначим количество блага с номером i. Под потребительским набором будем подразумевать вектор

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots x_l) \in \mathbb{R}^l,$$

где i-я компонента означает количество потребляемого блага с номером i. Под **множеством допустимых наборов** (множеством допустимых альтернатив) $X \subset \mathbb{R}^l$ будем понимать множество всех физически возможных наборов благ. При задании множества X можно также учесть некоторые институциональные ограничения, связанные с обстановкой, в которой потребитель производит свой выбор. Перечислим предположения о множествах допустимых потребительских наборов, которые обычно делаются при моделировании потребительского выбора[10].

Вообще говоря, количество отдельного блага в потребительском наборе может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В частности, если в качестве одного из товаров (i-го) рассматривается количество часов труда, предлагаемое индивидуумом

---

[7] Товары с такой структурой информированности называют *experience goods* — «товары, познаваемые в опыте».

[8] Товары с такой структурой информированности называют *credence goods* — «товары, требующие доверия».

[9] Вообще говоря, это не единственный подход к определению объекта (области определения) предпочтений. Так, например, К. Дж. Ланкастер (K. J. Lancaster• A New Approach to Consumer Theory, *Journal of Political Economy* **74** (1966): 132–157) в качестве такой области определения предлагал рассматривать характеристики благ, а не сами блага.

[10] Обсуждение понятия блага и множества допустимых альтернатив см. также в книге Э. Маленво• *Лекции по микроэкономическому анализу*, М.: Наука, 1985, гл. I, § 3 и гл. II, § 4.

на рынок, то при $x_i < 0$ относительно этого товара индивидуум является продавцом, а не покупателем. Заметим, однако, что практически всегда можно переопределить блага таким образом, чтобы они измерялись неотрицательными количествами. Так, если в перечне благ труд заменить на досуг потребителя (разность между общим запасом времени, которым обладает потребитель, и рабочим временем), то соответствующая компонента допустимого потребительского набора будет неотрицательным числом. Если такая «нормировка» благ произведена, то множество допустимых наборов удовлетворяет свойству $X \subset \mathbb{R}^l_+$.

Как правило, потребительские блага можно разделить на две категории: бесконечно делимые и дискретные. Часто анализ потребительского выбора проводится при упрощающем предположении, что все рассматриваемые блага бесконечно делимы. Это оправданно для многих неделимых благ, если количество в штуках достаточно большое, так что разница в одну единицу не является существенной с практической точки зрения. При переходе от краткосрочного к долгосрочному анализу многие блага можно перевести из разряда дискретных в разряд бесконечно делимых. Многие блага, покупаемые в дискретных количествах, имеют непрерывно меняющиеся качественные характеристики, так что для целей анализа их тоже можно считать бесконечно делимыми.

Обычно предполагается, что множество X является замкнутым. Это предположение носит скорее технический характер, упрощает анализ и при этом не вызывает особых содержательных нареканий. Из него следует, в частности, что предел любой сходящейся последовательности допустимых потребительских наборов также является допустимым потребительским набором.

Говорят, что множество X является ограниченным снизу, если существует вектор $\hat{\mathbf{x}}$, такой что для каждого $\mathbf{x}$, принадлежащего X, выполнено $\mathbf{x} \geqslant \hat{\mathbf{x}}$. Ограниченность снизу для «обычных» благ объясняется тем, что они не могут потребляться в отрицательных количествах. В экономике могут наличествовать также блага, потребление которых может быть отрицательной величиной, например труд. Но потребление труда потребителем не может превосходить его совокупный запас времени за рассматриваемый период.

Свойство «продолжаемости вверх»: множество X таково, что вместе с любым потребительским набором $\tilde{\mathbf{x}}$ содержит все наборы с таким же или бóльшим потреблением каждого из благ, т. е. те $\mathbf{x}$, для которых выполнено $\mathbf{x} \geqslant \tilde{\mathbf{x}}$. Формально это можно записать как

$X + \mathbb{R}^l_+ \subset X$. Данное свойство означает, что потенциально потребитель может потребить неограниченное количество блага. Конечно, предположение о выполнении этого свойства далеко не всегда оправданно, но ряд классических результатов теории потребителя значительно проще формулируется и выводится в условиях этого предположения. Действительно, при отсутствии этого свойства мы уже, например, не можем быть уверены в том, что потребитель израсходует весь получаемый им доход (т. е. что выбор потребителя принадлежит бюджетной линии).

Выпуклость множества X — это не такое безобидное и естественное предположение, как может показаться на первый взгляд. Существует достаточное число содержательных экономических вопросов, при изучении которых данное предположение неприемлемо. Например, некоторые из рассматриваемых благ могут потребляться исключительно в дискретных количествах. Подобная ситуация значительно усложняет дело и требует более тонких рассуждений, на которых мы не останавливаемся.

В некоторых случаях может быть удобным предположение, что множество допустимых наборов содержит ноль ($\mathbf{0} \in X$). Данное свойство означает, что потребитель *потенциально* может ничего не потреблять. Заметим, что в сочетании с двумя упоминавшимися выше свойствами (какими именно?) это свойство эквивалентно тому, что множество допустимых альтернатив представляет собой неотрицательный ортант $\mathbb{R}^l$, т. е. $X = \mathbb{R}^l_+$.

Во многих микроэкономических учебниках делается предположение, что $X = \mathbb{R}^l_+$, поскольку это позволяет сильно упростить анализ. Мы в дальнейшем тоже будем в некоторых случаях (прежде всего в задачах) пользоваться таким предположением.

Как мы уже говорили выше, в основе поведения потребителя лежат его предпочтения, в соответствии с которыми он осуществляет выбор между доступными ему наборами из множества допустимых альтернатив. Естественным языком для обсуждения концепции предпочтений является теория бинарных отношений, краткое описание которой дается в следующем параграфе.

1.3. Бинарные отношения и их свойства

Чтобы мотивировать и пояснить понятие бинарного отношения, рассмотрим известную детскую игру «камень — ножницы — бумага».

Предполагается, что камень побеждает ножницы (тупит), ножницы побеждают бумагу (режут), бумага побеждает камень (оборачивает), в остальных случаях (например, камень — камень) — боевая ничья. Будем говорить, что x находится в отношении $\mathcal{R}$ к y, и записывать $x \mathcal{R} y$ в случае, если x «побеждает» y, где x и y принадлежат множеству $\{\text{камень}, \text{ножницы}, \text{бумага}\}$. Естественно отождествить отношение $\mathcal{R}$ с множеством, элементами которого являются упорядоченные пары[11] $\langle\text{камень}, \text{ножницы}\rangle$, $\langle\text{ножницы}, \text{бумага}\rangle$, $\langle\text{бумага}, \text{камень}\rangle$, и только они. Отметим, что так определенное отношение (множество) $\mathcal{R}$, очевидно, является подмножеством множества, состоящего из всевозможных упорядоченных пар, где каждый элемент пробегает множество $\{\text{камень}, \text{ножницы}, \text{бумага}\}$.

Этот простой пример приводит нас к следующему определению бинарного отношения.

Определение 1.1

Пусть X — произвольное непустое множество. Декартовым квадратом множества X назовем множество, обозначаемое $X \times X$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ пробегают все множество X. Под **бинарным отношением** $\mathcal{R}$, заданным на множестве X, будем понимать некоторое подмножество декартова квадрата $X \times X$, т. е. формально $\mathcal{R} \subset X \times X$. $\lhd$

Другими словами, бинарное отношение — это некоторое множество упорядоченных пар $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, где $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — элементы множества X. Понятие бинарного отношения в случае $X \subset \mathbb{R}$ имеет достаточно простую графическую иллюстрацию (Рис. 1.1).

При рассмотрении бинарных отношений в случае, когда пара $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ принадлежит множеству $\mathcal{R}$, вместо $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \mathcal{R}$ обычно записывают $\mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{y}$ и говорят, что $\mathbf{x}$ находится в отношении $\mathcal{R}$ к $\mathbf{y}$.

Определим теперь некоторые свойства бинарных отношений, которые в дальнейшем будут использованы при рассмотрении предпочтений[12].

Определение 1.2

Бинарное отношение $\mathcal{R}$ называется

* **рефлексивным**, если для всех $\mathbf{x} \in X$ выполнено $\mathbf{x} \mathcal{R} \mathbf{x}$;

---

[11] Выражение «упорядоченная пара» означает, что пары $\langle a, b \rangle$ и $\langle b, a \rangle$ считаются различными.

[12] Здесь и далее, под $\neg A$ мы подразумеваем отрицание A.

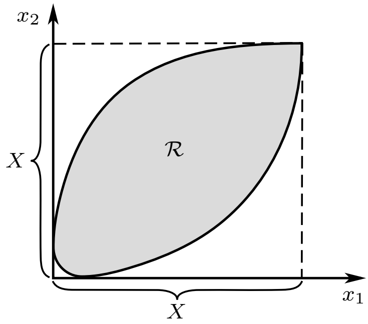


Рис. 1.1. *Бинарное отношение $\mathcal{R}$, заданное на множестве $X \subset \mathbb{R}$*

* иррефлексивным[13], если $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}$ не выполняется ни при каком $\mathbf{x} \in X$;
* симметричным, если для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ из $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$ следует $\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}$;
* асимметричным, если для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ из $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}$ неверно;
* транзитивным, если для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и $\mathbf{z} \in X$ таких что $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{z}$ выполнено $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{z}$;
* отрицательно транзитивным, если для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и $\mathbf{z} \in X$ таких что $\urcorner(\mathbf{x}\;\mathcal{R}\;\mathbf{y})$ и $\urcorner(\mathbf{y}\;\mathcal{R}\;\mathbf{z})$ выполнено $\urcorner(\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{z})$;
* полным, если для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ выполнено либо $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$, либо $\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}$, либо и то и другое. $\triangleleft$

Проиллюстрируем эти свойства бинарных отношений на примерах.

Пример 1.1

Пусть X — множество студентов, обучающихся в текущем учебном году в Новосибирском государственном университете; $\mathcal{R}$ — отношение «выше ростом, чем» заданное на X. Посмотрим, каким из указанных выше свойств удовлетворяет это бинарное отношение.

[13] Часто это свойство также называют нерефлексивностью, но такая терминология приводит к парадоксальным выражениям. Например, «бинарное отношение не является ни рефлексивным, ни нерефлексивным». Чтобы избежать этой игры слов, мы и используем термин «иррефлексивность».

Очевидно, что какого бы студента мы ни взяли, его рост не может быть больше его же роста, т. е., например, 175 не может быть больше 175. Таким образом, это отношение является иррефлексивным и не удовлетворяет свойству рефлексивности.

Это отношение также является асимметричным и не является симметричным. Действительно, пусть $h(a)$ — рост некоторого студента a, а $h(b)$ — рост студента b, и пусть $a \mathcal{R} b$, т. е. студент a имеет больший рост, чем b ($h(a) > h(b)$). Тогда вполне понятно, что неравенство $h(b) > h(a)$ неверно. Это в свою очередь, означает, что неверно $b \mathcal{R} a$. Таким образом, с учетом произвольности выбора a и b мы получили желаемое.

Проверим теперь, что данное отношение является транзитивным. Из множества X возьмем трех произвольных студентов a, b, c, чей рост составляет $h(a)$, $h(b)$ и $h(c)$ соответственно, причем выполнены следующие неравенства: $h(a) > h(b)$ и $h(b) > h(c)$. Очевидно, что по свойству сравнения действительных чисел мы имеем, что $h(a) > h(c)$. Это в точности означает, что $a \mathcal{R} c$ и мы, таким образом, показали транзитивность $\mathcal{R}$.

Выполнение свойства отрицательной транзитивности проверим чуть позже, а сейчас перейдем к проверке свойства полноты. Как нетрудно понять, рассматриваемое бинарное отношение не является полным, если среди студентов есть хотя бы двое с одинаковым ростом. В этом случае ни один из этих двух студентов не будет выше другого и, таким образом, мы имеем нарушение свойства полноты. Если же среди нашего множества X нет ни одной пары студентов одинакового роста, то введенное на X отношение «выше ростом, чем» обладает свойством полноты. ▲

Пример 1.2

Пусть на множестве $X = \mathbb{R}^2_+$ задано отношение $\mathcal{R}$ по правилу

$$(x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_2 \geqslant y_1 + x_2.$$

Перед тем как отвечать на вопрос о том, каким свойствам удовлетворяет данное бинарное отношение, заметим, что $x_1 + y_2 \geqslant y_1 + x_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1 - x_2 \geqslant y_1 - y_2$, т. е. $(x_1, x_2) \mathcal{R} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \geqslant y_1 - y_2$. Как нетрудно догадаться, данное бинарное отношение удовлетворяет тем же свойствам, что и отношение $\geqslant$ на действительной прямой, т. е. свойствам полноты, транзитивности и рефлексивности. (Проверьте самостоятельно выполнение/невыполнение условий симметричности/асимметричности и отрицательной транзитивности.) ▲

Замечание: При проверке указанных выше свойств предпочтений следует быть осторожным и не делать поспешных выводов. В частности, если окажется, что некоторое бинарное отношение не является рефлексивным, то из этого, вообще говоря, не следует, что оно является иррефлексивным. Та же ситуация возникает при рассмотрении связки свойств симметричность/асимметричность.

Эти определения можно проиллюстрировать графически в духе Рис. 1.1. Так, например, рефлексивность означает, что *вся* диагональ декартова квадрата $X \times X$ принадлежит $\mathcal{R}$. Свойство симметричности означает, что множество $\mathcal{R}$ симметрично относительно диагонали декартова квадрата. Полнота означает, что если мы «согнем по диагонали» декартов квадрат, то в итоге получим треугольник без выколотых точек.

Выше мы ввели и обсудили ряд часто встречающихся свойств бинарных отношений. Теперь рассмотрим взаимосвязь между этими свойствами.

Теорема 1.1

{i} Каждое асимметричное бинарное отношение является иррефлексивным.

{ii} Каждое полное бинарное отношение является рефлексивным.

{iii} Каждое иррефлексивное и транзитивное бинарное отношение является асимметричным.

{iv} Отношение $\mathcal{R}$ является отрицательно транзитивным тогда и только тогда, когда для всех альтернатив $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{z} \in X$ из $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$ следует $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{z}$ или $\mathbf{z}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$.

Доказательство: Доказательство свойств тривиально. С целью демонстрации техники доказательства докажем только пункт {iii} теоремы.

Предположим противное, т. е. пусть отношение $\mathcal{R}$ иррефлексивно, транзитивно, но не является асимметричным. Тогда найдется такая пара $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, что $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}$. Так как отношение $\mathcal{R}$ транзитивно, то из $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}$ следует $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}$. Получили противоречие с иррефлексивностью. ■

Пример 1.3 (продолжение Примера 1.1)

Нам осталось проверить свойство отрицательной транзитивности. Для его проверки воспользуемся представлением этого свойства из только что доказанного утверждения. Для этого из множества X возьмем трех произвольных студентов a, b, c, чей рост составляет $h(a)$, $h(b)$ и $h(c)$ соответственно, причем выполнено неравенство $h(a) > h(b)$. Очевидно, что каким бы ни было значение $h(c)$, должно быть выполнено хотя бы одно из неравенств — $h(a) > h(c)$ или $h(c) > h(b)$. Таким образом, видим, что для данного отношения $\mathcal{R}$ выполнено свойство отрицательной транзитивности. ▲

Задачи

1.1 Предположим, условно, что существует всего два города, в каждом из которых продается по три товара. Какова размерность пространства благ исходя из определения блага по Дебре?

1.2 Пусть X — множество всех ныне живущих людей на планете Земля. Проверьте выполнение свойств

- полноты,
- рефлексивности,
- симметричности,
- транзитивности,
- отрицательной транзитивности

для следующих бинарных отношений, заданных на X:

(A) «является потомком»;
(B) «является внуком»;
(C) «является родителем такого же числа детей, что и…»;
(D) «состоит в браке с…» (допуская полигамию);
(E) «состоит в браке с…» (предполагая моногамные отношения);
(F) «состоит в родстве с…»;
(G) «хотя бы раз в жизни думал о…».

1.3 Пусть X — множество населенных пунктов на планете Земля. Определите, какими свойствами обладают следующие отношения:

(A) «расположен восточнее» (в случае, если Земля круглая);
(B) «расположен восточнее» (в случае, если Земля плоская и стоит на черепахах);
(C) «имеет ту же численность, что и …»;
(D) «имеет то же число безработных, что и …».

1.4 Определите, какими из свойств (полнота, рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, асимметричность, транзитивность, отрицательная транзитивность) обладает каждое из приводимых ниже отношений $\mathcal{R}$, заданных на $\mathbb{R}^2_{++}$:

(A) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$;
(B) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} \geqslant \frac{x_2}{y_2}$;
(C) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$;
(D) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant y_1 y_2$;
(E) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\} \geqslant 0$;
(F) $(x_1, x_2)\ \mathcal{R}\ (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} > \min\{y_1, y_2\}$.

В случае, если отношение $\mathcal{R}$ обладает тем или иным свойством, представьте формальное доказательство, если же не обладает, то приведите пример, показывающий это.

1.5 Отношение лексикографического упорядочения, заданное на $\mathbb{R}^2_{++}$, определяется следующим образом: $\mathbf{x}\ \mathcal{R}^L\ \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $x_1 > y_1$ или когда $x_1 = y_1$ и $x_2 > y_2$. Каким свойствам (полнота, рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, асимметричность, транзитивность, отрицательная транзитивность) удовлетворяет данное отношение?

1.6 Приведите пример бинарного отношения, не удовлетворяющего ни свойству рефлексивности, ни свойству иррефлексивности.

1.7 Приведите пример бинарного отношения, не удовлетворяющего ни свойству симметричности, ни свойству асимметричности.

1.8 Покажите, что каждое асимметричное бинарное отношение является иррефлексивным.

1.9 Приведите пример симметричного, но не рефлексивного бинарного отношения.

1.10 Объясните, почему каждое полное бинарное отношение является рефлексивным.

1.11 (A) Как известно для любых высказываний A и B выполнено следующее логическое правило: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$. Используя этот факт, докажите, что отношение $\mathcal{R}$ является отрицательно транзитивным тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и $\mathbf{z} \in X$ таких что $\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{y}$ выполнено $\mathbf{x}\ \mathcal{R}\ \mathbf{z}$ или $\mathbf{z}\ \mathcal{R}\ \mathbf{y}$.

(B) Докажите то же утверждение, не прибегая к исчислению высказываний (т. е. рассуждениям вида $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$).

1.4. Неоклассические предпочтения

Теперь, вооружившись понятием бинарного отношения, мы можем перейти к обсуждению неоклассического подхода к моделированию предпочтений и выбора.

В экономической теории предпочтения потребителя — единственная характеристика, которая принимается во внимание при объяснении его поведения. Поэтому в дальнейшем, излагая теорию потребления мы будем отождествлять потребителя с его предпочтениями. Предпочтения потребителя в неоклассической традиции представляются (описываются) тройкой бинарных отношений[14], заданных на множестве допустимых альтернатив X:

- строгим отношением предпочтения $\succ$ (тот факт, что данный потребитель предпочитает альтернативу $\mathbf{x}$ альтернативе $\mathbf{y}$ или, другими словами, что альтернатива $\mathbf{x}$ для него лучше, чем альтернатива $\mathbf{y}$, будет обозначаться как $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$);
- нестрогим отношением предпочтения $\succcurlyeq$ (тот факт, что потребитель нестрого предпочитает альтернативу $\mathbf{x}$ альтернативе $\mathbf{y}$ или, другими словами, что альтернатива $\mathbf{x}$ для него не хуже, чем альтернатива $\mathbf{y}$, будет обозначаться как $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$);
- отношением безразличия (эквивалентности) $\sim$ (тот факт, что потребитель безразличен в выборе между альтернативами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ или, другими словами, альтернатива $\mathbf{x}$ для него эквивалентна альтернативе $\mathbf{y}$, будет обозначаться как $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$).

Определение 1.3

Тройка бинарных отношений $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ соответствует неоклассическим предпочтениям, если она обладает следующими свойствами:

* строгое отношение предпочтения $\succ$ является *асимметричным* (если $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$, то $\mathbf{y}$ не может быть лучше $\mathbf{x}$) и *отрицательно транзитивным* (если неверно, что $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$, и неверно, что $\mathbf{y}$ лучше $\mathbf{z}$, то неверно, что $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{z}$);
* нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ является *полным* (для двух наборов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ либо $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{y}$, либо $\mathbf{y}$ не хуже $\mathbf{x}$) и *транзитивным* (если $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{y}$, и $\mathbf{y}$ не хуже $\mathbf{z}$, то $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{z}$);

[14] Строгий аксиоматический подход к концепции предпочтений, основанный на бинарных отношениях, получил распространение в экономической теории после публикации работ К. Эрроу по общественному выбору (см., напр., K. J. Arrow. A Difficulty in the Concept of Social Welfare, *The Journal of Political Economy* **58** (1950): 328–346).

* отношение безразличия $\sim$ *рефлексивно* (если $\mathbf{x}$ эквивалентен $\mathbf{y}$, то $\mathbf{y}$ эквивалентен $\mathbf{x}$), *симметрично* (любой набор эквивалентен сам себе) и *транзитивно* (если $\mathbf{x}$ эквивалентен $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}$ эквивалентен $\mathbf{z}$, то $\mathbf{x}$ эквивалентен $\mathbf{z}$);
* отношения связаны между собой следующим образом:

$$\text{$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$} \tag{P1}$$

(или, что эквивалентно, $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$),

$$\text{$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда как $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, так и $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ неверны,} \tag{P2}$$

$$\text{$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$.} \tag{P3}$$

$\triangleleft$

Предположение, что потребитель является рациональным или, другими словами, упорядочивает альтернативы (потребительские наборы) на основе неоклассических предпочтений, является традиционным для экономической теории, и мы будем в дальнейшем всюду следовать этой традиции (если противоположное не оговорено особо).

Предположения о свойствах неоклассических предпочтений тесно связаны с понятиями *рациональности* потребителя, *непротиворечивости вкусов*, *внутренней состоятельности выбора*. Предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ удовлетворяют всем свойствам, которым исходя из экономической и житейской интуиции должны удовлетворять предпочтения рационального потребителя.

Заметим, что если верны соотношения (P1) и (P3), то нестрогое отношение предпочтения однозначно определяет строгое отношение предпочтения и отношение безразличия. Значит, его свойства однозначно определяют свойства двух других отношений. Аналогично если верны соотношения (P1) и (P2), то строгое отношение предпочтения однозначно определяет нестрогое отношение предпочтения и отношение безразличия. Поэтому возникает вопрос о непротиворечивости всех перечисленных требований к неоклассическим предпочтениям, а также об их избыточности[15].

[15] Очевидно, что требования к отдельным бинарным отношениям, составляющим предпочтения, непротиворечивы. Например, отношение $\succcurlyeq \; = X \times X$ будет полным и транзитивным, т. е. некоторое полное транзитивное бинарное отношение всегда существует.

Приведем предварительно некоторые факты относительно взаимосвязей тех свойств бинарных отношений, на которые будет опираться проверка непротиворечивости определения неоклассических предпочтений.

Теорема 1.2

{i} Пусть отношения $\succ$ и $\succcurlyeq$ связаны соотношением (P1). Тогда

(1) асимметричность $\succ$ эквивалентна полноте $\succcurlyeq$;
(2) отрицательная транзитивность $\succ$ эквивалентна транзитивности $\succcurlyeq$.

{ii} Пусть отношения $\succ$ и $\sim$ связаны соотношением (P2). Тогда

(1) $\sim$ симметрично;
(2) если $\succ$ отрицательно транзитивно, то $\sim$ транзитивно;
(3) если $\succ$ асимметрично, то $\sim$ рефлексивно.

{iii} Пусть отношения $\succcurlyeq$ и $\sim$ связаны соотношением (P3). Тогда

(1) $\sim$ симметрично;
(2) если $\succcurlyeq$ транзитивно, то $\sim$ транзитивно;
(3) если $\succcurlyeq$ полно, то $\sim$ рефлексивно. ⌟

Доказательство: {i1} Полноту отношения $\succcurlyeq$ можно переформулировать следующим эквивалентным образом: если не выполнено $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, то $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$. Поскольку $\succ$ и $\succcurlyeq$ связаны соотношением (P1), следующие два свойства эквивалентны:

$$\neg(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Rightarrow \neg(\mathbf{y} \succ \mathbf{x}).$$

Первое означает полноту $\succcurlyeq$, а второе — асимметричность $\succ$.

{i2} Очевидно, что поскольку $\succ$ и $\succcurlyeq$ связаны соотношением (P1), отрицательная транзитивность отношения $\succ$

$$(\neg(\mathbf{x} \succ \mathbf{z}) \text{ и } \neg(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})) \Rightarrow \neg(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$$

эквивалентна транзитивности отношения $\succcurlyeq$

$$(\mathbf{z} \succcurlyeq \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}.$$

{ii1} Согласно (P2) как $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, так и $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$ определяются одинаковым образом — как одновременное выполнение соотношений $\neg\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\neg\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$.

{ii2} Пусть $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$. Согласно (P2) это означает, что $\neg(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$, $\neg(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$, $\neg(\mathbf{y} \succ \mathbf{z})$ и $\neg(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$. По отрицательной транзитивности отношения $\succ$ из этого следует, что $\neg(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$ и $\neg(\mathbf{z} \succ \mathbf{x})$. В свою очередь, согласно (P2), это что означает $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$.

{ii3} Из асимметричности $\succ$ следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}$ неверно. Поэтому из (P2) следует $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$.

Пункт {iii} теоремы доказывается так же, как пункт {ii}. ■

На основе доказанного утверждения легко установить совместность требований в определении неоклассических предпочтений. Другими словами, верно следующее утверждение.

Теорема 1.3

{i} Пусть отношение $\succ$ («строгое отношение предпочтения») асимметрично и отрицательно транзитивно, отношение $\succcurlyeq$ определяется на основе предположения (P1), отношение $\sim$ определяется на основе предположения (P2). Тогда $\succcurlyeq$ полно и транзитивно, $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно и выполнено предположение (P3).

{ii} Пусть отношение $\succcurlyeq$ («нестрогое отношение предпочтения») полно и транзитивно, отношение $\succ$ определяется на основе предположения (P1), отношение $\sim$ определяется на основе предположения (P3). Тогда $\succ$ асимметрично и отрицательно транзитивно, $\sim$ рефлексивно, симметрично и транзитивно и выполнено предположение (P2).

Это утверждение показывает также, что совокупность требований к неоклассическим предпочтениям является избыточной, поскольку, например, строгое отношение предпочтения и его свойства полностью определяют два других отношения предпочтения и их свойства. Поэтому для полного описания неоклассических предпочтений достаточно описать либо соответствующее строгое, либо нестрогое отношение предпочтения (либо то, что из промежуточных курсов микроэкономики известно как «карта кривых безразличия»). Существуют две устоявшиеся традиции построения теории поведения потребителя, различающиеся способом описания предпочтений индивидуума. Первая берет за основу описание строгого отношения предпочтения (как асимметричного и отрицательно транзитивного отношения предпочтения). Вторая же традиция исходит из нестрогого отношения предпочтения, которое по исходным предположениям удовлетворяет свойствам полноты и транзитивности. Обе эти традиции приводят к одним и тем же неоклассическим предпочтениям, если строгое и нестрогое отношения предпочтения строятся на основе друг друга вышеуказанным способом, т. е. $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$.

Традиционная неоклассическая парадигма исходит из положения, что предпочтения (вкусы, оценки) потребителя являются основой его поведения (осуществляемого им выбора). Таким образом, для построения теории поведения потребителя, нам необходимо удобное для последующего анализа описание этих предпочтений. Хотя может быть предложено несколько возможных описаний, следует иметь в виду, что каждое из них является лишь способом представления одного и того же объекта — предпочтений (вкусов, оценок) данного потребителя. Проверка того, насколько такое описание адекватно, является целью эмпирического анализа. Теория, постулируя те или иные свойства таких описаний, должна приводить к верифицируемым (хотя бы потенциально) прогнозам относительно поведения потребитея. Эмпирическая оценка этих гипотез на их соответствие реально наблюдаемому поведению позволяет, в свою очередь, установить, насколько такое описание адекватно, что и является целью эмпирического анализа. Для нас важно только то, что конструкция, с помощью которой моделируются предпочтения, мыслима и непротиворечива.

Заметим, что определить нестрогое отношение предпочтения можно и следующим альтернативным способом, который представляется не менее естественным: $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. В случае неоклассических предпочтений такое альтернативное определение приводит к тому же отношению (как показывает приведенное ниже утверждение). При отказе от предположения, что предпочтения являются неоклассическими, мы получаем два альтернативных описания одного и того же предпочтения (и соответственно различные теории поведения, построенные на основе таких описаний).

Укажем теперь другие свойства неоклассических предпочтений, которые не отражены в Определении 1.3.

Теорема 1.4

Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — неоклассические предпочтения на X. Тогда они обладают следующими свойствами.

{i} Строгое отношение предпочтения $\succ$ транзитивно (если $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}$ лучше $\mathbf{z}$, то $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{z}$) и иррефлексивно (набор не может быть лучше самого себя).

{ii} Нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ рефлексивно (любой набор не хуже самого себя) и отрицательно транзитивно.

{iii} Для любых $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполняется ровно одно из следующих трех соотношений:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{y} \succ \mathbf{x}, \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y}.$$

{iv} Для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

{v} Для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, но $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$ неверно.

{vi} Для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{z} \in X$ выполнено

(1) $(\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$;
(2) $(\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$;
(3) $(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$;
(4) $(\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$;
(5) $(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$;
(6) $(\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$. ┘

Доказательство: Докажем только некоторые из перечисленных свойств. Доказательство остальных свойства оставляется читателю в качестве упражнения.

{i} Покажем транзитивность $\succ$. Предположим противное. Пусть существуют $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ и $\mathbf{z} \in X$ такие, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, но при этом $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$. В силу асимметричности отношения $\succ$ из $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$ следует, что $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$. Из $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$ и $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$ по свойству отрицательной транзитивности следует, что $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$. Получили противоречие.

Иррефлексивность следует из асимметричности.

{iii} Из асимметричности $\succ$ следует, что соотношения $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ не могут выполняться одновременно. Свойство (P2) означает, что как $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, так и $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ одновременно могут быть неверными, если и только если $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. Сопоставляя эти факты, убеждаемся в истинности доказываемого.

{iv} Из доказанного в пункте {iii} следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ выполнены тогда и только тогда, когда не выполнено $\urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$. Но согласно (P1) $\urcorner(\mathbf{y} \succ \mathbf{x})$ эквивалентно $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$.

{vi1} Пусть $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$. Согласно (P2) из $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$ следует, что $\urcorner(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$. Предположим противное, т. е. что $\urcorner(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$. Тогда из $\neg(\mathbf{x} \succ \mathbf{z})$ и $\neg(\mathbf{z} \succ \mathbf{y})$ по свойству отрицательной транзитивности строгого отношения предпочтения имеем $\neg(\mathbf{x} \succ \mathbf{y})$. Пришли к противоречию. ■

Как уже отмечалось, еще один способ моделирования предпочтений основан на «карте кривых безразличия». Он эквивалентен моделированию с помощью неоклассических предпочтений, если «карта кривых безразличия» связана с элементарными бинарными отношениями соответствующим образом.

Определение 1.4

Для данного набора $\mathbf{x} \in X$

* множеством безразличия[16] будем называть множество наборов, эквивалентных $\mathbf{x}$:

$$I(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{y} \in X \;\middle|\; \mathbf{y} \sim \mathbf{x} \right\};$$

* верхним лебеговым множеством будем называть множество наборов, которые не хуже $\mathbf{x}$:

$$L^{+}(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{y} \in X \;\middle|\; \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \right\};$$

* нижним лебеговым множеством будем называть множество наборов, которые не лучше $\mathbf{x}$:

$$L^{-}(\mathbf{x}) = \left\{ \mathbf{y} \in X \;\middle|\; \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \right\}. \qquad \triangleleft$$

Эти объекты обладают очевидными свойствами, о которых идет речь в следующей теореме.

Теорема 1.5

Пусть $I(\cdot)$ и $L^{+}(\cdot)$ заданы на основе неоклассических предпочтений. Тогда для них верны следующие утверждения.

{i} Если $I(\mathbf{x})$, $I(\mathbf{y})$ — любые два множества безразличия, то они либо не имеют общих точек, либо совпадают.

{ii} Если $L^{+}(\mathbf{x})$, $L^{+}(\mathbf{y})$ — любые два верхние лебеговы множества, то либо $L^{+}(\mathbf{x}) \subset L^{+}(\mathbf{y})$, либо $L^{+}(\mathbf{y}) \subset L^{+}(\mathbf{x})$. ⌟

[16] Надеемся, что читатель узнал в этом объекте кривую безразличия, известную ему из вводного курса микроэкономики.

Если отображение $L^+(\cdot)$ ставит в соответствие каждому набору из X некоторое подмножество X, и обладает свойством, указанным в пункте {ii} данной теоремы, то на его основе нетрудно построить неоклассические предпочтения по следующему правилу: $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \in L^+(\mathbf{y})$. При этом отношения $\succ$ и $\sim$ задаются в соответствии с (P1) и (P3), т. е. $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, если $\mathbf{y} \notin L^+(\mathbf{x})$, и $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, если $\mathbf{x} \in L^+(\mathbf{y})$ и $\mathbf{y} \in L^+(\mathbf{x})$. Такие предпочтения будут неоклассическими, поскольку отношение $\succcurlyeq$ будет полным и транзитивным.

Альтернативный подход к построению предпочтений на основе карты кривых безразличия состоит в том, чтобы рассматривать в качестве исходного строгое отношение предпочтения, заданное на множествах безразличия (обозначим его через $\succ^*$). Разные множества безразличия не пересекаются и в совокупности составляют множество X. При этом любые два множества безразличия — I и I' — либо находятся в отношении $I \succ^* I'$, либо находятся в отношении $I' \succ^* I$, либо совпадают. Тогда строгое отношение предпочтения $\succ$ на X можно задать следующим образом: $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}'$ тогда и только тогда, когда $I \succ^* I'$, где $\mathbf{x} \in I$, $\mathbf{x}' \in I'$.

В целом можно сказать, что подход, основанный на карте кривых безразличия, является лишь иным изложением обычного неоклассического подхода[17].

Как говорилось выше, для описания выбора индивидуума в теории выбора вводятся понятия ситуации выбора и правила выбора, определенного на множестве ситуаций выбора. Ситуация выбора — это некоторое непустое подмножество множества допустимых (физически) альтернатив X, с которым индивидуум сталкивается и из которого он может выбирать.

Определение 1.5

Пусть $\mathcal{A}$ — множество ситуаций выбора ($\mathcal{A} \subset 2^X$). Правило выбора (функция выбора) $C(\cdot)$ ставит в соответствие каждой ситуации выбора A из $\mathcal{A}$ (где $A \neq \varnothing$) множество $C(A)$ выбранных альтернатив, каждая из которых является элементом A, т. е. $C(A) \subset A$. $\lhd$

Для потребителя, имеющего неоклассические предпочтения, соответствующее правило выбора $C(A)$ естественно определить следующим образом.

---

[17] Исторически такой подход, пионером которого является В. Парето, был как раз первым ординалистским подходом к моделированию предпочтений (см. V. Pareto · *Manuel d'économie politique*, Paris: V. Giard et E. Brière, 1909).

Определение 1.6

Правило выбора задается на основе неоклассических предпочтений $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ следующими эквивалентными способами:

(i) $C(A) = C_{\succcurlyeq}(A) = \{\, \mathbf{x} \mid \forall \mathbf{y} \in A\ \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \,\}$;

(ii) $C(A) = C_{\succ}(A) = \{\, \mathbf{x} \mid \nexists \mathbf{y} \in A\colon \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \,\}$. $\triangleleft$

Другими словами, если из A выбрана альтернатива $\mathbf{x}$, то никакая другая альтернатива $\mathbf{y}$ из A не может быть лучше $\mathbf{x}$. То есть

$$\mathbf{x} \in C(A) \text{ и } \mathbf{y} \in A \Rightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}.$$

или

$$\mathbf{x} \in C(A) \text{ и } \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y} \notin A.$$

Отношения $\succ$, $\sim$ в некотором смысле можно рассматривать как правила выбора, заданные на парах альтернатив. Подразумевается, что если $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, то соответствующее правило выбора имеет вид $C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}\}$, а если $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, то правило выбора имеет вид $C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$. Неоклассическая теория выбора распространяет это правило на другие ситуации выбора, позволяя тем самым предсказывать выбор в очень многих ситуациях.

Задачи

1.12 Какое наименьшее число вопросов требуется задать индивидууму с неоклассическими предпочтениями, чтобы выявить его предпочтения на потребительских наборах, состоящих из пяти благ, каждое из которых может потребляться в количестве 0 или 1?

1.13 Пусть некто предложил в качестве аксиом строгого отношения предпочтения постулировать асимметричность и транзитивность. Какие проблемы на этом пути вы предвидите?

1.14 Пусть $\succcurlyeq$ — нестрогое отношение предпочтения (полное и транзитивное бинарное отношение), заданное на X, а $\succ$ ($\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y})$ и $\urcorner(\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x})$) и $\sim$ ($\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y})$ и $(y \succcurlyeq \mathbf{x})$) — строгое отношение предпочтения и отношение эквивалентности, построенные на его основе. Каким свойствам будут удовлетворять отношения $\succ$ и $\sim$?

1.15 Пусть $X = \mathbb{R}_+$ и $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow x \geqslant y$ (соответственно, $x \succ y \Leftrightarrow x > y$ и $x \sim y \Leftrightarrow x = y$).

(А) Покажите, что тройка бинарных отношений $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ представляет собой неоклассические предпочтения.

(B) Покажите, что для любых $x \in X$, $y \in X$ выполняется *ровно одно* из трех соотношений: $x \succ y$, $y \succ x$, $x \sim y$.

(C) Докажите, что для любых $x \in X$, $y \in X$ и $z \in X$, таких что $x \succcurlyeq y$ и $y \sim z$, выполнено $x \succcurlyeq z$. Какие еще свойства, аналогичные этому, выполнены для данных предпочтений?

(D) Объясните, почему в многомерном случае ($X = \mathbb{R}^n_+$ при $l \geqslant 2$) нельзя ввести неоклассические предпочтения аналогичным образом.

1.16 Докажите недоказанные в основном тексте пункты Теоремы 1.4.

1.17 Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — неоклассические предпочтения. Рассмотрим семейство множеств (кривых) безразличия, построенных на основе $\sim$. Как на основе порядка, задаваемого неоклассическими предпочтениями, корректно и непротиворечиво ввести порядок на этом семействе? Какими свойствами он обладает?

1.18 Докажите Теорему 1.5.

1.19 Изложите формально подход, основанный на «карте кривых безразличия», и продемонстрируйте его связь с неоклассическими предпочтениями.

1.20 Покажите, что если нестрогое и строгое отношения предпочтения связаны соотношением $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y},$ но не $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x})$, то построенные на их основе правила выбора (см. Определение 1.6) совпадут, т. е. $C_{\succ}(A) = C_{\succcurlyeq}(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}$.

1.5. Представление предпочтений функцией полезности

В этом параграфе мы рассмотрим условия, при выполнении которых можно получить числовой индикатор полезности — **функцию полезности** — с некоторыми наперед заданными свойствами. Под функцией полезности потребителя традиционно понимается некоторая вещественнозначная функция, упорядочивающая альтернативы из множества допустимых альтернатив X таким же образом, как и предпочтения[18]. Функция полезности является удобным

[18] В философии понятие полезности (пользы) популяризировал английский философ-утилитарист И. Бентам: «Под полезностью понимается то свойство предмета, по которому он имеет стремление приносить благодеяние, выгоду, удовольствие, добро или счастье (все это в настоящем случае сводится к одному), предупреждать вред, страдание, зло или несчастье той стороны, об интересе которой идет речь: если эта сторона есть целое общество, то счастье общества; если это отдельное лицо, то счастье этого отдельного лица.» (J. Bentham · *An*

инструментом анализа выбора потребителя, особенно в приложениях теории. Например, с ее помощью удобно изучать вопросы сравнительной статики: как изменяется потребительский выбор при изменении ситуации, в которой осуществляется выбор (цен, дохода, механизма формирования дохода и т. д.).

Определение 1.7

Будем говорить, что функция $u\colon X \to \mathbb{R}$ является функцией полезности, соответствующей предпочтениям $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ (другими словами, представляющей эти предпочтения), если для всякой пары потребительских наборов $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ выполнено тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$. $\triangleleft$

Замечание: Следует понимать, что если некоторые предпочтения могут быть представлены функцией полезности $u(\cdot)$, то данные предпочтения могут быть представлены также и суперпозицией $f(u(\cdot))$, где $f(\cdot)$ — некоторая возрастающая функция, определенная на множестве значений функции $u(\cdot)$ (см. задачу 1.28). То есть при наличии хотя бы одной функции, представляющей предпочтения потребителя, мы автоматически имеем бесконечное множество функций полезности, таким же точно образом упорядочивающих потребительские наборы, и соответственно эквивалентных с точки зрения описания потребительских предпочтений. Некоторые из этого бесконечного множества функций полезности могут быть более удобными для анализа, чем другие, например, обладать такими свойствами, как непрерывность, дифференцируемость, вогнутость, квазилинейность, сепарабельность и т. п. (см. далее).

В связи с приведенным определением естественно возникает вопрос о том, какие свойства предпочтений (и множества альтернатив, на которых заданы предпочтения) гарантируют существование функции полезности, представляющей эти предпочтения. Вначале приведем утверждение, которое дает нам *необходимое условие существования функции полезности.*

Заметим, прежде всего, что Определение 1.7 намеренно сформулировано таким образом, чтобы учесть возможность того, что

Introduction to the Principles of Morals and Legislation, London: T. Payne, 1789).

Модели потребительского выбора, основанные на функции полезности, ввели маржиналисты. Прежде всего здесь стоит упомянуть Г. Госсена (см. сноску 4 на с. 107) и Уильяма Джевонса (W. S. Jevons· *The Theory of Political Economy*, London: Macmillan, 1871).

предпочтения не являются неоклассическими. Для самых «ходовых» случаев неполной рациональности (см. Приложение 1.B) предпочтения можно описать, если задать нестрогое отношение предпочтения. При этом оно определяется как $\succcurlyeq \; = \; \succ \cup \sim$ («лучше или безразлично»). Если для каждой пары наборов $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполнено не более чем одно из соотношений $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$[19], то, зная $\succcurlyeq$, отношения $\succ$ и $\sim$ можно однозначно восстановить по следующим правилам:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \urcorner(\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}); \tag{P4}$$

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}, \text{ если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}. \tag{P5}$$

В нижеприведенной теореме будем исходить именно из этих допущений.

Теорема 1.6

Если существует функция полезности, представляющая предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$, заданные на X, то эти предпочтения являются неоклассическими. ⌟

Доказательство: Так как отношение $\geqslant$, заданное на множестве определения функции полезности (подмножестве $\mathbb{R}$), является полным (два числа $u(\mathbf{x})$ и $u(\mathbf{y})$ всегда можно сравнить) и транзитивным (из $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y}) \geqslant u(\mathbf{z})$ следует $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{z})$), то отношение $\succcurlyeq$ на X тоже полно и транзитивно. Кроме того, очевидно, что (P5) совпадает с (P3), а (P4) при полноте $\succcurlyeq$ эквивалентно (P1). Таким образом, согласно пункту {ii} Теоремы 1.3 рассматриваемые предпочтения являются неоклассическими. ■

Как нетрудно понять, если предпочтения являются неоклассическими, то для того, чтобы проверить, представляет ли их данная функция $u(\cdot)$, достаточно проверить, что для всякой пары альтернатив $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ верно тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$.

В дальнейшем в этой главе (за исключением некоторых задач к данному параграфу и Приложения 1.B, посвященного предпочтениям, отличным от неоклассических) мы будем рассматривать только неоклассические предпочтения и во многих случаях не будем оговаривать это особо, называя их просто предпочтениями.

[19] Естественно предположить также в качестве минимального требования рациональности, что нестрогое отношение предпочтения удовлетворяет условию рефлексивности ($\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}$).

Отметим, что когда множество альтернатив не более чем счетное (например, счетное), условие, что предпочтения являются неоклассическими, является *достаточным* для существования функции полезности. (Множество альтернатив будет счетным, например, когда все блага потребляются только в целых количествах.)

Теорема 1.7

Если множество альтернатив X не более чем счетно, то для любых неоклассических предпочтений на X существует представляющая их функция полезности. ⌟

Доказательство: Поскольку множество альтернатив X не более чем счетно, его можно представить в виде последовательности альтернатив $\mathbf{x}^i$, $i = 1, 2, \ldots$. Доказательство утверждения строится в виде правила нумерации альтернатив.

Пусть мы уже присвоили величину полезности первым N альтернативам из данной последовательности. Требуется присвоить величину полезности альтернативе $\mathbf{x}^{N+1}$. Рассмотрим два подмножества множества $A^N = \{\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^N\}$, а именно,

$$A_+^N = \left\{ \mathbf{x} \in A^N \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}^{N+1} \right\} \quad \text{и} \quad A_-^N = \left\{ \mathbf{x} \in A^N \mid \mathbf{x}^{N+1} \succcurlyeq \mathbf{x} \right\}.$$

Обозначим через $\bar{\mathbf{x}}$ такой элемент множества A_+^N, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \bar{\mathbf{x}}$ для всех $\mathbf{x} \in A_+^N$. В случае неединственности такого элемента берем любой из них. Аналогичным образом обозначим через $\tilde{\mathbf{x}}$ такой элемент множества A_-^N, что $\tilde{\mathbf{x}} \succcurlyeq \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \in A_-^N$. Существование $\bar{\mathbf{x}}$ (при непустом множестве A_+^N) и $\tilde{\mathbf{x}}$ (при непустом множестве A_-^N) следует из полноты и транзитивности отношения $\succcurlyeq$. Доказательство этого оставляется в качестве упражнения. (См. задачу 1.32, а также Теорему 1.15.)

Возможны следующие случаи:

1. $A_+^N = \varnothing$;
2. $A_-^N = \varnothing$;
3. $A_+^N \neq \varnothing$, $A_-^N \neq \varnothing$, $A_+^N \cap A_-^N = \varnothing$;
4. $A_+^N \neq \varnothing$, $A_-^N \neq \varnothing$, $A_+^N \cap A_-^N \neq \varnothing$.

В первом случае можно взять $u(\mathbf{x}^{N+1}) = u(\tilde{\mathbf{x}}) + 1$, во втором — $u(\mathbf{x}^{N+1}) = u(\bar{\mathbf{x}}) - 1$, в третьем — $u(\mathbf{x}^{N+1}) = (u(\bar{\mathbf{x}}) + u(\tilde{\mathbf{x}}))/2$. В четвертом случае берем $u(\mathbf{x}^{N+1}) = u(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ — произвольный элемент множества $A_+^N \cap A_-^N$ (по построению все элементы множества $A_+^N \cap A_-^N$ имеют одну и ту же полезность).

Чтобы закончить описание алгоритма, положим $A^1 = \{\mathbf{x}^1\}$ и $u(\mathbf{x}^1) = 0$. Заметим, что при таком построении функции полезности свойство

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$$

выполнено для всех $\mathbf{x} \in A^N$, $\mathbf{y} \in A^N$ при произвольном N (см. задачу 1.33). Поэтому построенная таким образом функция $u(\cdot)$ действительно является функцией полезности. ■

Если множество альтернатив не является счетным, то утверждение в общем случае неверно. Это показывает пример предпочтений на основе лексикографического упорядочения потребительских наборов из $\mathbb{R}^2_+$.

Пример 1.4

Лексикографическое упорядочение называется так, поскольку оно ранжирует наборы подобно правилу расположения слов в словаре. Это предпочтения индивидуума, который судит о наборе прежде всего по количеству первого блага в этом наборе. Если для двух наборов эти количества совпадают, их сравнение осуществляется на основе количества второго блага в этих наборах и т. д. В двумерном случае ($X = \mathbb{R}^2_+$) набор $\mathbf{x}$ лучше, чем набор $\mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \succ^L \mathbf{y}$), если $x_1 > y_1$ или же если $x_1 = y_1$ и $x_2 > y_2$. Такие предпочтения являются неоклассическими, поскольку отношение $\succ^L$ удовлетворяет свойствам асимметричности и отрицательной транзитивности. Однако функция полезности, которая бы их представляла, не существует. Докажем это.

Предположим противное. Пусть существует соответствующая этим предпочтениям функция полезности, т. е. такая функция (принимающая действительные значения), что

$$\mathbf{x} \succ^L \mathbf{y} \Leftrightarrow u_L(x_1, x_2) > u_L(y_1, y_2).$$

Сопоставим каждому неотрицательному *действительному* числу x_1 некоторое *рациональное* число $r(x_1)$, такое что $u_L(x_1, 2) > r(x_1) > u_L(x_1, 1)$. Такое число $r(x_1)$ найдется, поскольку множество рациональных чисел всюду плотно в множестве действительных чисел.

Если $x_1, x'_1 \geqslant 0$ — два числа, таких что $x_1 > x'_1$, то по определению лексикографического упорядочения имеем $u_L(x_1, 1) > u_L(x'_1, 2)$. Кроме того, $u_L(x_1, 2) > r(x_1) > u_L(x_1, 1)$ и $u_L(x'_1, 2) > r(x'_1) > u_L(x'_1, 1)$. В силу этих соотношений имеем

$$r(x_1) > u_L(x_1, 1) > u_L(x'_1, 2) > r(x'_1).$$

Тем самым из того, что $x_1 > x_1'$ имеем, что $r(x_1) > r(x_1')$. В силу этого $r(\cdot)$ является взаимно однозначной функцией. Область определения этой функции — неотрицательные *действительные* числа (это множество является континуумом), а область значения — некоторое подмножество множества *рациональных* чисел (т. е. счетное множество). Подобное невозможно, так как невозможно построить взаимно однозначное соответствие между счетным множеством и континуумом. Таким образом, мы пришли к противоречию и тем самым доказали, что не существует функции полезности, соответствующей лексикографическому упорядочению. ▲

Существует, однако, ряд случаев, для которых можно гарантировать существование функции полезности, даже если множество альтернатив не является конечным или счетным. Так, например, Жерар Дебре доказал, что функция полезности существует, если предпочтения непрерывны[20]. Существует несколько эквивалентных определений непрерывности. Дадим одно из таких определений, а затем укажем другие возможные определения.

Определение 1.8

Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ на $X \subset \mathbb{R}^l$, называются **непрерывными**, если для любых сходящихся последовательностей допустимых наборов $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$ ($\mathbf{x}_n \in X$, $\mathbf{y}_n \in X$), таких что $\mathbf{x}_n \succcurlyeq \mathbf{y}_n$ при всех n, пределы которых $\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$ и $\mathbf{y} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n$ являются допустимыми наборами ($\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$), выполнено $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. ◁

Следующая теорема указывает некоторые альтернативные определения непрерывности.

Теорема 1.8

Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — неоклассические предпочтения на $X \subset \mathbb{R}^l$ и пусть множестово X замкнуто. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

{i} Предпочтения непрерывны в смысле Определения 1.8;

{ii} Для любого $\mathbf{x} \in X$ как множество $L^+(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\}$, так и множество $L^-(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \,\}$ замкнуты (в $\mathbb{R}^l$).

[20] G. Debreu · Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in *Decision Processes*, R. M. Thrall et al. (ed.), New York: John Wiley & Sons, 1954.

{iii} Если $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$), то существуют ε-окрестности $V_\mathbf{x}$ и $V_\mathbf{y}$ точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно, такие что для любых $\mathbf{x}' \in V_\mathbf{x} \cap X$ и $\mathbf{y}' \in V_\mathbf{y} \cap X$ выполнено $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$. ┘

Доказательство: Доказательство проведем по схеме {i} ⇒ {ii} ⇒ {iii} ⇒ ⇒ {i}.

{i} ⇒ {ii} Возьмем произвольный набор $\mathbf{x} \in X$ и любую сходящуюся последовательность $\{\mathbf{y}_n\}$, лежащую в $L^+(\mathbf{x})$. Пусть $\mathbf{y}$ — предел этой последовательности. По предположению X замкнуто, и поэтому $\mathbf{y} \in X$. По определению $L^+(\mathbf{x})$ для любого n выполнено $\mathbf{y}_n \succcurlyeq \mathbf{x}$. Поскольку предпочтения непрерывны, отсюда следует, что $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$, т. е. $\mathbf{y} \in L^+(\mathbf{x})$. Замкнутость второго множества доказывается аналогично.

{ii} ⇒ {iii} Прежде всего заметим, что множество $L^+(\mathbf{x})$ замкнуто тогда, и только тогда, когда его дополнение в $\mathbb{R}^l$, т. е. множество $\mathbb{R}^l \setminus L^+(\mathbf{x})$, открыто. Аналогично $L^-(\mathbf{x})$ замкнуто тогда, и только тогда, когда $\mathbb{R}^l \setminus L^-(\mathbf{x})$ открыто.

Пусть $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Рассмотрим два возможных случая.

(a) Существует набор $\mathbf{z} \in X$, такой что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$. Тогда $\mathbf{x}$ лежит в открытом множестве $\mathbb{R}^l \setminus L^-(\mathbf{z})$, и поэтому существует ε-окрестность этого набора $V_\mathbf{x}$, лежащая в $\mathbb{R}^l \setminus L^-(\mathbf{z})$. Аналогично $\mathbf{y}$ лежит в $\mathbb{R}^l \setminus L^+(\mathbf{z})$ вместе с некоторой окрестностью $V_\mathbf{y}$.

(b) Не существует набора $\mathbf{z} \in X$, такого что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$. Набор $\mathbf{x}$ лежит в $\mathbb{R}^l \setminus L^-(\mathbf{y})$ вместе с некоторой окрестностью $V_\mathbf{x}$, а $\mathbf{y}$ лежит в $\mathbb{R}^l \setminus L^+(\mathbf{x})$ вместе с некоторой окрестностью $V_\mathbf{y}$.

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что в каждом из случаев (a), (b) для любых $\mathbf{x}' \in V_\mathbf{x} \cap X$ и $\mathbf{y}' \in V_\mathbf{y} \cap X$ выполнено $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$ (см. задачу 1.39).

{iii} ⇒ {i} Возьмем некоторые сходящиеся последовательности допустимых наборов $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$, такие что для всех n выполнено $\mathbf{x}_n \succcurlyeq \succcurlyeq \mathbf{y}_n$. Если бы $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$, $\mathbf{y} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{y}_n$, тогда для точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ нашлись бы окрестности $V_\mathbf{x}$ и $V_\mathbf{y}$, такие что для любых допустимых наборов $\mathbf{x}' \in V_\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}' \in V_\mathbf{y}$ выполнено $\mathbf{y}' \succ \mathbf{x}'$. Это означает, что при достаточно больших значениях n имеем $\mathbf{y}_n \succ \mathbf{x}_n$, что противоречит $\mathbf{x}_n \succcurlyeq \mathbf{y}_n$. Таким образом, получили, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. ■

Замечание: Мы исходим, из того, что X является подмножеством $\mathbb{R}^l$. Однако приведенные альтернативные определения фактически являются более общими и могут быть применены с определенными поправками к множествам допустимых потребительских наборов другой природы. Поправки состоят в том, чтобы рассматривать всё относительно X (как если бы точек вне X не существовало):

- для любого $\mathbf{x} \in X$ как множество $L^+(\mathbf{x})$, так и множество $L^-(\mathbf{x})$ замкнуты в X (аналог определения {ii} из Теоремы 1.8);
- для любого $\mathbf{x} \in X$ как множество $L^{++}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \,\}$, так и множество $L^{--}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \,\}$ открыты в X (очевидная переформулировка предыдущего определения);
- множество $\succ$ открыто в $X \times X$ (аналог определения {iii} из Теоремы 1.8);
- множество $\succcurlyeq$ замкнуто в $X \times X$ (очевидная переформулировка предыдущего определения и аналог исходного определения непрерывности).

Соответственно приведенное доказательство эквивалентности определений подходит практически без изменений.

Приведенные эквивалентные определения непрерывности позволяют выявить содержательный смысл понятия непрерывности: если мы явно предпочитаем один из наборов другому, то при рассмотрении достаточно близких наборов наша ранжировка сохранится. Кроме того, согласно доказанной теореме непрерывность предпочтений можно переформулировать как требование замкнутости верхнего и нижнего лебеговых множеств[21].

Пример 1.5 (продолжение Примера 1.4)

В случае лексикографических предпочтений на $\mathbb{R}^2_+$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+$ множества $L^+(\mathbf{x})$ и $L^-(\mathbf{x})$ не являются замкнутыми. Здесь $\succcurlyeq^L$ задается на основе $\succ^L$ обычным способом. Нетрудно увидеть, что

$$\mathbf{x} \succcurlyeq^L \mathbf{y} \Leftrightarrow ((x_1 > y_1) \text{ или } (x_1 = y_1 \text{ и } x_2 \geqslant y_2)).$$

На Рис. 1.2 показано одно из верхних лебеговых множеств для лексикографических предпочтений. Очевидно, что изображенное на рисунке множество $L^+(\mathbf{x})$ не является замкнутым, и, таким образом, лексикографические предпочтения не являются непрерывными. (То же самое имеет место и для $L^-(\mathbf{x})$.) ▲

Теперь сформулируем и частично докажем анонсированную выше теорему Дебре о существовании функции полезности, представляющей неоклассические предпочтения.

[21] Иногда свойство замкнутости верхнего (нижнего) лебегового множества называют полунепрерывностью предпочтений сверху (снизу).

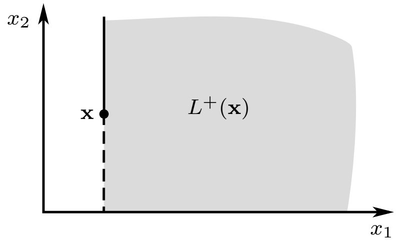


Рис. 1.2. *Верхнее лебегово множество для лексикографического упорядочения*

Теорема 1.9 (Дебре)

Для любых непрерывных неоклассических предпочтений на $X \subset \mathbb{R}^l$ существует представляющая их непрерывная функция полезности. ⌟

Доказательство: Как уже говорилось, мы не будем полностью доказывать этот результат. Докажем только часть его, а именно существование функции полезности. Доказательство непрерывности заинтересованный читатель может найти в оригинальной работе Т. Радера[22], чей вариант доказательства теоремы Дебре мы здесь приводим.

Рассмотрим систему шаров в $\mathbb{R}^l$ с *рациональными* центрами и радиусами. Очевидно, что эта система шаров составляет счетное множество. На основе этих шаров построим систему множеств $\{O_n\}_{n=1}^{+\infty}$ по следующему принципу: в эту систему попадают непустые пересечения исходной системы шаров с множеством X. Обозначим через $L^{--}(\mathbf{x})$ множество потребительских наборов из X, которые строго хуже $\mathbf{x}$, т. е. $L^{--}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \,\}$. Введем в рассмотрение множество индексов тех множеств O_n, все точки которых хуже $\mathbf{x}$:

$$N(\mathbf{x}) = \left\{\, n \;\middle|\; O_n \subset L^{--}(\mathbf{x}) \,\right\}.$$

Покажем, что $\bigcup_{n\in N(\mathbf{x})} O_n = L^{--}(\mathbf{x})$. Включение $\bigcup_{n\in N(\mathbf{x})} O_n \subset$ $\subset L^{--}(\mathbf{x})$ очевидно, так как для каждого $n \in N(\mathbf{x})$ выполнено $O_n \subset L^{--}(\mathbf{x})$.

[22] На самом деле построенная функция полезности не будет непрерывной. Чтобы получить непрерывную функцию, требуется еще «склеить» разрывы. См.: J. T. Rader. The Existence of a Utility Function to Represent Preferences, *Review of Economic Studies* **30** (1963): 229–232.

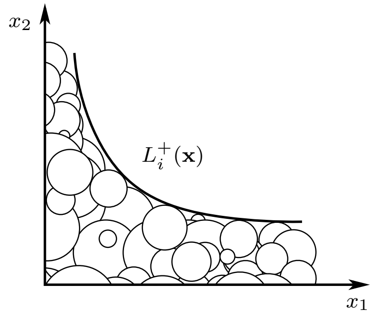


Рис. 1.3. *Построение функции полезности по схеме Радера*

Докажем обратное включение $L^{--}(\mathbf{x}) \subset \bigcup_{n\in N(\mathbf{x})} O_n$. Возьмем некоторую точку $\mathbf{y} \in L^{--}(\mathbf{x})$. Множество $\mathbb{R}^l \setminus L^+(\mathbf{x})$ открыто (так как $L^+(\mathbf{x})$ замкнуто), и ему принадлежит точка $\mathbf{y}$ (так как $L^{--}(\mathbf{x}) \subset \subset \mathbb{R}^l \setminus L^+(\mathbf{x})$). В это множество можно вписать шар с *рациональными* центром и радиусом, содержащий точку $\mathbf{y}$. Другими словами, существует множество O_n, которое содержит $\mathbf{y}$. Следовательно, $\mathbf{y} \in \bigcup_{n\in N(\mathbf{x})} O_n$.

Далее, каждой точке $\mathbf{x} \in X$ сопоставим величину

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n\in N(\mathbf{x})} \frac{1}{2^n}.$$

В случае, когда $N(\mathbf{x}) = \varnothing$, положим $u(\mathbf{x}) = 0$.

Покажем, что определенная таким образом функция $u(\cdot)$ представляет рассматриваемые предпочтения.

Пусть $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Тогда $L^{--}(\mathbf{y}) \subset L^{--}(\mathbf{x})$, откуда $N(\mathbf{y}) \subset N(\mathbf{x})$ и, следовательно, $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$.

Пусть теперь $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$. Предположим, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ не выполняется, т. е. $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. В этом случае $L^{--}(\mathbf{x}) \subset L^{--}(\mathbf{y})$, причем $L^{--}(\mathbf{x}) \neq L^{--}(\mathbf{y})$. Отсюда заключаем, что $N(\mathbf{x}) \subset N(\mathbf{y})$ и $N(\mathbf{x}) \neq N(\mathbf{y})$, а значит, по определению $u(\cdot)$ имеем $u(\mathbf{x}) < u(\mathbf{y})$. Получили противоречие с $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$. Таким образом, доказано, что $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$ влечет $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Тем самым построенная функция $u(\cdot)$ является функцией полезности для исходных предпочтений. ■

Данный вариант доказательства имеет достаточно ясную графическую интерпретацию (Рис. 1.3). Мы заполняем нижнее лебегово множество «шарами» с рациональными радиусами и центрами и берем в качестве функции полезности основанный на этих «шарах» измеритель размера нижнего лебегового множества.

Еще одно элегантное доказательство теоремы Дебре с выразительной графической интерпретацией можно построить при предположении о монотонности предпочтений. Это предположение, состоящее в том, что полезность индивидуума возрастает при росте количества потребляемых благ, т. е. что он предпочитает большее количество блага меньшему, представляется довольно естественным.

Определение 1.9

Предпочтения на X называются монотонными, если для всех $\mathbf{x} \in X$ и всех $\mathbf{y} \in X$ из $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. $\triangleleft$

Определение 1.10

Предпочтения называются строго монотонными, если из $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$ и $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ следует $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. $\triangleleft$

Докажем ослабленный вариант теоремы Дебре, предполагая строгую монотонность.

Теорема 1.10

Для любых непрерывных, строго монотонных предпочтений на $X = \mathbb{R}^l_+$ существует представляющая их непрерывная, строго монотонная функция полезности. $\lrcorner$

Доказательство: Требуемую функцию полезности найдем, сопоставив каждому $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+$ число $u(\mathbf{x})$, такое что $\mathbf{x} \sim u(\mathbf{x})\mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — l-мерный вектор, состоящий из единиц. (Идея доказательства проиллюстрирована на Рис. 1.4.)

Покажем, что такое число $u(\mathbf{x})$ всегда существует и единственно. Для этого мы должны найти для каждого набора $\mathbf{x}$ эквивалентный ему набор из множества $U = \{\, u\mathbb{1} \mid u \in \mathbb{R}_+ \,\}$, которое является лучом, выходящим из начала координат. Сопоставим рассматриваемому набору $\mathbf{x}$ множество чисел, соответствующих наборам из U, которые не хуже $\mathbf{x}$:

$$U^+(\mathbf{x}) = \left\{\, u \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; u\mathbb{1} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\right\},$$

и множество чисел, соответствующих наборам из U, которые не лучше набора $\mathbf{x}$:

$$U^-(\mathbf{x}) = \left\{\, u \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \mathbf{x} \succcurlyeq u\mathbb{1} \,\right\}.$$

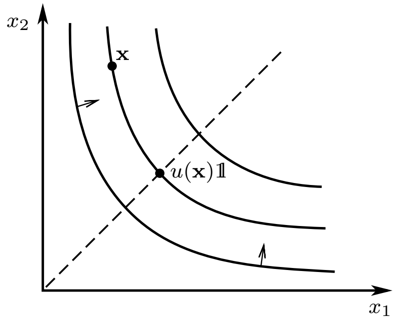


Рис. 1.4. *Построение функции полезности при предположении монотонности предпочтений*

Эти множества не пусты, так как из свойства строгой монотонности следует, что $0 \in U^-(\mathbf{x})$ и $\max_k\{x_k\} \in U^+(\mathbf{x})$.

Множество $U^+(\mathbf{x})$ лежит выше множества $U^-(\mathbf{x})$, поскольку из строгой монотонности следует, что для любых $u_1 \in U^-(\mathbf{x})$ и $u_2 \in \in U^+(\mathbf{x})$ выполнено $u_1 \leqslant u_2$.

Введем обозначения $u^+ = \inf U^+(\mathbf{x})$ и $u^- = \sup U^-(\mathbf{x})$. Эти величины u^+ и u^- конечны, так как множества $U^-(\mathbf{x})$ и $U^+(\mathbf{x})$ ограничены сверху и снизу соответственно. Из непрерывности предпочтений следует, что $u^+ \in U^+(\mathbf{x})$ и $u^- \in U^-(\mathbf{x})$. При этом $u^+ \geqslant u^-$. Покажем, что $u^+ = u^-$. Пусть это не так. Тогда существует число u' такое, что $u^- < u' < u^+$. При этом $u' \notin U^-(\mathbf{x})$ и $u' \notin U^+(\mathbf{x})$. Это невозможно, так как по свойству полноты нестрогого отношения предпочтения мы должны иметь либо $u'\mathbb{1} \succcurlyeq \mathbf{x}$, либо $u'\mathbb{1} \preccurlyeq \mathbf{x}$.

Полученная точка $u = u^+ = u^-$ удовлетворяет требуемому условию $\mathbf{x} \sim u\mathbb{1}$ и единственна.

Заданная таким образом функция $u(\mathbf{x})$ является функцией полезности. Пусть $\mathbf{x}_1 \succcurlyeq \mathbf{x}_2$. По построению $\mathbf{x}_1 \sim u(\mathbf{x}_1)\mathbb{1}$ и $\mathbf{x}_2 \sim u(\mathbf{x}_2)\mathbb{1}$. Значит, $\mathbf{x}_1 \succcurlyeq \mathbf{x}_2$ тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}_1)\mathbb{1} \succcurlyeq u(\mathbf{x}_2)\mathbb{1}$. Но по строгой монотонности предпочтений $u(\mathbf{x}_1)\mathbb{1} \succcurlyeq u(\mathbf{x}_2)\mathbb{1}$ тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}_1) \geqslant u(\mathbf{x}_2)$.

Функция полезности $u(\mathbf{x})$ является строго монотонной. Пусть $\mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Тогда из строгой монотонности предпочтений следует, что $\mathbf{x}_1 \succ \mathbf{x}_2$. Отсюда $u(\mathbf{x}_1)\mathbb{1} \succ u(\mathbf{x}_2)\mathbb{1}$ и $u(\mathbf{x}_1) > u(\mathbf{x}_2)$.

Докажем теперь непрерывность функции полезности $u(\cdot)$. Для этого рассмотрим последовательность допустимых наборов $\{\mathbf{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, такую что $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$. Нам надо показать, что $\lim_{n\to\infty} u(\mathbf{x}_n) = u(\mathbf{x})$.

Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$. Выберем $\underline{u}$ и $\bar{u}$ такие, что для любого вектора $\mathbf{y}$, такого что $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$, выполнено неравенство $\underline{u}\mathbb{1} \leqslant \mathbf{y} \leqslant \bar{u}\mathbb{1}$. (Например, можно взять $\underline{u} = \min_k x_k - \varepsilon$ и $\bar{u} = \max_k x_k + \varepsilon$.) При этом для любого допустимого набора $\mathbf{y}$, удовлетворяющего условию $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$, имеем $\underline{u} \leqslant u(\mathbf{y}) \leqslant \bar{u}$, поскольку по строгой монотонности предпочтений $\max\{\underline{u}, 0\}\mathbb{1} \preccurlyeq \mathbf{y} \preccurlyeq \bar{u}\mathbb{1}$, и $u(a\mathbb{1}) = a$ для всех $a \geqslant 0$. Найдется достаточно большое число N, такое что для последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ при $n \geqslant N$ выполнено $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon$. При этом $u(\mathbf{x}_n)$, начиная с номера N, попадает в интервал $[\underline{u}, \bar{u}]$.

Так как бесконечная последовательность $\{u(\mathbf{x}_n)\}$, начиная с номера N, находится в пределах компакта $[\underline{u}, \bar{u}]$, то она должна иметь точки сгущения. Мы хотим показать, что существует всего одна точка сгущения, и это точка $u(\mathbf{x})$.

Покажем, что любая сходящаяся подпоследовательность из последовательности $\{u(\mathbf{x}_n)\}$ сходится к одному и тому же числу $u(\mathbf{x})$. Предположим, что это не так и некоторая подпоследовательность $\{u(\mathbf{x}_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $u^* \neq u(\mathbf{x})$. Пусть, например, $u^* > u(\mathbf{x})$ (случай $u^* < u(\mathbf{x})$ анализируется схожим образом). Возьмем некоторое число $\hat{u}$, такое что $u^* > \hat{u} > u(\mathbf{x})$. По свойству строгой монотонности имеем, что $\hat{u}\mathbb{1} \succ u(\mathbf{x})\mathbb{1}$. Так как $\{u(\mathbf{x}_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к u^*, то существует M такое, что при $k \geqslant M$ выполнено $u(\mathbf{x}_{n_k}) > \hat{u}$. По определению функции полезности $\mathbf{x}_{n_k} \sim u(\mathbf{x}_{n_k})\mathbb{1}$ и, кроме того, по строгой монотонности $u(\mathbf{x}_{n_k})\mathbb{1} \succ \hat{u}\mathbb{1}$ (для всех $k \geqslant M$), т. е. $\mathbf{x}_{n_k} \sim u(\mathbf{x}_{n_k})\mathbb{1} \succ \hat{u}\mathbb{1}$. Так как предпочтения непрерывны, то $\mathbf{x} \succcurlyeq \hat{u}\mathbb{1}$, но $\mathbf{x} \sim u(\mathbf{x})\mathbb{1}$, поэтому $u(\mathbf{x})\mathbb{1} \succcurlyeq \hat{u}\mathbb{1}$. Однако выше было показано, что $\hat{u}\mathbb{1} \succ u(\mathbf{x})\mathbb{1}$. Получили противоречие и тем самым доказали непрерывность построенной функции полезности. ■

Как видно из приведенных выше вариантов теоремы о существовании функции полезности, требование непрерывности предпочтений достаточно сильное, так как оно обеспечивает не просто существование функции полезности, но существование *непрерывной* функции полезности. Между тем непрерывность функции полезности — это свойство, которое широко используется при анализе поведения потребителя. Оно, в частности, гарантирует[23] существование наилучшего потребительского набора в бюджетном множестве (если

[23] Здесь, конечно, подразумевается использование теоремы Вейерштрасса.

это множество «хорошо устроено»), т. е. корректность определения функции (отображения) спроса потребителя в большинстве задач, которые будут нас интересовать.

Замечание: Теоремы 1.9 и 1.10 говорят о том, что если предпочтения непрерывны, то существует представляющая их непрерывная функция полезности. Нетрудно доказать и обратное: если функция полезности, представляющая предпочтения, непрерывна, то предпочтения являются непрерывными (см. задачу 1.38)

Задачи

В нескольких следующих задачах не предполагается, что предпочтения являются неоклассическими (см. пояснения в тексте параграфа).

1.21 Алина Александровна Алексашенко предложила следующее определение функции полезности: «Будем называть $u\colon X \to \mathbb{R}$ функцией полезности, соответствующей предпочтениям $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$, если для всякой пары альтернатив $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{y} \in X$ соотношение $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ выполнено тогда и только тогда, когда $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$». Будет ли оно эквивалентно определению, приведенному в тексте? Ответ аргументируйте.

1.22 Пусть допустимое множество альтернатив состоит из четырех альтернатив: $X = \{a, b, c, d\}$. На этом множестве задано следующее нестрогое отношение предпочтения:

$$\succcurlyeq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,d),(b,d),(d,c),(b,a),(a,c),(b,c)\}.$$

Возможно ли построить функцию полезности, представляющую данные предпочтения? Если нет, то почему? Если да, то постройте ее.

1.23 Для каждой из частей Таблицы 1.1 рассмотрите изображенные предпочтения, предполагая, что $\succcurlyeq = \succ \cup \sim$. Ответьте на вопрос предыдущей задачи.

1.24 Пусть X состоит из l-мерных векторов с неотрицательными компонентами, а нестрогое отношение предпочтения задано следующим образом: $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, если все компоненты вектора $\mathbf{x}$ не меньше соответствующих компонент вектора $\mathbf{y}$. Существует ли функция полезности, представляющая эти предпочтения?

1.25 Рассмотрите следующие предпочтения, заданные на $\mathbb{R}^2_{++}$:

(A) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \geqslant 0$;

Таблица 1.1. *Данные к задаче 1.23*

	a	b	c
a	$\sim$	$\succ$	$\prec$
b	$\prec$	$\sim$	$\succ$
c	$\succ$	$\prec$	$\sim$

	a	b	c	d
a	$\sim$	$\prec$	$\prec$	$\prec$
b	$\succ$	$\sim$	$\succ$	$\succ$
c	$\succ$	$\prec$	$\sim$	$\sim$
d	$\succ$	$\prec$	$\sim$	$\sim$

(B) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} \geqslant \frac{x_2}{y_2}$;
(C) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant y_1 y_2$;
(D) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\} \geqslant 0$;
(E) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow \min\{x_1, x_2\} - \min\{y_1, y_2\} \geqslant 0$;
(F) $(x_1, x_2) \succcurlyeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 x_2 \geqslant \min\{y_1, y_2\}$.

Какие из них представимы функцией полезности? Попытайтесь записать такую функцию полезности в явном виде.

1.26 Одна из кривых безразличия для предпочтений на $X = \mathbb{R}^2_+$ описывается уравнением $x_1 x_2 = 1$. Другие кривые безразличия получаются из нее параллельным переносом в направлении $(1; 1)$. Предпочтения предполагаются монотонными. Найдите функцию полезности, соответствующую данным предпочтениям.

1.27 Кривые безразличия для предпочтений на $X = \mathbb{R}^2_+$ являются прямыми, проходящими через точку $(A, -B)$ $(A, B > 0)$. Предпочтения предполагаются монотонными по первому благу. Найдите функцию полезности, соответствующую данным предпочтениям.

1.28 Покажите, что суперпозиция возрастающей функции и функции полезности, представляющей некоторые предпочтения, также является функцией полезности, представляющей эти предпочтения. Приведите пример, показывающий, что требование возрастания не может быть ослаблено до неубывания.

1.29 Определите, какие из приведенных ниже функций могут подходить в качестве преобразования, о котором речь идет в предыдущей задаче, если областью значений исходной функции полезности является $\mathbb{R}_+$:

(A) $f(x) = x^2$; (B) $f(x) = x^3 + x$;
(C) $f(x) = \sqrt{x}$; (D) $f(x) = e^x$.

1.30 Докажите, что если $u(\cdot)$ и $\tilde{u}(\cdot)$ — две функции полезности, представляющие одни и те же предпочтения, то существует возрастающая функция $f(\cdot)$, такая что $\tilde{u}(\cdot)$ является суперпозицией $u(\cdot)$ и $f(\cdot)$.

1.31 Определите, для каких из нижеприведенных множеств X можно утверждать, что произвольные неоклассические предпочтения (не обязательно непрерывные), заданные на множестве X могут быть представлены некоторой функцией полезности:

(A) $X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l \mid x_i$ — целые числа $\}$;

(B) $X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \}$;

(C) $X = \mathbb{R}^l$;

(D) $X = \mathbb{R}^l_+$;

(E) $X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l \mid x_i$ — иррациональные числа $\}$;

(F) $X = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l \mid x_i = a\sqrt{2} + b\sqrt{3},\ a, b \in \mathbb{Q} \}$ (где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел).

1.32 Покажите, что если неоклассические предпочтения заданы на конечном множестве альтернатив, то в этом множестве существуют как наименьшая (наихудшая), так и наибольшая (наилучшая) альтернативы. (Этот факт был использован выше в доказательстве Теоремы 1.7.)

1.33 В Теореме 1.7 докажите, рассмотрев все возможные случаи, что построенная функция является функцией полезности.

1.34 Докажите, что если множество кривых безразличия для некоторых неоклассических предпочтений счетно, то существует функция полезности, представляющая эти предпочтения.

1.35 Пусть $X = X_1 \times X_2$, где $X_1 = \{1, 2, \ldots\}$, а X_2 — множество всех рациональных чисел между 0 и 1. Пусть на пáрах из X введено лексикографическое упорядочение. Докажите, что существует функция полезности, отвечающая этому упорядочению. Запишите ее *явную* формулу.

1.36 Борис Бенедиктович Бахвалин на основе полного, транзитивного и непрерывного нестрогого отношения предпочтения построил следующую функцию полезности:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 x_2, & \text{если } x_1 + x_2 \leqslant 1, \\ x_1^2 x_2 + 15, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Покажите, что эта функция не является непрерывной. Нет ли здесь противоречия с непрерывностью предпочтений? Можно ли на основе этих же предпочтений построить непрерывную функцию? Если да, то постройте ее, если нет, то поясните, почему это невозможно.

1.37 Продемонстрируйте, что лексикографические предпочтения на $\mathbb{R}^2_+$ не являются непрерывными, построив конкретные последовательности наборов $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$, которые противоречили бы Определению 1.8.

1.38 Покажите, что если функция полезности $u(\mathbf{x})$ непрерывна, то предпочтения, породившие эту функцию полезности, также являются непрерывными.

1.39 Закончите доказательство Теоремы 1.8, показав, что для построенных окрестностей $V_\mathbf{x}$ и $V_\mathbf{y}$, справедливо, что для любых $\mathbf{x}' \in \in V_\mathbf{x} \cap X$ и $\mathbf{y}' \in V_\mathbf{y} \cap X$ выполнено $\mathbf{x}' \succ \mathbf{y}'$.

1.40 Пусть на выпуклом множестве X заданы непрерывные предпочтения и пусть для наборов $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполнено $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Докажите, что найдется набор $\mathbf{z} \in X$, такой что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$.

1.41 Покажите, что функция полезности монотонна тогда и только тогда, когда монотонны представляемые ею предпочтения.

1.6. Свойства предпочтений и функции полезности

В предыдущем параграфе мы уже дали определение ряда важных свойств предпочтений, а именно непрерывности, монотонности и строгой монотонности[24]. При анализе конкретных микроэкономических задач часто возникает необходимость делать дополнительные предположения о предпочтениях или о функциях полезности. В данном параграфе мы обсудим наиболее часто используемые предположения о свойствах предпочтений и покажем их связь с соответствующими свойствами функции полезности, которая представляет эти предпочтения.

В ситуациях, когда предположение о строгой монотонности предпочтений выглядит ограничительным, обычно предполагается, что выполнено более слабое свойство — локальная ненасыщаемость. Выполнение этого свойства во многих случаях оказывается достаточным для доказательства тех свойств выбора, которые следуют из строгой монотонности предпочтений.

Определение 1.11

Предпочтения называются локально ненасыщаемыми, если для любого допустимого набора $\mathbf{x} \in X$ в любой его окрестности найдется другой допустимый набор $\hat{\mathbf{x}} \in X$, такой что $\hat{\mathbf{x}} \succ \mathbf{x}$. $\lhd$

[24] Можно также ввести свойство, промежуточное между монотонностью и строгой монотонностью. См. определение *полустрогой монотонности* в сноске 15 в гл. 4.

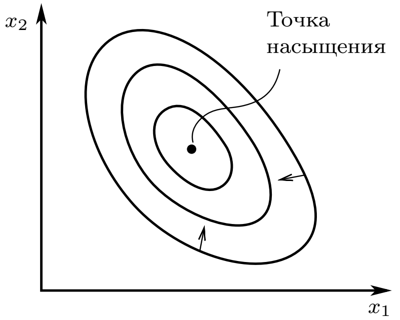


Рис. 1.5. *Предпочтения с точкой (глобального) насыщения*

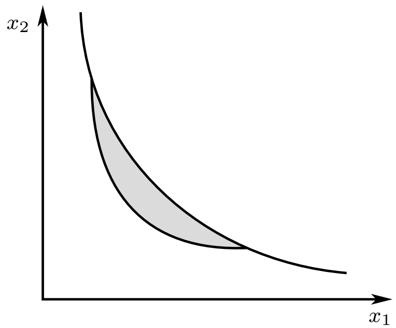


Рис. 1.6. *«Толстая» кривая безразличия*

Отметим, что выполнение свойства локальной ненасыщаемости запрещает два типа предпочтений:

- предпочтения с точкой насыщения, т. е. с потребительским набором, который является *наилучшим* выбором потребителя среди всех ближайших наборов (Рис. 1.5);
- предпочтени с «толстой» кривой безразличия, когда существует окрестность некоторого набора, в которой все наборы эквивалентны для потребителя (Рис. 1.6).

Связь между понятиями строгой монотонности и локальной ненасыщаемости достаточно очевидна. Если предпочтения являются строго монотонными, то они локально ненасыщаемы. Обратное, вообще говоря, неверно.

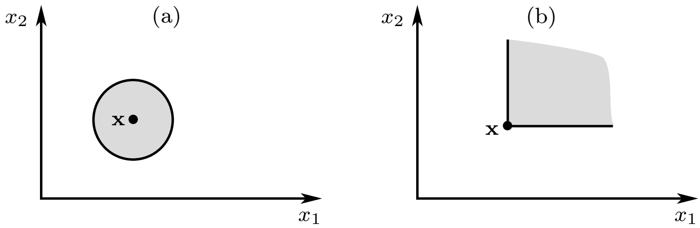


Рис. 1.7. *(a) Область, в которой могут находиться лучшие наборы при локальной ненасыщаемости предпочтений; (b) область, в которой находятся лучшие наборы при строгой монотонности предпочтений*

На Рис. 1.7 иллюстрируется различие между понятиями строгой монотонности и локальной ненасыщаемости предпочтений. Для заданной окрестности набора $\mathbf{x}$ закрашенная область на Рис. 1.7(a) показывает ту зону, в которой *могут находиться* лучшие наборы при выполнении свойства локальной ненасыщаемости. Аналогично закрашенная область на Рис. 1.7(b) показывает зону, где *находятся* лучшие наборы для предпочтений, обладающих свойством строгой монотонности.

Следующая группа свойств предпочтений, которую мы рассмотрим, важна для демонстрации «хороших» свойств функции выбора/спроса и доказательства существования равновесия. Здесь и далее будем предполагать, что множество X выпукло.

Определение 1.12

Предпочтения называются выпуклыми, если для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, таких что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и числа $\alpha \in [0;1]$, выполнено $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{y}$.

Предпочтения называются строго выпуклыми, если для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, таких что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, и числа $\alpha \in (0;1)$ выполнено $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y} \succ \mathbf{y}$. ◁

Как нетрудно понять, выпуклость предпочтений эквивалентна выпуклости верхнего лебегового множества $L^+(\mathbf{x})$ любого набора $\mathbf{x}$. На Рис. 1.8 как $\mathbf{x}'$, так и $\mathbf{x}''$ лежат в $L^+(\mathbf{x})$. Из выпуклости предпочтений следует, что весь отрезок между $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ лежит в $L^+(\mathbf{x})$.

Остановимся теперь на различии понятий строгой выпуклости от просто выпуклости. Ясно, что строго выпуклые предпочтения являются выпуклыми. Грубо говоря, различие между этими понятиями

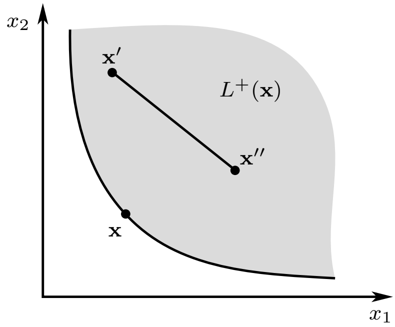


Рис. 1.8. *Выпуклые предпочтения*

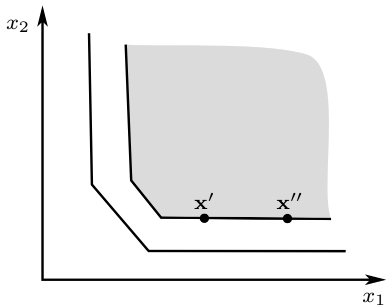


Рис. 1.9. *Пример выпуклых, но не строго выпуклых предпочтений*

состоит в том, что при выполнении свойства строгой выпуклости запрещена ситуация, когда граница верхнего лебегового множества (или, что то же самое, кривая безразличия) имеет «линейные» части. На Рис. 1.9 представлен пример выпуклых, но не строго выпуклых предпочтений. На рисунке наборы $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ лежат на одной и той же кривой безразличия. Наборы из внутренней части отрезка между $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ лежат на той же, а не на более высокой кривой безразличия.

С понятием выпуклости предпочтений в случае, когда они представимы функцией полезности, тесно связаны свойства вогнутости и квазивогнутости функции полезности. Оказывается, что для квазивогнутой функции полезности справедлив следующий результат. (Доказательство этого факта несложное и оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 1.53.)

Теорема 1.11

Функция полезности квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения выпуклы. ⌟

Любая вогнутая функция является квазивогнутой. Таким образом, если функция полезности вогнута, то представляемые ею предпочтения выпуклы. Обратное, вообще говоря, не всегда верно.

Квазивогнутые (и квазивыпуклые), а также вогнутые (выпуклые) функции играют особую роль в микроэкономике. В частности, эти свойства часто фигурируют в условиях, характеризующих решения оптимизационных задач[25]. При этом иногда бывает важно знать не только то, что функция квазивогнута, но и что она вогнута. Заметим, что проверять вогнутость функции, как правило, проще, чем квазивогнутость. При таких проверках часто используются следующие свойства вогнутых и квазивогнутых функций (см. Приложение B):

- сумма вогнутых функций вогнута;
- минимум вогнутых функций — вогнутая функция;
- суперпозиция вогнутой функции и вогнутой неубывающей функции — вогнутая функция;
- если функция вогнута по части аргументов, а по остальным является константой, то она вогнута;
- суперпозиция квазивогнутой функции и неубывающей функции — квазивогнутая функция; в частности, суперпозиция вогнутой функции и возрастающей функции — квазивогнутая функция;
- дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(\cdot)$, определенная на открытом множестве, вогнута тогда и только тогда, когда ее матрица вторых производных (матрица Гессе) $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \nabla^2 u(\mathbf{x})$ отрицательно полуопределена, т. е. $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} \leqslant 0$ при всех $\mathbf{z}$;
- если дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(\cdot)$, определенная на открытом множестве, квазивогнута, то ее матрица вторых производных $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ отрицательно полуопределена на $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$ (другими словами, для каждого $\mathbf{z}$, такого что $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$, выполнено $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} \leqslant 0$);

[25] Например, вогнутость целевой функции упрощает формулировку прямой теоремы Куна—Таккера (характеристика необходимых условий оптимальности) и является ключевой для справедливости обратной теоремы Куна—Таккера с дифференцируемостью.

- дважды дифференцируемая функция $u(\cdot)$, определенная на открытом множестве, является квазивогнутой, если ее матрица $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ вторых производных отрицательно определена на $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$ при всех $\mathbf{x}$, таких что $\nabla u(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ (другими словами, для каждого $\mathbf{z}$, такого что $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$, выполнено $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} < 0$) и отрицательно определена при всех $\mathbf{x}$, таких что $\nabla u(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Сто́ит отметить, что, вообще говоря, свойство вогнутости, в отличие от свойства квазивогнутости, не сохраняется при монотонно возрастающем преобразовании. (Требуется, чтобы преобразующая функция была вогнута.) Например, функция $\sqrt{x}$ вогнута, но после применения к ней монотонного преобразования y^4 (при $y \geqslant 0$) получается функция x^2, которая уже не является вогнутой, хотя и является квазивогнутой (при $x \geqslant 0$).

Достаточно обычна ситуация, когда из квазивогнутой функции можно сделать вогнутую с помощью монотонного преобразования (например, x^2 преобразованием $\sqrt[4]{y}$ превращается в $\sqrt{x}$). При решении типовых задач может сложиться впечатление, что каждая квазивогнутая функция переводится монотонно возрастающим преобразованием в вогнутую функцию и в этом смысле эти два класса функций эквивалентны. Однако это не так. Например, функции $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2^2} + x_2$ $(x_1, x_2 \geqslant 0)$ и $u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{2 - x_1}$ $(x_1 \in [0; 2)$, $x_2 \geqslant 0)$ квазивогнуты. Их линии уровня — непараллельные прямые линии. Можно показать, что эти функции не могут быть трансформированы в вогнутые функции возрастающим преобразованием. (См. схему доказательства для второй из указанных функций в задаче 1.54; см. также задачу 1.55.) Несмотря на это, имеет смысл при проверке квазивогнутости функции сначала попытаться преобразовать ее в вогнутую функцию.

Приведем пример, иллюстрирующий технику проверки вогнутости и квазивогнутости функций.

Пример 1.6

Рассмотрим функцию $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$, заданную на неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^2_+$. Покажем, что эта функция квазивогнута, но не вогнута.

Способ 1 (по определению). Возьмем два произвольных вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2_+$. Не теряя общности будем считать, что $y_1 y_2 \geqslant x_1 x_2$. Если компоненты вектора $\mathbf{x}$ не равны нулю, то

$$\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} \geqslant 2\sqrt{\frac{y_1}{x_1}\frac{y_2}{x_2}} \geqslant 2,$$

или $x_1y_2 + x_2y_1 \geqslant 2x_1x_2$. Справедливость этого неравенства при $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ очевидна. С учетом этого неравенства для любого $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ получим

$$\begin{aligned}
&(\alpha x_1 + (1-\alpha)y_1)(\alpha x_2 + (1-\alpha)y_2) = \\
&\qquad = \alpha^2 x_1x_2 + (1-\alpha)^2 y_1y_2 + \alpha(1-\alpha)x_1y_2 + \alpha(1-\alpha)x_2y_1 \geqslant \\
&\qquad \geqslant (\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha))x_1x_2 = x_1x_2 = \min\{x_1x_2, y_1y_2\}.
\end{aligned}$$

Тем самым квазивогнутость функции x_1x_2 доказана.

Покажем теперь, что эта функция не является вогнутой. Пусть, например, $\mathbf{x} = (1;1)$, $\mathbf{y} = (2;2)$, и $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда $u(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}) = \frac{9}{4}$ и $\alpha u(\mathbf{x}) + (1-\alpha)u(\mathbf{y}) = \frac{5}{2}$. Так как $\frac{5}{2} > \frac{9}{4}$, то функция не является вогнутой.

Способ 2 (с использованием матрицы Гессе). Матрица $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ вторых частных производных функции $u(\mathbf{x}) = x_1x_2$ имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Однако данная матрица не является отрицательно полуопределенной. Например, для вектора $\mathbf{z}^\mathsf{T} = (1;1)$ имеем $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{z} = 2 > 0$. Таким образом, функция не является вогнутой.

Покажем, что она квазивогнута. Нетрудно увидеть, что $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{z} = 2z_1z_2$. Рассмотрим знак этой квадратичной формы при всех $\mathbf{z}$, таких что $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{z} = 0$, т. е. при всех $\mathbf{z}$, таких что $x_2z_1 + x_1z_2 = 0$. Умножив это равенство на z_1, получим $x_2(z_1)^2 + x_1z_1z_2 = 0$. На внутренности положительного ортанта имеем $\mathbf{z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{z} = 2z_1z_2 = -2\frac{x_2}{x_1}(z_1)^2 \leqslant 0$. Таким образом, доказали квазивогнутость функции $u(\mathbf{x}) = x_1x_2$ на $\mathbb{R}^2_{++}$.

Еще один способ проверки того, что функция $u(\mathbf{x}) = x_1x_2$ является квазивогнутой, состоит в том, чтобы найти преобразование, которое сделало бы ее вогнутой. Например, возрастающее преобразование $\ln(\cdot)$ переводит ее в вогнутую функцию. Действительно, полученная в результате преобразования функция $\ln(x_1) + \ln(x_2)$ вогнута на $\mathbb{R}^2_{++}$, поскольку является суммой вогнутых функций. Кроме того, как нетрудно убедиться, ее матрица Гессе, равная

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix},$$

является отрицательно определенной.

Конечно, преобразование $\ln(\cdot)$ нельзя применить к значениям функции $u(\mathbf{x})$ в точках, где $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$. В качестве упражнения читатель может проверить, что $\sqrt{\cdot}$ является подходящим преобразованием, дающим вогнутую функцию. ▲

Рассмотренные выше свойства выпуклости и строгой выпуклости предпочтений тесно связаны с понятием предельной нормы замены[26]. Напомним, что под **предельной нормой замены (замещения)** блага i благом j понимается величина

$$MRS^{i/j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i}{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_j}.$$

Покажем, что из выпуклости предпочтений следует закон неубывания предельной нормы замены. При этом будем предполагать, что предпочтения потребителя представимы непрерывно дифференцируемой квазивогнутой функцией полезности $u\colon \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$.

Содержательно норма замены равна тому количеству блага j, на которое необходимо увеличить потребление этого блага, чтобы компенсировать сокращение потребления блага i на единицу и обеспечить постоянство уровня полезности потребителя (при фиксированном количестве всех остальных благ). Если количество блага i изменяется на дифференциально малую величину dx_i, то для того чтобы потребитель остался на той же самой кривой безразличия $u(\mathbf{x}) = \bar{u}$, количество блага j, при условии что количество остальных благ остается неизменным, должно измениться на величину dx_j, такую что

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_j} dx_j = 0.$$

Возьмем некоторую кривую безразличия и зафиксируем количества всех благ, кроме i-го и j-го. Уравнение

$$u(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_l) = \bar{u}$$

[26] Возможно, что впервые связь между поведением предельной нормы замены и выпуклостью предпочтений было отмечена Джоном Хиксом и Роем Алленом: «Принцип убывающей предельной полезности должен... уступить место *возрастающей предельной норме замены*... Это условие выражается на диаграмме безразличия с помощью кривых безразличия, выгнутых по направлению к осям». См. J. R. Hicks and R. G. D. Allen • A Reconsideration of the Theory of Value: Part I, *Economica, New Series* **1** (1934): 52–76 (рус. пер. Дж. Р. Хикс и Р. Г. Д. Аллен • Пересмотр теории ценности, в кн. *Теория потребительского поведения и спроса*, В. М. Гальперин (ред.), СПб.: Экономическая школа, 1993: 117–141).

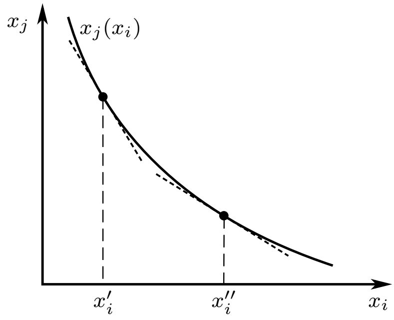


Рис. 1.10. *Неубывание предельной нормы замены для выпуклых предпочтений*

задает для данного уровня полезности $\bar{u}$ зависимость x_j от x_i как неявную функцию $x_j(x_i)$. Предельная норма замены равна наклону функции $x_j(x_i)$ со знаком минус:

$$-\frac{dx_j(x_i)}{dx_i} = \frac{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i}{\partial u(\mathbf{x})/\partial x_j} = MRS^{i/j}(\mathbf{x}).$$

Проверим, что закон неубывания предельной нормы замены выполняется, если функция полезности квазивогнута или, что то же самое, предпочтения выпуклы. Для этого докажем, что функция $x_j(x_i)$ выпукла.

Пусть x'_i и x''_i — некоторые количества i-го блага и пусть $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ — наборы, в которых $x_i = x'_i$, $x_j = x_j(x'_i)$ и $x_i = x''_i$, $x_j = x_j(x''_i)$ соответственно. Рассмотрим набор $\mathbf{x}^\alpha$, являющийся выпуклой комбинацией наборов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ ($\alpha \in [0;1]$):

$$\mathbf{x}^\alpha = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}'',$$

а также набор $\mathbf{x}^*$, в котором $x_i = x_i^\alpha = \alpha x'_i + (1-\alpha)x''_i$ и $x_j = x_j(x_i^\alpha)$. По определению функции $x_j(x_i)$ наборы $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}^*$ эквивалентны. Из выпуклости предпочтений следует, что $\mathbf{x}^\alpha \succcurlyeq \mathbf{x}' \sim \mathbf{x}''$, поэтому $\mathbf{x}^\alpha \succcurlyeq \mathbf{x}^*$. В наборах $\mathbf{x}^\alpha$ и $\mathbf{x}^*$ все блага, кроме j-го, содержатся в одинаковых количествах. Если предположить, что функция полезности возрастает по j-му благу, то должно быть $x_j^\alpha \geqslant x_j(x_i^\alpha)$ где $x_j^\alpha = \alpha x_j(x'_i) + (1-\alpha)x_j(x''_i)$. Этим мы доказали выпуклость функции $x_j(x_i)$.

Производная выпуклой функции не убывает (Рис. 1.10). Таким образом, в случае выпуклости предпочтений имеем выполнение

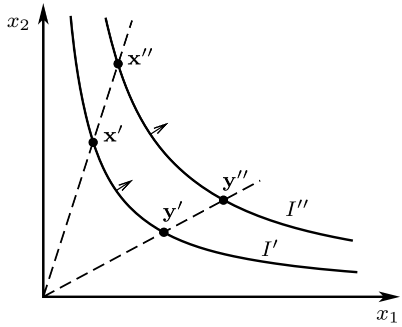


Рис. 1.11. *Монотонные гомотетичные предпочтения*

закона неубывания предельной нормы замены («убывания предельной полезности»).

Отметим, что в некотором смысле верно и обратное, т. е. выпуклость предпочтений эквивалентна неубыванию предельной нормы замены[27].

В приложениях экономической теории очень часто рассматриваются также дополнительные свойства предпочтений, которые налагают более сильные требования на функцию полезности. Так, например, в макроэкономике при рассмотрении поведения агрегированного потребителя часто предполагается выполнение свойства гомотетичности.

Определение 1.13

Предпочтения называются гомотетичными, если

* потребительский набор $t\mathbf{x}$ является допустимым для каждого положительного t тогда и только тогда, когда допустимым является набор $\mathbf{x}$.
* соотношение $t\mathbf{x} \sim t\mathbf{y}$ выполняется для каждого положительного t тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. $\triangleleft$

Гомотетичные предпочтения называют так, потому что геометрически кривые безразличия гомотетичны относительно начала координат. Понятие гомотетичных предпочтений проиллюстририровано

[27] Доказательство этого факта см. в K. J. Arrow and A. C. Enthoven · Quasi-Concave Programming, *Econometrica* **29** (1961): 779–800.

на Рис. 1.11. Наборы $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{y}''$, лежащие на кривой безразличия I'', получаются из наборов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, лежащих на кривой безразличия I', умножением на одно и то же положительное число t ($\mathbf{x}'' = t\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'' = t\mathbf{y}'$).

Опираясь на схему доказательства существования функции полезности, представляющей строго монотонные предпочтения (см. Теорему 1.10), легко показать, что для строго монотонных и гомотетичных предпочтений существует положительно однородная функция полезности, представляющая эти предпочтения. Особенностью положительно однородной функции полезности является то, что предельная норма замены для любой пары товаров остается неизменной на луче $t\mathbf{x}$. Это полезное свойство эквивалентно тому, что кривые Энгеля[28] являются лучами, выходящими из начала координат. Кроме того, при выполнении этого свойства, свойств локальной ненасыщаемости, непрерывности и выпуклости неоклассические предпочтения допускают представление *вогнутой* функцией полезности[29].

В теории отраслевых рынков и других областях микроэкономики важную роль играют предпочтения, обладающие свойством квазилинейности.

Определение 1.14

Предпочтения называются квазилинейными по l-му благу, если

* для каждого положительного t из $\mathbf{x} \in X$ следует $\mathbf{x} + t\mathbf{e}^l \in X$;
* для каждого положительного t и $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ из $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ следует $\mathbf{x} + t\mathbf{e}^l \sim \mathbf{y} + t\mathbf{e}^l$. ◁

В геометрической интерпретации квазилинейность предпочтений означает, что множества безразличия получаются друг из друга сдвигом вдоль оси x_l. (На Рис. 1.12 это свойство проиллюстрировано для $l = 2$.)

Предпочтения, обладающие данным свойством, допускают представление функцией полезности вида $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_{-l}) + ax_l$. Эта функциональная форма задает такую систему функций спроса, что спрос на первые $l - 1$ благо не зависит от дохода, и потому для этих благ полностью отсутствует эффект дохода. Данное свойство оказывается

---

[28] См. Определение 2.6 на с. 149.

[29] Подробнее см. J. T. Rader. *Theory of Microeconomics*, New York: Academic Press, 1972, с. 166—167.

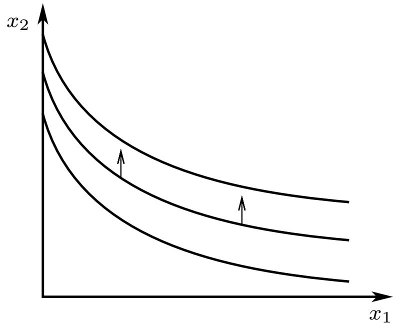


Рис. 1.12. *Квазилинейные предпочтения*

полезным при обсуждении агрегирования предпочтений и при изучении того, как влияют изменения параметров модели (например, цен и доходов) на благосостояние потребителя.

Наконец, в макроэкономике обычно рассматриваются аддитивно-сепарабельные функции полезности, т. е. функции полезности вида $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x_i)$. Если предпочтения потребителя описываются функцией такого вида, то они обладают следующим очевидным свойством: Рассмотрим произвольную группу благ N ($N \subset \{1, \ldots, l\}$), а все остальные блага обозначим через $-N$; при этом ранжировка потребительских наборов $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{-N})$ и $\mathbf{x}' = (\mathbf{x}'_N, \mathbf{x}_{-N})$ не зависит от значения $\mathbf{x}_{-N}$. Данное соображение мотивирует определение сепарабельности предпочтений.

Определение 1.15

Предпочтения называются сепарабельными (строго сепарабельными), если они удовлетворяют следующим условиям:

* множество допустимых потребительских наборов имеет вид $X = X_1 \times \cdots \times X_l$;
* если для $\mathbf{x}_N \in X_N$, $\mathbf{x}'_N \in X_N$ и $\mathbf{x}_{-N} \in X_{-N}$ выполнено соотношение $(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{-N}) \succcurlyeq (\mathbf{x}'_N, \mathbf{x}_{-N})$, то подобное же соотношение $(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}'_{-N}) \succcurlyeq (\mathbf{x}'_N, \mathbf{x}'_{-N})$ выполнено для всех $\mathbf{x}'_{-N} \in X_{-N}$, где N — произвольное подмножество множества благ, $X_N = \bigtimes_{i \in N} X_i$ и $X_{-N} = \bigtimes_{i \in -N} X_i$. $\triangleleft$

Известно, что непрерывные предпочтения сепарабельны тогда и только тогда, когда они могут быть представлены непрерывной аддитивно-сепарабельной функцией полезности[30]. Из свойств сепарабельных предпочтений отметим, во-первых, что для них предельная норма замены зависит только от количества двух рассматриваемых благ, во-вторых, что если все элементарные функции $u_i(\cdot)$ являются вогнутыми, то и в целом функция полезности является вогнутой. Кроме того, данный тип предпочтений позволяет гарантировать отсутствие товаров Гиффена и другие полезные свойства функции спроса.

Задачи

1.42 (A) «…выберем $\mathbf{x}^1 \sim \mathbf{x}^2$. Точка $\mathbf{x}^1$ представляет набор, содержащий „экстремально большую“ долю блага x_1 по сравнению с набором $\mathbf{x}^2$. Набор $\mathbf{x}^2$, наоборот, содержит экстремально большую долю другого блага, x_2, по сравнению с набором $\mathbf{x}^1$. Хотя каждый из наборов содержит относительно высокую долю одного из благ по сравнению с другим набором, для потребителя эти наборы равнозначны. При этом любая выпуклая комбинация $\mathbf{x}^1$ and $\mathbf{x}^2$, такая как $\mathbf{x}^t$, будет являться набором, содержащим более „сбалансированное“ сочетание x_1 и x_2, чем каждый из „экстремальных“ наборов $\mathbf{x}^1$ или $\mathbf{x}^2$»[31].

(B) «Условие выпуклости… чрезвычайно важно и более ограничительно. Оно означает, что если каждый из двух векторов $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ предпочитается третьему вектору $\mathbf{x}$, то любая их „смесь“ $\alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}''$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ также считается лучше $\mathbf{x}$. Вполне вероятно, что вы любите виноградный и томатный соки больше яблочного, но это вовсе не означает, что вы предпочтете выпить вместо стакана яблочного стакан смеси из виноградного и томатного соков. Однако в теоретических рассуждениях обычно рассматривают потребление за более длительный промежуток времени, например за год. Тогда выпуклость предпочтений в приведенном выше примере означает, что если вы предпочитаете виноградный и томатный соки яблочному, то вы готовы также пить часть года первый из них, а оставшуюся часть — второй вместо яблочного круглый год. Такое допущение

[30] Подробнее о сепарабельности предпочтений см. A. P. Barten and V. Bohm. Consumer Theory, in *Handbook of Mathematical Economics*, vol. II, K. J. Arrow and M. D. Intrilligator (ed.), North Holland, 1982, с. 392—394, и содержащиеся там ссылки.

[31] G. A. Jehle and P. J. Reny. *Advanced Microeconomic Theory*, Addison-Wesley, 1998, с. 118.

вполне правдоподобно, хотя возможны и возражения. Одно из них состоит в том, что предпочтение зависит от способа чередования напитков в течение года. Другое, быть может, более существенное, относится к самому методу описания поведения: мои предпочтения могут меняться в зависимости от многих причин, например от самочувствия, так что говорить о предпочтении одного потребительского набора другому не имеет смысла»[32].

Прокомментируйте эти цитаты. Согласны ли вы с содержащимися в них утверждениями? Если нет, то почему?

1.43 Покажите, что строго монотонные предпочтения локально ненасыщаемы. Приведите пример монотонных предпочтений, не обладающих свойством локальной ненасыщаемости.

1.44 Приведите пример выпуклых локально ненасыщаемых предпочтений, которые не обладают свойством монотонности.

1.45 Покажите, что строго выпуклые монотонные предпочтения локально ненасыщаемы.

1.46 Покажите, что если непрерывные предпочтения заданы на компактном множестве X, то они не могут обладать свойством локальной ненасыщаемости.

1.47 Рассмотрите монотонные предпочтения, которые удовлетворяют следующему свойству: существует по крайней мере одно благо, большее количество которого всегда предпочитается меньшему. Дайте формальное определение таких предпочтений. Как это свойство соотносится со строгой монотонностью? Покажите, что такие предпочтения являются локально ненасыщаемыми.

1.48 Покажите, что предпочтения потребителя выпуклы тогда и только тогда, когда выпукло любое верхнее лебегово множество $L^{+}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\}$.

1.49 Приведите пример непрерывной квазивогнутой функции полезности, не являющейся монотонной.

1.50 Покажите, что если функция полезности строго вогнута, то представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

1.51 Покажите, что функция полезности строго квазивогнута тогда и только тогда, когда представляемые ею предпочтения строго выпуклы.

---

[32] В. М. Полтерович. *Экономическое равновесие и хозяйственный механизм*, М.: Наука, 1990, с. 10.

1.52 Покажите, что если дважды непрерывно дифференцируемая функция полезности строго вогнута, то для этой функции выполняется закон Госсена об убывании предельной полезности. Верно ли утверждение о том, что из закона Госсена не следует выпуклость предпочтений?

1.53 Докажите Теорему 1.11.

1.54 (A) Покажите, что функция полезности $u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{2-x_1}$ $(x_1 \in [0; 2),\ x_2 \geqslant 0)$ соответствует непрерывным, локально ненасыщаемым, монотонным и выпуклым предпочтениям.

(B) Предположите, что рассматриваемые предпочтения можно описать вогнутой функцией полезности, другими словами, что существует возрастающая функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, такая что функция $\tilde{u}(x_1, x_2) = f\left(\frac{x_2}{2-x_1}\right)$ является вогнутой. Пользуясь тем, что точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot 3^{k-1}}\right)$, где $k \geqslant 1$, лежит посередине между точками $(0; 1)$ и $\left(1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^{k-1}}\right)$, а также выпуклостью функции $\tilde{u}(\cdot)$, покажите, что $a(k) \geqslant 0$, где

$$a(k) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^k}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^{k-1}}\right).$$

(C) Пользуясь тем, что $\sum_{k=1}^{n} \frac{a(k)}{2^{n-k}} \geqslant 0$, покажите при тех же предположениях, что

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2^n}\left(f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

(D) Пользуясь тем, что точка $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $(1; 0)$ и $\left(1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right)$, покажите при тех же предположениях, что

$$f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant \frac{1}{3^n}\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right).$$

(E) Сопоставьте неравенства, полученные в пунктах (C) и (D), убедитесь, что предположение пункта (B) не может быть верным, т. е. данные предпочтения не представимы вогнутой функцией полезности.

1.55 Рассмотрите следующие две функции полезности (с $X = \mathbb{R}_+$ и $X = \mathbb{R}_+^2$ соответственно):

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 1, \\ 1, & x \in [1; 2], \\ x - 1, & x \geqslant 2 \end{cases}$$

и

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & x_1 x_2 < 1 \text{ или } (x_1 x_2 = 1 \text{ и } x_1 < 1), \\ x_1 x_2 + 1, & x_1 x_2 > 1 \text{ или } (x_1 x_2 = 1 \text{ и } x_1 \geqslant 1). \end{cases}$$

(А) Покажите, что задаваемые этими функциями предпочтения являются выпуклыми. Какими еще свойствами обладают (или не обладают) эти предпочтения?

(В) Докажите, что данные предпочтения нельзя представить вогнутой функцией полезности.

1.56 Покажите, что предпочтения, задаваемые положительно однородной (первой степени) функцией полезности, являются гомотетичными.

1.57 Покажите, что предпочтения, задаваемые квазилинейной функцией полезности, являются квазилинейными.

1.58 Покажите, что предпочтения, задаваемые аддитивно-сепарабельной функцией полезности, являются сепарабельными.

1.59 Покажите, что непрерывные гомотетичные предпочтения представимы однородной функцией полезности.

1.60 Известно, что непрерывные и гомотетичные предпочтения на $\mathbb{R}_+^n$ представимы аддитивно-сепарабельной функцией полезности (т. е. $u(\mathbf{x}) = \sum u_i(x_i)$). Покажите, что функция вида $u(\mathbf{x}) = \sum a_i x_i^\rho$ — единственная (с точностью до монотонно возрастающего преобразования) функция, удовлетворяющая этим требованиям. Каковы ограничения на параметры a_i и ρ в случае, если, кроме того, предпочтения обладают свойством строгой монотонности? Докажите, что функция полезности (CES-функция)

$$u^*(\mathbf{x}) = \left(\sum \alpha_i x_i^\rho\right)^{1/\rho},$$

где $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, соответствует тем же предпочтениям, что и $u(\mathbf{x}) = \sum a_i x_i^\rho$[33].

1.61 Покажите, что функция полезности

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\sum \alpha_i x_i^\rho\Big)^{1/\rho}$$

(предельный случай CES-функции) представляет те же предпочтения, что и функция Кобба—Дугласа.

1.62 Покажите, что функция полезности

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to -\infty}\Big(\sum \alpha_i x_i^\rho\Big)^{1/\rho}$$

(предельный случай CES-функции) представляет те же предпочтения, что и функция $\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

1.63 Используя полученные в предыдущих задачах результаты, найдите в явной форме функции, представляющие те же предпочтения, что и функции

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to 0}\Big(\sum (\alpha_i x_i)^\rho\Big)^{1/\rho}$$

и

$$u(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to -\infty}\Big(\sum (\alpha_i x_i)^\rho\Big)^{1/\rho}.$$

1.64 Пусть предпочтения представимы дифференцируемой функцией $u(\mathbf{x})$. Покажите, что предельная норма замены инвариантна относительно возрастающего преобразования функции полезности. Как связаны $MRS^{i/j}(\mathbf{x})$ и $MRS^{j/i}(\mathbf{x})$?

1.65 В случае двух товаров покажите, что дважды непрерывно дифференцируемая функция полезности аддитивно-сепарабельна (имеет вид $u(\mathbf{x}) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$) тогда и только тогда, когда

$$MRS^{1/2}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial^2 MRS^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial MRS^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial MRS^{1/2}(\mathbf{x})}{\partial x_2}.$$

1.66 Функция полезности аддитивно-сепарабельна: $u(\mathbf{x}) = \sum u_i(x_i)$, причем каждая из элементарных функций $u_i(\cdot)$ вогнута. Покажите, что соответствующие предпочтения являются выпуклыми.

[33] Функция полезности, которой посвящено данное упражнение, имеет специальное название — **функция с постоянной эластичностью замены** или CES-функция (*constant elasticity of substitution*). Впервые в контексте микроэкономической теории она была рассмотрена в работе K. J. Arrow, H. B. Chenery, B. S. Minhas, and R. M. Solow• Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency, *Review of Economics and Statistics* **43** (1961): 225–250.

1.67 Пусть выпуклые неоклассические предпочтения, заданные на $\mathbb{R}^2_+$, представляются непрерывной аддитивно-сепарабельной функцией вида $u(\mathbf{x}) = v(x_1) + v(x_2)$. Покажите, что функция $v(\cdot)$ вогнута. (*Указание:* Покажите сначала, что

$$v\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \geqslant \frac{1}{2}(v(x) + v(y)).$$

Далее покажите по индукции, что для любых натуральных m и n, таких что $m < 2^n$, справедливо соотношение

$$v\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)y\right) \geqslant \frac{m}{2^n}v(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)v(y),$$

и воспользуйтесь непрерывностью.)

1.68 Укажите, какими свойствами (монотонность, строгая монотонность, локальная ненасыщаемость, выпуклость, строгая выпуклость, гомотетичность, квазилинейность, сепарабельность) обладают предпочтения на $\mathbb{R}^2_+$, представимые следующими функциями полезности:

(A) $u(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$; (B) $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;
(C) $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + x_2$; (D) $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$;
(E) $u(\mathbf{x}) = \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$; (F) $u(\mathbf{x}) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$;
(G) $u(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$; (H) $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$;
(I) $u(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\}$;
(J) $u(\mathbf{x}) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$;
(K) $u(\mathbf{x}) = 28x_1 + 28x_2 - 2x_1^2 - 3x_1 x_2 - 2x_2^2$;
(L) $u(\mathbf{x}) = \ln(x_1 - 1) - 2\ln(2 - x_2)$.

Какие из этих функций являются вогнутыми? какие квазивогнутыми? Для каждой из этих функций постройте эскизы кривых безразличия.

Приложение 1.A. Связь выбора и предпочтений. Выявленные предпочтения

Вернемся теперь от рассмотрения потребителя и его функции полезности к общей теории выбора.

Обычно в микроэкономике описание предпочтений с помощью бинарных отношений используется в качестве отправной точки анализа выбора потребителя. В то же время другой подход, отправной точкой которого является непосредственно выбор индивидуума, может показаться более удачным, поскольку мы можем наблюдать сам выбор индивидуума, но не то, как он упорядочивает альтернативы. Однако существуют веские причины для сложившейся в микроэкономике традиции.

Во-первых, как и бинарные отношения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$, полная функция выбора ненаблюдаема, т. е. является точно такой же умозрительной конструкцией. Наблюдаться могут только отдельные случаи выбора, что не дает возможности предсказывать поведение индивидуума в произвольной ситуации выбора. Кроме того, по конечному числу наблюдений за выбором можно построить объясняющие их неоклассические предпочтения (если только выполнено одно естественное предположение). Этому вопросу посвящен первый пункт данного приложения.

Во-вторых, в некотором достаточно широком классе случаев подход, основанный на функции выбора, полностью эквивалентен подходу, основанному на бинарных отношениях, в том смысле, что возможно по известной функции выбора построить неоклассические предпочтения, которые порождают этот выбор. Для этого надо наложить на функцию выбора и множество ситуаций выбора определенные ограничения. (Об этом речь идет во втором пункте данного приложения.) Если же не накладывать таких ограничений, то подход, основанный на функции выбора, становится бессодержательным и не позволяет построить такую же богатую теорию, как традиционный подход, основанный на бинарных отношениях.

Заметим однако, что хотя, как правило, выбор не используют в качестве отправной точки, но во многих моделях можно «забыть», что в основе выбора лежат неоклассические предпочтения и соответствующая функция полезности. Так, потребительский спрос фактически представляет собой функцию выбора, но он часто рассматривается сам по себе, без ссылок на породившие его предпочтения.

1.A.1. Рационализация наблюдаемого выбора

Пусть даны наблюдения в виде набора ситуаций выбора и альтернатив, которые были выбраны:

$$\{(A^1, \mathbf{x}^1), (A^2, \mathbf{x}^2), \ldots, (A^N, \mathbf{x}^N)\},$$

где предполагается, что $\mathbf{x}^i \in C(A^i)$ $(i = 1, \ldots, N)$ для некоторой функции выбора $C(\cdot)$. Рассмотрим вопрос о том, возможно ли по этим данным подобрать неоклассические предпочтения, которые бы им не противоречили, другими словами, **рационализовать** наблюдаемый выбор.

Упрощенное определение рационализации состоит в следующем.

> Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ рационализуют выбор $\{(A^1, \mathbf{x}^1), \ldots, (A^N, \mathbf{x}^N)\}$, если для всех наблюдаемых выборов $(A^i, \mathbf{x}^i)$ из того, что $\mathbf{x} \in A^i$, следует, что $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}$.

Однако при анализе рационализации обычно на основе имеющихся наблюдений делают дополнительные выводы, исходя из того, что ситуации выбора A^i и предпочтения обладают определенными свойствами. А именно, в определенных случаях делается вывод, что альтернатива $\mathbf{x}$ *не могла быть выбрана в ситуации выбора* A^i, несмотря на то, что она допустима. Если рассматривается выбор потребителя и A^i — бюджетное множество потребителя, то основанием для подобных выводов могут служить следующие рассуждения.

> Если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы и $\mathbf{x}$ лежит внутри области, задаваемой бюджетным ограничением A^i, то альтернатива $\mathbf{x}$ хуже для потребителя, чем альтернатива $\mathbf{x}^i$, и, следовательно, не может быть выбрана в данной ситуации ($\mathbf{x} \notin C(A^i)$).

> Предпочтения потребителя и бюджетное ограничение A^i таковы, что $\mathbf{x}^i$ — единственный возможный выбор. Другими словами, $\mathbf{x} \notin C(A^i)$ для всех альтернатив $\mathbf{x} \in A^i$, отличных от $\mathbf{x}^i$.

Смысл этих рассуждений будет ясен из материала гл. 2. Пока же для нас важно только то, что для некоторых альтернатив $\mathbf{x} \in A^i$ можно сделать вывод, что $\mathbf{x} \notin C(A^i)$[34]. В дальнейшем мы будем всюду предполагать, не оговаривая это особо, что такого рода сведения содержатся в рассматриваемых данных о выборе. Наличие такой дополнительной информации заставляет переформулировать определение рационализации.

---

[34] Если бы таких сведений не было, то задача рационализации стала бы неинтересной, поскольку достаточно было бы положить, что все альтернативы из X эквивалентны.

Определение 1.16

Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ рационализуют выбор $\{(A^1, \mathbf{x}^1), \ldots, (A^N, \mathbf{x}^N)\}$, если

* для всех наблюдаемых выборов $(A^i, \mathbf{x}^i)$ из того, что $\mathbf{x} \in A^i$ следует, что $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}$;
* для всех наблюдаемых выборов $(A^i, \mathbf{x}^i)$ из того, что $\mathbf{x} \in A^i$ и $\mathbf{x} \notin C(A^i)$ следует, что $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}$. $\lhd$

Посмотрим, какие выводы можно сделать об отношениях между альтернативами $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^N$ по имеющимся данным.

В соответствии с вышесказанным для любой пары альтернатив $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{x}^j$, таких что $\mathbf{x}^j \in A^i$, должно быть выполнено $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j$. (Так как в ситуации A^i выбрана альтернатива $\mathbf{x}^i$, а альтернатива $\mathbf{x}^j$ была при этом доступна, то $\mathbf{x}^j$ не лучше $\mathbf{x}^i$.) В подобном случае принято говорить, что $\mathbf{x}^j$ *непосредственно* выявленно не лучше $\mathbf{x}^i$.

Далее, если по цепочке для альтернатив $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k, \ldots, \mathbf{x}^q, \mathbf{x}^r$ выполнена цепочка соотношений $\mathbf{x}^j \in A^i$, $\mathbf{x}^k \in A^j$, $\ldots$ $\mathbf{x}^r \in A^q$, то $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j$, $\mathbf{x}^j \succcurlyeq \mathbf{x}^k$, $\ldots$ $\mathbf{x}^q \succcurlyeq \mathbf{x}^r$, т. е. каждая альтернатива не лучше предыдущей, откуда по транзитивности $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^r$. В этом случае говорят, что $\mathbf{x}^i$ *косвенным образом* выявленно не хуже, чем $\mathbf{x}^r$. Мы будем обозначать этот факт следующим образом: $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^r$.

Аналогично для любой пары альтернатив $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{x}^j$ из наблюдаемых данных, таких что $\mathbf{x}^j \in A^i$ и $\mathbf{x}^j \notin C(A^i)$, должно быть выполнено $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$. (Так как в ситуации A^i выбрана альтернатива $\mathbf{x}^i$, а альтернатива $\mathbf{x}^j$ была при этом доступна, но заведомо не могла быть выбрана, то $\mathbf{x}^j$ хуже $\mathbf{x}^i$.) В подобном случае принято говорить, что $\mathbf{x}^i$ *непосредственно* выявленно лучше, чем $\mathbf{x}^j$.

Если же по цепочке для альтернатив $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k, \ldots, \mathbf{x}^q, \mathbf{x}^r$ выполнены соотношения $\mathbf{x}^j \in A^i$, $\mathbf{x}^k \in A^j$, $\ldots$ $\mathbf{x}^r \in A^q$, причем одна из альтернатив не могла быть выбрана в предшествующей ситуации выбора (например, $\mathbf{x}^j \notin C(A^i)$), то $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j$, $\mathbf{x}^j \succcurlyeq \mathbf{x}^k$, $\ldots$ $\mathbf{x}^q \succcurlyeq \mathbf{x}^r$ и одно из соотношений строгое (например, $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$), откуда $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^r$. В этом случае говорят, что $\mathbf{x}^i$ *косвенным образом* выявленно лучше, чем $\mathbf{x}^r$. По аналогии с нестрогим отношением выявленного предпочтения $\underline{\rhd\!\rhd}$ будем обозначать этот факт следующим образом: $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd\, \mathbf{x}^r$.

Предположим теперь, что мы имеем цепочку альтернатив $i, j, k, \ldots, q, r$ и опять i, такую что $\mathbf{x}^j \in A^i$, $\mathbf{x}^k \in A^j$, $\ldots$ $\mathbf{x}^r \in A^q$, $\mathbf{x}^i \in A^r$. Другими словами, в этой цепочке по кругу каждая альтернатива выявленно не хуже последующей. Из этого следует, что каждая из альтернатив может быть выбрана в предыдущей по циклу ситуации выбора, т. е. $\mathbf{x}^j \in C(A)^i$, $\mathbf{x}^k \in C(A)^j$, $\ldots$ $\mathbf{x}^r \in C(A)^q$, $\mathbf{x}^i \in C(A)^r$. Действительно, пусть, например, $\mathbf{x}^i \notin C(A^r)$. Но это влекло бы $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}^i$, т. е. $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^i$ (альтернатива лучше самой себя), что невозможно. Можно сказать это и по-другому: одновременное выполнение для двух альтернатив $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{x}^r$ соотношений $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^r$ и $\mathbf{x}^r \rhd\!\rhd \mathbf{x}^i$ невозможно.

Предположение, что альтернатива по цепочке не может быть выявленно лучше самой себя, называется **обобщенной аксиомой выявленных предпочтений** (*Generalized Axiom of Revealed Preference*, GARP).

Определение 1.17

Говорят, что набор данных о сделанном выборе $\{(A^1, \mathbf{x}^1), (A^2, \mathbf{x}^2), \ldots, (A^N, \mathbf{x}^N)\}$ удовлетворяет обобщенной аксиоме выявленных предпочтений, если ни для одной из выбранных альтернатив не выполнено соотношение $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}^i$. $\lhd$

Как видим, если потребитель рационален, то наличие «нестрогого» цикла $\mathbf{x}^j \in A^i$, $\mathbf{x}^k \in A^j$, $\ldots$ $\mathbf{x}^r \in A^q$, $\mathbf{x}^i \in A^r$ означает, что все альтернативы здесь эквивалентны для потребителя: $\mathbf{x}^i \sim \mathbf{x}^j \sim \sim \mathbf{x}^k \sim \cdots \sim \mathbf{x}^r$. Будем говорить, что эти альтернативы **выявленно эквивалентны**.

Рассмотрим сначала вопрос о том, можно ли набор данных $(A^i, \mathbf{x}^i)$, $i = 1, \ldots, n$ рационализовать в случае, когда множество допустимых альтернатив совпадает с наблюдаемыми выборами: $X = X(n) = \{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$. Требуется найти неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ на $X(n)$, которые могли бы породить такой набор данных.

Отметим, что данное выше определение рационализуемости эквивалентно следующим двум требованиям:

$$\mathbf{x}^i \,\underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}; \qquad (\underline{\rhd\!\rhd})$$

$$\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}. \qquad (\rhd\!\rhd)$$

(Доказательство эквивалентности двух определений рационализуемости довольно простое и оставлено в качестве упражнения; см. задачу 1.71.)

Итак, если мы найдем неоклассические предпочтения на $X(n)$, которые удовлетворяют условиям ($\underline{\rhd\!\rhd}$) и ($\rhd\!\rhd$), то они рационализуют наблюдаемый нами выбор потребителя. Оказывается, что найти такие предпочтения можно тогда и только тогда, когда наблюдаемый набор данных удовлетворяет требованиям обобщенной аксиомы выявленных предпочтений. (То, что это необходимое условие, мы уже видели. Нетривиальным утверждением здесь является достаточность.)

Теорема 1.12

Набор данных $\{(A^1, \mathbf{x}^1), (A^2, \mathbf{x}^2), \ldots, (A^N, \mathbf{x}^N)\}$ удовлетворяет обобщенной аксиоме выявленных предпочтений тогда и только тогда, когда на $X(n) = \{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$ существуют предпочтения, рационализующие эти данные. ⌟

Доказательство: Поскольку необходимость очевидна, докажем только достаточность.

Докажем менее общее утверждение, предположив для упрощения, что в наших данных нет выявленно эквивалентных альтернатив, т. е. циклы выявленного предпочтения отсутствуют (даже нестрогие; наличие строгих циклов прямо противоречит GARP). При наличии в наборе данных выявленно эквивалентных альтернатив приходится вводить множества безразличия и строить отношения между ними. Это только делает рассуждения несколько более громоздкими, не меняя их сути (см. задачу 1.72).

Пользуясь этим упрощением, будем конструировать такие предпочтения на $X(n)$, что любые две различные альтернативы из $X(n)$ находятся в отношении $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$ или $\mathbf{x}^j \succ \mathbf{x}^i$. Требуется упорядочить имеющиеся наблюдения, присвоив им порядковые номера от 1 до n, таким образом, чтобы $\mathbf{x}^{[1]} \succ \mathbf{x}^{[2]} \succ \cdots \succ \mathbf{x}^{[n]}$, где $\mathbf{x}^{[s]}$ — s-е по порядку наблюдение, и чтобы новый порядок соответствовал выявленным предпочтениям, т. е. чтобы для любой пары альтернатив, такой что $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^j$ ($\mathbf{x}^i \neq \mathbf{x}^j$), выполнялось $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j$.

Будем рассуждать по индукции. На m-м шаге имеем две группы альтернатив: m нумерованных альтернатив, составляющих последовательность $\mathbf{x}^{[1]} \succ \mathbf{x}^{[2]} \succ \cdots \succ \mathbf{x}^{[m]}$, и $n - m$ ненумерованных. Процедура сортировки построена так, что среди нумерованных альтернатив нет таких, которые были бы выявленно хуже одной из ненумерованных. Найдем среди ненумерованных альтернатив такую альтернативу, чтобы не нашлось другой альтернативы, еще ненумерованной, которая была бы выявленно не хуже ее. Такая альтернатива всегда найдется, поскольку, по предположению, выполнена GARP, и выявленно эквивалентных альтернатив тоже нет. (Это доказывается от противного. Начнем с произвольной ненумерованной альтернативы и найдем ненумерованную альтернативу, которая выявленно не хуже ее. Для найденной альтернативы найдем ненумерованную альтернативу, которая выявленно не хуже ее. Так как у нас конечное число альтернатив, то этот поиск в конце концов закончится, иначе получим цикл вида $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^j \underline{\rhd\!\rhd} \cdots \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^r \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^i$, которого, как мы предположили, быть не может.) Присвоим найденной альтернативе номер $m+1$, т. е. переведем ее в разряд нумерованных. Продолжаем эту процедуру, пока не пронумеруем все альтернативы.

По сути, присвоив указанным образом каждой альтернативе порядковый номер, мы построили на $X(n)$ функцию полезности, такую что $u(\mathbf{x}^{[i]}) = -i$. По построению для любой пары альтернатив, такой что $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^j$, выполняется соотношение $u(\mathbf{x}^i) > u(\mathbf{x}^j)$. Значит, эта функция полезности и соответствующие предпочтения рационализуют данные[35]. ■

Мы сконструировали предпочтения на конечном множестве точек $X(n) = \{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$. Если множество допустимых альтернатив X более широкое, то нужно каким-то образом непротиворечиво распространить найденные предпочтения на остальные альтернативы из X. Важный пример такого построения в частном случае модели поведения потребителя представляет собой теорема Африата (см. п. 2.B.2). Есть и более простой, но содержательно менее интересный способ достроить предпочтения — разделить оставшиеся альтернативы $X \setminus X(n)$ на несколько «больших» множеств безразличия и упорядочить их и альтернативы из $X(n)$ соответствующим образом (см. задачу 1.73).

1.A.2. Построение неоклассических предпочтений по функции выбора

Перейдем к рассмотрению вопроса о том, при каких условиях можно рационализовать не отдельные наблюдения за выбором индивидуума, а в целом функцию выбора $C(A)$, заданную на некотором

---

[35] Фактически мы доказали для конечного множества альтернатив следующее утверждение (теорему о продолжении, см., напр., П. Фишбёрн. *Теория полезности для принятия решений*, М.: Наука, 1978, с. 31):

> Если отношение $\mathcal{R}_0$ транзитивно и иррефлексивно (т. е. представляет собой так называемое *строгое частичное упорядочение*), то существует его продолжение $\mathcal{R}$, являющееся также транзитивным и иррефлексивным, причем такое, что если $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, то либо $\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$, либо $\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}$ (другими словами, продолжение $\mathcal{R}$ является *строгим упорядочением*).

Продолжением $\mathcal{R}_0$ называется такое отношение $\mathcal{R}$, что $\mathbf{x}\,\mathcal{R}_0\,\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}$.

достаточно «богатом» множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$, другими словами, при каких условиях можно сказать, что эта функция выбора могла быть порождена неоклассическими предпочтениями[36].

Определение 1.18

Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ рационализуют правило выбора $C(\cdot)$ на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$, если множество выбора $C^*(\cdot)$, порожденное этими предпочтениями, совпадает с исходным:

$$C(A) = C^*(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{A}. \qquad \triangleleft$$

Если потребитель имеет неоклассические предпочтения и делает выбор на их основе, то соответствующая функция выбора обладает следующими очевидными свойствами:

- все альтернативы из $C(A)$ эквивалентны:

$$\mathbf{x} \in C(A), \mathbf{y} \in C(A) \Rightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y};$$

- если альтернативы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат ситуации выбора A, причем $\mathbf{x}$ может быть выбрана, а $\mathbf{y}$ нет, то альтернатива $\mathbf{x}$ лучше, чем альтернатива $\mathbf{y}$, т. е.

$$\mathbf{x} \in C(A), \mathbf{y} \in A, \mathbf{y} \notin C(A) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y};$$

По аналогии с п. 1.A.1 можно ввести понятие выявленных предпочтений. Идея этого понятия состоит в том, что если была выбрана альтернатива $\mathbf{x}$ в ситуации выбора, когда была доступна также альтернатива $\mathbf{y}$, значит, $\mathbf{x}$ не может быть хуже $\mathbf{y}$. Если же дополнительно известно, что альтернатива $\mathbf{y}$ не могла быть выбрана, значит, $\mathbf{x}$ лучше $\mathbf{y}$.

Определение 1.19

Альтернатива $\mathbf{x}$ непосредственно нестрого выявленно предпочитается альтернативе $\mathbf{y}$, если существует ситуация выбора A, такая что $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\mathbf{x} \in C(A)$.

Альтернатива $\mathbf{x}$ непосредственно строго выявленно предпочитается альтернативе $\mathbf{y}$, если существует ситуация выбора A, такая что $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\mathbf{x} \in C(A)$, но $\mathbf{y} \notin C(A)$. $\triangleleft$

[36] См. K. J. Arrow • Rational Choice Functions and Orderings, *Economica* **26** (1959): 121–127.

Нам понадобятся здесь только *непосредственные* выявленные предпочтения (в отличие от многошаговых косвенных, которые использовались ранее). Для обозначения непосредственных выявленных предпочтений будем использовать символы $\trianglerighteq$ и $\triangleright$.

Если $C(A)$ — неоклассическое правило выбора, то оно должно удовлетворять ряду свойств. В частности, как обсуждалось выше, отношения $\trianglerighteq$ и $\triangleright$ обладают следующими очевидными свойствами:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y} \ \text{ влечет } \ \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}; \\ \mathbf{x} \triangleright \mathbf{y} \ \text{ влечет } \ \mathbf{x} \succ \mathbf{y}. \end{aligned} \tag{$\bumpeq$}$$

Интуитивно ясно, что если бы для произвольной функции выбора $C(A)$ мы нашли неоклассические предпочтения, удовлетворяющие этим свойствам, то тем самым мы бы «почти рационализовали» $C(A)$. Следующая теорема подтверждает эту интуицию.

Теорема 1.13

Пусть неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ связаны с правилом выбора $C(A)$ условиями ($\bumpeq$). Тогда правило выбора $C^*(A)$, порожденное этими предпочтениями, совпадает с правилом выбора $C(A)$ на всех ситуациях выбора из $\mathcal{A}$, для которых выбор согласно $C(A)$ не пуст, т. е.

$$C^*(A) = C(A) \text{ для всех } A \in \mathcal{A}, \text{ таких что } C(A) \neq \varnothing. \qquad \lrcorner$$

Доказательство: Докажем, что $C(A) \subset C^*(A)$. Пусть $\mathbf{x} \in C(A)$. Тогда по определению нестрогого выявленного предпочтения $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \in A$. Следовательно, $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \in A$. Отсюда видно, что $\mathbf{x} \in C^*(A)$.

Теперь докажем, что $C^*(A) \subset C(A)$. Пусть $\mathbf{x} \in C^*(A)$, где $C(A)$ непусто, и пусть $\mathbf{y}$ — некоторая альтернатива из $C(A)$. Так как $\mathbf{y} \in A$, то из условия $\mathbf{x} \in C^*(A)$ следует, что $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ и поэтому $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Выполнение соотношения $\mathbf{x} \notin C(A)$ означало бы, что $\mathbf{y} \triangleright \mathbf{x}$ (так как $\mathbf{y} \in C(A)$), т. е. что $\mathbf{y} \succ \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а этого быть не может. Значит, $\mathbf{x} \in C(A)$. ■

Одним из непосредственных следствий неоклассической рациональности выбора является так называемая слабая аксиома выявленных предпочтений (*Weak Axiom of Revealed Preference*, WARP), являющаяся ослабленным вариантом обобщенной аксиомы выявленных предпочтений сформулированной в Определении 1.17[37].

Определение 1.20

Говорят, что правило выбора $C(\cdot)$, заданное на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$, удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если для любых двух ситуаций выбора A и A' из $\mathcal{A}$ и любой пары альтернатив $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, которые принадлежат как A, так и A' из $\mathbf{x} \in C(A)$ и $\mathbf{y} \in C(A')$ следует, что $\mathbf{x} \in C(A')$. $\lhd$

То, что неоклассическое правило выбора действительно должно удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений, следует из (♎). Для того чтобы это показать, переформулируем слабую аксиому выявленных предпочтений в терминах выявленных предпочтений:

> Если $\mathbf{x}$ (непосредственно) выявленно не хуже $\mathbf{y}$, то $\mathbf{y}$ не может быть (непосредственно) выявленно лучше $\mathbf{x}$, т. е. соотношения $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \rhd \mathbf{x}$ не могут быть верными одновременно.

Для того чтобы данное условие было выполнено, на самом деле достаточно менее строгой рациональности (см. Приложение 1.B на с. 87). А именно, достаточно, чтобы нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ было транзитивным, как демонстрирует следующая теорема.

Теорема 1.14

Пусть правило выбора задано на основе нестрогого отношения предпочтения $\succcurlyeq$ следующим образом (так же, как выше для неоклассических предпочтений; см. Определение 1.6):

$$C(A) = \left\{ \mathbf{x} \in A \;\middle|\; \forall \mathbf{y} \in A \; \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \right\},$$

и пусть отношение $\succcurlyeq$ транзитивно. Тогда это правило выбора удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений. $\lrcorner$

Доказательство: Пусть в некоторой ситуации выбора A как $\mathbf{x}$, так и $\mathbf{y}$ можно было выбрать ($\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$) и среди выбранных альтернатив

[37] «...Если индивидуум выбирает комплект один, отвергая комплект два, то он не может одновременно выбирать второй комплект, отвергая первый» (P. A. Samuelson • A Note on the Pure Theory of Consumer's Behaviour, *Economica* **5** (1938): 61–71). Фактически требование Самуэльсона несколько слабее слабой аксиомы выявленных предпочтений, как она здесь сформулирована вслед за Эрроу, поскольку он предполагает, что выбор потребителя однозначен. Самуэльсон говорит о том, что соотношения $\mathbf{x} \rhd \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \rhd \mathbf{x}$ не могут быть верными одновременно.

была альтернатива $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in C(A)$), другими словами, пусть $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$. По определению правила выбора $C(A)$ это влечет $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Пусть в некоторой другой ситуации выбора A' как $\mathbf{x}$, так и $\mathbf{y}$ можно было выбрать ($\mathbf{x} \in A'$, $\mathbf{y} \in A'$) и среди выбранных альтернатив была альтернатива $\mathbf{y}$ ($\mathbf{y} \in C(A')$). По определению правила выбора это означает, что $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}$ для всех $\mathbf{z} \in A'$. Из транзитивности следует, что то же самое должно быть верным для $\mathbf{x}$, т. е. $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$ для всех $\mathbf{z} \in A'$. Таким образом, $\mathbf{x} \in C(A')$. Это означает, что для $C(\cdot)$ выполнена слабая аксиома выявленных предпочтений. ■

Другое следствие того, что выбор делается на основе неоклассических предпочтений, состоит в том, что *из конечного набора альтернатив индивидуум всегда может сделать выбор*. Другими словами, выполнено следующее утверждение. (Доказательство его оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 1.32 на с. 54.)

Теорема 1.15

Если ситуация выбора $A \in \mathcal{A}$ ($A \neq \varnothing$) состоит из конечного числа альтернатив, то для правила выбора $C(\cdot)$, соответствующего неоклассическим предпочтениям, выполнено $C(A) \neq \varnothing$. ⌟

Таким образом, выполнение «слабой аксиомы выявленных предпочтений» и непустота выбора из конечного числа альтернатив являются необходимыми условиями рационализуемости функции выбора.

Следующая теорема указывает возможный набор условий, достаточных для рационализуемости в смысле условий (⚖). В ней указанные необходимые условия рационализуемости функции выбора дополняются предположением, что множество ситуаций выбора является достаточно «богатым»[38].

Теорема 1.16

Пусть правило выбора $C(\cdot)$ определено на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$ и при этом

* если ситуация выбора $A \in \mathcal{A}$ состоит из конечного числа альтернатив, то множество $C(A)$ непусто;

[38] В частности, предполагается, что оно содержит все двухэлементные подмножества X. Это предположение в определенном смысле естественно. Действительно, если известно, что неоклассические предпочтения рационализуют правило выбора $C(\cdot)$, и все двухэлементные подмножества X входят в $\mathcal{A}$, то можно восстановить предпочтения по $C(\cdot)$ по следующему принципу:

$$C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) = \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \quad \text{и} \quad C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y}.$$

* $C(A)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений;
* множество ситуаций выбора $\mathcal{A}$ содержит все двух- и трехэлементные подмножества X.

Далее, пусть на основе этого правила выбора задано нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$, так что оно совпадает с нестрогим отношением выявленного предпочтения $\trianglerighteq$, а на основе нестрогого отношения предпочтения определены обычным образом предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$.

Тогда предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ являются неоклассическими и связаны с $C(A)$ соотношениями ($\triangleq$). ⌟

Доказательство: Для того чтобы доказать, что предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ являются неоклассическими, достаточно доказать, что бинарное отношение $\trianglerighteq$ (и следовательно, $\succcurlyeq$) является полным и транзитивным.

Полнота. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — две альтернативы из X. Ситуация выбора $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$, так как это двухэлементное подмножество X. Так как по условию $C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$ непусто, то либо $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$, либо $\mathbf{y} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$. То есть выполнено хотя бы одно из соотношений $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \trianglerighteq \mathbf{x}$.

Транзитивность. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — три альтернативы из X, такие что $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \trianglerighteq \mathbf{z}$. Ситуация выбора $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ должна принадлежать $\mathcal{A}$, так как это трехэлементное подмножество X.

Покажем, что $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$. Если $\mathbf{y} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$, то из слабой аксиомы выявленных предпочтений следует, что $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$, поскольку $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$. Если же $\mathbf{z} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$, то аналогично $\mathbf{y} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$ и поэтому опять $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$. Так как $C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$ непусто, то в любом случае $\mathbf{x} \in C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\})$. Это влечет за собой, что $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{z}$.

Условие, что $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ влечет $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, выполнено по определению $\succcurlyeq$. Докажем, что $\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y}$ влечет $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

Из $\mathbf{x} \triangleright \mathbf{y}$ по слабой аксиоме выявленных предпочтений следует, что $\mathbf{y} \trianglerighteq \mathbf{x}$ не может выполняться, т. е. не может быть $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$. Как только что доказано, отношение $\succcurlyeq$ полное, поэтому $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, откуда по обычному определению отношения $\succ$ следует $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. ■

Сформулированные утверждения (Теоремы 1.13 и 1.16) показывают, что при определенных условиях подход, использующий в качестве отправной точки правило выбора, эквивалентен подходу, использующему в качестве отправной точки предпочтения, т. е. правило выбора можно рационализовать неоклассическими предпочтениями. Для этого достаточно предположить, что множество ситуаций выбора $\mathcal{A}$, на котором определено правило выбора, достаточно «богато», правило выбора удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений и выбор на $\mathcal{A}$ непуст.

Теорема 1.17

Пусть правило выбора $C(\cdot)$ определено на множестве ситуаций выбора $\mathcal{A}$ и при этом

* множество $C(A)$ непусто для всех ситуаций выбора $A \in \mathcal{A}$;
* $C(A)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений;
* множество ситуаций выбора $\mathcal{A}$ содержит все двух- и трехэлементные подмножества X.

Тогда существуют неоклассические предпочтения которые рационализуют это правило выбора. ⌟

Задачи

1.69 Множество альтернатив имеет вид $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. Имеется четыре ситуации выбора:

$$A_1 = \left\{a, c^{[-]}, d^{[-]}, f^{[+]}\right\}, \qquad A_2 = \left\{a^{[-]}, b^{[-]}, c, d^{[+]}\right\},$$
$$A_3 = \left\{b, c^{[-]}, e^{[+]}\right\}, \qquad A_4 = \left\{a^{[-]}, b^{[+]}, e\right\}.$$

Здесь индекс $[+]$ означает, что соответствующая альтернатива могла быть выбрана в данной ситуации, а индекс $[-]$ — что она не могла быть выбрана.

(A) Найдите неоклассические предпочтения и, по возможности, функцию полезности, рационализующие эти данные.

(B) Является ли ответ на предыдущий вопрос единственным?

(C) Удовлетворяет ли этот набор данных обобщенной аксиоме выявленных предпочтений?

1.70 Объясните, почему косвенные отношения выявленного предпочтения $\underline{\rhd\rhd}$ и $\rhd\rhd$ обладают следующими свойствами:

$$(\mathbf{x} \mathrel{\underline{\rhd\rhd}} \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \mathrel{\underline{\rhd\rhd}} \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \mathrel{\underline{\rhd\rhd}} \mathbf{z}, \quad (\mathbf{x} \rhd\rhd \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \mathrel{\underline{\rhd\rhd}} \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \rhd\rhd \mathbf{z},$$
$$(\mathbf{x} \mathrel{\underline{\rhd\rhd}} \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \rhd\rhd \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \rhd\rhd \mathbf{z}, \quad (\mathbf{x} \rhd\rhd \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \rhd\rhd \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \rhd\rhd \mathbf{z}.$$

Объясните, почему непосредственные отношения выявленного предпочтения $\trianglerighteq$ и $\triangleright$ могут, вообще говоря, не обладать этими свойствами, если для их построения используется конечный набор наблюдений за выбором. Приведите соответствующие примеры.

1.71 Объясните, почему условия ($\triangleright\!\trianglerighteq$) и ($\triangleright\!\triangleright$) эквивалентны Определению 1.16.

1.72 Измените доказательство Теоремы 1.12 так, чтобы оно учитывало случай наличия в наборе данных выявленно эквивалентных альтернатив.

1.73 Опишите, каким способом можно с учетом выявленных предпочтений распространить предпочтения, заданные для конечного числа альтернатив (полученные так, как описано в Теореме 1.12), на все множество X.

1.74 Определите, какими из следующих свойств и при каких условиях обладает непосредственное нестрогое отношение выявленного предпочтения (построенное по некоторой функции выбора):
- полнота;
- транзитивность;
- рефлексивность.

1.75 Пусть множество альтернатив X конечно. Тогда функция выбора $C(\cdot)$, определенная на всех подмножествах множества X, удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений, если... (выберите правильный ответ)
- правило выбора всегда непусто;
- выбор индивидуума может быть описан полным и транзитивным нестрогим отношением предпочтения;
- правило выбора удовлетворяет условию $C(A) \neq A$ при всех A.

1.76 Множество альтернатив X состоит из трех элементов — $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$. Индивидуум осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $A_2 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Его выбор описывается правилом выбора $C(\cdot)$. Определите, какие из нижеприведенных правил выбора не удовлетворяют слабой аксиоме выявленных предпочтений:
- $C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}\}$, $C_1(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = \{\mathbf{x}\}$;
- $C_2(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}\}$, $C_2(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = \{\mathbf{y}\}$;
- $C_3(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $C_3(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.

1.77 Множество альтернатив X состоит из трех элементов — $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$. Индивидуум осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $A_2 = \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$, $A_3 = \{\mathbf{x}, \mathbf{z}\}$. Его выбор описывается следующим правилом выбора: $C(A_1) = \{\mathbf{x}\}$, $C(A_2) = \{\mathbf{y}\}$, $C(A_3) = \{\mathbf{z}\}$.

(А) Верно ли, что выбор удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений?

(В) Верно ли, что выбор индивидуума представи́м некоторыми неоклассическими предпочтениями?

1.78 Какому из приведенных ниже утверждений эквивалентна слабая аксиома выявленных предпочтений?

- Пусть $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\mathbf{x} \in A'$, $\mathbf{y} \in A'$. Тогда из того, что $\mathbf{x} \in C(A)$ и $\mathbf{y} \in C(A')$ следует $\mathbf{x} \in C(A)$, $\mathbf{y} \in C(A)$ и $\mathbf{x} \in C(A')$, $\mathbf{y} \in C(A')$.
- Из $\mathbf{x} \in A$ и $\mathbf{y} \in A'$ следует $\mathbf{x} \in A'$ и $\mathbf{y} \in A$.
- Пусть $\mathbf{x} \in C(A)$ и $\mathbf{y} \in C(A')$. Тогда $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in A$ и $\mathbf{x} \in A'$, $\mathbf{y} \in A'$.

1.79 Непосредственное нестрогое отношение выявленного предпочтения обладает свойством полноты, если... (выберите правильный ответ)

- правило выбора задано на множестве всех подмножеств множества допустимых альтернатив;
- строгое отношение выявленного предпочтения отрицательно транзитивно;
- правило выбора удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

1.80 Пусть множество альтернатив X состоит из трех элементов — $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Индивидуум осуществляет свой выбор на его подмножествах $A_1 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, $A_2 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Выбор индивидуума описывается некоторой функцией выбора $C(\cdot)$, а $\trianglerighteq$ и $\triangleright$ — соответствующие нестрогое и строгое непосредственные отношения выявленного предпочтения. Выберите правильный ответ:

- соотношения $\mathbf{x} \trianglerighteq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \triangleright \mathbf{x}$ не могут быть верными одновременно для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$;
- $\trianglerighteq$ не будет полным;
- $\trianglerighteq$ будет транзитивным.

1.81 Одно из необходимых условий того, что непосредственное нестрогое отношение выявленного предпочтения, построенное по некоторым правилу выбора $C(\cdot)$ и ситуации выбора $\mathcal{A}$, транзитивно, состоит в том, что... (выберите верный ответ)

- правило выбора всегда имеет значением единственную альтернативу;
- непосредственное нестрогое отношение выявленного предпочтения рефлексивно;

- $\mathcal{A}$ содержит все трехэлементные подмножества множества альтернатив.

Приложение 1.B. Не вполне рациональные предпочтения

На первый взгляд введенное в параграфе 1.4 определение неоклассических предпочтений и выводы из него кажутся естественными и соответствующими интуиции в качестве основы для моделирования выбора. Однако в действительности есть ряд примеров, заставляющих относиться к традиционному неоклассическому подходу достаточно осторожно. Укажем лишь некоторые из них.

$\lightning$ *Проблемы с определением эквивалентности*. Отношение безразличия можно определять по-разному. Об эквивалентности двух альтернатив можно говорить, в частности, в следующих случаях:

- потребитель считает, что сравниваемые альтернативы для него на самом деле *эквивалентны* («Ну не гурман я, мне все равно, что есть — судака по-гасконски или лапшу по-китайски»);
- потребитель *ничего не знает* ни об одной из предложенных альтернатив, и потому не может их сравнивать («Что вы предпочитаете: дурианы или рамбутаны?»);
- предлагаемые альтернативы в принципе *несравнимы* с точки зрения потребителя, так что если он сталкивается с выбором из этих альтернатив, то предпочитает уклониться от выбора («Ты кого больше любишь — папу или маму?»);

В связи с этим возникает вопрос о том, что мы подразумеваем в действительности, когда говорим о безразличии в выборе между несколькими альтернативами. Должны ли мы при моделировании различать эквивалентность в зависимости от причин ее породивших? На эти вопросы трудно ответить однозначно, и такая проблематика выходит далеко за пределы данного учебника. (Мы здесь придерживаемся скорее первого из приведенных толкований.) Отметим еще, что содержательная сложность понятия эквивалентности также наследуется отношением $\succcurlyeq$, заданным как $\succcurlyeq = \succ \cup \sim$.

$\lightning$ *Проблемы с транзитивностью*. Рассмотрим следующий пример. Если мы предложим индивидууму на выбор стакан чая, куда положили один кристалл сахара, и стакан чая с двумя кристаллами, то практически всегда получим ответ о его безразличии в выборе. Такой же ответ получим при сравнении стаканов чая с двумя и тремя кристаллами сахара. Продолжим наш опрос достаточно долго и, если будем настаивать на транзитивности, придем к выводу, что для индивидуума совершенно безразлично, что пить, стакан чая с одним кристаллом или же с пятью ложками сахара. Очевидно, что мы получили абсурдный вывод, причина которого кроется в принципиальной невозможности объективного сравнения количеств благ, которые различаются незначительно. Этот пример заставляет задуматься об обоснованности предположения о транзитивности предпочтений.

Помимо указанных проблем существует также ряд моментов, которые необходимо учитывать при анализе предпочтений и/или выбора экономического субъекта, поскольку невнимание к ним также может привести к нарушению обычно делаемых предположений.

ϟ *Зависимость предпочтений от контекста.* Довольно часто отсутствие транзитивности в реальности вызвано тем, что исследователь не учитывает контекста ситуации. Под контекстом понимаются все внешние, явным образом не входящие в описание альтернатив обстоятельства. Укажем несколько примеров, в которых небанальным образом сказывается влияние контекста на предпочтения индивидуума: цена блага в случае демонстративного потребления[39], количество других экономических субъектов, потребляющих данное благо (рынок мобильных телефонов) и т. д. Все указанные факторы явным образом должны быть учтены при рассмотрении соответствующих ситуаций, если они интересуют потребителя. Если же рассматривать предпочтения, игнорируя важные дополнительные переменные, то, естественно, при непостоянстве контекста можно будет наблюдать явления, которые можно принять за нарушение предположений о рациональном поведении.

ϟ *Зависимость от постановки вопроса*[40]. Зависимость предпочтений от контекста тесно связана по смыслу с феноменом, известным как зависимость предпочтений и выбора от постановки вопроса. Рассмотрим классический эксперимент, проведенный Дэниелом Канема-

[39] Вспомним бородатый анекдот:
— Ты почем галстук брал?
— Да не дорого, 2500 баксов отслюнил.
— Ну, ты и лох, за соседним углом его же за 5000 зеленых толкают.
В этом случае оценка галстука напрямую зависит от его цены.

[40] Англ. *framing*.

ном и Амошом Тверским[41]. Группе интервьюируемых было предложено ответить на следующий вопрос.

> Предположим, что в некоторой стране ожидается вспышка гепатита. Ожидается, что в результате данного заболевания погибнет 600 человек. Для борьбы с этим заболеванием предлагаются две альтернативные программы, со следующими результатами реализации.
>
> Программа A: в случае реализации программы будет сохранена жизнь 200 человек.
>
> Программа B: в случае реализации программы с вероятностью $1/3$ будет сохранена жизнь 600 человек, с вероятностью $2/3$ ни одна жизнь не будет спасена.
>
> Какую из двух программ вы выберете?

Большинство интервьюируемых (72%) предпочли альтернативу A альтернативе B. Далее был проведен опрос о той же ситуации, но с другими вариантами ответов.

> Программа C: в случае реализации погибнут 400 человек из 600.
>
> Программа D: в случае реализации с вероятностью $1/3$ никто не погибнет, с вероятностью $2/3$ программа не будет иметь успеха и погибнут 600 человек.

В результате этого опроса 78% интервьюируемых выбрали альтернативу D. Как несложно убедиться, что программы A и C эквивалентны и различие заключается только в формулировке. То же самое касается программ B и D. Варианты A и B сформулированы в позитивном ключе (количество спасенных жизней), тогда как варианты C и D — в негативном ключе (число умерших). Очевидно, что наличие данного феномена также может нарушать наши предположения[42]. (Попробуйте определить, возможность нарушения какого свойства демонстрирует данный пример.)

[41] D. Kahneman and A. Tversky • Choices, Values, and Frames, *American Psychologist* **39** (1984): 341–350.

[42] Хотя в данном примере затрагиваются вопросы выбора в условиях неопределенности, являющиеся предметом рассмотрения другой главы, он ясно указывает на важную черту, присущую реальным ситуациям выбора, и поэтому приведен в данной главе.

ϟ *Склонность сохранять статус-кво.* Одно из возможных объяснений расхождения в результатах, казалось бы, одинаковых опросов состоит в том, что на сравнение альтернатив может влиять тот факт, что одна из альтернатив соответствует текущей ситуации. Другими словами, люди часто проявляют склонность сохранять статус-кво.

Примером такой склонности является следующий эксперимент. Между участниками случайным образом распределили одинаковое количество конфет и кружек, так что каждому достался ровно один предмет. Ясно, что если бы каждый участник предпочитал либо одно, либо другое, то примерно половина участников (если их количество достаточно большое) остались бы недовольны полученным и согласились бы отдать свой предмет и получить вместо него другой. В реальном же эксперименте только 10% участников соглашались на обмен[43].

ϟ *Изменение предпочтений во времени.* При рассмотрении предпочтений важно помнить, что, вообще говоря, предпочтения изменяются во времени. Если вы сегодня предпочитаете яблоки грушам, то далеко не факт, что ваши предпочтения останутся неизменными на протяжении всей вашей жизни. Естественно, этот факт также демонстрирует нарушение наших аксиом при рассмотрении реального выбора/предпочтений.

Этот перечень можно продолжать и продолжать. Так, в литературе много внимания при обсуждении предпочтений и выбора уделяется вопросам *инверсии предпочтений*, *несостоятельности предпочтений во времени* и др. Но мы не будем здесь их обсуждать и отсылаем заинтересованного читателя к соответствующей литературе.

1.B.1. Непротиворечивые, но неполные предпочтения

Что если индивидуум не всегда может попарно сравнить альтернативы? Для описания подобных предпочтений, кроме отношений «лучше», «хуже» и «безразлично» между парами альтернатив следует еще ввести отношение «неизвестно». При этом нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ может быть понято двояко: как отрицание отношения $\prec$ («не хуже») или же как отношение «лучше или экви-

[43] J. L. Knetsch · The Endowment Effect and Evidence of Nonreversible Indifference Curves, *American Economic Review* **79** (1989): 1277–1284.

валентно». Удобнее (и принято в посвященной этому вопросу литературе) использовать его во втором значении. Этой традиции будем следовать и мы, предполагая, что

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y})$$

Во всех остальных отношениях наш индивидуум может быть рациональным и последовательным. Введем определение подобных предпочтений.

Определение 1.21

Назовем предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ непротиворечивыми, если они удовлетворяют следующим предположениям:

* для любых $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполняется не более чем одно из следующих трех соотношений:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{x} \prec \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y};$$

* выполнено $\succcurlyeq \, = \, \succ \cup \sim$ (т. е. $\succcurlyeq$ является отношением «лучше или эквивалентно»);
* отношение $\succcurlyeq$ транзитивно;
* отношение $\sim$ рефлексивно. $\triangleleft$

Здесь имеется близкая аналогия с ситуацией, когда индивидуум имеет неоклассические предпочтения, но полная информация о таких предпочтениях у нас отсутствует. Фактически выше мы уже частично рассмотрели соответствующую теорию для случая конечного числа альтернатив (см. п. 1.A.1)[44].

Заметим, что данное определение предполагает не только непротиворечивость предпочтений, но и полное использование имеющейся информации. Рассмотрим свойства непротиворечивых предпочтений. (Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.)

Теорема 1.18

Если предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ непротиворечивы, то они обладают следующими свойствами:

{i} нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ рефлексивно;
{ii} строгое отношение предпочтения $\succ$ транзитивно и иррефлексивно;

[44] Существенное отличие состоит в том, что аналог отношения «выявленно не хуже» здесь не вводится.

{iii} отношение безразличия $\sim$ транзитивно и симметрично;

{iv} для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполнено

$$(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \urcorner(\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x})) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \quad \text{и}$$
$$(\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y};$$

{v} для $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$, $\mathbf{z} \in X$ выполнено

$$(\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \sim \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z} \quad \text{и} \quad (\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \text{ и } \mathbf{y} \succ \mathbf{z}) \Rightarrow \mathbf{x} \succ \mathbf{z};$$

{vi} если по цепочке для альтернатив $\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k, \ldots, \mathbf{x}^q, \mathbf{x}^r$ имеют место отношения $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j$, $\mathbf{x}^j \succcurlyeq \mathbf{x}^k$, ..., $\mathbf{x}^q \succcurlyeq \mathbf{x}^r$, $\mathbf{x}^r \succcurlyeq \mathbf{x}^i$, то эти альтернативы попарно эквивалентны и, следовательно, ни одна из них не может быть лучше другой (аналог «обобщенной аксиомы выявленных предпочтений»). ⌟

Следующее утверждение говорит о том, что непротиворечивые предпочтения можно «достроить» до неоклассических.

Теорема 1.19

Если предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ непротиворечивы, то существуют неоклассические предпочтения $\langle \succ', \succcurlyeq', \sim' \rangle$, являющиеся их продолжением в том смысле, что

* $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \succ' \mathbf{y}$;
* $\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} \sim' \mathbf{y}$. ⌟

В случае конечного числа альтернатив данная теорема является очевидным следствием пункта {vi} предыдущей теоремы и Теоремы 1.12. В общем случае доказательство довольно трудоемкое и выходит далеко за рамки данного учебника[45].

Возникает вопрос о том, каким будет правило выбора, основанное на таких предпочтениях. Можно предложить вариант $C_{\succcurlyeq}(A)$ (см. Определение 1.6):

$$C(A) = \left\{ \mathbf{x} \in A \;\middle|\; \forall \mathbf{y} \in A \; \mathbf{x} \succ \mathbf{y} \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y} \right\} = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \forall \mathbf{y} \in A \; \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \right\}.$$

Как показано выше (см. Теорему 1.14), если предпочтения непротиворечивы, то данное правило выбора удовлетворяет слабой аксиоме

[45] На основе отношения безразличия можно определить множества безразличия и не полностью заданное на этих множествах безразличия строгое отношение предпочтения. Затем можно распространить это отношение, полностью упорядочив кривые безразличия (см. сноску 35).

выявленных предпочтений (см. Определение 1.20). Другое его свойство заключается в том, что из-за неполноты предпочтений это правило может приводить к тому, что ни одна альтернатива не может быть выбрана даже в «хорошо устроенных» ситуациях выбора A (например, когда имеется конечное число альтернатив).

Указанная проблема не возникает, если правило выбора имеет вид $C_{\succ}(A)$, т. е.

$$C(A) = C_{\succ}(A) = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \nexists \mathbf{y} \in A\colon \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \right\}.$$

Однако не очень правдоподобно, что индивидуум может действовать в соответствии с таким правилом. Например, если индивидуум не может сравнить альтернативу $\mathbf{x}$ с другими допустимыми альтернативами, то $\mathbf{x}$ может быть выбрана в соответствии с таким правилом; в то же время данная альтернатива фактически может оказаться хуже всех остальных.

Как промежуточный вариант, позволяющий избежать указанных крайностей, можно предположить, что выбор делается исходя из некоторого статус-кво $\mathbf{x}_0$. Если нет альтернатив $\mathbf{x} \in A$, таких что $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}_0$, то индивидуум выбирает $\mathbf{x}_0$ (т. е. $C(A) = \{\mathbf{x}_0\}$), если же такие альтернативы имеются, то можно считать, что функция выбора имеет вид

$$C(A) = \left\{ \mathbf{x} \in A \;\middle|\; \mathbf{x} \succ \mathbf{x}_0 \text{ и } \nexists \mathbf{y} \in A\colon\ \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \right\}.$$

В качестве примера подобного выбора укажем на голосование на основе консенсуса, такое что каждый из участников голосования имеет неоклассические предпочтения. Заметим, что построенное так правило выбора может не удовлетворять слабой аксиоме выявленных предпочтений.

1.В.2. Полные, но противоречивые (нетранзитивные) предпочтения

В самом общем смысле под полнотой предпочтений можно понимать то, что индивидуум всегда может определить, как он относится к паре альтернатив: является ли альтернатива $\mathbf{x}$ для него более предпочтительной, чем альтернатива $\mathbf{y}$, или $\mathbf{y}$ для него более предпочтительна, чем $\mathbf{x}$, или эти альтернативы эквивалентны. При этом можно не накладывать ограничения, что эти ситуации несовместны, т. е. для двух альтернатив $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ выполняется *хотя бы одно* из трех соотношений: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. Тогда отношение «лучше или эквивалентно», вообще говоря, может не совпадать с отрицанием отношения $\prec$ (т. е. с отношением «не хуже»), но уже не по причине неполноты, как это было в п. 1.B.1.

Мы не обсуждаем здесь это (слишком серьезное) отклонение от рациональности и будем в дальнейшем исходить из того, что всегда выполнено *ровно одно* из трех соотношений: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, или $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$. В таком случае смысл нестрогого отношения предпочтения становится однозначным. Будем рассматривать предпочтения, которые могут быть нетранзитивными, т. е. такими что, например, возможно выполнение соотношений $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$ и $\mathbf{z} \succ \mathbf{x}$ для несовпадающих альтернатив $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$.

Определение 1.22

Назовем предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ полными, если они удовлетворяют следующим предположениям:

* для любых $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{y} \in X$ выполняется *ровно одно* из следующих трех соотношений:

$$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{x} \prec \mathbf{y}, \text{ или } \mathbf{x} \sim \mathbf{y};$$

* выполнено $\succcurlyeq = \succ \cup \sim$. ◁

Некоторые очевидные свойства полных предпочтений указывает следующее утверждение. (Его доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.)

Теорема 1.20

Если предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ полные, то они обладают следующими свойствами:

{i} нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ является полным и рефлексивным;

{ii} строгое отношение предпочтения $\succ$ является иррефлексивным и асимметричным;

{iii} отношение безразличия $\sim$ является рефлексивным и симметричным. ┘

Такие предпочтения можно использовать для моделирования коллективного выбора, например голосования простым большинством в случае, если каждый из участников голосования имеет неоклассические предпочтения[46].

Как обсуждалось выше, условие транзитивности является ограничительным при моделировании поведения потребителя. Поэтому представляется вполне естественным задаваться вопросом о свойствах предпочтений и о существовании функции полезности в случае, если строгое отношение предпочтения $\succ$ не обладает свойством отрицательной транзитивности или, что эквивалентно, нестрогое отношение предпочтения $\succcurlyeq$ не обладает свойством транзитивности.

При полноте предпочтений правила выбора $C_{\succ}(A)$ и $C_{\succcurlyeq}(A)$ совпадают и поэтому не возникает проблем с определением правила выбора. В то же время нетранзитивность предпочтений, так же как и неполнота, может приводить к тому, что правило выбора может быть пустым, даже если ситуация выбора A «хорошо устроена». Например, при выборе из трех альтернатив, таких что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$, значение правила выбора будет пустым.

Как следует из приведенной выше Теоремы 1.6 (с. 41), при нетранзитивности не существует функции полезности в смысле Определения 1.7 (с. 40), т. е. показателя, заданного на *отдельных альтернативах* и оценивающего уровень благосостояния при выборе данной альтернативы. Тем не менее даже в этом случае можно построить некоторый индикатор, который давал бы полное описание рассматриваемых предпочтений. Такой индикатор может быть задан на *парах альтернатив* и позволяет сравнивать две альтернативы между собой.

Идея состоит в том, чтобы подобный индикатор ($\Delta(\cdot)$) удовлетворял следующим условиям:

(Δ1) $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$;
(Δ2) $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$;
(Δ3) $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$;
(Δ4) $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\Delta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

Так построенная функция может считаться **обобщенной функцией полезности**. Нетрудно понять, что если предпочтения представимы обычной функцией полезности $u(\cdot)$, то в качестве $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно взять функцию $u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{y})$.

---

[46] Парадокс Кондорсе демонстрирует, что процедура голосования большинством голосов может приводить к нетранзитивности и к тому, что значение правила выбора будет пустым. См. сноску 19 на с. II-180.

Следующая теорема дает условия существования «обобщенной функции полезности», соответствующей полным, но, возможно, нетранзитивным предпочтениям. Для доказательства существования такой функции используется некоторый аналог условия непрерывности предпочтений (замкнутость $\succcurlyeq$). Пары альтернатив в доказательстве обозначаются $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$. Типичная пара альтернатив имеет структуру $\mathbf{p} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$. Порядок альтернатив в паре при этом существен.

Теорема 1.21

Пусть на $X \subset \mathbb{R}^l$ заданы полные предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$, такие что бинарное отношение $\succcurlyeq$ замкнуто (в $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$). Тогда существует непрерывная функция $\Delta\colon X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям ($\Delta1$)—($\Delta4$). ┘

Доказательство: Рассмотрим отношение безразличия $\sim$. Так как предпочтения полные, то оно рефлексивно. Таким образом, оно непусто, если рассматривать его как подмножество множества $X \times X$ (в него входят все пары вида $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$). Кроме того, из замкнутости $\succcurlyeq$ следует замкнутость $\sim$.

Пусть $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|$ — евклидово расстояние на $\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$. Определим функцию $d^*: X \times X \to \mathbb{R}$ так, чтобы паре альтернатив $\mathbf{p} \in X \times X$ она сопоставляла наименьшее расстояние между $\mathbf{p}$ и парой эквивалентных друг другу альтернатив (т. е. $\mathbf{q} \in \sim$):

$$d^*(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{q} \in \sim} d(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Инфимум конечен, поскольку расстояние ограничено снизу нулем. Покажем, что так определенная функция является непрерывной. Рассмотрим две произвольные пары альтернатив $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in X \times X$. Для любой пары эквивалентных между собой альтернатив $\mathbf{r} \in \sim$ в силу неравенства треугольника имеем $d(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r})$. Следовательно,

$$d^*(\mathbf{p}) = \inf_{\mathbf{s} \in \sim} d(\mathbf{p}, \mathbf{s}) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r}).$$

Так как левая часть последнего неравенства не зависит от $\mathbf{r}$, то

$$d^*(\mathbf{p}) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \inf_{\mathbf{s} \in \sim} d(\mathbf{q}, \mathbf{s}) = d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d^*(\mathbf{q}).$$

По аналогии можно доказать, что выполнено

$$d^*(\mathbf{q}) \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d^*(\mathbf{p}).$$

Комбинируя последние два неравенства, находим

$$|d^*(\mathbf{q}) - d^*(\mathbf{p})| \leqslant d(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

откуда очевидным образом следует непрерывность функции $d^*(\cdot)$.

Расстояние неотрицательно и поэтому $d^*(\mathbf{p}) \geqslant 0$. Кроме того, данная функция обладает тем свойством, что $d^*(\mathbf{p}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{p}$ представляет собой пару эквивалентных альтернатив ($\mathbf{p} \in \sim$). Действительно, если $\mathbf{p} \in \sim$, то $d^*(\mathbf{p}) = d(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$. Обратно, пусть для пары альтернатив выполнено $\mathbf{p} \notin \sim$. В силу замкнутости $\sim$ дополнение к $\sim$ является открытым множеством, и значит, точка $\mathbf{p}$ содержится в этом дополнении вместе с некоторой ε-окрестностью. Так как около $\mathbf{p}$ нет пар эквивалентных альтернатив, расстояние до которых от $\mathbf{p}$ было бы менее ε, то по определению $d^*(\cdot)$ должно быть выполнено $d^*(\mathbf{p}) \geqslant \varepsilon > 0$.

Определим функцию $\Delta(\cdot)$ следующим образом:

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} d^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & \text{если } \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}, \\ -d^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}), & \text{если } \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}. \end{cases}$$

Непрерывность $\Delta(\cdot)$ следует из непрерывности $d^*(\cdot)$. Проверку того, что так определенная функция $\Delta(\cdot)$ удовлетворяет условиям (Δ1)—(Δ4), оставляем читателю в качестве упражнения. ■

Очевидно, что если в качестве базового индикатора полезности взять функцию $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, то возможно систематическое построение микроэкономической теории на основе полных предпочтений, которые не обязательно являются транзитивными[47].

Задачи

1.82 Докажите Теорему 1.18.

1.83 Пусть $X = \mathbb{R}^n_+$, бинарное отношение $\mathcal{R}$ задано следующим образом:

$$\mathbf{x} \, \mathcal{R} \, \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \geqslant y_i \; \forall i,$$

[47] См., напр., W. J. Shafer · The Nontransitive Consumer, *Econometrica* **42** (1974): 913–919. См. также задачу 2.31 на с. 137.

а на его основе построены следующие бинарные отношения:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}\,\mathcal{R}'\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}) \text{ и } (\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}),\\
&\mathbf{x}\,\mathcal{R}''\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}),\\
&\mathbf{x}\,\mathcal{R}'''\,\mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}) \text{ и } (\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}),\\
&\mathbf{x}\,\mathcal{R}''''\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}) \text{ и } \urcorner(\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Охарактеризуйте эти бинарные отношения. Как связаны между собой $\mathcal{R}'$ и $\mathcal{R}''$? Дайте интерпретацию всех этих отношений в контексте теории не вполне рациональных предпочтений.

1.84 Пусть отношение $\mathcal{R}$ рефлексивно и транзитивно. Рассмотрим задаваемые на его основе отношения $\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{R}^{**}$, определяемые следующим образом:

$$\begin{gathered}
\mathbf{x}\,\mathcal{R}^*\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \urcorner(\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}),\\
\mathbf{x}\,\mathcal{R}^{**}\,\mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y}) \text{ и } (\mathbf{y}\,\mathcal{R}\,\mathbf{x}).
\end{gathered}$$

Покажите, что $\mathcal{R}^*$ иррефлексивно, отрицательно транзитивно, а $\mathcal{R}^{**}$ рефлексивно, транзитивно и симметрично. Дайте интерпретацию всех этих отношений в контексте теории не вполне рациональных предпочтений.

1.85 Докажите Теорему 1.20.

1.86 Решите задачу 1.83, предположив, что исходное бинарное отношение $\mathcal{R}$ задано следующим образом:

$$\mathbf{x}\,\mathcal{R}\,\mathbf{y} \Leftrightarrow \exists i\colon x_i \geqslant y_i.$$

1.87 Дополните доказательство Теоремы 1.21, продемонстрировав, что определенная в нем функция $\Delta(\cdot)$ удовлетворяет условиям ($\Delta 1$)—($\Delta 4$).

1.88 Для предпочтений, описанных в задачах 1.22 и 1.23 из параграфа 1.5 (с. 52), определите, являются ли они непротиворечивыми и являются ли они полными.

Приложение 1.C. Стохастические предпочтения

Выше мы рассматривали предпочтения как детерминированные объекты, полагая, что наш потребитель всегда при выборе между яблоком и грушей предпочитал что-то одно — либо яблоко, либо грушу. Но реальный выбор экономических субъектов бывает определен далеко не столь однозначно: например, в половине случаев потребитель предпочитает яблоко, а в половине — грушу.

Как можно моделировать такого рода явления?

Пусть, как и ранее, X — множество возможных альтернатив. Назовем **стохастическими предпочтениями** распределение вероятностей над обычными неоклассическими предпочтениями, заданными на X. Назовем **стохастическим правилом выбора** функцию, сопоставляющую каждой ситуации выбора A из данного множества ситуаций выбора $\mathcal{A}$ распределение вероятностей над элементами из A. Вероятностное распределение, соответствующее ситуации выбора A, указывает для каждой альтернативы из A вероятность того, что она будет выбрана.

Рассмотрим, как можно построить правило выбора по стохастическим предпочтениям. Пусть $\beth$ — множество возможных предпочтений на X. Для упрощения будем полагать, что множество X конечно и что для всех предпочтений из $\beth$ отношение безразличия $\sim$ представляет собой пустое множество (отношение $\succ$ является полным). При этом будем предпочтения отождествлять со строгим отношением предпочтения $\succ$. Каждым предпочтениям $\succ \in \beth$ соответствует (обычное) правило выбора $C(\succ, \cdot)$. При сделанных предположениях выбор всегда непуст и однозначен. Стохастические предпочтения сопоставляют каждым предпочтениям $\succ \in \beth$ соответствующую вероятность $p(\succ)$. Стохастическое правило выбора $\tilde{C}(\cdot)$ определяется следующим образом. Для ситуации выбора $A \in \mathcal{A}$ значение стохастического правила выбора $\tilde{C}(A)$ — это дискретное распределение, которое альтернативе $\mathbf{x} \in A$ сопоставляет вероятность того, что эта альтернатива будет выбрана, т. е. сумму вероятностей $p(\succ)$ предпочтений $\succ \in \beth$, таких что $C(\succ, A) = \{\mathbf{x}\}$.

Следующий пример иллюстрирует этот стохастический взгляд на предпочтения.

Пример 1.7

Пусть множество X состоит из трех альтернатив — $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, а множество ситуаций выбора имеет вид $\mathcal{A} = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}, \{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}, \{\mathbf{z}, \mathbf{x}\}\}$.

Между тремя альтернативами, содержащимися в множестве X, можно задать шесть разных неоклассических предпочтений (без учета предпочтений с эквивалентными альтернативами):

1	2	3	4	5	6
$\mathbf{y} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$	$\mathbf{z} \succ \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$	$\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{z}$	$\mathbf{z} \succ \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$	$\mathbf{y} \succ \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$	$\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$

Сопоставим каждым из этих предпочтений вероятность того, что на них базируется выбор потребителя: $p_1, \ldots, p_6$. С учетом этих вероятностей находим

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) &= (p_2 + p_3 + p_6, p_1 + p_4 + p_5),\\ \tilde{C}(\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}) &= (p_1 + p_3 + p_5, p_2 + p_4 + p_6),\\ \tilde{C}(\{\mathbf{z}, \mathbf{x}\}) &= (p_3 + p_5 + p_6, p_1 + p_2 + p_4).\end{aligned}$$

Разберем более подробно вычисление $\tilde{C}(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\})$. В приведенных выше равенствах p_2, p_3 и p_6 — это вероятности тех предпочтений, согласно которым $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Их сумма и равна вероятности того, что из $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ будет выбрана альтернатива $\mathbf{x}$. Соответственно p_1, p_4 и p_5 — это вероятности тех предпочтений, согласно которым $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. ▲

Будем говорить, что стохастическое правило выбора $\tilde{C}(\cdot)$ рационализуется неоклассическими предпочтениями, если найдутся стохастические предпочтения, согласующиеся со стохастическим правилом выбора.

Пример 1.8 (продолжение Примера 1.7)

Рассмотрим, например, вопрос о том, может ли быть рационализовано предпочтениями стохастическое правило выбора

$$C(\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}) = C(\{\mathbf{z}, \mathbf{x}\}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Для ответа на поставленный вопрос необходимо определить, найдутся ли такие вероятности $(p_1, p_2, \ldots, p_6)$, которые бы согласовывались с данным правилом выбора. Фактически необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1\\ p_2\\ p_3\\ p_4\\ p_5\\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что решение данной системы уравнений существует, причем не единственное (так как матрица вырождена). Приведем в качестве примера два решения: $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Правило выбора $C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{y},\mathbf{z}\}) = C(\{\mathbf{z},\mathbf{x}\}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ могло бы наблюдаться в действительности, если бы, например, в первом квартале потребитель имел предпочтения $\mathbf{y} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{x}$, во втором квартале — предпочтения $\mathbf{z} \succ \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, а в третьем и четвертом кварталах — $\mathbf{y} \succ \mathbf{x} \succ \mathbf{z}$ и $\mathbf{x} \succ \mathbf{z} \succ \mathbf{y}$ соответственно. Тогда, опрашивая его в течение года, мы бы вывели второе из двух указанных стохастических правил выбора.

Аналогично непосредственной проверкой устанавливается, что, скажем, правило выбора $C(\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}) = C(\{\mathbf{y},\mathbf{z}\}) = C(\{\mathbf{z},\mathbf{x}\}) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ не может быть рационализовано предпочтениями, поскольку подходящих вероятностей подобрать не удается (не существует *неотрицательного* решения соответствующей системы уравнений). ▲

Задачи к главе

1.89 Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — неоклассические предпочтения, заданные на $X \subset \mathbb{R}^n$, а $C(\cdot)$ — соответствующее правило выбора, заданное на некотором множестве ситуаций выбора $\mathcal{A} \subset 2^X$.

(А) Докажите, что если предпочтения выпуклы, то для любого выпуклого множества $A \in \mathcal{A}$ множество $C(A)$ выпукло.

(В) Докажите, что если предпочтения строго выпуклы, то для любого выпуклого множества $A \in \mathcal{A}$ множество $C(A)$ содержит не более одной альтернативы.

Эта страница должна быть пустой!

Глава

Поведение потребителя

2

2.1. Введение

В гл. 1 на основе нескольких достаточно разумных предположений о свойствах индивидуальных предпочтений были получены условия существования функции полезности. Были также рассмотрены условия на предпочтения, гарантирующие такие ее естественные свойства, как монотонность, квазивогнутость и т. д. Тем самым был описан способ, которым потребитель упорядочивает потребительские наборы. В этой главе мы воспользуемся полученными результатами и конкретизируем рассмотренную ранее абстрактную модель выбора для случая потребительского выбора в условиях рынка. В теории потребительского поведения дополнительные предположения относительно предпочтений и ситуаций выбора (ситуациями выбора являются бюджетные множества) позволяют получить дополнительные результаты относительно такого выбора, которые (вместе с уже полученными в гл. 1) и составляют содержание теории поведения потребителя.

2.2. Модель поведения потребителя: основные понятия и свойства

2.2.1. Бюджетное множество

Ранее в модели рационального поведения было введено понятие множества альтернатив и ситуаций выбора. В модели поведения потребителя множество альтернатив — это множество допустимых потребительских наборов X, которое отражает все *физические* (и некоторые *институциональные*) ограничения, налагаемые на выбор потребителя. Например, индивидуум физически не может работать более 24 часов в сутки или потреблять какое-то благо в отрицательных количествах. Ограничения этого типа задают первичные границы, очерчивающие область, в которой осуществляется потребительский выбор.

Помимо этого, действия потребителя подчинены разного рода *экономическим* ограничениям. В условиях рынка *расходы* потребителя ограничены его *доходами* при данных рыночных ценах. Это так называемое **бюджетное ограничение**. Предполагается, что потребитель рассматривает свои доходы и рыночные цены как данные (т. е. является **ценополучателем**). Множество потребительских наборов из X, удовлетворяющих бюджетному ограничению, называют **бюджетным множеством**. Эти бюджетные множества описывают ситуации выбора в модели поведения потребителя.

В наиболее простом случае, когда доходы потребителей фиксированы, а расходы представлены затратами на покупку потребительского набора, бюджетное множество имеет вид

$$B(\mathbf{p}, R) = \left\{ \mathbf{x} \in X \;\middle|\; \mathbf{p}\mathbf{x} \leqslant R \right\},$$

где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$ — вектор цен рассматриваемых благ, а R — доход потребителя.

Альтернативный вариант предполагает, что изначально потребитель владеет некоторым **начальным запасом** благ — набором (вектором) благ $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$. Если предположить, что у потребителя нет иных форм дохода, кроме начального запаса, то в этом случае его бюджетное множество представляется в виде

$$B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) = \left\{ \mathbf{x} \in X \;\middle|\; \mathbf{p}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\omega}) \leqslant 0 \right\} = \left\{ \mathbf{x} \in X \;\middle|\; \mathbf{p}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}\boldsymbol{\omega} \right\},$$

т. е. стоимость покупок не может превышать стоимость продаж. Возможна двоякая интерпретация данного бюджетного множества. С одной стороны, его можно понимать как продажу *всего* запаса $\boldsymbol{\omega}$ с последующей покупкой набора $\mathbf{x}$. С другой стороны, данное ограничение можно интерпретировать как покупку/продажу только некоторого недостающего/избыточного относительно $\boldsymbol{\omega}$ количества благ.

Аналогичные по сути бюджетные множества возникают в ситуации, когда потребитель помимо фиксированного дохода (или начальных запасов) получает некоторый доход, например от принадлежащих ему акций предприятий или из других источников. Естественно, что в конкретных экономических моделях бюджетное множество может принимать довольно причудливый вид. Оно может сильно отличаться (формально, но не содержательно) от приведенных выше вариантов, но многие результаты и методы рассуждения, которые мы проиллюстрируем в дальнейшем, с некоторыми изменениями могут быть перенесены и на эти более сложные модели.

В формулировках теорем мы будем использовать некоторые предположения о множестве потребительских наборов X. Чтобы не загромождать формулировки перечислением, сформулируем список стандартных предположений:

- X является подмножеством R^l_+;
- X непусто;
- X выпукло;
- X замкнуто;
- $X + R^l_+$ содержится в X.

Обозначим этот набор условий (⊚). Кроме того, нам в дальнейшем понадобится обозначение для множества цен и доходов[1]:

$$\wp = \left\{ (\mathbf{p}, R) \;\middle|\; \mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++},\ R > \inf_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{px} \right\}.$$

Если пара $(\mathbf{p}, R)$ принадлежит множеству $\wp$, то цены $\mathbf{p}$ положительны, а доход R таков, что существует допустимый набор, который в ценах $\mathbf{p}$ сто́ит меньше R.

Сформулируем ряд свойств бюджетных множеств, которые нам понадобятся в дальнейшем. (Доказательство этих фактов несложно и оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 2.8.)

Теорема 2.1

Пусть множество допустимых наборов X удовлетворяет условиям (⊚). Тогда выполнены следующие свойства бюджетных множеств:

{i} если $(\mathbf{p}, R) \in \wp$, то бюджетное множество $B(\mathbf{p}, R)$ непусто;
{ii} если $\boldsymbol{\omega} \in X$, то бюджетное множество $B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ непусто;
{iii} бюджетные множества $B(\mathbf{p}, R)$ и $B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ замкнуты и выпуклы (в $\mathbb{R}^l$);
{iv} бюджетные множества $B(\mathbf{p}, R)$ и $B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ ограничены тогда и только тогда, когда $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$;
{v} $B(\mathbf{p}, R) = B(\lambda\mathbf{p}, \lambda R)$ и $B'(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) = B'(\lambda\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})$ для любого $\lambda > 0$;
{vi} если $R^* \geqslant R$, то $B(\mathbf{p}, R) \subset B(\mathbf{p}, R^*)$;
{vii} если $\mathbf{p}^* \geqslant \mathbf{p}$, то $B(\mathbf{p}^*, R) \subset B(\mathbf{p}, R)$. ┘

[1] Если $X = \mathbb{R}^l_+$, то $\wp = \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}_{++}$.

Как уже говорилось, для того чтобы было возможно анализировать и предсказывать поведение индивидуума, необходимо описать способ упорядочения потребительских наборов и ограничения, которым должны удовлетворять допустимые выборы. Теперь, имея эти составляющие, мы можем приступить к описанию потребительского выбора и его свойств.

2.2.2. Задача потребителя, маршаллианский спрос, непрямая функция полезности

Как уже отмечалось, гипотеза рациональности предполагает, что потребитель, ориентируясь на свои предпочтения (вкусы, оценки), выбирает наилучший вариант из числа доступных ему альтернатив, причем на предпочтения накладываются определенные ограничения, связанные с тем, что потребитель может сравнивать между собой любые возможные альтернативы и что он последователен в своих оценках. Модель поведения потребителя представляет собой конкретизацию модели выбора применительно к ситуации, когда потребитель выбирает набор из бюджетного множества. В дальнейшем везде, не оговаривая это особо, будем исходить из рациональности потребителя, т. е. из того, что он обладает неоклассическими предпочтениями.

Пусть $B \subset X$ — бюджетное множество. Задача потребителя[2] состоит в том, чтобы выбрать такой набор $\bar{\mathbf{x}} \in B$, который был бы не хуже любого другого набора из B. Результат решения задачи потребителя (множество оптимальных потребительских наборов) называется его спросом.

Определение 2.1

Пусть $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ — предпочтения на X, $\mathcal{B}$ — совокупность бюджетных множеств $B \subset X$. Тогда отображение $\mathbf{x} \colon \mathcal{B} \rightrightarrows X$, определяемое как

$$\mathbf{x}(B) = \left\{ \mathbf{x} \in B \;\middle|\; \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \text{ для всех } \mathbf{y} \in B \right\}$$

или (что эквивалентно) как

$$\mathbf{x}(B) = \left\{ \mathbf{x} \in B \;\middle|\; \text{если } \mathbf{y} \succ \mathbf{x}, \text{ то } \mathbf{y} \notin B \right\},$$

называется отображением спроса Ма́ршалла. В случае, если $\mathbf{x}(B)$ —

[2] Ср. с Определением 1.6 на с. 38.

одноэлементное множество для каждого $B \in \mathcal{B}$, $\mathbf{x}(B)$ называется **функцией спроса Маршалла**[3]. $\lhd$

Если предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u\colon X \to \mathbb{R}$, то задачу потребителя можно записать как задачу максимизации полезности при бюджетном ограничении:

$$u(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in B}.$$

Значение спроса для бюджетного множества B при этом задается следующим образом:

$$\mathbf{x}(B) = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{x} \in B} u(\mathbf{x}).$$

Если потребитель имеет фиксированный доход и осуществляет выбор среди наборов из $B(\mathbf{p}, R)$, то задача потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R принимает следующий вид[4]:

Задача потребителя

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\to \max_{\mathbf{x} \in X}, \\ \mathbf{p}\mathbf{x} &\leqslant R. \end{aligned} \tag{$\mathcal{C}$}$$

Для удобства будем записывать спрос, соответствующий такой задаче, в виде $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ (вместо общего обозначения $\mathbf{x}(B)$, которое использовали выше).

В качестве иллюстрации найдем функцию спроса для лексикографических предпочтений (их свойства обсуждались в Примере 1.4 на с. 43 и Примере 1.5 на с. 46).

Пример 2.1

Пусть потребитель имеет лексикографические предпочтения, заданные на $X = \mathbb{R}^2_+$. Пусть $R \geqslant 0$ и $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2_{++}$. Рассмотрим потребительский набор $\left(\frac{R}{p_1}, 0\right)$ и покажем, что он представляет собой спрос потребителей при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R. Для любого потребительского

---

[3] Спрос как функцию цены впервые ввел и использовал, по-видимому, Антуан Огюстен Курно (A. Cournot. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Paris: Hachette, 1838).

[4] Впервые поставил задачу такого вида и охарактеризовал ее решение Герман Генрих Госсен (H. H. Gossen. *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln*, Braunschweig: F. Vieweg und Sohn, 1854).

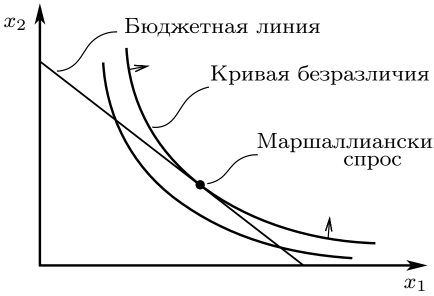


Рис. 2.1. *Маршаллианский спрос*

набора $\tilde{\mathbf{x}}$ из бюджетного множества, в который второе благо входит в положительном количестве, справедливо, что первая компонента вектора $\tilde{\mathbf{x}}$ строго меньше, чем $\frac{R}{p_1}$. Таким образом, по определению лексикографических предпочтений потребительский набор $\left(\frac{R}{p_1}, 0\right)$ предпочтительнее любого другого потребительского набора, принадлежащего бюджетному множеству $B(\mathbf{p}, R)$. ▲

Как известно из вводного курса микроэкономики, задача нахождения спроса потребителя имеет достаточно прозрачную геометрическую интерпретацию. В типичном случае[5] спрос представляет собой точку касания кривой безразличия и бюджетной линии, как это показано на Рис. 2.1. Таким образом, для того чтобы найти спрос потребителя, необходимо изобразить бюджетный треугольник и одну из кривых безразличия, двигая которую (на самом деле переходя от одной кривой безразличия к другой) найти точку касания ее и бюджетной линии.

Перейдем к рассмотрению свойств функции спроса и задачи потребителя ($\mathcal{C}$) в целом. Для определенности будем рассматривать случай, когда потребитель имеет фиксированный доход. Отметим, что многие из получаемых в дальнейшем результатов, без труда могут быть перенесены и на бюджетные множества общего вида.

Теорема 2.2 (свойства маршаллианского спроса)

Пусть потребитель имеет непрерывные предпочтения на множестве допустимых наборов X, удовлетворяющем свойствам (◎).

[5] Как станет ясно из дальнейшего, здесь неявно предполагается локальная ненасыщаемость предпочтений.

Тогда

{i} решение задачи потребителя существует, т. е. $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \neq \varnothing$, при всех $(\mathbf{p}, R) \in \wp$;

{ii} если предпочтения потребителя выпуклы, то $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — выпуклое множество;

{iii} если предпочтения потребителя строго выпуклы, то $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — непрерывная функция на множестве $\wp$;

{iv} отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ положительно однородно нулевой степени[6], т. е. $\mathbf{x}(\lambda\mathbf{p}, \lambda R) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ при $\lambda > 0$;

{v} если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы, то $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ удовлетворяет закону Вальраса, т. е. $\mathbf{px} = R$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$;

{vi} если потребительский набор $\mathbf{x}$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R ($\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$) и допусти́м при ценах $\mathbf{p}'$ и доходе R' ($\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}', R')$), набор $\mathbf{x}'$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}'$ и доходе R' ($\mathbf{x}' \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R')$) и допусти́м при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R ($\mathbf{x}' \in B(\mathbf{p}, R)$), то набор $\mathbf{x}$ является решением задачи потребителя[7] при ценах $\mathbf{p}'$ и доходе R' ($\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R')$). ⌋

Доказательство: {i} На основе Теоремы 2.1, получаем, что $B(\mathbf{p}, R)$ — непустое замкнутое ограниченное множество. В силу того что непрерывные предпочтения представимы непрерывной функцией полезности, по теореме Вейерштрасса имеем $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \neq \varnothing$.

{ii} Пусть предпочтения индивидуума выпуклы, $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ непусто и $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ — два элемента из множества $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, т. е. $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Рассмотрим потребительский набор $\mathbf{x}_\alpha = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}''$, где $\alpha \in (0; 1)$. В силу сделанных предположений множество $B(\mathbf{p}, R)$ выпукло. Отсюда с учетом того, что $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in B(\mathbf{p}, R)$, получаем $\mathbf{x}_\alpha \in B(\mathbf{p}, R)$, т. е. набор $\mathbf{x}_\alpha$ является допустимым в задаче потребителя. Так как $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, то по определению отображения спроса имеем $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}''$. Из $\mathbf{x}' \succcurlyeq \mathbf{x}''$ по свойству выпуклости предпочтений имеем[8] $\mathbf{x}_\alpha \succcurlyeq \mathbf{x}''$. Таким образом, $\mathbf{x}_\alpha$ принадлежит бюджетному множеству и не хуже любого набора из этого множества. Значит, $\mathbf{x}_\alpha \in B(\mathbf{p}, R)$.

[6] В дальнейшем, говоря об однородности, будем всюду предполагать положительную однородность, даже если это не указано особо.

[7] А набор $\mathbf{x}'$ является соответственно решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R.

[8] Ясно, что $\mathbf{x}_\alpha \sim \mathbf{x}''$.

{iii} Доказательство того, что $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — одноэлементное множество, несложно и оставляется читателю в качестве упражнения. Докажем только непрерывность.

Рассмотрим сходящуюся последовательность цен и доходов

$$\{(\mathbf{p}^n, R^n)\}_{n=1}^{\infty} \to (\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}),$$

такую что $(\mathbf{p}^n, R^n) \in \wp$ для каждого n и $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) \in \wp$. Введем обозначения $\mathbf{x}^n = \mathbf{x}(\mathbf{p}^n, R^n)$ и $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$ для соответствующих решений задачи потребителя.

Покажем прежде всего, что последовательность $\{\mathbf{x}^n\}$ ограничена. Поскольку последовательность $\{(\mathbf{p}^n, R^n)\}$ сходящаяся, то она является ограниченной. Выберем $\mathbf{p}^0$ и R^0 так, чтобы $R^0 > R^n$ и $\mathbf{p}^0 < \mathbf{p}^n$ для всех n. Мы можем выбрать $\mathbf{p}^0 > \mathbf{0}$, поскольку $\mathbf{p}^n > \mathbf{0}$ при всех n. По свойствам бюджетных множеств $B(\mathbf{p}^n, R^n) \subset B(\mathbf{p}^0, R^0)$ при всех n. Таким образом, последовательность $\{\mathbf{x}^n\}$ лежит в множестве $B(\mathbf{p}^0, R^0)$, которое является ограниченным при $\mathbf{p}^0 > \mathbf{0}$.

Для доказательства непрерывности функции спроса необходимо показать, что $\mathbf{x}^n \to \bar{\mathbf{x}}$. Предположим противное, т. е. что для некоторого $\varepsilon > 0$ имеется бесконечная подпоследовательность $\{\mathbf{x}^{n_k}\}$, такая что $\|\mathbf{x}^{n_k} - \bar{\mathbf{x}}\| > \varepsilon$ при всех k. Из этой подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, поскольку она ограничена. Для упрощения обозначений будем считать, что эта подпоследовательность совпадает с исходной последовательностью $\{\mathbf{x}^n\}$.

Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ — соответствующий предел ($\mathbf{x}^n \to \hat{\mathbf{x}}$). По замкнутости X имеем $\hat{\mathbf{x}} \in X$. Очевидно, что $\hat{\mathbf{x}}$ не может совпадать с $\bar{\mathbf{x}}$. Переходя в неравенствах $\mathbf{p}^n\mathbf{x}^n \leqslant R^n$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $\bar{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}} \leqslant \bar{R}$. Значит, $\hat{\mathbf{x}}$ принадлежит $B(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$. Так как $\bar{\mathbf{x}}$ — единственный наилучший набор в бюджетном множестве $B(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$, то $\bar{\mathbf{x}} \succ \hat{\mathbf{x}}$.

По предположению $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) \in \wp$. Значит, $\bar{R} > \inf_{\mathbf{x} \in X} \bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}$ (см. определение множества $\wp$ на с. 105). Поэтому существует набор $\mathbf{x}' \in X$, такой что $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}' < \bar{R}$. Рассмотрим выпуклые комбинации $\mathbf{x}(\alpha) = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\bar{\mathbf{x}}$ при $\alpha \in (0; 1)$. Для них $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}(\alpha) < \bar{R}$. При достаточно малых значениях α в силу непрерывности выполнено $\mathbf{x}(\alpha) \succ \hat{\mathbf{x}}$. Обозначим один из таких наборов через $\mathbf{x}''$.

Далее, так как $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}'' < \bar{R}$, то найдется достаточно большое N, такое что при $n > N$ выполнено неравенство $\mathbf{p}^n\mathbf{x}'' < R^n$. Для каждого n, такого что $\mathbf{p}^n\mathbf{x}'' < R^n$, в силу оптимальности $\mathbf{x}^n$ мы должны иметь $\mathbf{x}^n \succ \mathbf{x}''$. Так как предпочтения непрерывны, то, переходя к пределу, получаем $\hat{\mathbf{x}} \succcurlyeq \mathbf{x}''$. Тем самым мы пришли к противоречию и убедились, что $\mathbf{x}^n \to \bar{\mathbf{x}}$.

Замечание: В общем случае выпуклых предпочтений, используя с незначительными изменениями предложенную схему доказательства, можно продемонстрировать, что отображение спроса имеет замкнутый график и следовательно полунепрерывно сверху. См. также задачу 2.96.

{iv} Доказательство несложно и оставляется читателю в качестве упражнения.

{v} Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — отображение спроса, для которого не выполнен закон Вальраса, т. е. существует $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, такой что $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} < R$. Тогда по свойству локальной ненасыщаемости в любой окрестности точки $\bar{\mathbf{x}}$ должен существовать набор $\tilde{\mathbf{x}}$, такой что $\tilde{\mathbf{x}} \succ \bar{\mathbf{x}}$. Если выбрать достаточно малую окрестность, то $\tilde{\mathbf{x}}$ будет удовлетворять бюджетному ограничению ($\mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}} \leqslant R$), что противоречит оптимальности набора $\bar{\mathbf{x}}$.

{vi} Так как $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{p}, R)$, то $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}'$. Аналогично из того, что $\mathbf{x}' \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R')$ и $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}', R')$, следует $\mathbf{x}' \succcurlyeq \mathbf{x}$. Таким образом, $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$, откуда $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R')$. ■

Поясним содержание данного утверждения. Пункты {i}—{v} достаточно прозрачны и являются стандартными свойствами задач математического программирования. В них показаны существование решения задачи потребителя и базовые свойства, которым удовлетворяет отображение спроса: однородность, выпуклость, выполнение закона Вальраса (в точке оптимума бюджетное ограничение выходит на равенство).

Свойство {vi} является вариантом слабой аксиомы выявленных предпочтений (см. Определение 1.20 на с. 81). Если в некоторой ситуации потребителю были доступны потребительские наборы $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ и был выбран (однозначно[9]) потребительский набор $\mathbf{x}$, то тем самым выбор явно указывает, что набор $\mathbf{x}$ лучше набора $\mathbf{x}'$. Таким образом, если в какой либо другой ситуации *рациональный* потребитель выбирает набор $\mathbf{x}'$, то, следовательно, набор $\mathbf{x}$ ему недоступен (не удовлетворяет бюджетному ограничению). Данное свойство говорит о невозможности существования двух ситуаций выбора, в одной из которых потребитель своим выбором сигнализирует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{x}'$, а в другой ему доступны и $\mathbf{x}$, и $\mathbf{x}'$, но он выбирает $\mathbf{x}'$.

Следующий пример иллюстрирует дополнительные свойства, которым удовлетворяет спрос, порожденный гомотетичными предпочтениями.

---

[9] Иначе говоря, мы имеем функцию спроса, а не многозначное отображение.

Пример 2.2

Будем исходить из того, что рассматриваемые гомотетичные предпочтения являются непрерывными. В этом случае их можно представить положительно однородной первой степени функцией полезности. Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и $\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$ — отображения спроса при ценах $\mathbf{p}$ и доходах R и 1 соответственно. Покажем, что $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$, т. е. спрос однороден первой степени по доходу.

Докажем, что $R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1) \subset \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Для этого нужно доказать, что если $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$, то $R\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Очевидно, что $R\bar{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{p}, R)$. Покажем, что в $B(\mathbf{p}, R)$ нет наборов более предпочтительных, чем $R\bar{\mathbf{x}}$. Пусть это не так и существует $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, такой что $u(\hat{\mathbf{x}}) > u(R\bar{\mathbf{x}})$. Для набора $\frac{1}{R}\hat{\mathbf{x}}$ выполнено $\frac{1}{R}\hat{\mathbf{x}} \in B(\mathbf{p}, 1)$, и, поскольку функция полезности однородна, $u\left(\frac{1}{R}\hat{\mathbf{x}}\right) > u(\bar{\mathbf{x}})$. Но существование такого набора противоречит тому, что $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$. Поэтому, $R\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$.

Обратное включение, а именно $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \subset R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$, доказывается аналогично. Тем самым показано, что для случая положительно однородной функции полезности кривые Энгеля представляют собой конусы, выходящие из начала координат. Если спрос однозначен, то кривые Энгеля являются лучами. Доказательство несложно перестроить для общего случая (не обязательно непрерывных) гомотетичных предпочтений. ▲

Теперь получим свойства спроса для предпочтений, представимых квазилинейной функцией полезности.

Пример 2.3

Функция полезности вида $u(\mathbf{x}) = s(x_1, \ldots, x_{l-1}) + x_l = s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l$ называется квазилинейной[10]. Здесь через $\mathbf{x}_{-l}$ мы обозначили вектор потребления всех благ, кроме l-го. Предположим, что соответствующее множество потребительских наборов имеет вид $X = \mathbb{R}_+^{l-1} \times \mathbb{R}$, т. е. не накладывается ограничение неотрицательности потребления l-го блага. Оказывается, что для такой функции полезности спрос на первые $l - 1$ благо не зависит от дохода, т. е. $\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R) = \mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R')$ при любых ценах $\mathbf{p}$ и доходах R, R'.

Действительно, пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Докажем, что

$$\big(\mathbf{x}_{-l}, (R' - R)/p_l + x_l\big) \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R').$$

[10] Свойства экономики, в которой функции полезности всех потребителей квазилинейны, рассматриваются в гл. 5.

Пусть это не так и в бюджетном множестве $B(\mathbf{p}, R')$ существует вектор $\tilde{\mathbf{x}}$, который имеет более высокую полезность, чем $(\mathbf{x}_{-l}, (R' - R)/p_l + x_l)$. Другими словами, существует вектор $\tilde{\mathbf{x}}$, для которого

$$\mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}} \leqslant R' \quad \text{и} \quad s(\tilde{\mathbf{x}}_{-l}) + \tilde{x}_l > s(\mathbf{x}_{-l}) + \frac{R' - R}{p_l} + x_l.$$

В таком случае потребительский набор $(\tilde{\mathbf{x}}_{-l}, (R - R')/p_l + \tilde{x}_l)$ принадлежит бюджетному множеству $B(\mathbf{p}, R)$ и имеет более высокую полезность, чем $\mathbf{x}$, т. е.

$$\mathbf{p}_{-l}\tilde{\mathbf{x}}_{-l} + R - R' + p_l\tilde{x}_l \leqslant R \quad \text{и} \quad s(\tilde{\mathbf{x}}_{-l}) + \frac{R - R'}{p_l} + \tilde{x}_l > s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l,$$

а это противоречит выбору $\mathbf{x}$.

Таким образом, $\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R) \subset \mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R')$. Обратное включение доказывается по аналогии.

Если множество потребительских наборов имеет вид $X = \mathbb{R}^l_+$, то указанное свойство выполняется не всегда. Если функция $s(\cdot)$ является вогнутой, $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, $x_l > 0$ (ограничение неотрицательности неактивно) и $(R' - R)/p_l + x_l \geqslant 0$, то $(\mathbf{x}_{-l}, (R' - R)/p_l + x_l) \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R')$ (см. задачу 2.13). ▲

Выше мы рассмотрели основные свойства маршаллианского спроса. Теперь остановимся на вопросе непосредственного нахождения спроса при заданных предпочтениях (функции полезности) при положительных ценах и доходе. Техника нахождения спроса потребителя опирается на применение теоремы Куна—Таккера к задаче потребителя $(\mathcal{C})$ в предположении, что функция полезности $u(\cdot)$ является дифференцируемой. Лагранжиан для этой задачи имеет следующий вид:

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda(R - \mathbf{p}\mathbf{x}),$$

где λ — множитель Лагранжа, соответствующий бюджетному ограничению.

Рассмотрим сначала случай, когда спрос потребителя $\bar{\mathbf{x}}$ является внутренней точкой его множества допустимых потребительских наборов ($\bar{\mathbf{x}} \in \operatorname{int} X$). В этом случае согласно теореме Куна—Таккера найдется множитель Лагранжа $\lambda \geqslant 0$, такой что выполнено

$$\nabla u(\bar{\mathbf{x}}) = \lambda\mathbf{p}.$$

(Предполагается, что $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, поэтому градиент единственного ограничения задачи не равен нулю и, следовательно, выполнены условия регулярности, требуемые для справедливости теоремы Куна—Таккера.) Кроме того, согласно той же теореме Куна—Таккера, должно быть выполнено следующее условие дополняющей нежесткости:

$$(R - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}})\lambda = 0.$$

Если $\nabla u(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$, то множитель Лагранжа положителен и поэтому выполняется закон Вальраса $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$.

Рассмотрим теперь случай, когда спрос не обязательно является внутренним. Предположим, что множество допустимых потребительских наборов X задается неравенствами $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$. Предположим также, что функция полезности задана на некотором открытом множестве, включающем в себя X (например, на $\mathbb{R}^l$). Условия Куна—Таккера для набора $\bar{\mathbf{x}}$ и множителя Лагранжа λ имеют в таком случае следующий вид:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \nabla u(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda\mathbf{p} \leqslant 0; & (2)\ (\nabla u(\bar{\mathbf{x}}) - \lambda\mathbf{p})\bar{\mathbf{x}} = 0; \\ (3)\ \lambda(R - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}) = 0; & (4)\ \lambda \geqslant 0. \end{array}$$

Если $\bar{\mathbf{x}}$ является спросом потребителя, то согласно теореме Куна—Таккера найдется λ, такой что $(\bar{\mathbf{x}}, \lambda)$ удовлетворяют приведенным условиям.

В задаче имеются l ограничений на неотрицательность потребления и бюджетное ограничение. При положительных ценах и доходах хотя бы одно из них не является активным. Очевидно, что градиенты остальных ограничений будут линейно независимыми. Градиент бюджетного ограничения равен $-\mathbf{p} < \mathbf{0}$, градиенты остальных ограничений имеют вид $\mathbf{e}^i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (i-й орт). Таким образом, выполнены условия регулярности Куна—Таккера[11].

Величины $\bar{\mathbf{x}}$ и λ, удовлетворяющие условиям Куна—Таккера, можно искать перебором, рассматривая все возможные варианты: каждая из переменных $\bar{x}_i$ может быть положительной либо равной нулю; то же самое верно и для множителя Лагранжа λ. Всего имеется 2^{l+1} вариантов (часть из которых заведомо невозможны). Для каждого из вариантов следует рассмотреть, являются ли условия совместными, и, если да, то найти соответствующее множество решений.

[11] Здесь можно применить и условие регулярности Слейтера. Действительно, бюджетное множество выпукло; при положительных ценах и доходе оно имеет внутренние точки. (На самом деле в рассматриваемом случае наличия внутренних точек даже и не требуется, поскольку все ограничения линейны.)

Рассмотрим свойства решений. Если функция полезности такова, что для всех допустимых наборов $\mathbf{x}$ хотя бы для одного блага x_i выполняется неравенство $\partial u(\mathbf{x})/\partial x_i > 0$, то, как следует из условия (1), для найденных решений $\lambda > 0$. По условию дополняющей нежесткости (3) из $\lambda > 0$ следует, что $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$ (закон Вальраса). Выполнение закона Вальраса для оптимальных потребительских наборов гарантировано также в случае, когда предпочтения локально ненасыщаемы (см. Теорему 2.2). Поскольку цены и доходы положительны, из $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$ следует, что хотя бы одно благо должно потребляться в положительном количестве.

Условие (1) означает, что для каждого из благ должно быть выполнено неравенство

$$\frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_i} \leqslant \lambda p_i.$$

Для тех же благ, которые потребляются в положительном количестве ($\bar{x}_i > 0$), из условия дополняющей нежесткости (2) следует, что выполнено равенство

$$\frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})}{\partial x_i} = \lambda p_i.$$

Предположим, что $\lambda > 0$ и k — такое благо, что $\bar{x}_k > 0$, а i — любое другое благо. Исключая множитель Лагранжа из условий Куна—Таккера, получим

$$\frac{p_i}{p_k} \geqslant \frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_i}{\partial u(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_k} = MRS^{i/k}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Если благо i таково, что $x_i > 0$, то это условие выполняется как равенство:

$$\frac{p_i}{p_k} = \frac{\partial u(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_i}{\partial u(\bar{\mathbf{x}})/\partial x_k} = MRS^{i/k}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Данное свойство должно быть известно читателю из вводного курса микроэкономики и означает, что решение задачи потребителя характеризуется равенством предельной нормы замены (замещения) любых двух благ отношению цен этих благ.

Можно использовать и несколько иной способ отыскания спроса потребителя, если он не обязательно является внутренним. Каждая из переменных $\bar{x}_i$ может быть либо положительной, либо равной нулю. Если «забыть» про блага, потребление которых нулевое, то по остальным благам потребительский набор является внутренним и можно приравнять производные Лагранжиана к нулю. Всего при таком переборе имеется 2^l вариантов. Для каждого из вариантов можно вычислить решение, а потом выбрать из этих решений то, которому соответствует наибольшее значение полезности.

Пусть нашлись некоторые $\bar{\mathbf{x}}$ и λ, удовлетворяющие условиям Куна—Таккера. Условия Куна—Таккера являются достаточными для того, чтобы потребительский набор $\bar{\mathbf{x}}$ был решением задачи потребителя $(\mathcal{C})$, если функция полезности $u(\cdot)$ вогнута. Условие вогнутости можно заменить на условие квазивогнутости, если выполнено $\nabla u(\bar{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$.

Проиллюстрируем на примере применение достаточных условий оптимальности для нахождения функции спроса.

Пример 2.4

Пусть множество допустимых альтернатив $X = \mathbb{R}^l_+$ и предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$, где $a > 0$. Данная функция строго вогнута (как сумма строго вогнутых функций). (Отметим также, что $u(\mathbf{x})$ строго монотонна.) Предположим, что решение внутреннее. Тогда оно подпадает под условия теоремы Куна—Таккера; при этом условия Куна—Таккера являются достаточными условиями оптимальности, коль скоро функция полезности вогнута. Таким образом, если найдутся вектор $\mathbf{x} > 0$ и множитель Лагранжа $\lambda \geqslant 0$, такие что для них выполнены условия Куна—Таккера, то такой $\mathbf{x}$ является решением задачи. Из строгой вогнутости целевой функции следует, что $\mathbf{x}$ — единственное решение задачи.

Функция Лагранжа для задачи потребителя с функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ имеет вид

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}, \lambda) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2} + \lambda(R - p_1x_1 - p_2x_2).$$

Условия Куна—Таккера имеют вид

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial \mathbb{L}(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_1} = \tfrac{1}{2\sqrt{x_1}} - \lambda p_1 = 0, &\quad &\tfrac{\partial \mathbb{L}(\mathbf{x},\lambda)}{\partial x_2} = \tfrac{a}{2\sqrt{x_2}} - \lambda p_2 = 0,\\
&\tfrac{\partial \mathbb{L}(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda} = R - p_1x_1 - p_2x_2 \geqslant 0, &\quad &\tfrac{\partial \mathbb{L}(\mathbf{x},\lambda)}{\partial \lambda}\lambda = (R - p_1x_1 - p_2x_2)\lambda = 0.
\end{aligned}$$

Из этих условий заключаем, что $\lambda > 0$, т. е. бюджетное ограничение выполняется как равенство:

$$p_1x_1 + p_2x_2 = R.$$

Из первых двух уравнений имеем

$$\frac{\sqrt{x_2}}{a\sqrt{x_1}} = \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{или} \qquad x_2 = \left(a\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1.$$

Подставляя полученное выражение для x_2 в бюджетное ограничение, получим

$$\left(p_1 + a^2\frac{(p_1)^2}{p_2}\right)x_1 = R,$$

откуда

$$x_1 = \frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}.$$

Таким образом, функция маршаллианского спроса имеет вид

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}; \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}\right).$$

Легко видеть, что полученная нами функция спроса удовлетворяет всем свойствам функции спроса, установленным в Теореме 2.2 (проверьте это самостоятельно). ▲

Перейдем теперь к рассмотрению другого понятия, относящегося к потребительскому выбору, а именно понятия непрямой функции полезности[12].

Определение 2.2

Непрямой функцией полезности[13] называется функция, которая ценам $\mathbf{p}$ и доходу R сопоставляет значение полезности $u(\bar{\mathbf{x}})$, где $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи потребителя (т. е. $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$). $\lhd$

Естественно, область определения непрямой функции полезности — это такие пары цен и доходов $(\mathbf{p}, R)$, при которых существует решение задачи потребителя. Например в случае, когда предпочтения непрерывны, рассматриваемая функция определена на введенном выше множестве $\wp$, т. е. при всех положительных ценах и доходах $R > \inf_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{px}$.

Следующая теорема устанавливает основные свойства непрямой функции полезности. Эти свойства позволяют, в частности, делать выводы об изменении полезности потребителя при изменении бюджетного множества.

---

[12] Английский термин *indirect utility function* также иногда переводят на русский язык как «косвенная функция полезности».

[13] Непрямая функция полезности впервые рассматривалась в работе G. B. Antonelli • *Sulla teoria matematica della economia politica*, Pisa: Tipografia del Falchetto, 1886.

Теорема 2.3 (свойства непрямой функции полезности)

Пусть предпочтения потребителя на множестве допустимых наборов X, удовлетворяющем свойствам (◎), описываются непрерывной функцией полезности и пусть непрямая функция полезности $v(\mathbf{p}, R)$ рассматривается как функция с областью определения $\wp$. Тогда

{i} функция $v(\mathbf{p}, R)$ однородна нулевой степени по $(\mathbf{p}, R)$, т. е. $v(\lambda\mathbf{p}, \lambda R) = v(\mathbf{p}, R)$ $(\lambda > 0)$;

{ii} функция $v(\mathbf{p}, R)$ не убывает по доходу $(v(\mathbf{p}, R') \geqslant v(\mathbf{p}, R)$ при $R' > R)$, причем строго возрастает по доходу, если предпочтения локально ненасыщаемы;

{iii} функция $v(\mathbf{p}, R)$ не возрастает по ценам $(v(\mathbf{p}, R) \leqslant v(\mathbf{p}', R)$ при $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{p}')$, причем если предпочтения локально ненасыщаемы, то $v(\mathbf{p}, R) < v(\mathbf{p}', R)$ при $\mathbf{p} > \mathbf{p}'$ и $R > 0$;

{iv} функция $v(\mathbf{p}, R)$ квазивыпукла по $(\mathbf{p}, R)$;

{v} функция $v(\mathbf{p}, R)$ непрерывна. ⌟

Доказательство: {i} Однородность нулевой степени следует из определения непрямой функции полезности и однородности нулевой степени функции спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ (см. Теорему 2.2).

{ii} Нестрогое неравенство $v(\mathbf{p}, R') \geqslant v(\mathbf{p}, R)$ следует из того, что при $R' > R$ бюджетное множество $B(\mathbf{p}, R')$ содержит[14] бюджетное множество $B(\mathbf{p}, R)$. Далее, если бы при $R' > R$ мы имели $v(\mathbf{p}, R') = v(\mathbf{p}, R)$, то наборы из $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ принадлежали бы $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R')$, но для них не выполнялся бы закон Вальраса. Этого при локальной ненасыщаемости предпочтений быть не может, значит, должно выполняться строгое неравенство $v(\mathbf{p}, R') > v(\mathbf{p}, R)$.

{iii} Доказательство данного пункта в целом повторяет доказательство предыдущего и оставляется читателю в качестве упражнения.

{iv} Отметим прежде всего, что множество $\wp$ выпукло (см. его определение на с. 105). Этот факт читатель может установить самостоятельно. Мы хотим доказать, что для любых $(\mathbf{p}^1, R^1)$ и $(\mathbf{p}^2, R^2)$ из множества $\wp$ и любого $\alpha \in [0; 1]$ выполнено соотношение[15]

$$v(\alpha\mathbf{p}^1 + (1-\alpha)\mathbf{p}^2, \alpha R^1 + (1-\alpha)R^2) \leqslant \max\{v(\mathbf{p}^1, R^1), v(\mathbf{p}^2, R^2)\}.$$

[14] Отметим, что случай $B(\mathbf{p}, R') = B(\mathbf{p}, R)$ не исключен.

[15] Напомним, что функция $f(\mathbf{x})$ называется квазивыпуклой, если функция $-f(\mathbf{x})$ является квазивогнутой.

Пусть $\mathbf{x}$ — решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^\alpha = \alpha\mathbf{p}^1 + (1-\alpha)\mathbf{p}^2$ и доходе $R^\alpha = \alpha R^1 + (1-\alpha)R^2$, т. е. $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}^\alpha, R^\alpha)$. Очевидно, что $\mathbf{x}$ является допустимым либо при ценах $\mathbf{p}^1$ и доходе R^1, либо при ценах $\mathbf{p}^2$ и доходе R^2. Действительно, если бы это было неверно, тогда выполнялись бы неравенства $\mathbf{p}^1\mathbf{x} > R^1$ и $\mathbf{p}^2\mathbf{x} > R^2$. Взяв первое неравенство с весом α, а второе — с весом $(1-\alpha)$ и сложив, получаем $\mathbf{p}^\alpha\mathbf{x} > R^\alpha$. Это противоречит тому, что $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}^\alpha, R^\alpha)$. Таким образом, выполнено либо $\mathbf{p}^1\mathbf{x} \leqslant R^1$, либо $\mathbf{p}^2\mathbf{x} \leqslant R^2$. Без потери общности предположим, что $\mathbf{p}^1\mathbf{x} \leqslant R^1$. Из того, что $v(\mathbf{p}^1, R^1)$ есть по определению значение целевой функции на оптимальном решении задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^1$ и доходе R^1, следует что $v(\mathbf{p}^1, R^1) \geqslant u(\mathbf{x})$, так как $\mathbf{x}$ — допустимое решение этой задачи. Тем более должно выполняться и требуемое соотношение

$$u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{p}^\alpha, R^\alpha) \leqslant \max\{v(\mathbf{p}^1, R^1), v(\mathbf{p}^2, R^2)\}.$$

{v} В предположении строгой выпуклости предпочтений непрерывность непрямой функции полезности следует из непрерывности функции спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, которую мы установили в Теореме 2.2. Для доказательства непрерывности в общем случае следует воспользоваться компактностью бюджетного множества, непрерывностью бюджетного множества по ценам (Теорема B.46 в Приложении B на с. II-647) и теоремой Бержа (Теорема B.60 на с. II-652). ■

Проиллюстрируем понятие непрямой функции полезности на примерах. Первый из них относится к гомотетичным предпочтениям.

Пример 2.5 (продолжение Примера 2.2)

Выше мы показали, что функция маршаллианского спроса при гомотетичности предпочтений (другими словами, при однородности функции полезности) однородна первой степени по доходу, т. е. $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$. Таким образом,

$$v(\mathbf{p}, R) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = u(R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1))R = a(\mathbf{p})R,$$

где в качестве $a(\mathbf{p})$ выступает $u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1))$. ▲

Второй пример относится к квазилинейным предпочтениям.

Пример 2.6 (продолжение Примера 2.3)

Для квазилинейной функции полезности $u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l$, заданной на $X = \mathbb{R}_{+}^{l-1} \times \mathbb{R}$, мы вывели, что спрос на первые $l-1$ благо не зависит от дохода. Введем в рассмотрение функцию $\mathbf{x}_{-l}^{*}(\cdot)$ («функцию спроса»), такую что она вектору цен $\mathbf{p}$ ставит в соответствие спрос на все блага, кроме l-го: $\mathbf{x}_{-l}^{*}(\mathbf{p}) \in \mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}, R)$. Функция полезности возрастает по l-му благу, поэтому бюджетное ограничение выполняется как равенство в точке спроса. Подставляя бюджетное ограничение в функцию полезности, получаем следующее выражение для непрямой функции полезности:

$$v(\mathbf{p}, R) = s(\mathbf{x}_{-l}^{*}(\mathbf{p})) + \frac{R - \mathbf{p}_{-l}\mathbf{x}_{-l}^{*}(\mathbf{p})}{p_l}.$$

▲

Пример 2.7 (продолжение Примера 2.4)

Непрямая функция полезности будет иметь вид:

$$v(\mathbf{p}, R) = \sqrt{\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}} + a\sqrt{\frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}} = \\ = \sqrt{\frac{R}{p_2 + a^2p_1}}\left(\frac{p_2 + a^2p_1}{\sqrt{p_1p_2}}\right) = \sqrt{\frac{R(p_2 + a^2p_1)}{p_1p_2}}.$$

Проверим выполнение свойств непрямой функции полезности, установленных нами в Теореме 2.3.

Возрастание непрямой функции полезности по доходу очевидно в силу возрастания функции $\sqrt{x}$.

Убывание непрямой функции полезности по ценам следует из того факта, что функции $\frac{1}{p_1}$ и $\frac{a^2}{p_2}$ убывают по ценам и $v(\mathbf{p}, R) = \sqrt{R\left(\frac{1}{p_1} + \frac{a^2}{p_2}\right)}$.

Проверка квазивогнутости непрямой функции полезности достаточно громоздка, и мы ее проводить не будем. Желающие могут проделать это самостоятельно. ▲

2.2.3. Задача минимизации расходов и хиксианский спрос

Рассмотрим вопрос о том, какие денежные средства требуются потребителю при данных ценах для достижения заданного уровня благосостояния и какие потребительские наборы обеспечивают минимальное значение потребительских расходов. Ответы на эти вопросы можно получить с помощью следующей задачи:

Задача минимизации потребительских расходов

$$\begin{aligned} &\mathbf{ph} \to \min_{\mathbf{h}\in X}, \\ &\mathbf{h} \succcurlyeq \mathbf{x}. \end{aligned} \qquad (\mathcal{H})$$

В этой задаче требование к минимально допустимому уровню благосостояния задается потребительским набором $\mathbf{x}$. В верхнем лебеговом множестве набора $\mathbf{x}$, т. е. в $L^+(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \in X \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x} \,\}$, ищется самый дешевый (в ценах $\mathbf{p}$) набор. На основе этой задачи приходим к понятию хиксианского спроса.

Определение 2.3

Отображение

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \operatorname*{argmin}_{\mathbf{h}\in L^+(\mathbf{x})} \mathbf{ph}$$

называется спросом по Хиксу (хиксианским спросом)[16]. В случае если данное отображение является однозначным, $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ называется функцией спроса по Хиксу[17]. $\lhd$

Таким образом, хиксианский спрос при заданных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$ — это *самый дешевый* (в ценах $\mathbf{p}$) потребительский набор среди всех наборов, которые *не хуже*, чем $\mathbf{x}$, в то время как обычный (маршаллианский) спрос — это *наилучший* с точки зрения предпочтений индивидуума набор в *бюджетном* множестве. Рис. 2.2 иллюстрирует различие понятий маршаллианского спроса и хиксианского спроса в случае двух благ.

[16] Приведенное здесь определение хиксианского спроса не является традиционным. В большинстве учебников хиксианский спрос определяется как набор, который дает заданный уровень *полезности*. Преимуществом данного здесь определения является то, что в нем не используются понятия и термины, ассоциирующиеся с кардиналистским подходом.

Наше изложение следует в русле ординалистского подхода к теории потребительского спроса, развитого Лайонелем Мак-Кензи (L. McKenzie · Demand Theory Without a Utility Index, *Review of Economic Studies* **24** (1957): 183–189). Поскольку исходными при ординалистском подходе являются предпочтения, желательно по возможности вводить такие понятия, которые не опираются непосредственно на функцию полезности.

[17] Понятие хиксианского спроса появилось и получило развитие в работах Джона Хикса (J. R. Hicks · *Value and Capital*, Oxford University Press, 1939, рус. пер. Дж. Р. Хикс · *Стоимость и капитал*, М.: Прогресс, 1993), Пола Самуэльсона (P. A. Samuelson · *Foundations of Economic Analysis*, Harvard University Press, 1947) и Лайонеля Мак-Кензи (см. сноску 16).

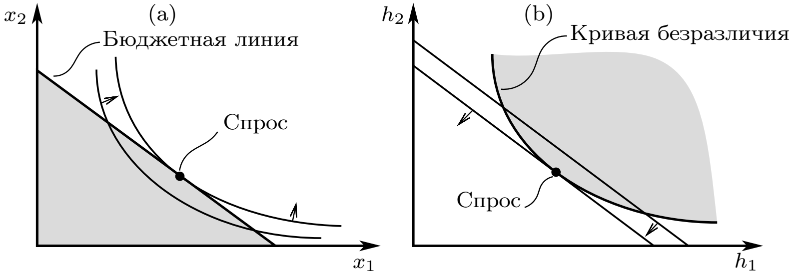


Рис. 2.2. *(a) Маршаллианский и (b) хиксианский спрос*

Если предпочтения представимы функцией полезности $u\colon X \to \mathbb{R}$, отображение хиксианского спроса может быть найдено как решение параметрического семейства задач математического программирования:

$$\begin{aligned} \mathbf{ph} &\to \min_{\mathbf{h}\in X}, \\ u(\mathbf{h}) &\geqslant u(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{$\mathcal{H}_u$}$$

каждая из которых называется двойственной (взаимной) к соответствующей задаче потребителя (задаче поиска маршаллианского спроса).

Следующая теорема устанавливает основные свойства отображения (функции) хиксианского спроса. В теореме используется предположение о том, что если допустимый потребительский набор не является самым худшим среди допустимых, то он не является и самым дешевым при любых не равных нулю ценах. Формально:

> Если для $\mathbf{x} \in X$ найдется $\mathbf{x}' \in X$, такой что $\mathbf{x}' \prec \mathbf{x}$, то при всех $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ для него найдется $\mathbf{x}'' \in X$, такой что $\mathbf{px}'' < \mathbf{px}$.

Обозначим это предположение ($\boxdot$).

Теорема 2.4 (свойства хиксианского спроса)

Пусть множество допустимых наборов X удовлетворяет условиям ($\circledcirc$) и предпочтения потребителя являются непрерывными. Тогда

{i} для каждого $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ справедливо $\mathbf{ph} \leqslant \mathbf{px}$, и как следствие, $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \subset B(\mathbf{p}, \mathbf{px})$;

{ii} если выполнено ($\boxdot$) и $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, то для каждого $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ справедливо $\mathbf{h} \sim \mathbf{x}$.

{iii} решение задачи $(\mathcal{H})$ существует (т. е. $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}) \neq \varnothing$) при всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и $\mathbf{x} \in X$;

{iv} если предпочтения потребителя выпуклы, то $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ — выпуклое множество;

{v} если предпочтения потребителя строго выпуклы и выполнено $(\boxdot)$, то $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ — непрерывная функция на $X \times \mathbb{R}^l_{++}$;

{vi} отображение $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ однородно нулевой степени по $\mathbf{p}$, т. е. $\mathbf{h}(\lambda\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ $(\lambda > 0)$;

{vii} если $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}''$, то $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}') = \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}'')$; ┘

Доказательство: Доказательство во многом схоже с доказательством Теоремы 2.2 и оставляется читателю в качестве упражнения. Подскажем только некоторые идеи.

{ii} Пусть $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ и $\mathbf{h} \succ \mathbf{x}$. Тогда по свойству $(\boxdot)$ существует $\mathbf{x}' \in X$, такой что $\mathbf{p}\mathbf{x}' < \mathbf{p}\mathbf{h}$. Для наборов вида $\mathbf{h}(\alpha) = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{h}$ при $\alpha \in (0;1)$ выполнено $\mathbf{p}\mathbf{h}(\alpha) < \mathbf{p}\mathbf{h}$. При малых α по непрерывности $\mathbf{h}(\alpha) \succ \mathbf{x}$. Противоречие.

{iii} Вместо исходной задачи $(\mathcal{H})$ можно рассмотреть задачу минимизации расходов на множестве $L^+(\mathbf{x}) \cap B(\mathbf{p},\mathbf{p}\mathbf{x})$, которое является непустым, замкнутым и ограниченным. ■

Обсудим, как и в случае с маршаллианским спросом, необходимые и достаточные условия оптимума задачи минимизации расходов (поиска хиксианского спроса)

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}\mathbf{h} \to \min_{\mathbf{h} \geqslant \mathbf{0}}, \\ &u(\mathbf{h}) \geqslant u(\mathbf{x}). \end{aligned} \qquad (\mathcal{H}^+_u)$$

Здесь предполагается, что $X = \mathbb{R}^l_+$, т. е. $\mathbf{h} \geqslant \mathbf{0}$ — условие того, что $\mathbf{h}$ — допустимый набор и что функция полезности $u(\cdot)$ определена на более широком, чем $X = \mathbb{R}^l_+$, открытом множестве (например, на $\mathbb{R}^l$) и является дифференцируемой.

Условия Куна—Таккера для задачи $(\mathcal{H}^+_u)$ в точке $\hat{\mathbf{h}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} &-\mathbf{p} + \lambda\nabla u(\hat{\mathbf{h}}) \leqslant 0, && (-\mathbf{p} + \lambda\nabla u(\hat{\mathbf{h}}))\hat{\mathbf{h}} = 0, \\ &\lambda(u(\hat{\mathbf{h}}) - u(\mathbf{x})) = 0, && \lambda \geqslant 0. \end{aligned}$$

Если набор $\hat{\mathbf{h}}$, допустимый в задаче $(\mathcal{H}^+_u)$, удовлетворяет этим условиям при некотором множителе Лагранжа λ и функция полезности квазивогнута (предпочтения выпуклы), то по обратной теореме

Куна—Таккера $\hat{\mathbf{h}}$ является решением этой задачи. Действительно, целевая функция $\mathbf{ph}$ линейна, поэтому она вогнута; ограничение же задается квазивогнутой функцией $u(\mathbf{h}) - u(\mathbf{x})$.

Далее, если $\hat{\mathbf{h}}$ — решение рассматриваемой задачи, то (при выполнении условий регулярности) найдется множитель Лагранжа λ, такой что для $(\hat{\mathbf{h}}, \lambda)$ выполнены условия Куна—Таккера. Предположение $\nabla u(\hat{\mathbf{h}}) \neq \mathbf{0}$ обеспечивает выполнение условий регулярности в форме Куна—Таккера.

Таким образом, приведенные условия являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы набор $\hat{\mathbf{h}}$ ($\hat{\mathbf{h}} \succcurlyeq \mathbf{x}$) был решением задачи минимизации расходов.

Для внутреннего набора $\hat{\mathbf{h}} \in \operatorname{int} X$ в более общей задаче $(\mathcal{H}_u)$ условия Куна—Таккера принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} &\mathbf{p} + \lambda \nabla u(\hat{\mathbf{h}}) = 0, \\ &\lambda(u(\hat{\mathbf{h}}) - u(\mathbf{x})) = 0, \qquad \lambda \geqslant 0. \end{aligned}$$

Заметим попутно, что, как нетрудно видеть, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ — решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и доходе $R > 0$ и λ — множитель Лагранжа, отвечающий этому решению, такой что $\lambda > 0$, то множитель Лагранжа в соответствующей задаче поиска хиксианского спроса λ должен быть равен $\frac{1}{\lambda}$. (О взаимосвязи двух задач речь пойдет ниже; см. Теорему 2.6.)

Используя условия Куна—Таккера, найдем теперь функцию хиксианского спроса для случая, рассматривавшегося в Примере 2.4.

Пример 2.8 (продолжение Примера 2.4)

Для функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ хиксианский спрос является решением следующей задачи:

$$p_1 h_1 + p_2 h_2 \to \min_{\mathbf{h} \geqslant 0},$$
$$\sqrt{h_1} + a\sqrt{h_2} \geqslant u(\mathbf{x}).$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathbb{L}(\mathbf{h}, \lambda) = -p_1 h_1 - p_2 h_2 + \lambda(\sqrt{h_1} + a\sqrt{h_2} - u(\mathbf{x})).$$

Предположим, что решение является внутренним, т. е. $h_1 > 0$, $h_2 > 0$. При этом из условий Куна—Таккера получим, что

$$-p_1 + \lambda \frac{1}{2\sqrt{h_1}} = 0, \quad -p_2 + \lambda a \frac{1}{2\sqrt{h_2}} = 0.$$

Нетрудно заметить, что из этих двух равенств следует $\lambda > 0$, а значит, $\sqrt{h_1} + a\sqrt{h_2} = u(\mathbf{x})$.

Отсюда имеем $\frac{\sqrt{h_2}}{a\sqrt{h_1}} = \frac{p_1}{p_2}$ или $h_2 = \left(a\frac{p_1}{p_2}\right)^2 h_1$. Так как $\sqrt{h_1} + a\sqrt{h_2} = u(\mathbf{x})$, то $\sqrt{h_1} + a^2\frac{p_1}{p_2}\sqrt{h_1} = u(\mathbf{x})$ или $h_1 = \left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2+a^2p_1}\right)^2$, откуда $h_2 = \left(\frac{ap_1 u(\mathbf{x})}{p_2+a^2p_1}\right)^2$.

Читатель может проверить, что невнутренние наборы, удовлетворяющие ограничению задачи, дают более высокое значение расходов, чем найденный набор, т. е. найденный набор является оптимумом, причем единственным, что, впрочем, очевидно, так как решение задачи минимизации расходов при строго вогнутой функции полезности (строго выпуклых предпочтениях) единственно, а условия Куна—Таккера в данном случае являются не только необходимыми, но и достаточными. Таким образом, хиксианский спрос равен

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2, \left(\frac{ap_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2\right).$$

Проиллюстрируем теперь свойства функции хиксианского спроса, установленные в Теореме 2.4. То, что хиксианский спрос однороден нулевой степени по ценам, очевидно. Действительно,

$$\mathbf{h}(t\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(\left(\frac{tp_2 u(\mathbf{x})}{tp_2 + a^2 tp_1}\right)^2, \left(\frac{atp_1 u(\mathbf{x})}{tp_2 + a^2 tp_1}\right)^2\right) = \\ = \left(\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2, \left(\frac{ap_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2\right) = t^0 \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Проверим, что $u(\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$. Подставив хиксианский спрос в функцию полезности, получим, что

$$u(\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = \sqrt{h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x})} + a\sqrt{h_2(\mathbf{p}, \mathbf{x})} = \\ = \frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1} + a\frac{ap_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1} = u(\mathbf{x}). \qquad \blacktriangle$$

Аналогом непрямой функции полезности для задачи минимизации расходов является функция расходов[18].

[18] Опять же, как и в случае хиксианского спроса (см. сноску 16), мы здесь используем нетрадиционное определение функции расходов. Используемый нами вариант называется измеряемой в деньгах функцией полезности.

Определение 2.4

Функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{ph}$, где $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — хиксианский спрос при данных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$, называется функцией расходов (затрат). $\lhd$

Другими словами, функция расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — значение целевой функции двойственной задачи в точке оптимума при данных $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$. Согласно определению для каждого достижимого уровня полезности функция расходов указывает минимальный уровень расходов (дохода), обеспечивающий такой уровень полезности.

Теорема 2.5 (свойства функции расходов)

Пусть множество допустимых наборов X удовлетворяет условиям ($\circledcirc$) и предпочтения потребителя являются непрерывными. Тогда

{i} функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ однородна первой степени по ценам: $e(\lambda\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \lambda e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ $(\lambda > 0)$;
{ii} функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ не убывает по ценам: $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x})$ при $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{p}'$;
{iii} функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — вогнутая функция цен $\mathbf{p}$ на множестве $\mathbb{R}^l_{++} \times X$;
{iv} функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ непрерывна на множестве $\mathbb{R}^l_{++} \times X$;
{v} если выполнено ($\boxdot$), то $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. ┘

Доказательство: {i} Первый пункт утверждения следует из того, что множества решений задачи ($\mathcal{H}$) при векторе цен $\mathbf{p}$ и векторе цен $\lambda\mathbf{p}$ совпадают.

{ii} Пусть $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и $\mathbf{h}' \in \mathbf{h}(\mathbf{p}', \mathbf{x})$. Набор $\mathbf{h}'$ является допустимым в задаче ($\mathcal{H}$) с параметрами $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, поэтому $\mathbf{ph}' \geqslant \mathbf{ph} = e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. Кроме того, умножив неравенство $\mathbf{p}' \geqslant \mathbf{p}$ на неотрицательный вектор $\mathbf{h}'$, получим $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) = \mathbf{p}'\mathbf{h}' \geqslant \mathbf{ph}'$. (Заметим, что если $\mathbf{h}' > \mathbf{0}$ и $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$, то $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) > e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$.)

{iii} Мы должны показать, что для двух произвольных векторов $\mathbf{p}^1$ и $\mathbf{p}^2$ из $\mathbb{R}^l_{++}$ при $\alpha \in [0; 1]$ выполняется соотношение

$$e(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x}) \geqslant \alpha e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}) + (1 - \alpha) e(\mathbf{p}^2, \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{p}^\alpha = \alpha\mathbf{p}^1 + (1 - \alpha)\mathbf{p}^2$. Так как $\mathbf{p}^\alpha \in \mathbb{R}^l_{++}$, то $\mathbf{h}(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x}) \neq \varnothing$. Пусть $\mathbf{h}^\alpha \in \mathbf{h}(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x})$. Потребительский набор $\mathbf{h}^\alpha$ допусти́м в задаче ($\mathcal{H}$) с параметрами $(\mathbf{p}^1, \mathbf{x})$ и с параметрами $(\mathbf{p}^2, \mathbf{x})$, поэтому $\mathbf{p}^1\mathbf{h}^\alpha \geqslant e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x})$ и $\mathbf{p}^2\mathbf{h}^\alpha \geqslant e(\mathbf{p}^2, \mathbf{x})$. Сложив эти неравенства с весами α и $1 - \alpha$ и учтя, что по определению $\mathbf{p}^\alpha\mathbf{h}^\alpha = e(\mathbf{p}^\alpha, \mathbf{x})$, получим требуемое соотношение.

{iv} Доказательство непрерывности оставляем читателю в качестве упражнения. Заметим только, что непрерывность функции расходов по ценам следует из того, что она является вогнутой как функция цен и определена на открытом множестве (а любая вогнутая функция непрерывна во внутренности своей области определения).

{v⇒} При $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ все потребительские наборы, допустимые в задаче $(\mathcal{H})$ с параметрами $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, являются допустимыми в этой задаче с параметрами $(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. В том числе допустимыми являются наборы, принадлежащие $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, а это и означает, что $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$.

{v⇐} Покажем, что из $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$ следует $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Предположим противное, т. е. что $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$. При этом по только что доказанному $e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и, значит, $e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. Возьмем $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Для этого набора выполнено $\tilde{\mathbf{h}} \succcurlyeq \mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ и $\mathbf{p}\tilde{\mathbf{h}} = e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. Следовательно, $\tilde{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. Но по пункту {ii} Теоремы 2.4 для любого $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ выполнено $\mathbf{h} \sim \mathbf{x}$. Получили противоречие. ■

На основании пункта {v} доказанной теоремы можно говорить о функции $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, как о функции полезности, которая представляет исходные предпочтения. Это свойство — одно из самых важных свойств функции расходов и является ключевым при обсуждении вопроса о восстановлении предпочтений по наблюдаемой функции спроса (см. Приложение 2.C).

Проиллюстрируем на примере нахождение функции расходов.

Пример 2.9 (продолжение Примера 2.4)

Найдем функцию расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, соответствующую функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$. Как было показано выше, функция хиксианского спроса для рассматриваемого потребителя равна

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \left(\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2, \left(\frac{a p_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2\right).$$

Из определения функции расходов имеем:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) &= p_1 h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + p_2 h_2(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \\ &= p_1\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2 + p_2\left(\frac{a p_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2 (p_2 + a^2 p_1) p_1 p_2 = \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}. \end{aligned}$$

На примере данной функции проиллюстрируем выполнение свойств, установленных в Теореме 2.5.

Покажем, что полученная функция однородна первой степени по ценам:

$$e(t\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{tp_1 tp_2 (u(\mathbf{x}))^2}{tp_2 + a^2 tp_1} = t\frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1} = te(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Проверим свойство неубывания по ценам. Отметим, что

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1} = \frac{(u(\mathbf{x}))^2}{\frac{1}{p_1} + \frac{a^2}{p_2}}.$$

Действительно при росте p_1 величина знаменателя убывает, что, в свою очередь, влечет рост значения указанной дроби. То же верно для p_2.

Проверим теперь вогнутость функции расходов по ценам. Матрица вторых частных производных для функции расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}$ равна

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -\frac{2a^2 p_2^2 (u(\mathbf{x}))^2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} & \frac{2a^2 p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} \\ \frac{2a^2 p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} & -\frac{2a^2 p_1^2 (u(\mathbf{x}))^2}{(p_2 + a^2 p_1)^3} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что первый главный последовательный минор отрицателен, а второй равен нулю. Значит, главные последовательные миноры чередуют свой знак, начиная с первого, который отрицателен. Таким образом, матрица $\mathbf{H}$ отрицательно полуопределена и соответственно функция $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ вогнута.

Наконец, проверим, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Действительно, в силу положительности цен имеем

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1} \geqslant \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{y}))^2}{p_2 + a^2 p_1} \Leftrightarrow (u(\mathbf{x}))^2 \geqslant (u(\mathbf{y}))^2.$$

Так как функция $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ принимает только неотрицательные значения, то условие $(u(\mathbf{x}))^2 \geqslant (u(\mathbf{y}))^2$ эквивалентно условию $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$. То есть $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y})$, откуда по определению функции полезности имеем, что $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. ▲

Рассмотрим теперь вопрос о взаимосвязи прямой и двойственной задач потребителя. Следующая теорема, называемая **теоремой** взаимности (двойственности), устанавливает условия совпадения решений прямой и двойственной задач потребителя.

Теорема 2.6 (теорема взаимности /двойственности/)

{i} Если предпочтения локально ненасыщаемы, то $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ влечет $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$;

{ii} Пусть множество допустимых наборов X удовлетворяет условиям (◎), выполнено предположение (⊡) и предпочтения потребителя непрерывны. Тогда для любого $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$, где $\bar{\mathbf{x}} \in X$ и $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, выполнено $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\bar{\mathbf{h}})$. ┘

Доказательство: {i} Предположим противное. Пусть $\bar{\mathbf{x}} \notin \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$, т. е. в двойственной задаче существует потребительский набор $\mathbf{h}' \succcurlyeq \bar{\mathbf{x}}$, такой что $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{p}\mathbf{h}'$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что существует набор $\mathbf{h}''$, такой что $\mathbf{h}'' \succ \mathbf{h}' \succcurlyeq \bar{\mathbf{x}}$, и при этом $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} > \mathbf{p}\mathbf{h}''$. А это противоречит оптимальности $\bar{\mathbf{x}}$ в прямой задаче потребителя.

{ii} Набор $\bar{\mathbf{h}}$ допусти́м в прямой задаче потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\mathbf{p}\bar{\mathbf{h}}$. Предположим, что он не является решением этой задачи ($\bar{\mathbf{h}} \notin \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\bar{\mathbf{h}})$). Это означает, что существует набор $\mathbf{x}' \in B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\bar{\mathbf{h}})$, такой что $\mathbf{x}' \succ \bar{\mathbf{h}}$. Для этого набора верно $\mathbf{x}' \succ \bar{\mathbf{h}} \succcurlyeq \bar{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{p}\mathbf{x}' \leqslant \mathbf{p}\bar{\mathbf{h}} \leqslant \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}$. Значит, $\mathbf{x}' \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. Но тогда по пункту {ii} Теоремы 2.4 должно выполняться $\mathbf{x}' \sim \bar{\mathbf{x}}$. Получили противоречие. ■

Следующая теорема является следствием предыдущей и устанавливает другие связи между характеристиками прямой и взаимной задачи потребителя.

Теорема 2.7 (соотношения двойственности, следствие Теоремы 2.6)

Пусть выполнены все предположения Теоремы 2.6. Тогда верны следующие тождества:

{i} для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено $e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}) = R$;
{ii} для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$;
{iii} $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = u(\bar{\mathbf{x}})$;
{iv} $\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. ┘

Доказательство: {i} Теорема 2.6 показывает, что для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. Отсюда по определению функции расходов $e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}$. В силу локальной ненасыщаемости предпочтений $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = R$.

{ii} То, что для любого $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$, является тривиальным следствием пунктов {i} и {iv}.

{iii} Пусть $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ при некотором $\bar{\mathbf{x}} \in X$. Согласно пункту {ii} Теоремы 2.4 при непрерывности предпочтений должно выполняться $u(\bar{\mathbf{h}}) = u(\bar{\mathbf{x}})$. Кроме того, по доказанной теореме двойственности $\bar{\mathbf{h}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))$, т. е. набор $\bar{\mathbf{h}}$ оптимален в прямой задаче при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. Таким образом, по определению непрямой функции полезности $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = u(\bar{\mathbf{h}})$, откуда $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = u(\bar{\mathbf{x}})$.

{iv} Включение $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}) \subset \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))$ доказано в теореме двойственности. Докажем обратное включение. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))$. Из пункта {i} Теоремы 2.6 следует, что $\mathbf{x} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, а из пункта {i} доказываемой теоремы — что $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{p}, \tilde{\mathbf{x}})$. Из пункта {v} Теоремы 2.5 следует, что $\mathbf{x} \sim \bar{\mathbf{x}}$. Таким образом, $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$, и поэтому $\mathbf{x} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. ■

Проиллюстрируем полезность установленных соотношений двойственности. Пусть, решив задачу потребителя, мы нашли функцию спроса и непрямую функцию полезности. Как демонстрируют приведенные ниже примеры, этой информации достаточно для того, чтобы найти функцию хиксианского спроса и функцию расходов, не решая соответствующую двойственную задачу.

Пример 2.10

Как показано в Примерах 2.4 и 2.7, функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ соответствует маршаллианская функция спроса

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1 p_2 + a^2 (p_1)^2}; \frac{a^2 R p_1}{(p_2)^2 + a^2 p_1 p_2} \right)$$

и непрямая функция полезности

$$v(\mathbf{p}, R) = \sqrt{\frac{R(p_2 + a^2 p_1)}{p_2 p_1}}.$$

Из соотношения $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$ имеем $\sqrt{\frac{e(\mathbf{p},\mathbf{x})(p_2 + a^2 p_1)}{p_2 p_1}} = u(\mathbf{x})$. Отсюда несложно выразить расходы через полезность:

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}.$$

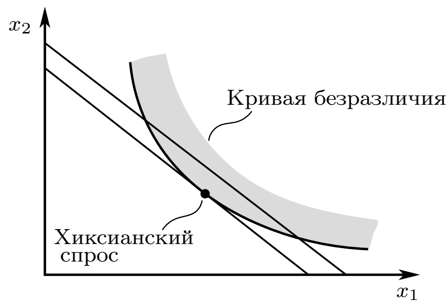


Рис. 2.3. *«Толстая» кривая безразличия*

С учетом этого легко найти хиксианский спрос:

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = \mathbf{x}\left(\mathbf{p}, \frac{p_1 p_2 (u(\mathbf{x}))^2}{p_2 + a^2 p_1}\right) = \\ = \left(\left(\frac{p_2 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2, \left(\frac{a p_1 u(\mathbf{x})}{p_2 + a^2 p_1}\right)^2\right).$$

Эти формулы совпадают с теми, которые получены в Примерах 2.9 и 2.8. ▲

Пример 2.11

Для гомотетичных предпочтений (однородной функции полезности) непрямая функция полезности и спрос имеют следующий вид: $v(\mathbf{p}, R) = a(\mathbf{p})R$ и $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1)$ (см. Примеры 2.2 и 2.5). С учетом соотношений двойственности нетрудно увидеть, что функция расходов и хиксианская функция спроса имеют вид

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{u(\mathbf{x})}{a(\mathbf{p})}, \quad \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = \frac{u(\mathbf{x})}{a(\mathbf{p})}\mathbf{x}(\mathbf{p}, 1). \quad ▲$$

Рассмотрим теперь пример, когда хиксианский и маршаллианский спросы не совпадают. Для построения этого примера достаточно рассмотреть предпочтения, не обладающие свойством локальной ненасыщаемости. В качестве таковых рассмотрим предпочтения, порождающие «толстую» кривую безразличия (такие кривые безразличия появятся, например, если взять в качестве функции полезности целую часть какой-нибудь «нормальной» функции полезности).

Хиксианский спрос всегда будет лежать (в случае двух благ) на левой границе «толстой» кривой безразличия. На Рис. 2.3 эта граница изображена сплошной черной линией. Маршаллианский же спрос может лежать внутри «толстой» кривой безразличия, показанной серым. (Найдите его на приведенном рисунке.)

В этом параграфе мы рассмотрели прямую и двойственную задачи потребителя, изучили их свойства и рассмотрели некоторые основные соотношения, связывающие эти задачи. В следующем параграфе мы продолжим исследование свойств данных задач, используя аппарат дифференциального исчисления.

Задачи

2.1 Пусть множество допустимых потребительских наборов имеет вид

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid x_1 x_2 + x_1 \geqslant 1 \,\},$$

потребитель имеет фиксированный доход $R > 0$, цены на товары задаются вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя при разных значениях $(\mathbf{p}, R)$. Является ли оно выпуклым? замкнутым? ограниченным? При каких значениях $(\mathbf{p}, R)$ бюджетное множество пусто?

2.2 Пусть множество допустимых потребительских наборов имеет вид

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid x_1 x_2 \geqslant 2 \,\},$$

потребитель имеет начальный запас $\boldsymbol{\omega} = (1; 1)$, цены на товары задаются вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя при разных значениях $\mathbf{p}$. Является ли оно выпуклым? замкнутым? ограниченным? При каких значениях $\mathbf{p}$ бюджетное множество непусто?

2.3 Пусть множество допустимых потребительских наборов имеет вид

$$X = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+ \mid x_1, x_2 \text{ — целые} \,\},$$

потребитель имеет фиксированный доход $R > 0$, цены на товары задаются вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Изобразите на графике бюджетное множество потребителя.

2.4 Пусть множество допустимых потребительских наборов имеет вид $X = \mathbb{R}^l_+$, потребитель обладает начальным запасом $\boldsymbol{\omega} = (1; 1)$, цены на товары задаются вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Изобразите графически бюджетное множество потребителя для случая, когда в экономике имеется налог с продаж, взимаемый как процент от цены. Является ли бюджетное множество выпуклым?

2.5 Пусть в экономике наличествует один потребительский товар, продаваемый по цене p. Доход потребителя складывается из фиксированной части $R > 0$ и заработной платы wh, где h — время, которое потребитель посвящает работе, а w — почасовая ставка оплаты труда. Потребитель не может работать больше 24 часов в сутки. Запишите бюджетное множество для этой задачи. Постройте его эскиз. Является ли оно выпуклым? Что произойдет, если в модель ввести налог с заработной платы? с дохода? Предложите схему налогообложения, когда бюджетное множество невыпукло.

2.6 Предположим, что потребитель живет бесконечное число периодов времени (время дискретно). В каждый период t он в соответствии с вогнутой производственной функцией $f(k_t)$ производит некоторый товар, используя имеющийся у него капитал k_t. Произведенный товар он может либо потребить (c_t), либо направить на увеличение своего капитала (i_t). Капитал предполагается убывающим от периода к периоду с постоянной нормой выбытия $\delta \in (0; 1)$. Начальный запас капитала в нулевой момент времени равен k_0. Предположим также, что величины c_t, i_t, k_t могут принимать только неотрицательные значения. Запишите бюджетное множество для этой задачи. Покажите, что оно выпукло.

2.7 Для случая двух товаров изобразите эскиз бюджетного множества, если цена первого товара зависит от объема, а цена второго постоянна, причем цена первого товара убывает при росте объема. Доход потребителя предполагаем фиксированным. Является ли данное бюджетное множество выпуклым?

2.8 Докажите Теорему 2.1.

2.9 При каких условиях в пунктах {vi} и {vii} Теоремы 2.1 нестрогие неравенства и включения могут быть заменены строгими? Покажите, что без дополнительных предположений соответствующий факт, вообще говоря, неверен.

2.10 Для каждой из нижеприведенных функций найдите функцию маршаллианского спроса, функцию хиксианского спроса, непрямую функцию полезности и функцию расходов. Проиллюстрируйте соотношения двойственности между функциями маршаллианского спроса и хиксианского спроса, а также между непрямой функцией полезности и функцией расходов. Основываясь на полученных результатах, проверьте теоретические свойства этих функций.

(A) $u(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$; (B) $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;
(C) $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + x_2$; (D) $u(\mathbf{x}) = x_1 x_2$;
(E) $u(\mathbf{x}) = \ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$; (F) $u(\mathbf{x}) = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$;
(G) $u(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$; (H) $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$;
(I) $u(\mathbf{x}) = \max\{x_1, x_2\}$;
(J) $u(\mathbf{x}) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$;
(K) $u(\mathbf{x}) = 28x_1 + 28x_2 - 2x_1^2 - 3x_1 x_2 - 2x_2^2$;
(L) $u(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1 + 4x_2 + 2x_1 x_2 + 6$.

2.11 Приведите пример функции полезности, для которой...

(A) средства, расходуемые потребителем на приобретение каждого блага, составляют постоянную (и положительную) долю совокупных расходов потребителя;
(B) спрос потребителя на любое благо зависит лишь от относительной цены данного блага и совокупных потребительских расходов;
(C) спрос потребителя на первые $l-1$ благ зависит лишь от относительной цены этих благ;
(D) спрос потребителя на первые $l-1$ благо зависит лишь от цены данного блага;
(E) структура спроса потребителя постоянна (отношение величины покупок блага j к величине блага 1, $j = 1, \ldots, l$);
(F) множество оптимальных потребительских наборов при некоторых значениях цен и доходов не является выпуклым множеством.

2.12 Покажите, что если функция полезности потребителя однородна, то отношение функций спроса на любые два товара не зависит от уровня дохода.

2.13 Квазилинейная функция полезности $u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l$ с вогнутой функцией $s(\cdot)$ определена на $X = \mathbb{R}_+^l$. Докажите, что если $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, $x_l > 0$ и $(R' - R)/p_l + x_l \geqslant 0$, то $(\mathbf{x}_{-l}, (R' - R)/p_l + x_l) \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, R')$. Дайте содержательную интерпретацию этого свойства.

2.14 Для квазилинейной функции полезности $u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}_{-l}) + x_l$, заданной на $X = \mathbb{R}_+^{l-1} \times \mathbb{R}$, покажите, что непрямая функция полезности имеет форму Гормана $v(\mathbf{p}, R) = a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})R$.

2.15 Предположим, что функция полезности потребителя квазилинейна и зависит от двух благ: $u(x) = s(x_1) + x_2$. Первое благо может потребляться лишь в дискретных (целых неотрицательных) количествах, а второе благо («деньги, используемые на приобретение других благ») — в любых количествах, возможно, отрицательных. Пусть $r(i) = s(i) - s(i-1)$ (оценка потребителем i-й единицы первого блага). Цена второго блага равна единице.

(A) Покажите, что $r(i)$ равна такой цене первого блага, при которой потребитель безразличен в выборе между потреблением первого блага в количестве $i-1$ и в количестве i.

(B) Покажите, что если потребитель приобретает n единиц первого блага, то выполнено соотношение $r(n) \geqslant p_1 \geqslant r(n-1)$, где p_1 — цена первого блага. При каких условиях верно и обратное утверждение?

(C) Какова величина компенсации в форме второго блага («в деньгах»), при которой потребитель будет готов полностью отказаться от потребления первого блага (увеличив тем самым потребление второго блага на величину компенсации)?

2.16 Покажите, что если функция полезности квазилинейна, причем l-е благо входит в нее линейно, то хиксианский спрос на первые $l-1$ благо не зависит от выбора кривой безразличия. Каков вид функции расходов в этом случае? При каких предположениях это справедливо?

2.17 Покажите, что если функция полезности квазилинейна, то непрямая функция полезности — выпуклая функция цен.

2.18 Докажите Теорему 2.4.

2.19 Рассмотрите функцию полезности $u = \frac{\sqrt{x_1}}{A - x_2}$ $(A > 0)$, где $x_1 \geqslant 0$, $0 \leqslant x_2 < A$.

(A) Является ли эта функция полезности вогнутой? квазивогнутой? Изобразите на графике кривые безразличия.

(B) Найдите функцию спроса. Какими свойствами она обладает?

2.20 ⟦АББ⟧ Рассмотрите функцию полезности вида

$$u(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + y + z/(1 + z).$$

(A) Покажите, что функция полезности строго монотонна, строго вогнута и непрерывна.

(B) Покажите, что если $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_+$ и $z > 0$, то $(x, y + z, 0) \succ \succ (x, y, z)$.

(C) Пусть $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ и $p_2 = p_3$. Покажите, что для вектора спроса выполнено равенство $z(\mathbf{p}, R) = 0$.

(D) Рассмотрите последовательность цен $\mathbf{p}_n = (1, 1/n, 1/n)$. Чему равны пределы $z(\mathbf{p}_n, R)$ и $y(\mathbf{p}_n, R)$?

2.21 В случае, когда в экономике наличествуют всего два товара, найдите, если это возможно (или докажите, что это невозможно), маршаллианский, хиксианский спросы, непрямую функцию полезности и функцию расходов для потребителя с лексикографическими предпочтениями.

2.22 Сформулируйте и докажите аналоги Теорем 2.2—2.6 для случая, когда доход потребителя формируется за счет продажи начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$.

2.23 Сформулируйте и докажите аналоги Теорем 2.2—2.6 для случая, когда доход потребителя формируется за счет заработной платы. Почасовая ставка заработной платы равна w, потребитель располагает 24 часами времени в сутки. Время отдыха является одним из благ, количество потребления которого выбирает потребитель.

2.24 Пусть непрямая функция полезности имеет вид $a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})R$. Какими свойствами должны обладать функции $a(\mathbf{p})$ и $b(\mathbf{p})$, для того чтобы данная функция была непрямой функцией полезности рационального потребителя?

2.25 Функция полезности называется псевдовогнутой, если из условия $\nabla u(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leqslant 0$ следует, что $u(\mathbf{y}) \leqslant u(\mathbf{x})$. Покажите, что если функция полезности псевдовогнута, то условия Куна—Таккера являются достаточными условиями для нахождения решения задачи потребителя. Покажите, что любая вогнутая функция является псевдовогнутой, а любая псевдовогнутая функция — квазивогнутой.

2.26 Пусть функция полезности равна $u(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2 - 2)^3$. Цена на первый товар равна 1, а на второй — 2. Доход потребителя равен 3. Проверьте, что целевая функция квазивогнута и локально ненасыщаема. Покажите, что точка $(1; 1)$ удовлетворяет условиям Куна—Таккера задачи потребителя, но не является оптимальной.

2.27 Покажите, что функция $v(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{p_1} + \frac{R}{p_2}$ удовлетворяет всем свойствам непрямой функции полезности и вычислите на ее основе функцию расходов и функции спроса (маршаллианского и хиксианского).

2.28 Пусть функция спроса и непрямая функция полезности потребителя имеют вид

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{\alpha R}{p_1}, \frac{(1-\alpha)R}{p_2}\right) \quad \text{и} \quad v(\mathbf{p}, R) = \frac{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{(1-\alpha)} R}{p_1^\alpha p_2^{(1-\alpha)}}.$$

Найдите функцию расходов и хиксианский спрос.

2.29 Проверьте выполнение соотношений двойственности (взаимности) в случае, когда поведение потребителя описывается функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \lfloor x_1 x_2 \rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ — оператор взятия целой части.

2.30 Пусть функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна, т. е. имеет вид $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x_i)$. Запишите достаточные условия оптимальности для задачи потребителя в предположении, что потребитель имеет выпуклые, локально ненасыщаемы предпочтения. Покажите, что если $u_i'(x_i) \to +\infty$ при $x_i \to 0$, то потребитель покупает все блага в положительных количествах.

2.31 Пусть обобщенная функция полезности, представляющая некоторые нетранзитивные предпочтения, имеет вид

$$\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{x_2/y_1} + \ln x_3 - \sqrt{y_2/x_1} - \ln y_3.$$

Найдите маршаллианский спрос данного потребителя. (Определение обобщенной функции полезности см. в п. 1.B.2 гл. 1.)

2.3. Дифференциальные свойства задачи потребителя

В данном параграфе дополнительно предполагается, что функция спроса, непрямая функция полезности и функция расходов потребителя являются дифференцируемыми. (Условия, гарантирующие дифференцируемость этих функций, приведены в Приложении 2.A.) При выполнении условия дифференцируемости непрямой функции полезности, функции расходов и функций маршаллианского спроса и хиксианского спроса выполняются три важных свойства теории потребителя: лемма Шепарда, тождество Роя и уравнение Слуцкого.

Связь между функциями расходов и (хиксианского) спроса описывается **леммой Шепарда**[19]. Учитывая значение этого результата для теории потребления, укажем несколько его обоснований. Из леммы Шепарда следует, что по функции расходов всегда можно построить функцию (хиксианского) спроса. Отметим также, что из нее следует, что функция расходов является *дважды* непрерывно дифференцируемой, если непрерывно дифференцируемым является хиксианский спрос.

[19] R. W. Shephard. *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, 1970.

Теорема 2.8 (лемма Шепарда — первый вариант)

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16 на с. 174, тогда

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p},\mathbf{x})$$

и

$$\nabla_p e(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$$

для всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_{+}$. ┘

Доказательство: По определению функции расходов $e(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{p}\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$. Продифференцировав это тождество по p_i, получим следующее соотношение:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p},\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{l} p_j \frac{\partial h_j(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i}.$$

Остается доказать, что второе слагаемое равно нулю.

Замечание: Данное свойство сто́ит проинтерпретировать. Хотя при изменении цен рассматриваемых благ потребитель меняет свое поведение, предпочитая, вообще говоря, другой потребительский набор, при расчете изменения расходов на приобретение нового набора это изменение спроса потребителя в первом приближении можно не учитывать. Другими словами, новые расходы в первом приближении рассчитываются, как если бы оптимальный выбор остался неизменным, т. е. эти новые расходы равны стоимости старого набора в новых ценах. Изменение спроса проявляется лишь во втором приближении.

Докажем это. Пусть второе слагаемое не равно нулю, например положительно, т. е. $\mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial p_i} > 0$. Рассмотрим наборы вида $\mathbf{h}_\varepsilon = \mathbf{h}(\mathbf{p} - \varepsilon\mathbf{e}^i, \mathbf{x})$, где $\mathbf{e}^i$ — i-й орт, $\varepsilon > 0$. Согласно пункту {ii} Теоремы 2.4 из непрерывности предпочтений следует, что $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}) \sim \mathbf{x}$ и $\mathbf{h}_\varepsilon \sim \mathbf{x}$. Из $\mathbf{p}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial p_i} > 0$ следует, что при достаточно малом ε будет выполнено неравенство $\mathbf{p}(\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}) - \mathbf{h}_\varepsilon) > 0$. Но это противоречит тому, что $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x})$ минимизирует расходы.

Второе соотношение следует из того факта, что в условиях теоремы градиент функции расходов по ценам $\nabla_p e$ есть вектор частных производных этой функции по ценам. ■

Теорема 2.9 (лемма Шепарда — второй вариант)

Если функция расходов $e(\cdot)$, рассматриваемая как функция цен при данном наборе $\mathbf{x} \in X$, определена в окрестности вектора цен $\tilde{\mathbf{p}}$ и дифференцируема в точке $\tilde{\mathbf{p}}$, то

$$\nabla_p e(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}).$$ ┘

Доказательство: Рассмотрим в окрестности точки $\tilde{\mathbf{p}}$ функцию

$$\gamma(\mathbf{p}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{h}},$$

где $\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h}(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})$. В точке $\tilde{\mathbf{p}}$ по определению функции расходов данная функция равна нулю ($\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) = 0$). В произвольной точке из рассматриваемой окрестности точки $\tilde{\mathbf{p}}$ ее значение не превосходит ноль:

$$\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) \leqslant 0.$$

Действительно, набор $\tilde{\mathbf{h}}$ при ценах $\tilde{\mathbf{p}}$ требует минимальных расходов на приобретение из наборов, обеспечивающих тот же уровень благосостояния, что и потребительский набор $\mathbf{x}$. При любых других ценах он допусти́м, но, вообще говоря, не минимизирует расходы. Таким образом, в точке $\tilde{\mathbf{p}}$ достигается максимум функции $\gamma(\cdot)$ и выполняется условие первого порядка

$$\nabla\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\nabla_p e(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{h}}.$$ ■

Для большей наглядности повторим это доказательство в «одномерном» варианте. Рассмотрим некоторый вектор цен $\tilde{\mathbf{p}}$ и зафиксируем все цены, кроме цены i-го блага: $\mathbf{p}_{-i} = \tilde{\mathbf{p}}_{-i}$. По определению функции расходов справедливо следующее неравенство:

$$e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x}) = p_i h_i(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x}) + \sum_{j \neq i} \tilde{p}_j h_j(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x}) \leqslant$$
$$\leqslant p_i h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}) + \sum_{j \neq i} \tilde{p}_j h_j(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}).$$

При $p_i = \tilde{p}_i$ здесь выполнено равенство. Таким образом, максимум функции $\gamma(p_i) = e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x}) - p_i h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})$ достигается в точке $\tilde{p}_i$. Из необходимого условия максимума ($\gamma'(p_i) = 0$) следует, что

$$\frac{\partial e(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}).$$

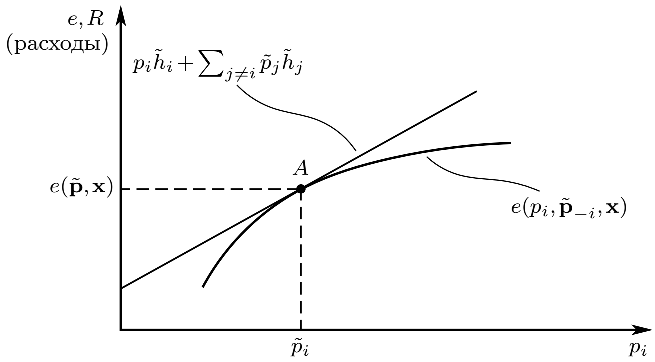


Рис. 2.4. *Иллюстрация доказательства леммы Шепарда*

Идея данного доказательства леммы Шепарда фактически заключается в построении касательной к графику функции расходов (см. Рис. 2.4). Кривая $e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x})$ лежит под прямой

$$p_i\tilde{h}_i + \sum_{j\neq i}\tilde{p}_j\tilde{h}_j$$

и имеет с ней общую точку $(\tilde{p}_i,\ e(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x}))$ (точка A на рисунке). Значит, эта прямая является касательной к кривой $e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x})$. Наклон прямой равен $\tilde{h}_i = h_i(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{x})$. Таким образом, производная функции $e(p_i, \tilde{\mathbf{p}}_{-i}, \mathbf{x})$ в точке $\tilde{p}_i$ равна $\tilde{h}_i$.

Замечание: Заметим, что функция $-e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ является так называемой *опорной функцией*[20] множества допустимых элементов задачи. Наиболее простой вариант леммы Шепарда можно получить на основе теоремы об опорной функции[21]: если при данных ценах $\mathbf{p}$ и данном наборе $\mathbf{x}$ спрос по Хиксу определен однозначно (т. е. решение задачи $(\mathcal{H})$ единственно), то функция расходов дифференцируема и имеет место соотношение

$$\nabla_p e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

[20] См. Определение B.25 на с. II-645 в Приложении B.
[21] Теорема B.43 в Приложении B.

Пример 2.12

Выше (в Примере 2.9) мы установили, что для потребителя с функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ функция расходов равна

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1 p_2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{p_2 + a^2 p_1}.$$

Убедимся для данной функции расходов в выполнении леммы Шепарда для первого товара. Продифференцируем функцию расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ по p_1:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_1} = \frac{p_2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2(p_2 + a^2 p_1) - a^2 p_1 p_2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{(p_2 + a^2 p_1)^2} =$$

$$= \frac{p_2^2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{(p_2 + a^2 p_1)^2} = h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Вполне естественно, что в качестве результата дифференцирования мы получили найденный нами ранее (см. Пример 2.8) хиксианский спрос. ▲

Теорема 2.10 (тождество Роя[22])

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16. Тогда при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и $R > 0$ справедливо равенство

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} \Bigg/ \frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = x_i(\mathbf{p}, R).$$ ┘

Доказательство: Для доказательства этого тождества воспользуемся одним из тождеств взаимности:

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = u(\mathbf{x}).$$

Продифференцируем это тождество по p_i:

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))}{\partial p_i} + \frac{\partial v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, U))}{\partial R} \frac{\partial e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_i} = 0.$$

[22] Французский экономист Рене Руа указал на это соотношение в работе R. Roy · La Distribution du Revenu Entre Les Divers Biens, *Econometrica* **15** (1947): 205–225. К сожалению, в России уже закрепилось неправильное произношение его имени.

По лемме Шепарда $\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p},\mathbf{x})$, следовательно, выполнено

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p},\mathbf{x}))}{\partial p_i} + \frac{\partial v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p},\mathbf{x}))}{\partial R} h_i(\mathbf{p},\mathbf{x}) = 0.$$

В качестве $\mathbf{x}$ возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Воспользуемся тождествами $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = R$. Из них следует, что верно соотношение

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = x_i(\mathbf{p}, R).$$

. ■

Пример 2.13

Как показано ранее, для потребителя с функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ непрямая функция полезности равна $v(\mathbf{p}, R) = \sqrt{\frac{R(p_2+a^2p_1)}{p_2p_1}}$. Проиллюстрируем тождество Роя для первого товара. Для этого найдем $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial R}$ и $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial p_1}$:

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(p_2 + a^2p_1)}{Rp_2p_1}}$$

и

$$\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2p_1}{R(p_2 + a^2p_1)}} \frac{a^2p_1p_2R - p_2R(p_2 + a^2p_1)}{(p_2p_1)^2} = \\ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_2p_1}{R(p_2 + a^2p_1)}} \frac{-R}{(p_1)^2}.$$

Тогда

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = \frac{Rp_2}{p_1(p_2 + a^2p_1)}.$$

Как и ожидалось, найденная функция представляет собой спрос на первый товар для функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$. ▲

Теорема 2.11 (уравнение Слуцкого[23])

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16. Тогда при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$

[23] E. Slutsky · Sulla teoria del bilancio del consumatore, *Giornali degli economisti e rivista di statistica* **51** (1915): 1–26, рус. пер. Е. Е. Слуцкий · К теории сбалансированного бюджета потребителя, в кн. *Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления*, М.: Изд-во АН СССР, 1963

и $R > 0$ выполнено равенство

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p}, R).$$ ⌟

Доказательство: Для доказательства воспользуемся одним из тождеств взаимности: $\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$. Продифференцируем его по p_j:

$$\frac{\partial x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}))}{\partial R} \frac{\partial e(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})}{\partial p_j}.$$

Воспользуемся леммой Шепарда, согласно которой $\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})$. В качестве потребительского набора $\mathbf{x}$ возьмем $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. При этом в силу соотношений взаимности имеем $h_j(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = x_j(\mathbf{p}, R)$ и $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = R$. Следовательно,

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p}, R).$$ ■

Пример 2.14

Проиллюстрируем уравнение Слуцкого для первого товара и второй цены для рассмотренной функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$. Функция спроса для этой функции полезности равна $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}; \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}\right)$. Функция хиксианского спроса равна $h_1(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_2^2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{(p_2 + a^2p_1)^2}$. Найдем $\frac{\partial x_1(\mathbf{p},R)}{\partial p_2}$, $\frac{\partial x_1(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_2(\mathbf{p}, R)$ и $\frac{\partial h_1(\mathbf{p},\mathbf{x}(\mathbf{p},R))}{\partial p_2}$:

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p}, R)}{\partial p_2} = \frac{R(p_1p_2 + a^2(p_1)^2) - Rp_1p_2}{(p_1p_2 + a^2(p_1)^2)^2} = \\ = \frac{a^2R(p_1)^2}{(p_1)^2(p_2 + a^2p_1)^2} = \frac{a^2R}{(p_2 + a^2p_1)^2};$$

$$\frac{\partial x_1(\mathbf{p}, R)}{\partial R} x_2(\mathbf{p}, R) = \frac{p_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2} \cdot \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2} = \\ = \frac{a^2Rp_1p_2}{p_2p_1(p_2 + a^2p_1)^2} = \frac{a^2R}{(p_2 + a^2p_1)^2};$$

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_2} = \frac{2p_2(p_2+a^2p_1)^2 - 2(p_2)^2(p_2+a^2p_1)}{(p_2+a^2p_1)^4}(\sqrt{x_1}+a\sqrt{x_2})^2 = \\ = \frac{2a^2p_1p_2}{(p_2+a^2p_1)^3}(\sqrt{x_1}+a\sqrt{x_2})^2;$$

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{p},\mathbf{x}(\mathbf{p},R))}{\partial p_2} = \frac{2a^2p_1p_2}{(p_2+a^2p_1)^3}(v(\mathbf{p},R))^2 = \\ = \frac{2a^2p_1p_2}{(p_2+a^2p_1)^3}\cdot\frac{R(p_2+a^2p_1)}{p_2p_1} = \frac{2a^2R}{(p_2+a^2p_1)^2}.$$

Проверка уравнения Слуцкого для первого товара и второй цены состоит в проверке равенства

$$\frac{\partial h_1(\mathbf{p},\mathbf{x}(\mathbf{p},R))}{\partial p_2} = \frac{\partial x_1(\mathbf{p},R)}{\partial p_2} + \frac{\partial x_1(\mathbf{p},R)x_2(\mathbf{p},R)}{\partial R}.$$

Подставляя вычисленные производные, получим

$$\frac{2a^2R}{(p_2+a^2p_1)^2} = \frac{a^2R}{(p_2+a^2p_1)^2} + \frac{a^2R}{(p_2+a^2p_1)^2}.$$

Очевидно, что это равенство верно. ▲

Теорема 2.12 (свойства матрицы замены)

Пусть выполнены условия Теоремы 2.16. Тогда матрица $\mathbf{S} = \{\frac{\partial h_i}{\partial p_j}\}$ эффектов замены (матрица Слуцкого) является симметричной, отрицательно полуопределенной и вырожденной при всех $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_+$. ┘

Доказательство: Как было отмечено выше при обсуждении леммы Шепарда, при сделанных нами предположениях функция расходов является дважды непрерывно дифференцируемой. Тогда в силу теоремы Юнга[24] ее смешанные вторые производные совпадают, т. е.

$$\frac{\partial^2 e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial^2 e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i \partial p_j}.$$

С учетом продифференцированного тождество Шепарда получаем отсюда, что

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_j} = \frac{\partial h_j(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i}.$$

[24] См. Теорему B.51 на с. II-649 в Приложении B.

Таким образом, матрица коэффициентов замены (матрица вторых производных функции расходов) симметрична. Кроме того, так как функция расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ — вогнутая функция цен, то матрица коэффициентов замены является отрицательно полуопределенной. (Вырожденность матрицы $\mathbf{S}$ читатель может доказать самостоятельно; см. задачу 2.36.) ■

Теперь получим основные соотношения, которые связывают производные спроса по ценам и доходу. (Доказательство этого утверждения предоставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 2.41.)

Теорема 2.13

Предположим, что предпочтения локально ненасыщаемы и функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ дифференцируема в точке $(\mathbf{p}, R)$. Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\sum_i p_i \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial p_j} + x_j(\mathbf{p}, R) = 0 \text{ для всех } j;$$

$$\sum_i p_i \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = 1;$$

$$\sum_i p_i \frac{\partial x_k(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} + R \frac{\partial x_k(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = 0 \text{ для всех } k.$$

┘

Данные соотношения должны быть знакомы читателю по курсам микроэкономики промежуточного уровня. Обычно они переформулируются в терминах эластичностей спроса по доходу и ценам.

Определение 2.5

Эластичностью спроса на i-е благо по доходу называется величина

$$E_i^R = E_i^R(\mathbf{p}, R) = \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial R} \frac{R}{x_i(\mathbf{p}, R)}.$$

Эластичностью спроса на i-е благо по цене i-го называется величина

$$E_{ij}^p = E_{ij}^p(\mathbf{p}, R) = \frac{\partial x_i(\mathbf{p}, R)}{\partial p_j} \frac{p_j}{x_i(\mathbf{p}, R)}.$$

◁

Доля дохода, затрачиваемого на покупку i-го блага,— это

$$\mu_i(\mathbf{p}, R) = \frac{p_i x_i(\mathbf{p}, R)}{\mathbf{p}\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)} = \frac{p_i x_i(\mathbf{p}, R)}{R}.$$

В этих обозначениях свойства функции спроса из Теоремы 2.13 могут быть переформулированы следующим образом:

$$\sum_i \mu_i E^p_{ij}(\mathbf{p}, R) = -\mu_j(\mathbf{p}, R) \text{ для всех } j;$$
$$\sum_i \mu_i(\mathbf{p}, R) E^R_i(\mathbf{p}, R) = 1; \tag{E}$$
$$E^R_k(\mathbf{p}, R) = -\sum_i E^p_{ki}(\mathbf{p}, R) \text{ для всех } k.$$

Их доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 2.41).

Рассмотренные в данном параграфе соотношения важны для характеристики спроса, порожденного моделью рационального поведения потредителя. В частности, полученные свойства функции расходов (и матрицы Слуцкого) вместе с некоторыми из тех, которые указаны в Теореме 2.5 на с. 126, являются не только необходимыми (как мы только что установили), но и достаточными (как покажем далее) условиями того, что некоторая функция цен и уровней полезности является функцией расходов рационального потребителя. Это дает возможность проверять согласованность наблюдаемого потребительского поведения с моделью рационального поведения и восстанавливать предпочтения потребителя на основе его рыночного поведения (см. Прилодение 2.C).

Задачи

2.32 Сформулируйте и докажите аналог уравнения Слуцкого для случая, когда доход потребителя формируется за счет продажи начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$.

2.33 Сформулируйте и докажите аналог уравнения Слуцкого для случая, когда доход потребителя формируется за счет заработной платы. Почасовая ставка заработной платы равна w, потребитель располагает 24 часами времени в сутки. Время отдыха является одним из благ, количество потребления которого выбирает потребитель.

2.34 Проверьте выполнение леммы Шепарда, тождества Роя и уравнения Слуцкого для следующих функций полезности: (A) Кобба—Дугласа, (B) CES, (C) Леонтьева ($\min\{a_i x_i\}$), (D) линейной, (E) квазилинейной.

2.35 Пусть выполнен закон Вальраса и функция спроса однородна нулевой степени. Пусть, кроме того, в экономике обращается только два товара. Докажите симметричность матрицы Слуцкого, не пользуясь предположением о максимизации полезности потребителем.

2.36 Пусть $\mathbf{S}$ — матрица коэффициентов замены. Докажите, что $\mathbf{Sp} = \mathbf{0}$.

2.37 В экономике обращается два товара. Известно, что в матрице замены $S_{11} = -2$ и $S_{22} = -1$. Чему равен элемент S_{21}?

2.38 Матрица замены при ценах $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 6$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -10 & ? & ? \\ ? & -4 & ? \\ 3 & ? & ? \end{pmatrix}.$$

Найдите пропущенные элементы. Может ли эта матрица быть матрицей замены для спроса рационального потребителя?

2.39 Пусть в экономике представлено три блага. Функции спроса на первое и второе блага имеют следующий вид:

$$x_1(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{2p_1(1 + \sqrt{p_2/p_1})}, \quad x_2(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{2p_2(1 + \sqrt{p_2/p_1})}.$$

Проверьте выполнение уравнения Слуцкого.

2.40 ⟦MWG⟧ В экономике с тремя благами потребитель имеет положительный доход $R > 0$ и его функции спроса на первое и второе блага равны

$$x_1(\mathbf{p}, R) = 100 - 5\frac{p_1}{p_3} + \beta\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{R}{p_3}, \quad x_2(\mathbf{p}, R) = \alpha + \beta\frac{p_1}{p_3} + \gamma\frac{p_2}{p_3} + \delta\frac{R}{p_3},$$

где α, β, γ, $\delta \geqslant 0$.

(A) Объясните, как можно рассчитать спрос на третье благо (вычисления делать не надо).

(B) Являются ли функции спроса для x_1 и x_2 однородными требуемой степени?

(C) Какие ограничения на параметры α, β, γ, δ должны выполняться, чтобы данные функции спроса могли быть порождены задачей максимизации полезности?

(D) Используя результаты предыдущего пункта для фиксированного значения спроса на третий товар, изобразите кривые безразличия в пространстве координат (x_1, x_2).

(Е) Что можно сказать о свойствах функции полезности этого потребителя? (Используйте результаты предыдущего пункта.)

2.41 Докажите Теорему 2.13 и соотношения (E).

2.42 Покажите, что если функция полезности потребителя однородна, то функции спроса удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial x_i(p, R)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(p, R)}{\partial p_i}.$$

2.43 Пусть для некоторого потребителя значения эластичности спроса по доходу равны по всем товарам. Найдите, чему равно это значение.

2.44 Пусть функция полезности однородна первой степени. Чему равны эластичности спроса по доходу?

2.45 Используя теорему об огибающей, докажите, что $h_i(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i}$ (тождество Роя).

2.46 Используя теорему об огибающей, докажите, что $\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R}$ («предельная полезность денег») равна значению множителя Лагранжа для задачи потребителя.

2.47 Проверьте выполнение свойства, указанного в предыдущей задаче, для функции полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ (см. Примеры 2.7 и 2.4).

2.4. Влияние изменения цен и дохода на поведение потребителя

Данный параграф посвящен изучению того, как изменения условий, при которых рациональный потребитель осуществляет выбор, более конкретно — изменения его бюджетного множества, влияют на этот выбор и благосостояние потребителя.

2.4.1. Сравнительная статика: зависимость спроса от дохода и цен. Закон спроса

Здесь мы обсудим, как меняется выбор потребителя при изменении цен благ и дохода, и установим условия, при которых зависимость спроса от цен и дохода соответствует обычным представлениям (например, спрос на благо растет при росте дохода или снижении цены этого блага). При этом спрос будет рассматриваться либо как функция, либо как отображение. Что именно имеется в виду должно быть понятно из контекста.

Пусть спрос представляет собой дважды дифференцируемую функцию, такую что ее значения представляют собой внутренние потребительские наборы ($\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) \in \operatorname{int} X$). Пусть, кроме того, для таких наборов матрица Гессе функции полезности ($\mathbf{H}(\mathbf{x})$) является отрицательно определенной и выполнено неравенство $\mathbf{x}^{\mathsf{T}}\nabla u(\mathbf{x}) > 0$. Следующая система уравнений характеризует спрос и множитель Лагранжа бюджетного ограничения при данных ценах и доходе:

$$\nabla u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = \lambda(\mathbf{p}, R)\mathbf{p},$$
$$\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = R.$$

Эти уравнения можно рассматривать как тождества. Дифференцируя их по ценам и доходу и преобразуя, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R} = \lambda \frac{\mathbf{H}^{-1}\nabla u}{\nabla u^{\mathsf{T}}\mathbf{H}^{-1}\nabla u} \qquad (\circ)$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \lambda\left(\mathbf{H}^{-1} - \frac{\mathbf{H}^{-1}\nabla u \mathbf{x}^{\mathsf{T}} + \mathbf{H}^{-1}\nabla u \nabla u^{\mathsf{T}}\mathbf{H}^{-1}}{\nabla u^{\mathsf{T}}\mathbf{H}^{-1}\nabla u}\right), \qquad (\circ\circ)$$

где $\lambda = \nabla u^{\mathsf{T}}\mathbf{x}/R$. Вычисления здесь несколько громоздкие, но не очень сложные. Читатель может попробовать провести их самостоятельно (см. задачу 2.48). Полученные соотношения выражают производные функции спроса через производные функции полезности в данной точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Заметьте, что в эти формулы не входят цены, а доход влияет только на множитель Лагранжа λ, но не на знак и структуру производных.

Обсудим сначала влияние изменения дохода. Обычные предположения о предпочтениях потребителя (локальная ненасыщаемость, монотонность, выпуклость) мало что говорят о характере этого влияния. Фактически мы можем дать только определения, которые могут быть полезными в дальнейших рассуждениях.

Определение 2.6

Кривой Энгеля для заданного вектора цен $\bar{\mathbf{p}}$ называется функция $\phi(R) = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}}, R)$, сопоставляющая доходу R спрос на блага. $\triangleleft$

Как правило, ожидается, что если доход потребителя растет, то потребление благ тоже растет. Блага, которые соответствуют таким ожиданиям, принято называть нормальными.

Определение 2.7

Благо i называется нормальным при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R, если спрос на него растет в точке $(\mathbf{p}, R)$ при увеличении дохода потребителя.

Благо i называется нормальным, если оно является нормальным при всех ценах и доходах, для которых определен спрос. $\lhd$

Однако вполне можно вообразить такое благо, спрос на которое снижается при увеличении дохода потребителя (по крайней мере, в некоторой области сочетаний цен и дохода).

Определение 2.8

Благо i называется малоценным при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R, если спрос на него падает в точке $(\mathbf{p}, R)$ при увеличении дохода потребителя. $\lhd$

Влияние дифференциально малых изменений дохода характеризует производная маршаллианского спроса по доходу (если спрос представляет собой дифференцируемую функцию). Если доход меняется на величину dR, то в результате спрос должен измениться на величину

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)}{\partial R} dR.$$

Если $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} > 0$, то благо i следует назвать нормальным при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R, а если $\frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} < 0$, то малоценным.

Согласно уравнению ($\circ$) (с учетом того, что $\nabla u^{\mathsf{T}} \mathbf{H}^{-1} \nabla u < 0$), поведение спроса при изменении дохода определяется вектором $\mathbf{H}^{-1} \nabla u$. Если i-й элемент этого вектора отрицателен, то i-е благо является нормальным, а если положителен, то малоценным.

Далее рассмотрим влияние изменения цен. Напомним, что согласно стандартному определению функция спроса удовлетворяет закону спроса, если спрос на благо снижается при росте его цены. Естественное обобщение этого свойства приводит к следующему определению.

Определение 2.9

Будем говорить, что отображение спроса $\mathbf{x}(\cdot)$ удовлетворяет закону спроса, если для $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\mathbf{p}', R)$ выполнено соотношение[25]

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \leqslant 0. \qquad \lhd$$

[25] В отечественной традиции закон спроса иногда называют свойством монотонности спроса.

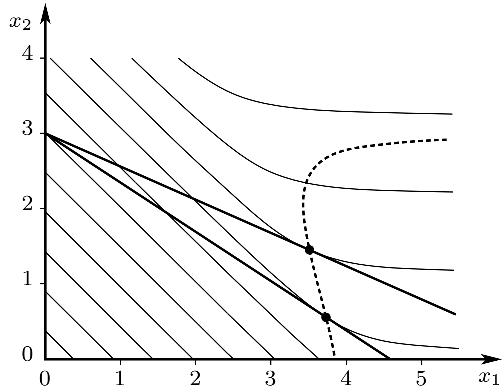


Рис. 2.5. *Пример эффекта Гиффена*

Действительно, данное свойство тесно связано с ожидаемым свойством спроса: если цена i-го товара выросла при неизменности остальных цен, то приведенное неравенство означает, что спрос на i-й товар не может возрасти.

Как известно, закон спроса выполняется не для всех функций спроса, порожденных задачей максимизиции полезности потребителя. Теоретически можно вообразить так называемые товары Гиффена, спрос на которые растет при росте цены.

Эффект Гиффена наблюдается, например, в случае следующей функции полезности:

$$u(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - \sqrt{(2x_1 + x_2 - 8)^2 + 1}.$$

Отметим, что эта функция является строго монотонной и строго квазивогнутой. На Рис. 2.5 изображены кривые безразличия для этой функции. Пунктирной линией показано, как меняется спрос потребителя при постоянных доходе и цене второго блага ($R = 3$, $p_2 = 1$). Точками показан спрос для двух разных бюджетных ограничений; при более высокой цене первого блага потребитель предъявляет на него более высокий спрос.

Более слабое, чем закон спроса, свойство, используемое при изучении влияния изменения цен на потребительский выбор, называется законом спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому. Приведем его формулировку.

Пусть $\mathbf{x}^0$ — потребительский набор, который является спросом при некоторых заданных ценах $\mathbf{p}^0$, т. е. в предположении локальной ненасыщаемости предпочтений $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)$. Отображение, задаваемое формулой

$$\mathbf{x}^s(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x}^0),$$

называется компенсированным спросом по Слуцкому. Закон спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому заключается в следующем.

Определение 2.10

Будем говорить, что отображение спроса $\mathbf{x}(\cdot)$ удовлетворяет закону спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому, если для $\mathbf{x} \in \mathbf{x}^s(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x}^0)$ выполнено соотношение

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leqslant 0.$$

Если спрос является функцией, то это соотношение можно записать в виде

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x}^s(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^s(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)) \leqslant 0. \qquad \triangleleft$$

Отметим очевидное отличие формулировки этого свойства от обычного закона спроса: данное свойство должно выполняться при компенсированном, а не фиксированном доходе.

В отличие от обычного закона спроса, закон спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому выполняется при естественных предположениях относительно предпочтений, что показывает следующее утверждение.

Теорема 2.14

Предположим, что предпочтения потребителя непрерывны и локально ненасыщаемы. Тогда выполняется закон спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому. ┘

Доказательство: Так как предпочтения локально ненасыщаемы, то бюджетное ограничение выходит на равенство для набора $\mathbf{x}$, являющегося спросом потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\mathbf{p}\mathbf{x}^0$, т. е. $\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathbf{x}^0$. Аналогично $\mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 = R$. С учетом этого получим

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = \mathbf{p}\mathbf{x} - \mathbf{p}\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}^0\mathbf{x} + \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0 - \mathbf{p}^0\mathbf{x} = R - \mathbf{p}^0\mathbf{x}.$$

Очевидно, что $\mathbf{x}^0 \in B(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x}^0)$. Таким образом, если $\mathbf{x} \in B(\mathbf{p}^0, R)$, то два набора выявленно эквивалентны и $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R)$ (см. пункт {vi}

Теоремы 2.2 на с. 109), и поэтому с учетом локальной ненасыщаемости $\mathbf{p}^0\mathbf{x} = R$, т. е. рассматриваемая величина равна нулю. Доказываемое неравенство будет строгим, если $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{p}^0, R)$. Действительно, если $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{p}^0, R)$, то $\mathbf{p}^0\mathbf{x} > R$, т. е. рассматриваемая величина отрицательна. ■

Замечание: Доказанное свойство тесно связано с теорией выявленных предпочтений (см. Приложение 2.B). Действительно, набор $\mathbf{x}^0$ — спрос при ценах $\mathbf{p}^0$, а набор $\mathbf{x}$ — спрос при ценах $\mathbf{p}$. По слабой аксиоме выявленных предпочтений (см. Определение 1.20 на с. 81) неравенства $\mathbf{p}\mathbf{x}^0 \leqslant \mathbf{p}\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}^0\mathbf{x} < \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$ не могут быть верными одновременно (не может быть, чтобы одновременно набор $\mathbf{x}$ был выявленно не хуже $\mathbf{x}^0$, а $\mathbf{x}^0$ — выявленно лучше $\mathbf{x}$). Поскольку первое неравенство выполнено (по определению компенсированного спроса по Слуцкому), второе неравенство неверно. Значит, $\mathbf{p}^0\mathbf{x} \geqslant \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$.

Исходя из доказанной теоремы, мы можем утверждать только то, что закон спроса выполняется при условии компенсирующего изменения дохода, т. е. при условии, что доход изменился таким образом, чтобы компенсировать рост цены и позволить потребителю покупать прежний потребительский набор. Тем не менее данное свойство достаточно информативно и может служить полезным инструментом анализа, как показывает, в частности, следующий пример.

Пример 2.15

Рассмотрим экономику с двумя благами. В первом периоде времени вектор цен был равен $\mathbf{p}^0 = (1; 1)$, а доход потребителя — $R^0 = 8$. Спрос потребителя в первом периоде времени был равен $\mathbf{x}^0 = (6; 2)$ (Рис. 2.6(a)). Во втором периоде цены изменились и стали равны $\mathbf{p}^1 = (1; 2)$, а доход стал равен $R^1 = 12$. Известно, что спрос порождается монотонной положительно однородной первой степени функцией полезности. Попробуем найти все возможные значения, которые может принимать спрос во втором периоде.

В данном примере у нас изменились сразу два параметра: цена второго блага и доход потребителя. Разложим это изменение на два последовательных: (1) изменение цены при компенсирующем доходе; (2) изменение дохода. Компенсированный доход, отвечающий изменению цен от $(1; 1)$ до $(1; 2)$, равен 10 $(1 \cdot 6 + 2 \cdot 2)$. В силу закона спроса при компенсирующем изменении дохода и в силу локальной ненасыщаемости предпочтений спрос потребителя при таком изменении

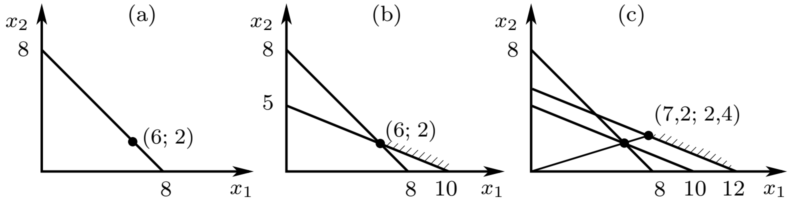


Рис. 2.6. *Оценка спроса при изменении цен и дохода в случае однородной функции полезности*

$\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ должен удовлетворять двум условиям:

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 10, \quad (1-1)(\tilde{x}_1 - 6) + (2-1)(\tilde{x}_2 - 2) = \tilde{x}_2 - 2 \leqslant 0,$$

или

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 10, \qquad \tilde{x}_2 \leqslant 2$$

(см. Рис. 2.6(b)).

Теперь можно воспользоваться свойством отображения спроса для однородной функции полезности, установленным нами в Примере 2.2. Точнее, мы установили, что если доход потребителя увеличивается в α раз, то и спрос в этом случае также увеличится в α раз. С учетом этого свойства получаем, что спрос во втором периоде подчинен следующим ограничениям:

$$\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = 12, \quad \tilde{x}_2 \leqslant 2{,}4$$

(см. Рис. 2.6(c)). ▲

Аналогичное свойство спроса выполняется и при компенсации дохода по Хиксу, т. е. при таком изменении дохода, при котором выборы характеризуются заданным уровнем полезности. Это свойство будем называть **законом спроса при компенсирующем изменении дохода по Хиксу**. Заметим, что хиксианский спрос часто называют *компенсированным спросом*, поскольку это спрос при компенсирующем изменении дохода по Хиксу.

Определение 2.11

Будем говорить, что отображение спроса $\mathbf{x}(\cdot)$ удовлетворяет закону спроса при компенсирующем изменении дохода по Хиксу, если для любого допустимого набора $\mathbf{x}$ и любых цен $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \in \mathbb{R}^l_{++}$ при $\mathbf{h} \in \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и $\mathbf{h}' \in \mathbf{h}(\mathbf{p}', \mathbf{x})$ справедливо неравенство

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{h}' - \mathbf{h}) \leqslant 0. \qquad \triangleleft$$

Если спрос является функцией, то приведенное в определении соотношение можно записать в виде

$$(\mathbf{p}' - \mathbf{p})(\mathbf{h}(\mathbf{p}', \mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})) \leqslant 0.$$

Теорема 2.15

Если предпочтения потребителя непрерывны, то для отображения спроса рационального потребителя выполняется закон спроса при компенсирующем изменении дохода по Хиксу. ┘

Доказательство: При непрерывности предпочтений $\mathbf{h} \sim \mathbf{h}' \sim \mathbf{x}$. Утверждение непосредственно следует из двух очевидных неравенств

$$\mathbf{p}\mathbf{h} \leqslant \mathbf{p}\mathbf{h}' \quad \text{и} \quad \mathbf{p}'\mathbf{h}' \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{h}. \qquad \blacksquare$$

Сравним теперь два полученных нами варианта закона спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому и по Хиксу. Пусть $\mathbf{x}^0$ — оптимальное решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^0$ и доходе $R = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$ и пусть цены становятся равными $\mathbf{p}^1$. Тогда рассматриваемые свойства спроса можно переформулировать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{по Слуцкому:} \quad & (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0) \leqslant 0; \\ \text{по Хиксу:} \quad & (\mathbf{p}^1 - \mathbf{p}^0)(\mathbf{x}(\mathbf{p}^1, e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)) - \mathbf{x}^0) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Таким образом, различие между двумя этими свойствами состоит, по сути, только в величине компенсации.

Пусть, например, цена первого блага упала, а цены остальных благ остались неизменными. Рассматриваемые компенсирующие изменения дохода делают новую ситуацию в определенном смысле схожей с исходной. Поскольку падение цены расширяет бюджетное множество потребителя, доход должен упасть, т. е. следует произвести *вычет* из дохода, чтобы сделать новую ситуацию схожей с исходной. Величина компенсирующего вычета по Слуцкому равна $\Delta^s = R - \mathbf{p}^1\mathbf{x}^0$, а величина компенсирующего вычета по Хиксу равна $\Delta^h = R - e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)$. Несложно понять, что $\Delta^s \leqslant \Delta^h$. Действительно, это неравенство эквивалентно тому, что $\mathbf{p}^1\mathbf{x}^0 \geqslant e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0) = \mathbf{p}^1\mathbf{h}(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)$. Последнее неравенство непосредственно следует из определения функции расходов (потребительский набор $\mathbf{x}^0$ допусти́м в соответствующей двойственной задаче, и его стоимость не может быть меньше минимума $e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)$).

Обе указанные формы компенсирующего изменения дохода имеют достаточно ясную графическую интерпретацию. Предположим, что в исходной ситуации цены равны $p^0 = (p_1^0, 1)$, а доход составляет R. Предположим, что упала цена первого блага, а цена второго блага и доход остались неизменными, т. е. $p^1 = (p_1^1, 1)$, $p_1^0 > p_1^1$. Рис. 2.7 иллюстрирует различие в определениях компенсирующего изменения дохода по Слуцкому и по Хиксу. На Рис. 2.7(a) показан способ нахождения компенсирующего изменения дохода по Слуцкому. Строим обе бюджетные линии. Находим спрос в исходной ситуации. После этого сдвигаем новую бюджетную линию так, чтобы она *проходила через точку исходного спроса.* Разница между доходом, отвечающим этому положению, и исходным доходом и будет компенсирующим изменением по Слуцкому.

На Рис. 2.7(b) показан способ нахождения компенсирующего изменения дохода по Хиксу. Отличие от предыдущего случая состоит в том, что в этот раз мы сдвигаем бюджетную линию до *точки касания с исходной кривой безразличия.*

Заметим, что хотя изменения спроса по Хиксу и по Слуцкому, вообще говоря, различаются, они совпадают при дифференциально малом изменении цен, а именно,

$$\frac{\partial \mathbf{x}^s(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{p}\mathbf{x}^0)}{d\mathbf{p}}\Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)}{\partial R}\mathbf{x}^0$$

и

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0))}{d\mathbf{p}}\Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0} = \\ = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0)}{\partial R}\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0). \quad (2.1)$$

Приведенные выражения равны между собой, поскольку набор $\mathbf{x}^0$ является спросом при ценах $\mathbf{p}^0$ и, следовательно,

$$\mathbf{h}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)) = \mathbf{x}^0.$$

Оба выражения равны матрице замены $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0)$. Таким образом, если цены меняются на дифференциально малую величину $d\mathbf{p}$, то компенсированный спрос меняется на величину $d\mathbf{x} = \mathbf{S}d\mathbf{p}$. Видим, что закон спроса при компенсирующем изменении дохода для дифференциально малых изменений будет иметь вид $d\mathbf{p}^\mathsf{T} d\mathbf{x} = d\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{S}d\mathbf{p} \leqslant 0$.

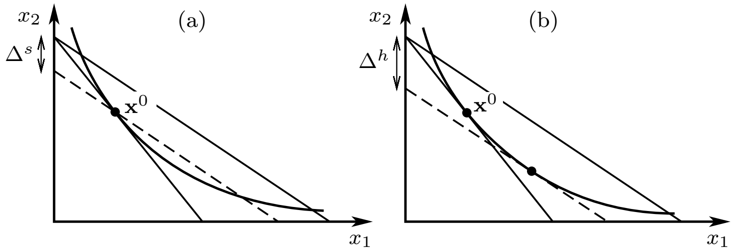


Рис. 2.7. *Компенсирующие изменения дохода (a) по Слуцкому и (b) по Хиксу при* $p_1^0 > p_1^1$, $p_2^0 = p_2^1 = 1$

Очевидно, что это свойство тесно связано с тем, что матрица замены $\mathbf{S}$ отрицательно полуопределена[26].

Вернемся к обсуждению собственно закона спроса. В случае его выполнения мы получаем информацию об изменении спроса, обусловленную только изменением цен, без компенсирующего изменения дохода. В частности, в этом случае при определенных предположениях можно сделать вывод об отсутствии товаров Гиффена, т. е. товаров, спрос на которые растет при росте цены.

Если цены меняются на дифференциально малую величину $d\mathbf{p}$, то маршаллианский спрос меняется на величину $d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p}$. Как следует из уравнения (○○),

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \lambda \mathbf{T},$$

где через $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ мы обозначили следующую матрицу:

$$\mathbf{T} = \mathbf{H}^{-1} - \frac{\mathbf{H}^{-1} \nabla u \mathbf{x}^{\mathsf{T}} + \mathbf{H}^{-1} \nabla u \nabla u^{\mathsf{T}} \mathbf{H}^{-1}}{\nabla u^{\mathsf{T}} \mathbf{H}^{-1} \nabla u}.$$

«Локальный» закон спроса ($d\mathbf{p}^{\mathsf{T}} d\mathbf{x} \leqslant 0$) эквивалентен тому, что $d\mathbf{p}^{\mathsf{T}} \mathbf{T} d\mathbf{p} \leqslant 0$ для любого изменения $d\mathbf{p}$, т. е. тому, что матрица $\mathbf{T}$ является отрицательно полуопределенной. Как можно показать, отрицательная полуопределенность матрицы $\mathbf{T}$ эквивалентна тому, что в данной точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ выполнено неравенство

$$\frac{\nabla u^{\mathsf{T}} \mathbf{x}}{\nabla u^{\mathsf{T}} \mathbf{H}^{-1} \nabla u} - \frac{\mathbf{x}^{\mathsf{T}} \mathbf{H} \mathbf{x}}{\nabla u^{\mathsf{T}} \mathbf{x}} \leqslant 4. \tag{$\mho$}$$

[26] Матрица замены не может быть отрицательно *определенной*, поскольку, как мы видели ранее, она вырождена.

Для выполнения «глобального» закона спроса (см. Определение 2.9) необходимо и достаточно, чтобы это неравенство было выполнено для всех $\mathbf{x} \in \bar{X}$, где $\bar{X}$ — область значений функции спроса. Мы не станем приводить здесь доказательство данного утверждения (которое достаточно длинно и технично) и более точную его формулировку[27].

Отметим, что прямая проверка выполнения сформулированного неравенства даже в случае двух товаров достаточно трудоемка, а в пространствах большей размерности вряд ли представляется возможной, кроме как в простых случаях (например, когда предпочтения гомотетичны, см. задачу 2.59). Но оно может служить полезным источником для получения *достаточных* условий выполнения закона спроса. В частности, в рамках сделанных предположений первое слагаемое отрицательно, поэтому закон спроса будет заведомо выполнен в случае справедливости для всех $\mathbf{x} \in \bar{X}$ следующего неравенства:

$$-\frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x}}{\nabla u(\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{x}} \leqslant 4.$$

(Это условие можно использовать для решения задачи 2.58.) Другое, еще более слабое, но более удобное для проверки условие состоит в том, что $-\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{x} \leqslant 4\nabla u(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \bar{X}$.

Уравнение Слуцкого (см. Теорему 2.11) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}.$$

Получаем, что изменение спроса вследствие дифференциально малого изменения цен $d\mathbf{p}$ равно

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}}d\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{p}}d\mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p} = \mathbf{S}d\mathbf{p} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p}.$$

Данное уравнение показывает, что изменение спроса на благо в результате бесконечно малого изменения цен $d\mathbf{p}$ можно разложить на две составляющие: эффект замены $\mathbf{S}d\mathbf{p}$ и эффект дохода $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p}$. Чтобы выяснить, выполнен ли в данной точке закон спроса, следует изучить знак величины $d\mathbf{p}^\mathsf{T}d\mathbf{x} = d\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{S}d\mathbf{p} - d\mathbf{p}^\mathsf{T}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p}$. Как мы уже

[27] Заинтересованный читатель сможет найти эти сведения в кн. В. М. Полтерович. *Экономическое равновесие и хозяйственный механизм*, М.: Наука, 1990, с. 69—77. Некоторый вариант этого утверждения в терминах непрямой функции полезности можно найти в работе J. K. Quah. The Weak Axiom and Comparative Statics, Working Paper, No. W15, Oxford: Nuffield College, 1999.

видели, первое слагаемое, соответствующее эффекту замены, неотрицательно. Таким образом, вывод зависит от величины $d\mathbf{p}^{\mathsf{T}}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R}\mathbf{x}d\mathbf{p}$, соответствующей эффекту дохода. В частности, если благо нормальное в том смысле, что $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R} > \mathbf{0}$, то эффект дохода будет положительным и как следствие будет выполнен (локально) закон спроса.

Для приведенного разложения на эффект дохода и эффект замены можно предложить аналог в случае, когда изменения цен не являются бесконечно малыми. Пусть, как и выше, $\mathbf{x}^0$ — оптимальное решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}^0$ и доходе $R = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$ и пусть цены становятся равными $\mathbf{p}^1$. Тогда разложение на эффект дохода и эффект замены при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому будет иметь следующий вид:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = [\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1\mathbf{x}^0)] + [\mathbf{x}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1\mathbf{x}^0) - \mathbf{x}^0].$$

Первое слагаемое соответствует эффекту дохода (изменению дохода от $R = \mathbf{p}^0\mathbf{x}^0$ до $\mathbf{p}^1\mathbf{x}^0$), а второе слагаемое — эффекту замены. Аналогично с использованием компенсирующего изменения дохода по Хиксу получим следующее разложение:

$$\Delta\mathbf{x} = [\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0))] + [\mathbf{x}(\mathbf{p}^1, e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)) - \mathbf{x}^0].$$

Заметим, что еще два подобных разложения можно получить, поменяв в приведенных формулах местами $\mathbf{p}^0$ и $\mathbf{p}^1$ (и соответственно $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$). Таким образом, имеем четыре различных естественных разложения на эффект дохода и эффект замены. Очевидно, что в пределе, при малых приращениях, эти четыре разложения становятся идентичными.

2.4.2. Оценка изменения благосостояния

Экономисты часто сталкиваются с задачей оценки изменений в благосостоянии потребителей при проведении мероприятий экономической политики. Рассмотрим две ситуации: до проведения мероприятий экономической политики и после. В первой ситуации потребитель сталкивается с ценами $\mathbf{p}^0$ и доходом R^0, во второй — с ценами $\mathbf{p}^1$ и доходом R^1. Поскольку рассматривается только выбор на классических бюджетных множествах, здесь можно использовать введенное ранее понятие непрямой функции полезности $v(\mathbf{p}, R)$. В то время как обычная функция полезности $u(\mathbf{x})$ соответствует оценке потребителем потребительских наборов $\mathbf{x}$, непрямая функция полезности соответствует оценке потребителем самих ситуаций выбора.

Если $v(\mathbf{p}^0, R^0) < v(\mathbf{p}^1, R^1)$, то вторая ситуация более благоприятна для потребителя, а если $v(\mathbf{p}^0, R^0) > v(\mathbf{p}^1, R^1)$, то менее благоприятна.

Вообще говоря, мы можем говорить лишь о направлении изменения благосостояния, а не оценивать его величину. Тем не менее при расчетах издержек и выгод мероприятий экономической политики пытаются получить количественные оценки таких изменений. При этом используется так называемая непрямая денежная функция полезности.

Определение 2.12

Непрямая денежная функция полезности $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, R)$ — это доход, который требуется, чтобы при ценах $\mathbf{q}$ потребитель мог бы иметь тот же уровень полезности, что и при ценах $\mathbf{p}$, располагая доходом R, т. е. $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, R) = e(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$. $\lhd$

Другими словами, непрямая денежная полезность $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, R)$ определяется как непрямая функция полезности для функции расходов $e(\mathbf{q}, \mathbf{x})$, рассматриваемой как функция полезности. Опишем, как ее можно использовать и какие проблемы при этом возникают.

Непрямая денежная функция полезности определяется на основе некоторого (произвольного) «эталонного» вектора цен $\mathbf{q} > \mathbf{0}$. Оценка изменения благосостояния при этом будет равна

$$\begin{aligned}\Delta\mu(\mathbf{q}) &= \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}^1, R^1) - \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}^0, R^0) = \\ &= e(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, R^1)) - e(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R^0)) = e(\mathbf{q}, \mathbf{x}^1) - e(\mathbf{q}, \mathbf{x}^0),\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}^0$ — спрос потребителя в исходном состоянии, а $\mathbf{x}^1$ — спрос потребителя в новом состоянии. Значение $\Delta\mu(\mathbf{q})$, вообще говоря, может быть различным для разных векторов $\mathbf{q}$, и поэтому соответствующие оценки изменения благосостояния содержат элемент субъективизма. Исключением являются квазилинейные предпочтения (предпочтения, которые можно описать квазилинейной функцией полезности).

В случае квазилинейности предпочтений все меры благосостояния эквивалентны с точностью до постоянного множителя, а в случае, когда цена последнего блага равна единице (единица «квазилинейного» блага является единицей измерения, *numeraire*), они совпадают. Покажем это, вычислив $\Delta\mu(\mathbf{q})$ для квазилинейной функции полезности $u(x_1, \ldots, x_l) = s(x_1, \ldots, x_{l-1}) + x_l$ в предположении, что

$p_l = 1$. В этом случае непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\mathbf{p}_{-l}, 1, R) = s(x_1(\mathbf{p}_{-l}), \ldots, x_{l-1}(\mathbf{p}_{-l})) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(\mathbf{p}_{-l})$$

(см. Пример 2.6). Используя соотношения двойственности, получаем, что функция расходов в случае квазилинейных предпочтений имеет вид $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) - s(\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}_{-l})) + \mathbf{p}_{-l}\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{p}_{-l})$. По определению непрямой денежной функции полезности $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, R) = e(\mathbf{q}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$, поэтому

$$\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, R) = v(\mathbf{p}, R) - s(\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{q}_{-l})) + \mathbf{q}_{-l}\mathbf{x}_{-l}(\mathbf{q}_{-l}).$$

Как видим, при любом фиксированном векторе цен $\mathbf{q}$ непрямая денежная функция полезности совпадает с точностью до константы (зависящей от $\mathbf{q}$) с той непрямой функцией полезности, которая определяется естественной для квазилинейных предпочтений нормировкой. Отсюда по определению $\Delta\mu(\mathbf{q})$ получаем

$$\Delta\mu(\mathbf{q}) = \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}^1, R^1) - \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}^0, R^0) = v(\mathbf{p}^1, R^1) - v(\mathbf{p}^0, R^0).$$

В общем случае, когда значение $\Delta\mu(\mathbf{q})$ зависит от выбора $\mathbf{q}$, естественными кандидатами на роль вектора цен $\mathbf{q}$ представляются $\mathbf{p}^0$ и $\mathbf{p}^1$ (соответственно цены до изменений и цены после изменений). В первом случае получим меру изменения благосостояния, называемую эквивалентным изменением дохода (EV), а во втором — меру изменения благосостояния, называемую компенсирующим изменением дохода (CV).

Определение 2.13

Эквивалентное изменение дохода (эквивалентная вариация) — это такое приращение исходного дохода, которое обеспечивает в исходных ценах тот же уровень благосостояния, что и после изменений:

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R^0 + EV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1)) \sim \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, R^1). \qquad \lhd$$

Нетрудно убедиться, что

$$EV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1) = e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1) - R^0 = \Delta\mu(\mathbf{p}^0).$$

Действительно, доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\mathbf{p}^0$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации после изменений (т. е. при ценах $\mathbf{p}^1$ и доходе R^1), по определению непрямой денежной функции полезности равен $\mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, R^1) = e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1)$. Поэтому требуемое изменение дохода по сравнению с исходным доходом R_0 равно

$$e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1) - R^0 = e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^1) - e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = \\ = \mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, R^1) - \mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^0, R^0) = \Delta\mu(\mathbf{p}^0),$$

где мы воспользовались тем, что если $\mathbf{x}^0$ — спрос потребителя при ценах $\mathbf{p}^0$, то $e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}^0) = R^0$.

Пример 2.16

Пусть функция спроса и функция расходов потребителя равны

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2}; \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}\right)$$

и

$$e(\mathbf{p}, x) = \frac{p_1p_2(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})^2}{p_2 + a^2p_1}$$

соответственно. Найдем эквивалентную вариацию, отвечающую изменению цен от $\mathbf{p}^0 = (2; 1)$ до $\mathbf{p}^1 = (1; 2)$ при условии, что доход оставался неизменным и был равен R. Непрямая денежная функция полезности для данного потребителя будет иметь вид

$$\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, R) = \frac{q_1q_2(p_2 + a^2p_1)}{p_2p_1(q_2 + a^2q_1)}R.$$

Таким образом,

$$EV(\mathbf{p}^0, R, \mathbf{p}^1, R) = \mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, R) - R = \frac{p_1^0p_2^0(p_2^1 + a^2p_1^1)}{p_2^1p_1^1(p_2^0 + a^2p_1^0)}R - R.$$

Подставляя $\mathbf{p}^0 = (2; 1)$ и $\mathbf{p}^1 = (1; 2)$, получаем $EV = \frac{1-a^2}{1+2a^2}R$. ▲

Определение 2.14

Компенсирующее изменение дохода (компенсирующая вариация) — это такое уменьшение дохода в новой ситуации, которое позволяет при новых ценах достичь уровня полезности, соответствующего исходной ситуации:

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R^0) \sim \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, R^1 - CV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1)). \quad \triangleleft$$

По определению денежной непрямой функции полезности доход, достаточный для того, чтобы при ценах $\mathbf{p}^1$ обеспечить данному потребителю такой же уровень полезности, как и в ситуации до изменений (т. е. при ценах $\mathbf{p}^0$ и доходе R^0), равен $\mu(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^0, R^0) = e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0)$. Кроме того, $\mu(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^1, R^1) = e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1) = R^1$. Поэтому компенсирующая вариация равна изменению непрямой денежной функции полезности при $\mathbf{q} = \mathbf{p}^1$:

$$CV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1) = e(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^0) - R^1 = \Delta\mu(\mathbf{p}^1).$$

Отметим, что введенное понятие компенсирующей вариации — это то же самое изменение дохода, с которым мы сталкивались при рассмотрении закона спроса (см. с. 155).

Пример 2.17 (продолжение Примера 2.16)
В рассматриваемом случае при постоянном доходе компенсирующая вариация равна

$$CV(\mathbf{p}^0, R, \mathbf{p}^1, R) = R - \mu(\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, R) = R - \frac{p_1^1 p_2^1 (p_2^0 + a^2 p_1^0)}{p_2^0 p_1^0 (p_2^1 + a^2 p_1^1)} R.$$

При $\mathbf{p}^1 = (1; 2)$ и $\mathbf{p}^0 = (2; 1)$ компенсирующая вариация равна $CV = \frac{(1-a^2)}{(2+a^2)} R$. ▲

Рассмотрим соотношение между этими мерами изменения благосостояния в простом случае, когда изменяется только цена одного блага (случай, который интересует нас при анализе последствий налогообложения): $R^0 = R^1 = R$, $p_1^0 > p_1^1$, $\mathbf{p}_{-1}^0 = \mathbf{p}_{-1}^1 = \mathbf{p}_{-1}$. Очевидно, что потребитель при таком изменении не может ухудшить свое положение, поскольку множество доступных ему потребительских наборов расширяется: $v(\mathbf{p}^0, R) \leqslant v(\mathbf{p}^1, R)$. Введем следующие упрощенные обозначения:

$$EV = EV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1), \quad CV = CV(\mathbf{p}^0, R^0, \mathbf{p}^1, R^1),$$
$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(\mathbf{p}^0, R), \quad \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}(\mathbf{p}^1, R).$$

Кроме того, так как в данном случае меняется только цена первого блага, то для упрощения записи не будем в дальнейшем указывать остальные цены $\mathbf{p}_{-1}$ и доход R в качестве аргументов функций.

На Рис. 2.8 дана геометрическая интерпретация эквивалентной и компенсирующей вариаций для случая двух благ, когда цена второго блага равна единице ($p_2^0 = p_2^1 = 1$).

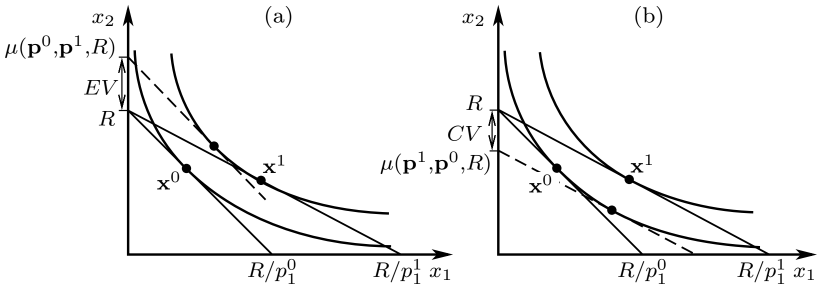


Рис. 2.8. *(a) Эквивалентная и (b) компенсирующая вариации при* $R^0 = R^1 = R$, $p_1^0 > p_1^1$, $p_2^0 = p_2^1 = 1$

Проинтегрировав тождество $\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_1} = h_1(\mathbf{p},\mathbf{x})$ (лемма Шепарда для теории потребления) по цене первого блага от p_1^1 до p_1^0, получим

$$\int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t,\mathbf{x})dt = e(p_1^0,\mathbf{x}) - e(p_1^1,\mathbf{x}).$$

Эквивалентную и компенсирующую вариации можно представить в аналогичном виде (как уменьшение значения функции расходов для одной и той же кривой безразличия при падении цены первого блага с p_1^0 до p_1^1, см. Рис. 2.8):

$$EV = e(p_1^0,\mathbf{x}^1) - R = e(p_1^0,\mathbf{x}^1) - e(p_1^1,\mathbf{x}^1),$$
$$CV = R - e(p_1^1,\mathbf{x}^0) = e(p_1^0,\mathbf{x}^0) - e(p_1^1,\mathbf{x}^0).$$

Таким образом,

$$EV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t,\mathbf{x}^1)dt, \quad CV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} h_1(t,\mathbf{x}^0)dt.$$

Как известно из курсов микроэкономики начального и промежуточного уровней, изменение потребительского излишка вычисляется по формуле[28]

$$\Delta CS = \Delta CS(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1) = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t)dt.$$

[28] См. также параграф 5.3.

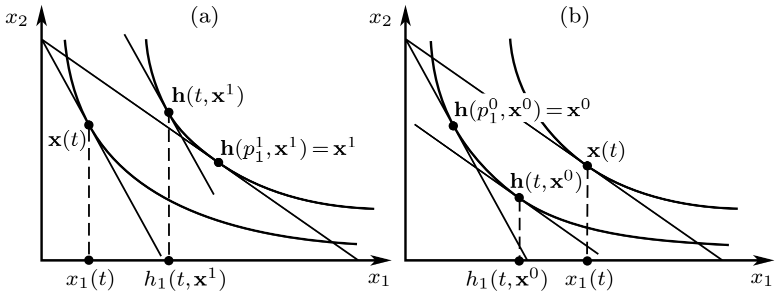


Рис. 2.9. *Соотношения между (a) хиксианским спросом и (b) маршаллианским спросом, используемые при доказательстве взаимосвязи эквивалентного, компенсирующего изменений дохода и потребительского излишка*

Из того, что $p_1^0 > p_1^1$, следует, что в данном случае все три величины неотрицательны (они положительны, если спрос строго положителен):

$$EV \geqslant 0, \quad CV \geqslant 0, \quad \Delta CS \geqslant 0.$$

Если эффект дохода неотрицателен (рассматриваемое благо — нормальное), то

$$h_1(t,\mathbf{x}^0) \leqslant x_1(t) \leqslant h_1(t,\mathbf{x}^1) \ \text{ при } \ p_1^1 \leqslant t \leqslant p_1^0.$$

Докажем эти неравенства формально. Спрос потребителя на первое благо при цене t (где $p_1^1 \leqslant t \leqslant p_1^0$) и доходе R равен $x_1(t) = x_1(t,R)$. Пусть теперь доход потребителя составляет $e(t,\mathbf{x}^0)$. Нетрудно заметить, что доход потребителя уменьшился на неотрицательную величину $CV(p_1^0,t) = R - e(t,\mathbf{x}^0)$. В силу нормальности блага имеем, что $x_1(t,e(t,\mathbf{x}^0)) \leqslant x_1(t,R)$. Из соотношений взаимности имеем, что $x_1(t,e(t,\mathbf{x}^0)) = h_1(t,\mathbf{x}^0)$. Таким образом, мы доказали левое из требуемых неравенств.

Аналогично доказывается правое неравенство. Предположим, что доход потребителя изменился от R до $e(t,\mathbf{x}^1)$, т.е. увеличился на неотрицательную величину $EV(t,p_1^1) = e(t,\mathbf{x}^1) - R$. При этом $x_1(t,R) \leqslant x_1(t,e(t,\mathbf{x}^1)) = h_1(t,\mathbf{x}^1)$.

Эти неравенства (для случая двух благ) проиллюстрированы на Рис. 2.9.

Интегрируя доказанные неравенства по t от p_1^1 до p_1^0, получаем,

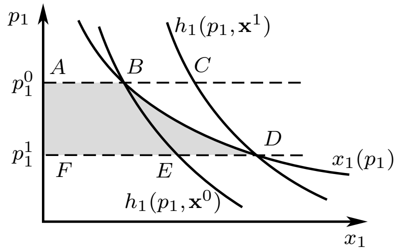


Рис. 2.10. *Связь между потребительским излишком, эквивалентной и компенсирующей вариациями*

что имеет место соотношение

$$CV \leqslant \Delta CS \leqslant EV.$$

На Рис. 2.10 величине CV соответствует площадь фигуры $ABEF$, величине EV — площадь фигуры $ACDF$, а величине ΔCS — площадь фигуры $ABDF$ (закрашенной области).

Пример 2.18 (продолжение Примеров 2.16 и 2.17)

Положим $p_2^0 = p_2^1 = 1$ в формулах для эквивалентной и компенсирующей вариаций:

$$CV = R - \frac{p_1^1(1 + a^2 p_1^0)}{p_1^0(1 + a^2 p_1^1)} R = \frac{p_1^0 - p_1^1}{p_1^0(1 + a^2 p_1^1)} R,$$

$$EV = \frac{p_1^0(1 + a^2 p_1^1)}{p_1^1(1 + a^2 p_1^0)} R - R = \frac{p_1^0 - p_1^1}{p_1^1(1 + a^2 p_1^0)} R.$$

Найдем также изменение потребительского излишка. Для этого требуется проинтегрировать спрос на первое благо, равный $x_1(p_1) = \frac{R}{p_1(1+a^2 p_1)}$. Как несложно проверить,

$$\left(\ln\left(\frac{t}{1 + a^2 t}\right)\right)' = \frac{1}{t(1 + a^2 t)}.$$

С учетом этого

$$\Delta CS = R \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, 1, R) dt = R \ln\left(\frac{p_1^0}{1 + a^2 p_1^0}\right) - R \ln\left(\frac{p_1^1}{1 + a^2 p_1^1}\right)$$

или

$$\Delta CS = R \ln\left(\frac{p_1^0(1 + a^2 p_1^1)}{p_1^1(1 + a^2 p_1^0)}\right).$$

Заметим, что изменение потребительского излишка можно представить через эквивалентную и компенсирующую вариации следующим образом:

$$\Delta CS = R\ln\left(1+\frac{EV}{R}\right) = -R\ln\left(1-\frac{CV}{R}\right).$$

При малых t верно приближение $\ln(1+t)\approx t$, поэтому при малых изменениях цены все три измерителя изменения благосостояния примерно равны. Кроме того, $\ln(1+t)<t$ при $t\neq 0$, поэтому, в подтверждение теории, выполнены неравенства $CV<\Delta CS<EV$. ▲

В случае квазилинейных предпочтений (если можно не учитывать ограничение на неотрицательность потребления того блага, которое входит в функцию полезности линейно, например, при достаточно большом доходе) отсутствует эффект дохода для товара, который входит в функцию полезности нелинейно. В этом случае записанные выше неравенства, связывающие маршаллианский и хиксианский спрос, выполняются как равенства и, следовательно,

$$EV(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1) = \Delta CS(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1) = CV(\mathbf{p}^0,\mathbf{p}^1).$$

В геометрической интерпретации это означает что все три кривые спроса, изображаемые на диаграмме, совпадают; следовательно, совпадают и три рассмотренные меры благосостояния.

Вообще говоря, полезности разных потребителей несравнимы друг с другом, и их бессмысленно складывать. Однако на основе денежных мер изменения благосостояния можно получать некоторые оценки мероприятий экономической политики.

Предположим, что существуют n потребителей с функциями полезности $u_i(x_i)$ и доходами R_i. Пусть цены изменились с $\mathbf{p}^0$ до $\mathbf{p}^1$. Пусть, кроме того, в результате этого изменения цен суммарная величина компенсирующей вариации положительна, т. е.

$$\sum_i CV_i(\mathbf{p}^0,R_i,\mathbf{p}^1,R_i)>0.$$

Покажем, что существует такое перераспределение доходов R_i', $i = 1,\ldots,n$, где $\sum_i R_i' = \sum_i R_i$, что $v_i(\mathbf{p}^1,R_i') > v_i(\mathbf{p}^0,R_i)$ для вех i, т. е. возможно компенсировать изменение цен каждому потребителю.

По определению компенсирующей вариации имеем, что

$$CV_\Sigma = \sum_i CV_i(\mathbf{p}^0,R_i,\mathbf{p}^1,R_i) = \sum_i (R_i - e_i(\mathbf{p}^1,x_i(\mathbf{p}^0,R_i)))>0.$$

Мы можем выбрать R'_i так, что для всех потребителей $R'_i > e_i(\mathbf{p}^1, x_i(\mathbf{p}^0, R_i))$ (достаточно взять $R'_i = e_i(\mathbf{p}^1, x_i(\mathbf{p}^0, R_i)) + CV_\Sigma/n$). При этом, поскольку непрямая функция полезности возрастает по доходу,

$$v_i(\mathbf{p}^1, R'_i) > v_i(\mathbf{p}^1, e_i(\mathbf{p}^1, x_i(\mathbf{p}^0, R_i))).$$

По свойству двойственности между $v_i(\cdot,\cdot)$ и $e_i(\cdot,\cdot)$ правое выражение в этом неравенстве равно $v_i(\mathbf{p}^0, R_i)$. Значит, при таком выборе доходов $v_i(\mathbf{p}^1, R'_i) > v_i(\mathbf{p}^0, R_i)$ для всех потребителей i.

Содержательно это можно интерпретировать следующим образом: мероприятие экономической политики, характеризующееся положительной суммарной компенсирующей вариацией, может привести к росту уровней полезности всех затронутых потребителей, если дополнить его соответствующим перераспределением дохода[29]. Однако следует отметить, что данная интерпретация предполагает, что такое перераспределение доходов *не вызовет* изменения цен. В рамках концепции общего равновесия такое предположение оказывается, вообще говоря, некорректным.

Задачи

2.48 Выведите формулы (○) и (○○) (см. с. 149).

2.49 Покажите, что если функция полезности имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = \min\{a_1 x_1, \ldots, a_l x_l\}$$

(леонтьевская функция полезности), т. е. блага абсолютно комплементарны, то отсутствует эффект замены, а если предпочтения квазилинейны, то отсутствует эффект дохода для всех благ, кроме одного.

2.50 Покажите, что любой товар Гиффена является малоценным. Справедливо ли обратное?

2.51 Могут ли все блага быть малоценными, если предпочтения локально ненасыщаемы?

2.52 Во вводных курсах микроэкономики обычно вводят следующие определения благ-заменителей и комплементарных благ (в терминах функций спроса Маршалла):

- «Благо 1 называется субститутом блага 2, если $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$».
- «Благо 1 называется комплементарным для блага 2, если $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$».

---

[29] Ср. с Теоремой 5.3 из гл. 5 на с. 358.

(A) Покажите, что такие определения ведут к парадоксам. Например, возможна ситуация, когда благо 1 является субститутом блага 2, а обратное неверно.

(B) Покажите также, что, аналогичные определения в терминах функции хиксианского спроса (приведите их) свободны от парадоксов такого типа.

2.53 Пусть функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна: $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x_i)$, причем элементарные функции $u_i(\cdot)$ дважды дифференцируемы, имеют положительные первые и отрицательные вторые производные. Блага i и j $(i \neq j)$ могут быть взаимодополняющими (комплементарными) или взаимозаменяемыми для этого потребителя в смысле знака производной $\partial x_i / \partial p_j$. Покажите, что это зависит от свойств функции $u_j(\cdot)$, более конкретно — от соотношения величины $|u_j''(x_j)|\, x_j / u_j'(x_j)$ (эластичности предельной полезности по потреблению) и единицы. (*Указание:* Конкретизируйте для аддитивно-сепарабельной функции полезности необходимые условия максимума полезности при бюджетном ограничении. Рассматривая эти уравнения как тождества, продифференцируйте их по p_j.)

2.54 Пусть все исходные данные те же, что и в Примере 2.15. Укажите геометрическое место точек, среди которых может находиться спрос потребителя, обладающего квазилинейными предпочтениями.

2.55 В экономике обращаются два товара. Потребитель имеет локально ненасыщаемые предпочтения. Функция спроса на первый товар имеет вид $x_1(\mathbf{p}, R) = \frac{3R}{3p_1 + 4\sqrt{p_1 p_2}}$. Найдите компенсирующее изменение дохода по Слуцкому при $\mathbf{p} = (1; 1)$, $\mathbf{p}' = (1; 4)$ и $R = 121$.

2.56 Пусть непрямая функция полезности некоторого потребителя имеет вид $v(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{\min\{p_1, p_2\}}$. Найдите компенсирующее изменение дохода по Хиксу при $\mathbf{p} = (1; 1)$, $\mathbf{p}' = (1; 4)$ и $R = 121$.

2.57 Пусть потребитель имеет однородную первой степени функцию полезности. При ценах $\mathbf{p} = (1; 1)$ и доходе $R = 5$ его функция спроса была равна $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = (2; 3)$.

(A) Определите геометрическое место точек, которые могут представлять спрос потребителя, если на покупку первого товара ввели налог в размере 20% от цены, а доход потребителя остался неизменным.

(B) Ставка налога изменилась с 20% до 40%. Ответьте на тот же вопрос.

2.58 Пусть функция полезности потребителя аддитивно-сепарабельна, т. е. имеет вид $u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{l} u_i(x_i)$. Кроме того, предположим, что каждое слагаемое $u_i(x_i)$ положительно однородно степени $\alpha_i \geqslant 0$. Покажите, что спрос данного потребителя удовлетворяет закону спроса.

2.59 Пусть набор $\mathbf{x}$ является внутренним в потребительском множестве, и является спросом потребителя при некоторых ценах и доходе.

(A) Докажите, используя формулу Эйлера, что если предпочтения потребителя задаются положительно однородной степени α ($\alpha \in (0;1)$) функцией полезности, то левая часть в неравенстве (℧) равна нулю.

(B) Дайте интерпретацию полученных результатов в их связи с законом спроса.

(C) Докажите, пользуясь предыдущими результатами, что если предпочтения потребителя задаются положительно однородной первой степени функцией полезности, принимающей положительные значения, то выполнен закон спроса.

2.60 Проверьте выполнение упоминавшихся в данном параграфе достаточных условий закона спроса в случае функции полезности вида

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{A}$ — симметричная положительно определенная матрица.

2.61 Функция полезности Андрея Экономова $u(\cdot)$ зависит от потребления двух благ. Его доход — R^0, цена первого и второго блага — 1. Его начальник предлагает ему работу без изменения заработной платы в филиале фирмы в другом городе, где цена первого блага такая же, а цена второго в два раза выше. Экономов еще в университете ознакомился с понятиями компенсирующей и эквивалентной вариаций. Оценив предложение, он ответил, что в принципе он не против, но переезд для него означал бы потерю A в доходе. Однако он готов принять предложение, если его зарплата возрастет на B. Чему равны A и B?

(A) Решите задачу при $u(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$ и $R^0 = 240$.

(B) Решите задачу при $u(\mathbf{x}) = 4x_1x_2$ и $R^0 = 10$.

2.62 Николай Здоровяков потребляет только два блага — кофе и сигареты, причем может потреблять их только так, чтобы на чашку кофе приходилось три сигареты. Цена чашки кофе — 9, а цена сигареты — 2. Доход Николая составляет 180. Правительство ввело 50%-й налог на сигареты. Найдите изменение потребительского излишка, компенсирующую и эквивалентную вариации. Сравните их (по абсолютной величине) с налоговыми доходами правительства, полученными от Николая.

2.63 На потребление одного из благ (первого) введен налог, так что цена блага для потребителя стала равной $p_1 + t$, где p_1 — исходная рыночная цена. Цены остальных благ и доход потребителя остались неизменными. Пусть EV — эквивалентная вариация, связанная с соответствующим увеличением цены блага, а T — поступление от налога, $x_1(p_1)$ — функция спроса.

(A) Объясните, почему величину $-EV - T$ можно назвать чистыми потерями от налога.

(B) Запишите формулы для EV и T и покажите, что чистые потери неотрицательны.

(C) Предложите аналогичный измеритель чистых потерь, основанный на компенсирующей вариации. Совпадают ли эти два измерителя?

2.64 Сформулируйте определение компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка непосредственно в терминах функции спроса и функции полезности и вычислите на основе этого определения их величины при $l = 2$, $R^0 = R^1 = 100$, $\mathbf{p}^0 = (1; 1)$, $\mathbf{p}^1 = (2; 1)$, когда...

(A) предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности;
(B) блага совершенно заменимы (предпочтения представимы линейной функцией полезности);
(C) блага абсолютно комплементарны (предпочтения представимы леонтьевской функцией полезности);
(D) предпочтения описываются функцией Кобба—Дугласа.

2.65 Проделайте то же, что и в предыдущей задаче, в случае, когда цена на первое благо падает ($R^0 = R^1 = 100$, $\mathbf{p}^0 = (0{,}5; 1)$, $\mathbf{p}^1 = (1; 1)$). Сравните результаты.

2.66 В ситуациях, рассмотренных в двух предыдущих задачах, проиллюстрируйте на графике поведение кривых хиксианского спрроса и маршаллианского спроса (на первое благо), и укажите соответствующие фигуры, площади которых измеряют компенсирующую, эквивалентную вариации и потребительский излишек.

2.67 В экономике два блага. Цена второго блага и доход потребителя остаются неизменными.

(A) Для заданной на плоскости (x_1, p) системы кривых хиксианского спроса на первое благо изобразите возможное положение кривых маршаллианского спроса на это благо.

(B) Укажите на графике соответствующие компенсирующую, эквивалентную вариации и потребительский излишек при (i) падении и (ii) росте цены первого блага.

(C) Каковы соотношения между величинами компенсирующей, эквивалентной вариаций и потребительского излишка в ситуациях, различающихся по типу благ (нормальное/малоценное благо) и характером изменения цен (падение/рост)?

2.68 Пусть в экономике обращаются два блага. В результате некоторого мероприятия экономической политики изменилась цена первого блага. При этом цена второго блага и доход потребителя остались неизменными. Определите, как соотносятся компенсирующая, эквивалентная вариации и потребительский излишек в случае если...

(A) первое благо нормальное и его цена выросла;
(B) первое благо — товар Гиффена и его цена выросла;
(C) первое благо малоценное и его цена упала;
(D) первое благо — товар Гиффена и его цена упала;

Докажите соответствующие неравенства.

2.69 Покажите, что при изменении цены только одного блага ΔCS обладает свойством аддитивности.

2.70 ⟦Laffont⟧ Предположим, что цены на все блага, кроме первого, постоянны, доход постоянен и равен R^0, а цена первого блага меняется с p_1^0 до p_1^1. Эластичность спроса потребителя на первое благо по доходу постоянна и равна η.

(A) Проинтерпретируйте условие постоянства эластичности спроса по доходу как дифференциальное уравнение для спроса (рассматриваемого как функция дохода). Решите это уравнение и покажите, что

$$x_1(p_1, R) = x_1(p_1, R^0)\left(\frac{R}{R^0}\right)^\eta.$$

(B) Объясните, почему из леммы Шепарда следует следующее дифференциальное уравнение для функции расходов (рассматриваемой как функция цены первого блага):

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = x_1(p_1, e).$$

Подставив в это дифференциальное уравнение соотношение из пункта (A), решите его, исходя из того, что $\eta < 1$, и покажите, что

$$e(p_1^0, \mathbf{x})^{1-\eta} - e(p_1^1, \mathbf{x})^{1-\eta} = (1-\eta)(R^0)^{-\eta}\Delta CS,$$

где $\Delta CS = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, R^0)dt$ — изменение потребительского излишка, связанное с рассматриваемым изменением цены первого блага.

(C) Выразите $e(p_1^0, \mathbf{x}^1)$ и $e(p_1^1, \mathbf{x}^1)$ через R^0 и эквивалентную вариацию, связанную с рассматриваемым изменением. Покажите, что при $\eta < 1$ эквивалентная вариация является следующего вида функцией эластичности, дохода и изменения потребительского излишка:

$$EV = R^0\Big[1 + \frac{1-\eta}{R^0}\Delta CS\Big]^{\frac{1}{1-\eta}} - R^0.$$

(D) Получите аналогичную формулу для компенсирующей вариации при $\eta < 1$, выразив для этого $e(p_1^0, \mathbf{x}^0)$ и $e(p_1^1, \mathbf{x}^0)$ через R^0 и компенсирующую вариацию.

(E) Получите формулы для эквивалентной и компенсирующей вариаций при $\eta = 1$.

2.71 ⟦Laffont⟧ Предположим, что цены на все блага, кроме первого, постоянны, доход постоянен и равен R^0, а цена первого блага меняется с p_1^0 до p_1^1. Непрямая функция полезности потребителя имеет форму Гормана

$$v(\mathbf{p}, R) = a(\mathbf{p}) + b(\mathbf{p})R.$$

(A) Записав определение компенсирующей вариации CV с помощью непрямой функции полезности, покажите, что

$$v(p_1^1, R^0) - v(p_1^1, R^0 - CV) = v(p_1^1, R^0) - v(p_1^0, R^0).$$

Выведите отсюда формулу

$$\int_{R^0-CV}^{R^0} \frac{\partial v(p_1^1, R)}{\partial R}dR = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, R^0)\frac{\partial v(t, R^0)}{\partial R}dt,$$

воспользовавшись тождеством Роя.

(B) Приняв во внимание форму непрямой функции полезности, покажите, что

$$CV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} x_1(t, R^0)\frac{b(t)}{b(p_1^1)}dt.$$

(C) Применяя тождество Роя и меняя порядок дифференцирования ($\frac{\partial}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial R}\frac{\partial}{\partial p_1}$), покажите, что для непрямой функции полезности указанного вида выполнено равенство

$$\frac{\partial b(p_1)}{\partial p_1} = -\frac{\partial x_1(p_1, R)}{\partial R} b(p_1).$$

Решите соответствующее дифференциальное уравнение и выразите $\frac{b(p_1)}{b(p_1^1)}$ через $\int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial x_1(t, R^0)}{\partial R} dt$.

(D) Покажите, пользуясь предыдущими результатами, что компенсирующая вариация вычисляется по следующей формуле (формуле Сида):

$$CV = \int_{p_1^1}^{p_1^0} \exp\left\{-\int_{p_1^1}^{p_1} \frac{\partial x_1(t, R^0)}{\partial R} dt\right\} x_1(p_1, R^0) dp_1.$$

(E) Покажите, что если в рассматриваемом случае эластичность спроса на первое благо по доходу постоянна и равна η, то формула Сида примет вид

$$CV = \frac{R^0}{\eta}\left[1 - e^{-\frac{\eta}{R^0}\Delta CS}\right].$$

Указание: Введите обозначение

$$I(p_1) = \Delta CS(p_1^1, p_1) = \int_{p_1^1}^{p_1} x_1(t, R^0) dt$$

и воспользуйтесь тем, что $x_1(p_1, R^0) = I'(p_1)$.

(F) С использованием формулы, выведенной в предыдущем пункте, продемонстрируйте, что компенсирующая вариация и потребительский излишек должны совпадать в случае квазилинейных предпочтений.

Приложение 2.A. Дифференцируемость функций спроса

В этом приложении мы приведем условия (в терминах свойств функции полезности), гарантирующие дифференцируемость функции спроса и связанных с ней функций, характеризующих поведение потребителя.

Теорема 2.16

Пусть $X = \mathbb{R}_+^l$ и, кроме того, пусть

* функция полезности $u(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^l_{++}$;
* $\nabla u(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ при всех $\mathbf{x} > \mathbf{0}$;
* матрица вторых частных производных функции полезности $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ является отрицательно определенной при всех $\mathbf{x} > \mathbf{0}$;
* спрос потребителя положителен ($\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) > \mathbf{0}$) при всех ценах $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ и доходах $R > 0$.

Тогда

{i} функция маршаллианского спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и непрямая функция полезности $v(\mathbf{p}, R)$ непрерывно дифференцируемы по ценам и доходу при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$, $R > 0$;

{ii} функция хиксианского спроса $\mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и функция расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемы по ценам и по $\mathbf{x}$ при $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_{+}$. ⌟

Доказательство: Как было показано в п. 2.2.2, приведенные предположения гарантируют, что условия Куна—Таккера являются необходимыми и достаточными условиями того, что внутренний потребительский набор является решением задачи потребителя. Также было показано, что при выполнении этих условий множитель Лагранжа положителен. Таким образом, потребительский спрос при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R определяется следующими уравнениями:

$$\nabla u(\mathbf{x}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0};$$
$$\mathbf{p}\mathbf{x} - R = 0.$$

По теореме о неявной функции[30] функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ и множитель Лагранжа как функция цен и дохода $\lambda = \lambda(\mathbf{p}, R)$ будут непрерывно дифференцируемыми, если матрица

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) & \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^{\intercal} & 0 \end{pmatrix},$$

является невырожденной. Невырожденность этой матрицы при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R эквивалентна невырожденности матрицы

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}) & \nabla u(\mathbf{x})^{\intercal} \\ \nabla u(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}$$

при $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ (см. задачу 2.87).

[30] См. Теорему B.52 в Приложении B на с. II-650.

Покажем, что при сделанных нами предположениях матрица $\tilde{\mathbf{H}}$ является невырожденной. Предположим противное. Тогда существуют вектор $\mathbf{y}$ и число z, такие что $\mathbf{H}\mathbf{y} + z\nabla u(\mathbf{x}) = 0$ и $\nabla u(\mathbf{x})\mathbf{y} = 0$, где $(\mathbf{y}, z) \neq \mathbf{0}$. Случай $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ и $z \neq 0$ невозможен, поскольку $\nabla u(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Если же $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{y}^\intercal \mathbf{H}\mathbf{y} + \mathbf{y}^\intercal \nabla u(\mathbf{x})^\intercal z = \mathbf{y}^\intercal \mathbf{H}\mathbf{y} = 0$, что противоречит тому, что матрица $\mathbf{H}$ отрицательно определенная.

Таким образом, доказано, что функция маршаллианского спроса и множитель Лагранжа λ являются непрерывно дифференцируемыми по ценам и доходу. Далее, непрямая функция полезности определяется как $v(\mathbf{p}, R) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$, а функция полезности и функция спроса непрерывно дифференцируемы. Значит, непрямая функция полезности непрерывно дифференцируема по ценам и доходу. В силу свойств взаимности $v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = u(\mathbf{x})$. С учетом монотонности непрямой функции полезности по доходу и непрерывной дифференцируемости непрямой функции полезности имеем непрерывную дифференцируемость функции расходов по ценам. Наконец, в силу соотношения $\mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x})) = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, непрерывной дифференцируемости функции спроса по доходу и непрерывной дифференцируемости функции расходов по ценам имеем непрерывную дифференцируемость хиксианского спроса по ценам.

В задаче 2.88 читателю предлагается доказать непрерывную дифференцируемость функции расходов и хиксианского спроса по $\mathbf{x}$. ■

Отрицательная определенность матрицы Гессе функции полезности (и являющаяся следствием строгая вогнутость функции полезности) в этой теореме является слишком ограничительным условием, не имеющим содержательной экономической интерпретации. Это условие несложно заменить на более слабое — некоторый вариант квазивогнутости функции полезности (см. задачу 2.90).

Приложение 2.B. Выявленные предпочтения в модели потребителя

Рассмотрим потребителя, в основе поведения которого лежат неоклассические предпочтения. Предположим, что при некоторых ценах $\mathbf{p}'$ он выбрал набор $\mathbf{x}'$ и что для некоторого допустимого набора $\mathbf{x} \in X$ выполнено неравенство $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$. Набор $\mathbf{x}$ был доступен в данной ситуации выбора, поэтому если бы он был лучше $\mathbf{x}'$, то это противоречило бы рациональности потребителя. Поэтому должно

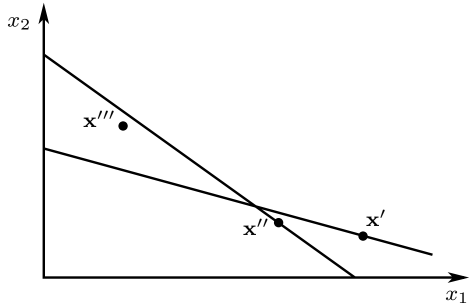


Рис. 2.11. *Косвенное отношение выявленного предпочтения*

быть выполнено $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{x}'$. Таким образом, если при ценах $\mathbf{p}'$ выбран набор $\mathbf{x}'$ и выполняется соотношение $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, то это означает, что набор $\mathbf{x}$ *выявленно не хуже*, чем набор $\mathbf{x}'$.

Пусть, далее, при ценах $\mathbf{p}'$ потребитель выбрал набор $\mathbf{x}'$, а при ценах $\mathbf{p}''$ — набор $\mathbf{x}''$, причем $\mathbf{p}'\mathbf{x}'' \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$. Если для некоторого допустимого набора $\mathbf{x} \in X$ выполнено $\mathbf{p}''\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}''\mathbf{x}''$, то должно быть выполнено $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{x}'$, поскольку $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}'' \preccurlyeq \mathbf{x}'$. Если бы при этом выполнялось $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, то из этого непосредственно следовало бы, что $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{x}'$. В этом случае можно сказать, что $\mathbf{x}$ *непосредственно* выявленно не лучше, чем $\mathbf{x}'$. В противном случае ($\mathbf{p}'\mathbf{x} > \mathbf{p}'\mathbf{x}'$) требуется проводить рассуждения по цепочке. В этом случае $\mathbf{x}$ *косвенным образом* (через посредство $\mathbf{x}''$) выявленно не лучше, чем $\mathbf{x}'$.

На Рис. 2.11 иллюстрируется случай косвенного выявления предпочтений. Здесь $\mathbf{p}'\mathbf{x}'' < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$ и поэтому $\mathbf{x}'' \preccurlyeq \mathbf{x}'$, $\mathbf{p}''\mathbf{x}''' < \mathbf{p}''\mathbf{x}''$, а значит, $\mathbf{x}''' \preccurlyeq \mathbf{x}''$. Следовательно, $\mathbf{x}''' \preccurlyeq \mathbf{x}'$. Однако мы не можем установить этот факт сразу, поскольку $\mathbf{x}'''$ не попадает в бюджетный треугольник, заданный сочетанием $(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$.

При локальной ненасыщаемости предпочтений, если для некоторого допустимого набора $\mathbf{x}$ выполнено строгое неравенство $\mathbf{p}'\mathbf{x} <$ $< \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, то должно быть выполнено $\mathbf{x} \prec \mathbf{x}'$. Поскольку $\mathbf{x} \preccurlyeq \mathbf{x}'$, достаточно показать, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}'$ невозможно. Действительно, можно найти такую окрестность набора $\mathbf{x}$, что любой набор из нее можно купить, имея доход $\mathbf{p}'\mathbf{x}'$ (это следует из непрерывности функции $\mathbf{p}'\mathbf{x}$). В этой окрестности набора $\mathbf{x}$ по локальной ненасыщаемости можно найти набор $\tilde{\mathbf{x}}$, который лучше $\mathbf{x}$, и следовательно, лучше эквивалентного ему набора $\mathbf{x}'$. Получаем $\mathbf{x}' \succ \tilde{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{p}'\tilde{\mathbf{x}} < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, но это невозможно при рациональности потребителя. Соотношение $\mathbf{p}'\mathbf{x} < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, таким образом, означает, что набор $\mathbf{x}'$ *выявленно лучше* набора $\mathbf{x}$[31].

Несложно распространить эти рассуждения на случай произвольного количества наблюдений за ценами и поведением потребителя при этих ценах. Рассмотрим $(\mathbf{p}^i, \mathbf{x}^i)$, $i = 1, \ldots, n$, где $\mathbf{p}^i$ — вектор цен, а $\mathbf{x}^i$ — выбранный при этих ценах потребительский набор.

Если имеется цепочка $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$, $\mathbf{p}^j\mathbf{x}^k \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, $\ldots$, $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^q \leqslant \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$ для подмножества нашего набора данных — $i, j, k, \ldots, q, r$, то должно выполняться $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j \succcurlyeq \mathbf{x}^k \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq \mathbf{x}^q \succcurlyeq \mathbf{x}^r$. В этом случае набор $\mathbf{x}^i$ **выявленно не хуже**, чем набор $\mathbf{x}^r$. Такое определение подразумевает, что $\mathbf{x}^i$ может быть непосредственно (если цепочка включает только $\mathbf{x}^i$ и $\mathbf{x}^r$) или же косвенно (если цепочка более длинная) выявленно не хуже, чем набор $\mathbf{x}^r$. Это многошаговый (усиленный) вариант выявленного отношения предпочтения. Мы будем использовать именно усиленный вариант и обозначать его $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd} \mathbf{x}^r$.

Если имеется цепочка $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$, $\mathbf{p}^j\mathbf{x}^k \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, $\ldots$, $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^q \leqslant \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$, где одно из неравенств строгое, то должно быть $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^r$. Значит, здесь набор $\mathbf{x}^i$ **выявленно лучше** набора $\mathbf{x}^r$. Здесь (и ниже) мы используем термин «выявленно лучше» тоже в усиленном смысле. Будем обозначать это усиленное отношение через $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}^r$.

2.B.1. Оценки для верхнего лебегового множества

Как следует из предыдущего обсуждения выявленных предпочтений, для произвольного допустимого потребительского набора $\mathbf{x} \in X$, имея совокупность данных $(\mathbf{p}^i, \mathbf{x}^i)$, $i = 1, \ldots, n$, мы в некоторых случаях можем сказать, что он выявленно не лучше или выявленно хуже набора $\mathbf{x}^i$ из наших данных ($\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd} \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd \mathbf{x}$ соответственно). Это позволяет получать оценку сверху для множества $L^+(\mathbf{x}^i)$ (множества наборов, которые не хуже, чем $\mathbf{x}^i$). Построим множество $\bar{L}^+(\mathbf{x}^i)$ из всех таких наборов, которые не являются выявленно худшими, чем $\mathbf{x}^i$. Тогда, очевидно, выполнено $L^+(\mathbf{x}^i) \subset \bar{L}^+(\mathbf{x}^i)$, т. е. настоящее верхнее лебегово множество будет лежать внутри нашей оценки.

---

[31] Другой классический вариант строгого отношения выявленного предпочтения основан на свойствах предпочтений, гарантирующих единственность оптимального набора в задаче потребителя. При однозначности выбора неравенство $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}'$ означает, что набор $\mathbf{x}'$ выявленно лучше набора $\mathbf{x}$, если эти два набора не совпадают.

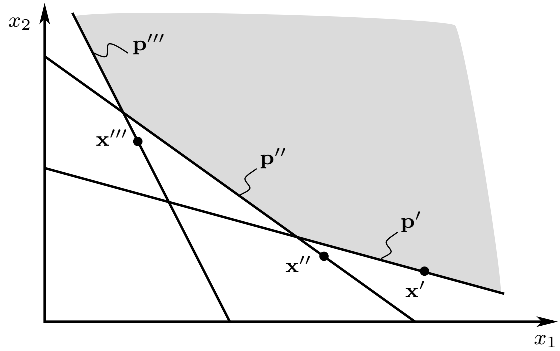


Рис. 2.12. *Оценка сверху для верхнего лебегового множества* $\bar{L}^+(\mathbf{x}')$

На Рис. 2.12 показано, как можно по данным парам $(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$, $(\mathbf{p}'', \mathbf{x}'')$, $(\mathbf{p}''', \mathbf{x}''')$ получить указанную оценку для множества $\bar{L}^+(\mathbf{x}')$. Здесь $\mathbf{x}'$ выявленно лучше, чем $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}'''$, поэтому требуется отсечь все точки, которые лежат хотя бы в одном из трех бюджетных треугольников $\mathbf{p}'\mathbf{x} < \mathbf{p}'\mathbf{x}'$, $\mathbf{p}''\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}''\mathbf{x}''$ или $\mathbf{p}'''\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}'''\mathbf{x}'''$.

Если не привлекать дополнительную информацию о виде предпочтений, то оценка снизу для верхнего лебегового множества будет состоять из тех наблюдаемых наборов, которые выявленно не хуже данного набора. Так, в случае, показанном на Рис. 2.12, мы знаем только, что $\mathbf{x}' \in L^+(\mathbf{x}')$. О множестве $L^+(\mathbf{x}''')$ мы можем сказать только, что ему принадлежат $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}'''$.

Если предположить, что предпочтения выпуклы, то верхнее лебегово множество будет включать не только сами выявленно не худшие точки, но и их выпуклую оболочку. Например, в случае, показанном на Рис. 2.12, оценка снизу для $L^+(\mathbf{x}''')$ должна включать треугольник с вершинами в точках $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ и $\mathbf{x}'''$.

Если предположить, что предпочтения монотонны, то вместе с каждой точкой $\mathbf{x}^j$, которая выявленно не хуже $\mathbf{x}^i$ ($\mathbf{x}^j \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^i$), оценка снизу для $L^+(\mathbf{x}^i)$ должна включать и точки, которые не хуже, чем $\mathbf{x}^j$, по монотонности, т. е. наборы из множества $\mathbf{x}^j + \mathbb{R}^l_+$.

В предположении выпуклости и монотонности предпочтений оценка снизу для $L^+(\mathbf{x}^i)$ должна включать вместе с каждой точкой $\mathbf{x}^j$, которая выявленно не хуже $\mathbf{x}^i$, также множество $\mathbf{x}^j + \mathbb{R}^l_+$ и, кроме того, все выпуклые комбинации таких множеств (см. Рис. 2.13).

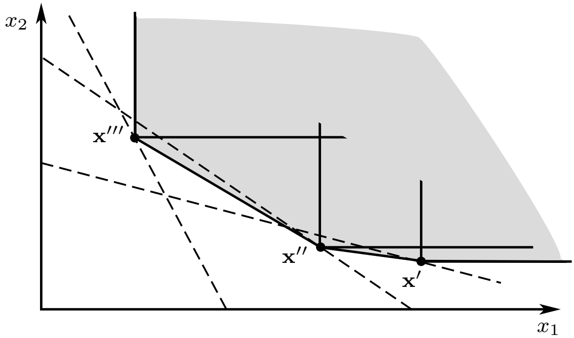


Рис. 2.13. *Оценка снизу для верхнего лебегового множества* $L^+(\mathbf{x}''')$ *в предположении выпуклости и монотонности предпочтений*

2.B.2. Рационализация. Теорема Африата[32]

Мы рассмотрели получение по совокупности данных $(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1), \ldots,$ $(\mathbf{p}^n, \mathbf{x}^n)$ оценки для множества $L^+(\mathbf{x}^i)$, соответствующего одному из наборов, $\mathbf{x}^i$. Можно поставить более сложную задачу рационализации данного набора наблюдений: найти предпочтения, которые могли бы порождать такие наблюдения. Ясно, что такая задача не имеет однозначного решения, но хотелось бы получить хотя бы одно подходящее решение. Если мы не уверены, что данные получены на основе рационального выбора, то решения у данной задачи может не быть. Поэтому желательно иметь алгоритм, который позволял бы определить, можно ли рационализовать имеющиеся данные.

> Неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ на X рационализуют наблюдения за выбором $(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1)$, $\ldots,$ $(\mathbf{p}^n, \mathbf{x}^n)$ $(\mathbf{x}^i \in X\ \forall i)$, если $\mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и всех $\mathbf{x} \in X$, таких что $\mathbf{p}^i\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$.

Это уточнение Определения 1.16 для случая потребительского выбора. При этом потребитель выбирает из бюджетного множества. Неявно предполагается, что предпочтения локально ненасыщаемы, так что если при ценах $\mathbf{p}^i$ был выбран набор $\mathbf{x}^i$, то доход потребителя был равен $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$.

[32] См. S. N. Afriat · The Construction of a Utility Function from Expenditure Data, *International Economic Review* **8** (1967): 67–77; A. Fostel, H. E. Scarf, and M. J. Todd · Two New Proofs of Afriat's Theorem, *Economic Theory* **24** (2004): 211–219

Предположим, что мы имеем цепочку наборов i, j, k, $\ldots$, r и опять i, такую что $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$, $\mathbf{p}^j\mathbf{x}^k \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, $\ldots$, $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^i \leqslant \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$. Другими словами, в этой цепочке по кругу каждый набор непосредственно выявленно не хуже последующего. В этой цепочке ни одно неравенство не может быть строгим. Действительно, например, $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^i < \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$ влекло бы $\mathbf{x}^i \rhd\!\!\rhd \mathbf{x}^i$, т. е. $\mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^i$ (набор лучше самого себя), что невозможно. Невозможность существования подобных циклов, т. е. невозможность того, чтобы набор по цепочке был выявленно лучше самого себя, по аналогии с общим определением, данным в гл. 1 (см. Определение 1.17 на с. 76) следует назвать *обобщенной аксиомой выявленных предпочтений* (*generalized axiom of revealed preference*, GARP). Таким образом, имеем следующую переформулировку GARP для модели поведения потребителя[33]:

> Совокупность данных $(\mathbf{p}^1, \mathbf{x}^1), \ldots, (\mathbf{p}^n, \mathbf{x}^n)$ удовлетворяет обобщенной аксиоме выявленных предпочтений, если не существует циклов вида $\mathbf{p}^i\mathbf{x}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{x}^i$, $\mathbf{p}^j\mathbf{x}^k \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, $\ldots$, $\mathbf{p}^r\mathbf{x}^i \leqslant \mathbf{p}^r\mathbf{x}^r$, где одно из неравенств строгое.

Найти предпочтения, рационализующие набор данных, можно только тогда, когда он удовлетворяет требованиям обобщенной аксиомы выявленных предпочтений. Теорема 1.12 в гл. 1 (см. с. 77) демонстрирует, как при выполнении GARP сконструировать предпочтения на конечном множестве точек $\{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$. Если множество допустимых наборов X более широкое, то нужно каким-то образом непротиворечиво распространить найденные предпочтения на остальные наборы из X.

Теорема Африата предлагает такое продолжение предпочтений на все множество X. Более того, согласно этой теореме, тот факт, что наблюдаемый выбор удовлетворяет GARP, эквивалентен существованию «хорошей» функции полезности, рационализующей данный выбор.

---

[33] Данное требование впервые было сформулировано в несколько более слабом виде Хаутеккером (см. H. S. Houthakker• Revealed Preference and the Utility Function, *Economica,* **17** (1950): 159–174) в предположении, что выбор потребителя однозначен, и получило название «усиленной аксиомы выявленных предпочтений» (SARP). Ср. со сноской 37 на с. 81, где сравниваются две формулировки «слабой аксиомы выявленных предпочтений» (Самуэльсона и Эрроу). GARP в приведенном здесь виде сформулирована Африатом под названием «циклическая непротиворечивость».

Теорема 2.17 (теорема Африата)

Набор данных удовлетворяет GARP, тогда и только тогда, когда существует кусочно-линейная, непрерывная и вогнутая функция полезности, которая его порождает. ┘

Доказательство: То, что это необходимое условие, мы уже видели. Нетривиальным утверждением здесь является достаточность.

Предположим, что мы сконструировали предпочтения на множестве точек $\{\mathbf{x}^i\}_{i=1,\ldots,n}$ так, что выполнены необходимые условия рациональности

$$\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^j \Rightarrow \mathbf{x}^i \succcurlyeq \mathbf{x}^j,$$
$$\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd\, \mathbf{x}^j \Rightarrow \mathbf{x}^i \succ \mathbf{x}^j,$$

и отсортировали свой набор данных согласно этим предпочтениям так, что $\mathbf{x}^1 \succcurlyeq \mathbf{x}^2 \succcurlyeq \cdots \succcurlyeq \mathbf{x}^n$.

Введем обозначение $a_{ij} = \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)$. Выполнение неравенства $a_{ij} \leqslant 0$ означает, что $\mathbf{x}^i \underline{\rhd\!\rhd}\, \mathbf{x}^j$, если же неравенство строгое, то $\mathbf{x}^i \rhd\!\rhd\, \mathbf{x}^j$.

Для упрощения доказательства предположим, что $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$, т. е. что в наших данных нет совпадений и на каждой бюджетной гиперплоскости $\mathbf{p}_i\mathbf{x}$ лежит только один из наблюдаемых наборов — $\mathbf{x}_i$. Теорема верна и без этого предположения, но оно несколько упрощает рассуждения.

Чтобы доказать теорему, надо показать, что существует набор чисел $u^1, \ldots, u^n$ и $\lambda^1, \ldots, \lambda^n > 0$, которые удовлетворяли бы следующей системе линейных неравенств (назовем их неравенствами Африата):

$$u^j \leqslant u^i + \lambda^i a_{ij} \quad \text{для всех } i, j$$

или, поскольку $a_{jj} = 0$,

$$u^j + \lambda^j a_{jj} \leqslant u^i + \lambda^i a_{ij} \quad \text{для всех } i, j.$$

Если такие числа найдутся, то функцию полезности можно построить по формуле

$$u(\mathbf{x}) = \min_i \{u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)\}.$$

Несложно проверить, что u^i — значение этой функции в точке $\mathbf{x}^i$:

$$u(\mathbf{x}^j) = \min_i \{u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^i)\} = \min_i \{u^i + \lambda^i a_{ij}\} = u^j + \lambda^j a_{jj} = u^j.$$

Далее, пусть $\mathbf{x}^j$ — некоторый набор из нашей совокупности. Если для произвольного вектора $\mathbf{x}$ выполнено неравенство $\mathbf{p}^j\mathbf{x} \leqslant \mathbf{p}^j\mathbf{x}^j$, то $u(\mathbf{x}) \leqslant u(\mathbf{x}^j)$. Действительно,

$$u(\mathbf{x}) \leqslant u^j + \lambda^j \mathbf{p}^j(\mathbf{x} - \mathbf{x}^j) \leqslant u^j = u(\mathbf{x}^j).$$

Первое неравенство здесь следует из определения $u(\mathbf{x})$, а второе — из положительности λ^j. Тем самым, как мы видим, существование решения неравенств Африата гарантирует существование «хорошей» функции полезности, которая могла бы породить эти данные (любой набор, доступный в i-й ситуации выбора, не лучше $\mathbf{x}^i$ по этой функции полезности).

Существование решения неравенств Африата докажем по индукции. При $n = 1$ величины u^1 и λ^1 можно выбрать произвольным образом; требуется только, чтобы $\lambda^1 > 0$.

Пусть существуют $u^1, \ldots, u^{n-1}$ и $\lambda^1, \ldots, \lambda^{n-1} > 0$, являющиеся решением неравенств Африата для наборов $i = 1, \ldots, n-1$. Найдем решение в случае n наборов.

Выберем u^n так, чтобы

$$u^n \leqslant \min_{i=1,\ldots,n-1} \{u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i(\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^i)\} = \min_{i=1,\ldots,n-1} \{u^i + \lambda^i a_{in}\}.$$

Затем выберем λ^n так, чтобы

$$u^j \leqslant u^n + \lambda^n a_{nj} \quad \text{для } j = 1, \ldots, n-1.$$

Требуется показать, что такая величина λ^n существует.

Наборы упорядочены так, что среди $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^{n-1}$ нет ни одного, который был бы выявленно хуже, чем $\mathbf{x}^n$. Поэтому $\mathbf{p}^n\mathbf{x}^j > \mathbf{p}^n\mathbf{x}^n$ при $j = 1, \ldots, n-1$, т. е. $a_{nj} = \mathbf{p}^n(\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^n) > 0$ при $j = 1, \ldots, n-1$. (Как сказано выше, мы делаем упрощающее предположение, что $a_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$.) Так как $a_{nj} > 0$ при $j = 1, \ldots, n-1$, то найдется достаточно большое число λ^n, которое удовлетворяло бы всем этим неравенствам[34]. Это такое λ^n, что

$$\lambda^n \geqslant \max_{j=1,\ldots,n-1} \frac{u^j - u^n}{a_{nj}}.$$

Таким образом, мы доказали, что неравенства Африата имеют решение и тем самым — что $u(\mathbf{x})$ рационализует наблюдаемый выбор.

[34] Если бы здесь при каком-то j было $a_{nj} = 0$, то не всегда можно было бы добиться выполнения данных неравенств увеличением λ^n.

В формуле
$$u(\mathbf{x}) = \min_i \{u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i (\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)\}$$
каждая из функций $u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i (\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)$ является линейной, а потому непрерывной и вогнутой. Следовательно, их поточечный минимум $u(\mathbf{x})$ — кусочно-линейная, непрерывная и вогнутая функция. ■

Поясним смысл неравенств Африата. Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи потребителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}}$. Функция Лагранжа, соответствующая задаче потребителя имеет вид
$$\mathbb{L}(\mathbf{x}, \lambda) = u(\mathbf{x}) + \lambda \bar{\mathbf{p}} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}).$$
Если выполнены условия регулярности ($\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$), то существует множитель Лагранжа $\bar{\lambda} \geqslant 0$, такой что $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа. (Если предпочтения локально ненасыщаемы, то здесь $\bar{\lambda} > 0$.) Отсюда следует, что $\bar{\mathbf{x}}$ максимизирует функцию $u(\mathbf{x}) + \bar{\lambda} \bar{\mathbf{p}} (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$. Пользуясь этим условием, получаем, что если существует функция полезности $u(\cdot)$, которая рационализует имеющиеся наблюдения, то $\mathbf{x}^i$ должен максимизировать функцию $u(\mathbf{x}) + \lambda^i \mathbf{p}^i (\mathbf{x}^i - \mathbf{x})$ при некотором множителе Лагранжа $\lambda^i > 0$. В частности, при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^j$ должно быть выполнено
$$u(\mathbf{x}^i) = u(\mathbf{x}^i) + \lambda^i \mathbf{p}^i (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^i) \geqslant u(\mathbf{x}^j) + \lambda^i \mathbf{p}^i (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j).$$

Замечание: Если дополнительно предположить, что $\mathbf{p}^i > 0$ при всех i и $X = \mathbb{R}^l_+$, то функция $u(\mathbf{x})$, определяемая данной теоремой, является также строго монотонной, поскольку строго монотонна каждая из функций $u^i + \lambda^i \mathbf{p}^i (\mathbf{x} - \mathbf{x}^i)$. Соответственно $u(\mathbf{x})$ будет также локально ненасыщаемой.

Замечание: Следствием этой теоремы является то, что непрерывность, монотонность и вогнутость функции полезности (непрерывность, монотонность и выпуклость предпочтений) нельзя опровергнуть на основе конечного набора данных о выборе потребителя на обычных бюджетных множествах.

Замечание: То, что теорема Африата основана на конструировании «хорошей» функции полезности, ни в коем случае не означает, что данные нельзя рационализовать какой-то другой функцией, не обладающей указанными свойствами.

Задачи

2.72 Индивидуум при ценах (4; 6) выбирает набор (6; 6), а при ценах (6; 3) он выбирает набор (10; 0). Удовлетворяют ли эти наблюдения аксиоме выявленных предпочтений?

2.73 При ценах (1; 4) выбор потребителя был (2; 3). Укажите, какой из следующих наборов выявленно лучше, чем этот набор: (A) (5; 2), (B) (8; 1), (C) (15; 0) .

2.74 При ценах (2; 1) выбор потребителя был (2; 2). Укажите, какой из следующих наборов выявленно лучше, чем этот набор: (A) (1; 5), (B) (5; 0), (C) (0; 5) .

2.75 Совместимы ли с моделью рационального поведения с локально ненасыщаемой функцией полезности следующие наблюдения за рыночным поведением потребителя:

$$\mathbf{x}(10;10;10) = (10;10;10); \quad \mathbf{x}(10;1;2) = (9;25;15/2);$$
$$\mathbf{x}(1;1;10) = (15;5;9)$$

(т. е. спрос при ценах (10; 10; 10) равен (10; 0; 10) и т. д.).

2.76 ⟦MWG⟧ Рациональный потребитель в базовом периоде при ценах $\mathbf{p}^b$ выбрал объем потребления $\mathbf{x}^b$, а в периоде t при ценах $\mathbf{p}^t$ — объем потребления $\mathbf{x}^t$. Индексы физического объема потребления Пааше и Ласпейреса по определению равны

$$P_q = \frac{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^t}{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^b}, \quad L_q = \frac{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^t}{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^b}.$$

Какой из наборов $\mathbf{x}^t$, $\mathbf{x}^b$ лучше для потребителя, если (A) $P_q > 1$? (B) $L_q < 1$?

2.77 Индексы цен Пааше и Ласпейреса по определению равны

$$P_p = \frac{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^t}{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^t}, \quad L_p = \frac{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^b}{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^b}.$$

Пусть M — отношение потребительских расходов в период t к потребительским расходам в базовом периоде, т. е. $M = \frac{\mathbf{p}^t\mathbf{x}^t}{\mathbf{p}^b\mathbf{x}^b}$. Какой из наборов $\mathbf{x}^t$, $\mathbf{x}^b$ лучше для потребителя, если (A) $P_p > M$? (B) $L_p > M$?

2.78 Имеются следующие наблюдения за выбором потребителя: $\mathbf{x}^1 = (5;3)$, $\mathbf{p}^1 = (1;4)$, $\mathbf{x}^2 = (2;2)$, $\mathbf{p}^2 = (1;3)$, $\mathbf{x}^3 = (2;5)$, $\mathbf{p}^3 = (3;1)$.

(A) Продемонстрируйте, что эти наблюдения удовлетворяют обобщенной аксиоме выявленных предпочтений.

(B) Предложите функцию полезности, рационализующую эти наблюдения.

2.79 Пусть при одних и тех же ценах $\mathbf{p}$ потребитель выбирал разные наборы $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^n$.

(A) Объясните, почему эти наблюдения не могут не удовлетворять обобщенной аксиоме выявленных предпочтений, если не предполагается, что выбор единствен.

(B) Предложите простую функцию полезности, рационализующую такие наблюдения.

Приложение 2.C. Интегрируемость функций спроса: восстановление предпочтений

Пусть в нашем распоряжении имеется система функций спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ потребителя (например, оцененная эконометрическими методами). Можно поставить перед собой две близкие, но несколько различающиеся по смыслу задачи. Во-первых, можно по спросу *восстанавливать* функцию полезности (если предполагается, что такая функция у потребителя есть). Во-вторых, можно пытаться по спросу сконструировать ее (если не предполагается, что такая функция у потребителя есть), т. е. *рационализовать* наблюдаемый спрос некоторой функцией полезности. При решении этой второй задачи желательно уметь определять, возможно ли в принципе ее решить (если потребитель ведет себя непоследовательно, то, значит, в основе его поведения не может лежать функция полезности).

Традиционные подходы к решению данных задач опираются на то, что решение задачи потребителя характеризуется некоторыми соотношениями, которые можно рассматривать как дифференциальные уравнения. Решая эти дифференциальные уравнения (что, как правило, связано с вычислением интеграла), можно получить непосредственно функцию полезности либо тесно связанные с ней функции. Поэтому в микроэкономике в этом контексте принято говорить об интегрировании и интегрируемости.

Ясно, что задача восстановления функции полезности не имеет однозначного решения, поскольку существует бесконечно много функций полезности, соответствующих одним и тем же предпочтениям. Поэтому речь может идти только о восстановлении такой функции полезности, которая чем-то уникальна. Если известно (или берется в качестве предположения), что предпочтения принадлежат некоторому классу, то, возможно, для этого класса предпочтений существует некоторая уникальная нормировка. Классический пример — так называемые квазилинейные предпочтения.

2.C.1. Восстановление квазилинейных предпочтений

Рассмотрим, как можно по спросу восстановить квазилинейную функцию полезности

$$u(x_1, \dots, x_l) = s(x_1, \dots, x_{l-1}) + x_l.$$

Очевидно, что две разные квазилинейные функции полезности, соответствующие одним и тем же предпочтениям, должны совпадать с точностью до константы. Таким образом, в данном случае уникальность нормировки определяется самим видом функции. Дополнительно, для нахождения константы, можно потребовать, чтобы выполнялось условие $s(\mathbf{0}) = 0$.

Предположим, что $s(\cdot)$ — строго вогнутая дифференцируемая функция и что выбор потребителя при некоторых ценах и доходе содержит все продукты в положительном количестве, т. е. $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) > \mathbf{0}$. Тогда согласно теореме Куна—Таккера при некотором положительном λ верны соотношения $\frac{\partial s}{\partial x_i} = \lambda p_i$ $(i \neq l)$ и $p_l \lambda = 1$. Без потери общности будем предполагать, что $p_l = 1$. Тогда $\lambda = 1$, и $\frac{\partial s(x_1,\dots,x_{l-1})}{\partial x_i} = p_i$, $i \neq l$. Из этих уравнений следует, что спрос на все блага, кроме последнего, не зависит от дохода[35]:

$$x_i = x_i(p_1, \dots, p_{l-1}) = x_i(\mathbf{p}_{-i}), \quad i \neq l.$$

Кроме того, можно заметить, что эти уравнения фактически задают обратные функции спроса вида $p_i(\mathbf{x}_{-l})$ для всех благ, кроме l-го.

Эти рассуждения приводят к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = p_i(x_1, \dots, x_{l-1}), \quad i = 1, \dots, l-1.$$

Решая их, восстановим функцию $s(\cdot)$.

[35] См. также Пример 2.3.

Пример 2.19

Пусть $l = 3$ и спрос на первые два блага задается следующими функциями:

$$x_1(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{p_1^3 p_2}}, \quad x_2(p_1, p_2) = \frac{1}{\sqrt{p_1 p_2^3}}.$$

Соответствующие обратные функции спроса имеют вид

$$p_1(x_1, x_2) = x_1^{-3/4} x_2^{1/4}, \quad p_2(x_1, x_2) = x_1^{1/4} x_2^{-3/4}.$$

Решив дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = x_1^{-3/4} x_2^{1/4}, \quad \frac{\partial s}{\partial x_2} = x_1^{1/4} x_2^{-3/4},$$

(их можно решать по аналогии с приводимым ниже Примером 2.20) получим

$$s(x_1, x_2) = 4x_1^{1/4} x_2^{1/4} + \text{const}.$$

Чтобы выполнялось условие $s(0; 0) = 0$, константа должна быть равна нулю. Окончательно получаем следующую квазилинейную функцию полезности:

$$u(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^{1/4} x_2^{1/4} + x_3. \qquad \blacktriangle$$

Особенно простой задача восстановления предпочтений оказывается, если известно (дополнительно к квазилинейности), что функция полезности сепарабельна, т. е.

$$u(x_1, \ldots, x_l) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(x_i) + x_l.$$

Условия первого порядка для задачи потребителя в предположении, что потребитель при рассматриваемых ценах и доходах предъявляет спрос на все блага ($\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) > \mathbf{0}$), а цена последнего блага равна единице, имеют вид

$$s_i'(x_i(\mathbf{p})) = p_i.$$

Эти уравнения фактически задают обратную функцию спроса вида $p_i(x_i)$. При этом спрос на каждое благо зависит только от его цены, т. е. $x_i(\mathbf{p}) = x_i(p_i)$. Проинтегрировав уравнения $s_i' = p_i(x_i)$, получим следующие выражения для функций $s_i(\cdot)$:

$$s_i(x_i) = \int_0^{x_i} p_i(t)dt + s_i(0).$$

Интеграл в этом соотношении является так называемым потребительским излишком, поэтому

$$s_i(x_i) = CS_i(x_i) + s_i(0)$$

и

$$u(x_1, \ldots, x_l) = \sum_{i=1}^{l-1} CS_i(x_i) + x_l + \text{const}.$$

Таким образом, если предпочтения представимы квазилинейной функцией полезности, то по спросу (предварительно обратив его) можно восстановить непосредственно функцию полезности.

Другой подход к восстановлению квазилинейной функции полезности состоит в восстановлении соответствующей непрямой функции полезности. При таком подходе тождество Роя

$$-\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial R} = x_i(\mathbf{p}, R)$$

рассматривается как система дифференциальных уравнений.

Непрямая функция полезности для квазилинейной функции полезности имеет вид (см. Пример 2.6)

$$v(\mathbf{p}_{-l}, 1, R) = s(x_1(\mathbf{p}_{-l}), \ldots, x_{l-1}(\mathbf{p}_{-l})) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(\mathbf{p}_{-l}).$$

При этом $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial R} = 1$, и $\frac{\partial v(\mathbf{p},R)}{\partial p_i}$ не зависит от R. Поэтому, интегрируя $l-1$ уравнение тождества Роя по $p_1, \ldots, p_{l-1}$ соответственно, мы можем получить (с точностью до константы интегрирования) искомую функцию $v(\cdot, \cdot)$. Соответствующие интегралы будут равны изменению потребительского излишка как функции цен.

Если функция полезности квазилинейная и сепарабельная, то непрямая функция полезности имеет вид

$$v(\mathbf{p}, R) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(x_i(p_i)) + R - \sum_{i=1}^{l-1} p_i x_i(p_i).$$

Из тождества Роя получаем соотношение:

$$x_i(p_i) = -\frac{\partial v(\mathbf{p}, R)}{\partial p_i} = -\frac{\partial v_i(p_i)}{\partial p_i},$$

где $v_i(p_i) = s_i(x_i(p_i)) - p_i x_i(p_i)$, и, следовательно,

$$-\int_{p_i}^{+\infty} \frac{\partial v_i(t)}{\partial p_i} dt = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t) dt,$$

откуда

$$v_i(p_i) - \lim_{p_i \to +\infty} v_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t) dt$$

или

$$v_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t) dt + \mathrm{const}.$$

Интеграл в последнем соотношении есть по определению потребительский излишек как функция цены:

$$CS_i(p_i) = \int_{p_i}^{+\infty} x_i(t) dt.$$

Отсюда

$$v(p, R) = \sum_{i=1}^{l-1} v_i(p_i) + R = \sum_{i=1}^{l-1} CS_i(p_i) + R + \mathrm{const}.$$

Знание непрямой функции полезности и системы функций спроса позволяет нам сопоставить каждому потребительскому набору, который может быть выбран как наилучший при некоторых ценах $\mathbf{p}$ и доходе R, значение полезности по следующему правилу: $u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = v(\mathbf{p}, R)$. Однако данное правило задает полезность не для всех наборов, а только для наборов из области значений функции спроса. Эту проблему мы еще обсудим ниже применительно к функции полезности общего вида.

2.C.2. Восстановление предпочтений на основе функции расходов

Существует простой способ выбора уникальной функции полезности, представляющей данные предпочтения. Если зафиксировать некоторый вектор цен $\mathbf{p}$, то можно поставить следующую задачу: для данного набора $\mathbf{x} \in X$ подобрать эквивалентный ему набор $\mathbf{h} \in X$, который стоил бы как можно меньше в ценах $\mathbf{p}$. Тогда набору $\mathbf{x}$ в качестве величины полезности можно сопоставить стоимость набора $\mathbf{h}$ в ценах $\mathbf{p}$, т. е. $\mathbf{ph}$.

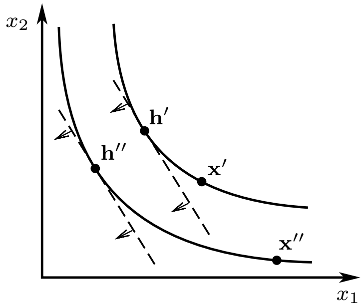


Рис. 2.14. *Функция расходов как функция полезности*

На Рис. 2.14 представлена иллюстрация этой идеи. Набор $\mathbf{x}'$ определяет кривую безразличия. Среди наборов на этой кривой $\mathbf{h}'$ имеет наименьшую стоимость в ценах $\mathbf{p}$ (наклон штриховой линии, проходящей через $\mathbf{h}'$, соответствует отношению цен). Аналогично $\mathbf{h}''$ при тех же ценах имеет наименьшую стоимость среди наборов, эквивалентных $\mathbf{x}''$. Поскольку $\mathbf{x}'$ лежит на более высокой кривой безразличия, чем $\mathbf{x}''$, его полезность $\mathbf{ph}'$ будет выше, чем полезность $\mathbf{x}''$, равная $\mathbf{ph}''$.

Очевидно, что выбранная указанным способом функция полезности является функцией расходов (см. Определение 2.4 на с. 126). Действительно, нам известно (см. Теорему 2.5), что при фиксированных ценах $\mathbf{p}$ функция расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{ph}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{px}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))$ представляет собой функцию полезности:

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \Leftrightarrow e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{y}).$$

Далее мы покажем, что знание системы функций спроса позволяет восстановить функцию расходов, а следовательно, и предпочтения на множестве потребительских наборов, которые могут быть выбраны потребителем при некоторых значениях цен и доходов, т. е. на множестве значений спроса. В последующем мы обсудим, как имеющаяся информация о спросе потребителя позволяет восстановить (оценить) предпочтения и для остальных потребительских наборов.

Заметим сначала, что по лемме Шепарда (см. Теорему 2.8)

$$\frac{\partial e(\mathbf{p}, \mathbf{x})}{\partial p_i} = h_i(\mathbf{p}, \mathbf{x}),$$

где по определению $\mathbf{h}(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p},\mathbf{x}))$. Тем самым мы имеем систему дифференциальных уравнений относительно функции расходов $e(\mathbf{p},\mathbf{x})$ при фиксированном значении $\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial e(\mathbf{p},\mathbf{x})}{\partial p_i} = x_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p},\mathbf{x}))$$

или

$$\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p},\mathbf{x})). \qquad (\boxtimes)$$

К ней следует добавить граничные условия $e(\mathbf{p}',\mathbf{x}) = R$, где $\mathbf{p}'$ — вектор цен, который при доходе R может породить спрос $\mathbf{x}$, т. е. такой вектор цен, что $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}', R)$.

Решая эти уравнения, мы для каждого набора $\mathbf{x}$ из области значений функции спроса найдем значение функции расходов $e(\mathbf{p},\mathbf{x})$ при всех возможных ценах $\mathbf{p}$, т. е. минимальное значение расходов потребителя, достаточное, чтобы при ценах $\mathbf{p}$ обеспечить ему не меньший уровень полезности, чем тот, который обеспечивается набором $\mathbf{x}$.

Будем предполагать в дальнейшем, что функция спроса является непрерывно дифференцируемой (и по ценам, и по доходу). Можно заметить следующее. Если функция $e(\mathbf{p})$ является решением системы дифференциальных уравнений ($\boxtimes$), то она является дважды непрерывно дифференцируемой. Кроме того, $l \times l$ матрица $\mathbf{S}(\mathbf{p}, R)$ с элементами $S_{ij}(\mathbf{p}, R) = \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(\mathbf{p},R)}{\partial R} x_j(\mathbf{p}, R)$ («матрица замены») должна быть симметричной. Действительно, продифференцировав уравнения ($\boxtimes$) по ценам, увидим, что матрица $\mathbf{S}$ совпадает с матрицей вторых производных по ценам функции $e(\cdot)$. Но последняя матрица должна быть симметричной (согласно теореме Юнга).

Оказывается, симметричность матрицы $\mathbf{S}$ является не только необходимым, но и достаточным условием существования и единственности решения системы уравнений ($\boxtimes$). Это классический результат теории дифференциальных уравнений в частных производных (так называемая теорема Фробениуса). Кроме того, известно, что решение будет непрерывно дифференцируемой функцией параметров $\mathbf{p}', R$, задающих граничные условия. Заметим, однако, что эти результаты гарантируют существование только локального решения. Для того чтобы гарантировать существование глобального решения, нужны дополнительные предположения[36].

[36] См. L. Hurwicz and H. Uzawa · On the Integrability of Demand Functions, in *Preferences, Utility and Demand: A Minnesota Symposium*, J. S. Chipman et al. (ed.), New York: Harcourt, Brace, Jovanovich, 1971: 174–214. В этой классической

Пример 2.20

Продемонстрируем восстановление функции расходов $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ из функции спроса вида $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = \left(\frac{Rp_2}{p_1 p_2 + a^2 (p_1)^2}; \frac{a^2 R p_1}{(p_2)^2 + a^2 p_1 p_2}\right)$. Мы не проверяем выполнение требуемых условий, так как выше все это уже фактически было сделано. Нам требуется решить следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{e p_2}{p_1 p_2 + a^2 (p_1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{a^2 e p_1}{(p_2)^2 + a^2 p_1 p_2}$$

Решим первое уравнение, рассматривая p_1 как переменную, а p_2 и $\mathbf{x}$ — как параметры. Заметим, что оно представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Кроме того, дробь $\frac{p_2}{p_1 p_2 + a^2 (p_1)^2}$ допускает разложение $\frac{p_2}{p_1 p_2 + a^2 (p_1)^2} = \frac{1}{p_1} - \frac{a^2}{p_2 + a^2 p_1}$. Используя это, можем записать

$$\int \frac{de}{e} = \int \frac{dp_1}{p_1} - \int \frac{a^2 dp_1}{p_2 + a^2 p_1} + \mathrm{const}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln(e) = \ln(p_1) - \ln(p_2 + a^2 p_1) + \mathrm{const}$$

или

$$e = A \frac{p_1}{p_2 + a^2 p_1},$$

где A зависит от p_2 и $\mathbf{x}$, которые мы при решении рассматривали как неизменные параметры: $A = A(p_2, \mathbf{x})$.

Подставим полученное выражение для $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ во второе уравнение и получим дифференциальное уравнение для A:

$$\frac{\partial A}{\partial p_2} \cdot \frac{p_1}{p_2 + a^2 p_1} - A \frac{p_1}{(p_2 + a^2 p_1)^2} = A \frac{a^2 p_1}{(p_2)^2 + a^2 p_1 p_2} \cdot \frac{p_1}{p_2 + a^2 p_1}$$

или

$$\frac{\partial A}{\partial p_2} = A \frac{a^2 p_1}{(p_2)^2 + a^2 p_1 p_2} + A \frac{1}{p_2 + a^2 p_1} = A \frac{1}{p_2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dA}{A} = \int \frac{dp_2}{p_2} + \mathrm{const}.$$

работе делается предположение, что производные функций спроса по доходу равномерно ограничены на множествах цен и доходов вида $\{\, \mathbf{p} \mid \mathbf{p}' \leqslant \mathbf{p} \leqslant \mathbf{p}'' \,\} \times \mathbb{R}_+$, где $\mathbf{p}' < \mathbf{p}''$, $\mathbf{p}', \mathbf{p}'' \in \mathbb{R}^l_{++}$, и что при нулевом доходе спрос равен нулю вне зависимости от цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$.

Интегрируя, получим решение следующего вида: $A(p_2) = Bp_2$, где B — множитель, который зависит от набора $\mathbf{x}$, который мы в данном случае рассматривали как постоянный параметр, т. е. $A(p_2, \mathbf{x}) = B(\mathbf{x})p_2$.

Таким образом, мы получили следующее выражение для функции расходов:

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = B(\mathbf{x})\frac{p_1p_2}{p_2 + a^2p_1}.$$

Для вычисления $B(\mathbf{x})$ требуется использовать граничные условия. Для этого сначала найдем цены, при которых потребитель предъявит спрос на данный набор $\mathbf{x}$ (другими словами, найдем обратную функцию спроса $\mathbf{p}(\mathbf{x}, R)$). Уравнения спроса

$$x_1 = \frac{Rp_2}{p_1p_2 + a^2(p_1)^2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{a^2Rp_1}{(p_2)^2 + a^2p_1p_2}$$

при этом следует рассматривать как систему уравнений относительно цен p_1 и p_2. Данную систему несложно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x_1}{x_2}} = \dfrac{p_2}{ap_1}, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = R. \end{cases}$$

Это дает линейные уравнения относительно p_1 и p_2, решая которые найдем

$$p_1 = \frac{R}{\sqrt{x_1}(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})} \quad \text{и} \quad p_2 = \frac{aR}{\sqrt{x_2}(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2})}.$$

При подстановке этих цен в функцию расходов, мы должны получить доход R:

$$B(\mathbf{x})\frac{p_1p_2}{p_2 + a^2p_1} = R.$$

Отсюда найдем выражение для $B(\mathbf{x})$:

$$B(\mathbf{x}) = \frac{R(p_2 + a^2p_1)}{p_1p_2} = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}.$$

Окончательно получим следующую функцию расходов:

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \frac{p_1p_2}{p_2 + a^2p_1}(\sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}).$$

Как мы уже говорили, функция расходов при фиксированных ценах есть функция полезности. Так как первый множитель здесь не зависит от потребительского набора $\mathbf{x}$, то он не представляет интереса при восстановлении предпочтений. Более простая функция $B(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + a\sqrt{x_2}$ тоже является функцией полезности, порождающей рассматриваемый спрос.

Заметим, что предложенное здесь решение можно упростить, положив (без потери общности) $p_2 = 1$ и интегрируя только по первой цене. ▲

2.C.3. Проблема восстановимости предпочтений на всем множестве потребительских наборов

Из проведенного выше анализа следует, что знание системы функций спроса (полученной на основе максимизации полезности) позволяет восстановить предпочтения (представляющие эти предпочтения функции полезности) на каждом потребительском наборе, который может быть выбран как наилучший при некоторых ценах $\mathbf{p}$ и доходе R.

Вообще говоря, не все возможные потребительские наборы принадлежат области значений системы функций спроса. Так, функции полезности $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\}$ соответствует система функций спроса, для которой $x_1(\mathbf{p}, R) = x_2(\mathbf{p}, R)$. Как несложно понять, предложенное правило не позволяет задать полезность для таких наборов (x_1, x_2), что $x_1 \neq x_2$.

Заметим, что хотя, вообще говоря, нам не удалось построить полностью функцию полезности, но зато мы фактически построили полностью непрямую функцию полезности $v(\mathbf{p}, R) = e(\mathbf{p}^0, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$. Непрямую функцию полезности такого вида принято называть денежной непрямой функцией полезности (см. Определение 2.12 на с. 160). Денежная непрямая полезность $\mu(\mathbf{q}; \mathbf{p}, R)$ — это непрямая функция полезности для функции расходов $e(\mathbf{q}, \mathbf{x})$, если рассматривать последнюю как функцию полезности.

Мы столкнулись здесь с частным проявлением общей проблемы: хотя каждая функция полезности однозначно определяет непрямую функцию полезности, но обратное, вообще говоря, неверно. По непрямой функции полезности $v(\mathbf{p}, R) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$ не всегда можно восстановить обычную функцию полезности.

Тем не менее по информации, содержащейся в функции спроса или непрямой функции полезности, можно построить некоторую аппроксимацию для соответствующей прямой функции полезности. Эта аппроксимация оказывается достаточно хорошей в том смысле, что совпадает с функцией полезности всюду на множестве значений функции спроса и порождает, по существу, тот же спрос, что и данная функция полезности. Покажем это.

Пусть нам известна функция спроса, определенная на $P \times \mathbb{R}^{++}$, где P — некоторое множество цен, и пусть $\bar{X}$ — множество значений этой функции спроса. В общем случае $\bar{X}$ — некоторое подмножество множества допустимых потребительских наборов X. Можно доопределить функцию полезности на множестве $X \diagdown \bar{X}$, причем так, что полученная функция даст нам оценку сверху для функции полезности во всех точках множества $X \diagdown \bar{X}$.

Приведем соответствующее построение. Рассмотрим некоторый набор $\hat{\mathbf{x}}$ из $\bar{X}$. По определению $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ при некоторых ценах $\mathbf{p}$ и доходе R. Если при этих ценах и доходах рассматриваемый набор $\mathbf{x}$ мог быть куплен, то можно с уверенностью сказать, что набор $\mathbf{x}$ не может быть лучше, чем $\hat{\mathbf{x}}$. По аналогии с анализом выявленных предпочтений можно сказать, что набор $\mathbf{x}$ *выявленно не лучше*, чем $\hat{\mathbf{x}}$. Таким образом, для рассматриваемой функции полезности должно выполняться соотношение $u(\mathbf{x}) \leqslant u(\hat{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x}(\mathbf{p}, R))$. Следовательно, $u(\mathbf{x}) \leqslant v(\mathbf{p}, R)$ при всех ценах и доходах, таких что $\mathbf{px} \leqslant R$. Это дает следующую оценку для $u(\mathbf{x})$:

$$u(\mathbf{x}) \leqslant \inf \left\{ v(\mathbf{p}, R) \,\middle|\, \mathbf{p} \in P,\ \mathbf{px} \leqslant R \right\}.$$

(Поскольку непрямая функция полезности $v(\mathbf{p}, R)$ положительно однородна нулевой степени, в качестве дохода R здесь можно взять произвольное положительное число, например $R = 1$.)

Возникает идея рассматривать в качестве аппроксимации функции полезности эту оценку, полученную на основе выявленных предпочтений, а именно

$$u^*(x) = \inf \left\{ v(\mathbf{p}, R) \,\middle|\, \mathbf{p} \in P,\ \mathbf{px} \leqslant R \right\}.$$

Другими словами, в качестве полезности набора $\mathbf{x}$ выбираем значение следующей задачи:

$$\begin{gathered} v(\mathbf{p}, R) \to \inf_{\mathbf{p} \in P}, \\ \mathbf{px} \leqslant R. \end{gathered} \qquad (\heartsuit)$$

Заметим, что в общем случае речь должна идти об инфимуме, а не о минимуме. Это объясняется тем, что оптимизация ведется на множестве, которое не обязательно является замкнутым. В частности, целевая функция (непрямая функция полезности) может быть не определена в случае, когда хотя бы одна из цен обращается в ноль. В силу этого замена инфимума на минимум невозможна, так как последний может, вообще говоря, не существовать. В то же время, инфимум существует, хотя при некотором значении параметров и может быть равен $-\infty$.

В принципе данная процедура позволяет построить «функцию полезности» $u^*(\mathbf{x})$ на множестве всех наборов благ. Однако ясно, что она может не везде совпадать с исходной функцией полезности. Мы можем быть уверены только, что $u^*(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{x})$, поскольку это непосредственно следует из определения функции $u^*(\cdot)$. Если $\mathbf{x}$ — вектор, который не реализуется как спрос потребителя ни при каких ценах и доходе (при которых $\mathbf{x}$ является допустимым в задаче потребителя), то $u(\mathbf{x})$ может быть меньше $u^*(\mathbf{x})$.

Приведем соответствующий пример.

Пример 2.21

Рассмотрим упоминавшуюся выше функцию полезности

$$u(x_1, x_2) = \min\{2x_1 - x_2, 2x_2 - x_1\},$$

определенную на $X = \mathbb{R}^2_+$. Соответствующая непрямая функция полезности (как и в случае леонтьевской функции полезности $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$) имеет вид $v(\mathbf{p}, R) = \frac{R}{\max\{p_1, p_2\}}$. Найдем значение $u^*(x)$ при $P = \mathbb{R}^2_{++}$, т. е. значение задачи

$$\frac{R}{\max\{p_1, p_2\}} \to \inf_{p_1, p_2 > 0},$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leqslant R.$$

Рассмотрим сначала случай положительного потребительского набора $(x_1, x_2 > 0)$. Из «бюджетного ограничения» следует что $p_i \leqslant \frac{R}{x_i}$, откуда $\max\{p_1, p_2\} \leqslant \frac{R}{\min\{x_1, x_2\}}$. Таким образом, $u^*(x_1, x_2) \geqslant$ $\geqslant \min\{x_1, x_2\}$. Покажем, что это — точная нижняя граница, построив соответствующую последовательность цен. Пусть, например, $x_1 \geqslant x_2$. Рассмотрим последовательность $\{(p_1^n, p_2^n)\}$, где

$$p_1^n = \frac{R}{x_1}\frac{1}{2n}, \quad p_2^n = \frac{R}{x_2}\Big(1 - \frac{1}{2n}\Big).$$

Для этой последовательности цен $p_1^n \leqslant p_2^n$, поэтому

$$v(\mathbf{p}^n, R) = \frac{R}{\max\{p_1^n, p_2^n\}} = \frac{R}{p_2^n} = \frac{x_2}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}.$$

Таким образом, $u^*(x_1, x_2) = x_2 = \min\{x_1, x_2\}$. Аналогично при $x_1 \leqslant x_2$ выполнено $u^*(x_1, x_2) = x_1 = \min\{x_1, x_2\}$.

Если $x_i = 0$, то найдется допустимая последовательность с $p_i^n = n$, которая обеспечивает $u^*(x_1, x_2) = 0 = \min\{x_1, x_2\}$. Таким образом, $u^*(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ при любом допустимом наборе $\mathbf{x}$. ▲

Несмотря на возможность несовпадения, данная аппроксимация обладает свойствами, делающими ее полезной для моделирования поведения потребителя: во-первых, $u^*(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ для всех точек $\mathbf{x}$ из области значений функции спроса, во-вторых, функция $u^*(\cdot)$ порождает по существу тот же спрос, что и исходная функция полезности.

Теорема 2.18

Пусть $u(\cdot)$ — исходная функция полезности, $v(\cdot, \cdot)$ — соответствующая ей непрямая функция полезности, а функция $u^*(\cdot)$ построена на основе задачи (♡) указанным выше способом. Предположим, что $\bar{\mathbf{x}}$ — оптимальный потребительский набор при ценах $\bar{\mathbf{p}} \in P$ и доходе $\bar{R} > 0$, т. е. $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$. Тогда верно следующее:

{i} вектор цен $\bar{\mathbf{p}}$ является решением задачи (♡) с $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ и $R = \bar{R}$ и выполнено $u(\bar{\mathbf{x}}) = v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) = u^*(\bar{\mathbf{x}})$;

{ii} набор $\bar{\mathbf{x}}$ является решением задачи потребителя с функцией полезности $u^*(\cdot)$ при при ценах $\bar{\mathbf{p}} \in P$ и доходе $\bar{R} > 0$.⌟

Доказательство: {i} Пусть $\mathbf{p} \in P$ — произвольный вектор, являющийся допустимым в задаче (♡) с $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ и $R = \bar{R}$, т. е. $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} \leqslant \bar{R}$. Вместе с тем это неравенство означает, что $\bar{\mathbf{x}}$ допусти́м в задаче потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\bar{R}$. Этот набор не может иметь бо́льшую полезность, чем набор $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}, \bar{R})$, являющийся оптимальным в задаче потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\bar{R}$, т. е. $u(\bar{\mathbf{x}}) \leqslant u(\hat{\mathbf{x}})$, или $v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) \leqslant v(\mathbf{p}, \bar{R})$. Отсюда следует, что вектор $\bar{\mathbf{p}}$ оптимален в задаче (♡) с $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ и $R = \bar{R}$. Таким образом, мы получили, что $v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) = u^*(\bar{\mathbf{x}})$.

{ii} Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ — произвольный потребительский набор, удовлетворяющий бюджетному ограничению при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\bar{R}$: $\bar{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{x}} \leqslant \bar{R}$. Рассмотрим задачу (♡) с $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$ с и $R = \bar{R}$. Цены $\bar{\mathbf{p}}$ являются допустимыми в этой задаче, а $u^*(\hat{\mathbf{x}})$ — значение этой задачи. Поэтому $v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R}) \geqslant u^*(\hat{\mathbf{x}})$. Как только что доказано, $u^*(\bar{\mathbf{x}}) = v(\bar{\mathbf{p}}, \bar{R})$, поэтому $u^*(\bar{\mathbf{x}}) \geqslant u^*(\hat{\mathbf{x}})$. ■

2.C.4. Интегрируемость (рационализуемость) спроса

Выше мы предполагали, что рассматриваемые функции спроса порождены задачей максимизации некоторой функции полезности. Теперь мы откажемся от данного априорного предположения и укажем на те свойства функций спроса, которые позволяют построить предпочтения, приводящие к тем же функциям спроса (т. е. рационализовать рассматриваемый спрос). Предположим, что функция $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ определена на $P \times \mathbb{R}_{++}$, где $P \subset \mathbb{R}^l_{++}$ — некоторое открытое выпуклое множество векторов цен (например, $P = \mathbb{R}^l_{++}$), и что $\bar{X} \subset \mathbb{R}^l$ — область значений этой функции. Необходимые условия того, что данная функция порождена моделью рационального поведения, нам известны:

- функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу;
- функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ удовлетворяет закону Вальраса $(\mathbf{p}, \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)) = R$ (если предпочтения потребителя локально ненасыщаемы);
- матрица замены
$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right)_{i,j}$$
является симметричной и отрицательно полуопределенной[37].

Можно ли рационализовать эту «функцию спроса» некоторой функцией полезности на X? Оказывается, что перечисленные условия являются не только необходимыми, но и достаточными, т. е. любая функция, удовлетворяющая этим условиям (а также некоторым техническим предположениям), может быть порождена моделью рационального поведения.

Заметим, что приведенные условия не являются независимыми, поскольку из последних двух следует первое, так что фактически выполнение закона Вальраса для данных функций спроса и симметричность и отрицательная полуопределенной матрицы коэффициентов замены являются достаточными условиями существования предпочтений, порождающих эти функции спроса. Покажем это.

[37] Отрицательная полуопределенность матрицы замены является следствием закона спроса при компенсирующем изменении дохода по Слуцкому, который, в свою очередь, следует из слабой аксиомы выявленных предпочтений (см. п. 2.4.1). Поэтому отрицательную полуопределенность матрицы замены здесь можно заменить на требование выполнения для спроса слабой аксиомы выявленных предпочтений.

Теорема 2.19

Пусть функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ дифференцируема по ценам и доходу, удовлетворяет закону Вальраса ($\mathbf{px}(\mathbf{p}, R) = R$), а матрица коэффициентов замены $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right)_{i,j}$ является симметричной.

Тогда функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу. ⌟

Доказательство: Рассмотрим вектор-функцию $f_i(t) = x_i(t\mathbf{p}, tR)$, где i — одно из благ. В силу дифференцируемости функции спроса по ценам и доходу для любого $t > 0$ имеем, что (при проведении этих выкладок для упрощения записи аргументы $(t\mathbf{p}, tR)$ функции спроса и ее производных будем опускать)

$$f_i'(t) = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_i}{\partial R} R = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_j + \frac{\partial x_i}{\partial R} \mathbf{px} =$$

$$= \sum_j p_j \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i}{\partial R} x_j\right) = \sum_j p_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j}{\partial R} x_i\right) =$$

$$= \sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial R} = -x_i + x_i = 0.$$

При проведении этих преобразований мы воспользовались тождествами $\sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i = 0$ и $\sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial R} = 1$, которые получаются путем дифференцирования уравнения закона Вальраса (см. Теорему 2.13 на с. 145). Таким образом, $f_i(t)$ — константа, и тем самым для любого t верно, что $f_i(t) = f_i(1)$, откуда $\mathbf{x}(t\mathbf{p}, tR) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R) = t^0 \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$. Последнее и означает, что функция спроса $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ однородна нулевой степени по ценам и доходу. ■

Перейдем теперь к построению предпочтений, рационализующих данные «функции спроса». По аналогии с рассмотренной выше ситуацией, когда априорно предполагается, что данный спрос порожден задачей максимизации полезности, для этих функций можно определить «функцию расходов» на $P \times \bar{X}$, так что она удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, \mathbf{x}))$$

с граничными условиями $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) = R$, где $\mathbf{p}'$ — вектор цен, такой что $\mathbf{x} \in \mathbf{x}(\mathbf{p}', R)$.

При этом полученная функция $e(\cdot,\cdot)$ обладает следующими свойствами:

- функция $e(\mathbf{p},\mathbf{x})$ дифференцируема по $\mathbf{p}$;
- функция $e(\mathbf{p},\mathbf{x})$ однородна первой степени по $\mathbf{p}$;
- функция $e(\mathbf{p},\mathbf{x})$ не убывает по $\mathbf{p}$, если функция спроса неотрицательна;
- функция $e(\mathbf{p},\mathbf{x})$ вогнута по $\mathbf{p}$ в силу отрицательной полуопределенности матрицы Слуцкого;
- если для некоторого $\mathbf{p}$ верно соотношение $e(\mathbf{p},\mathbf{x}) = e(\mathbf{p},\mathbf{x}')$, то оно также верно и для любого $\mathbf{p}'$, т. е. $e(\mathbf{p}',\mathbf{x}) = e(\mathbf{p}',\mathbf{x}')$.

(Последнее свойство не что иное, как следствие единственности решения предложенного дифференциального уравнения.)

Покажем, что при любом фиксированном векторе цен $\mathbf{q} \in P$ для функции полезности $u(\mathbf{x}) = e(\mathbf{q},\mathbf{x})$ функция $\mathbf{x}(\mathbf{p},R)$ задает спрос потребителя. Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений. Первое из них показывает, что упорядочение потребительских наборов на основе полученных таким образом «функций расходов» не зависит от выбора конкретной функции расходов, т. е. фиксированного вектора цен, используемого для расчета стоимости потребительских наборов.

Теорема 2.20

Пусть $\mathbf{x} \in \bar{X}$, $\mathbf{x}' \in \bar{X}$ и при некотором векторе цен $\mathbf{p} \in P$ выполнено неравенство

$$e(\mathbf{p},\mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{p},\mathbf{x}').$$

Тогда аналогичное соотношение выполняется для любого другого вектора цен $\mathbf{q} \in P$:

$$e(\mathbf{q},\mathbf{x}) \geqslant e(\mathbf{q},\mathbf{x}'). \qquad \lrcorner$$

Доказательство: Случай, когда для некоторого $\mathbf{p} \in P$ справедливо соотношение $e(\mathbf{p},\mathbf{x}) = e(\mathbf{p},\mathbf{x}')$, очевиден, в силу упоминавшейся выше единственности решения. Поэтому рассмотрим только случай, когда для некоторых цен $\mathbf{p} \in P$ выполнено строгое неравенство $e(\mathbf{p},\mathbf{x}) > e(\mathbf{p},\mathbf{x}')$. Предположим противное, а именно, что нашлись такие цены $\mathbf{q} \in P$, для которых $e(\mathbf{q},\mathbf{x}) < e(\mathbf{q},\mathbf{x}')$. Рассмотрим функцию $f(t) = e(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}),\mathbf{x}) - e(\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}),\mathbf{x}')$. Эта функция непрерывна, так как непрерывна по ценам функция $e(\cdot,\cdot)$. Кроме того, $f(0) > 0 > f(1)$, откуда в силу непрерывности следует существование такого $\tilde{t}$, что $f(\tilde{t}) = 0$. Другими словами найдется такой вектор

$\tilde{\mathbf{q}} \in P$, что для него справедливо равенство $e(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{x}) = e(\tilde{\mathbf{q}}, \mathbf{x}')$. Но это означает, что равенство должно выполняться и для первоначального вектора цен, т. е. $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = e(\mathbf{p}, \mathbf{x}')$. Получили противоречие. ■

Заметим теперь, что так как $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ однородна первой степени по $\mathbf{p}$, то по формуле Эйлера $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in \bar{X}$ и $\mathbf{p} \in P$. По построению функции $e(\cdot, \cdot)$, если набор $\mathbf{x}$ является значением спроса при ценах $\mathbf{p}$, т. е. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, \mathbf{px})$, то $\mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ (откуда следует, что $e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{px}$). Данные свойства функции $e(\cdot, \cdot)$ позволяют установить следующее утверждение.

Теорема 2.21

Для каждого набора $\mathbf{x} \in \bar{X}$ и вектора цен $\mathbf{p}' \in P$ выполнено $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}$. ⌟

Доказательство: Так как $\mathbf{x} \in \bar{X}$, то этот набор представи́м в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ при некоторых $\mathbf{p} \in P$ и $R > 0$. Вогнутость функции $e(\cdot, \cdot)$ по ценам влечет, что $e(\cdot, \cdot)$ как функция цен лежит ниже своей касательной, поэтому выполнено неравенство

$$e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}),$$

откуда, сократив $e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ и $\mathbf{p}\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, получим

$$e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}'\nabla_{\mathbf{p}} e(\mathbf{p}, \mathbf{x}).$$

Подставляя вместо градиента $\mathbf{x}$, получаем требуемое неравенство. ■

Поясним смысл доказываемого неравенства. Пусть $e(\cdot, \cdot)$ — функция расходов рационального потребителя. По определению $e(\mathbf{p}', \mathbf{x})$ — это минимальные расходы в ценах $\mathbf{p}'$ на достижение по крайней мере того уровня благосостояния, который обеспечивается вектором $\mathbf{x}$. Сам вектор $\mathbf{x}$ может не минимизировать расходы, поэтому, вообще говоря, $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}$.

Другими словами, выполнение неравенства $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \leqslant \mathbf{p}'\mathbf{x}$ — это одно из свойств функции расходов рационального потребителя. Таким образом, Теорема 2.21 фактически устанавливает, что сконструированная как решение дифференциального уравнения «функция расходов» не противоречит одному из естественных требований, связанных с рациональностью. Более того, как тривиальное следствие Теоремы 2.21 получаем, что данная «функция расходов», рассматриваемая как функция полезности, действительно рационализует предпочтения, т. е. порождает точно такой же спрос, как тот, на основе которого она построена.

Пусть $\mathbf{x}'$ — некоторый набор из $\bar{X}$. Для этого набора найдутся цены $\mathbf{p}' \in P$, такие что $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\mathbf{p}', \mathbf{p}'\mathbf{x}')$. Из доказанной только что теоремы следует, что если взять $\bar{X}$ в качестве множества потребительских наборов, $e(\cdot, \cdot)$ как функцию второго аргумента — в качестве функции полезности, $\mathbf{p}'$ — в качестве вектора цен, а $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$ — в качестве дохода, то $\mathbf{x}'$ является решением соответствующей задачи потребителя. Другими словами, $\mathbf{x}'$ является решением задачи

$$e(\mathbf{p}', \mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in \bar{X}},$$
$$\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x}').$$

Действительно, возьмем произвольный набор $\mathbf{x} \in \bar{X}$, такой что $\mathbf{p}'\mathbf{x} \leqslant \leqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x}')$. По доказанной теореме для него выполнено $\mathbf{p}'\mathbf{x} \geqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x})$, и, следовательно, $e(\mathbf{p}', \mathbf{x}') \geqslant e(\mathbf{p}', \mathbf{x})$.

Заметим далее, что в качестве функции полезности в задаче потребителя мы могли бы взять $e(\mathbf{q}, \cdot)$ с любым вектором цен $\mathbf{q} \in P$. Отсюда следует, что функция $e(\mathbf{q}, \cdot)$ рационализует $\mathbf{x}(\cdot, \cdot)$ на $\bar{X}$. А именно, при всех ценах и доходах $\mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$ является решением соответствующей задачи потребителя:

$$e(\mathbf{q}, \mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x} \in \bar{X}},$$
$$\mathbf{p}\mathbf{x} \leqslant R.$$

Отметим, что в данном случае условие симметричности матрицы замены $\mathbf{S}$ — это условие *математической интегрируемости* (т. е. условие существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений), а ее отрицательная полуопределенность — условие *экономической интегрируемости*, которое гарантирует, что найденное решение рационализует спрос.

Задачи

2.80 Функция спроса потребителя на первое из двух имеющихся в экономике благ равна $x_1(p_1, p_2) = a - bp_1/p_2$ (не зависит от дохода). Найдите соответствующую функцию полезности.

2.81 Пусть $u(x)$ — функция полезности. Вычислите для нее непрямую функцию полезности, решите задачу (♡) и вычислите «восстановленную» функцию полезности $u^*(x)$. Совпадает ли она с исходной функцией полезности? Решите задачу для следующих функций полезности:

(A) $u(x) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k \ln(x_k)$; (B) $u(x) = \min_k\{\alpha_k x_k\}$;
(C) $u(x) = x_1^2 + x_2^2$; (D) $u(x) = \sqrt[3]{x_1 x_2} + x_3$.

2.82 Для функций полезности предыдущей задачи найдите функцию расходов и непрямую денежную функцию полезности.

2.83 Для функций полезности предыдущей задачи найдите спрос, восстановите функцию расходов (или, что то же самое, непрямую денежную функцию полезности), и постройте «восстановленную» функцию полезности $u^*(x)$. Правильно ли восстановлены исходные предпочтения? Найдите спрос, соответствующий функции полезности $u^*(x)$. Совпадает ли он с исходным спросом?

2.84 Пусть $u(\cdot)$ — функция полезности, представляющая строго выпуклые и строго монотонные предпочтения, заданные на $\mathbb{R}^l_+$, $v(\cdot)$ — соответствующая непрямая функция полезности. Покажите, что если функция $u^*(\cdot)$ построена на основе задачи ($\heartsuit$), то

$$u^*(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l_{++}.$$

Указание: Используйте теорему отделимости (см. доказательство утверждения о восстановлении технологического множества по функции прибыли — Теоремы 3.10 на с. 235). Множество $L^{++}(\mathbf{x}) = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{y} \succ \mathbf{x} \,\}$ можно отделить от точки $\mathbf{x}$. Так как предпочтения строго монотонны, то нормаль $\mathbf{p}$ к отделяющей гиперплоскости — вектор с положительными коэффициентами. Тогда $\mathbf{p}$ — решение задачи ($\heartsuit$).

2.85 Найдите функцию полезности, которая рационализует спрос, полученный на основе лексикографических предпочтений.

2.86 [[MWG]] Рассмотрите функцию расходов следующего вида:

$$e(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \exp\left\{ \sum_{k \in K} \alpha_k \ln(p_k) + \left(\prod_{k \in K} p_k^{\beta_k} \right) u(\mathbf{x}) \right\}.$$

(A) При каких ограничениях на параметры α_k, β_k данная функция является функцией расходов?

(B) С учетом ответа на вопрос предыдущего пункта найдите отвечающую данной функции расходов непрямую функцию полезности.

Задачи к главе

2.87 Покажите, что невырожденность матрицы

$$\tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{x}) & \nabla u(\mathbf{x}) \\ \nabla u(\mathbf{x})^{\mathsf{T}} & 0, \end{pmatrix}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{p}, R)$, $\mathbf{H}$ — матрица вторых производных функции полезности, является (наряду с другими предположениями) достаточным условием дифференцируемости функции спроса (см. Теорему 2.16).

2.88 Восполните доказательство Теоремы 2.16, доказав, что при сделанных предположениях функция расходов и функция хиксианского спроса являются непрерывно дифференцируемыми по $\mathbf{x}$.

2.89 Является ли дифференцируемой на положительном ортанте функция спроса потребителя с функцией полезности $u(\mathbf{x}) = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$? (Данный пример показывает, что для дифференцируемости спроса недостаточно строгой квазивогнутости, дважды непрерывно дифференцируемости и строгой монотонности.)

2.90 Усильте Теорему 2.16, заменив условие отрицательной определенности матрицы Гессе функции полезности $\mathbf{H}(\cdot)$ на сильную квазивогнутость функции полезности. Квазивогнутая функция $u(\mathbf{x})$ называется сильно квазивогнутой, если для каждого $\mathbf{x}$ из области определения и для каждого $\mathbf{z}$, такого что $\mathbf{z}\nabla u(\mathbf{x}) = 0$ и $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, выполнено $\mathbf{z}^{\mathsf{T}}\mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{z} < 0$, где $\mathbf{H}(\cdot) = \nabla^2 u(\cdot)$ — матрица вторых частных производных.

2.91 Покажите на примере, что функция совокупного спроса, полученная на основе суммирования конечного числа маршаллианских функций спроса, вообще говоря, не удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

2.92 Покажите, что если предпочтения потребителей одинаковы, а представляющая их функция полезности — непрерывная строго вогнутая и положительно однородная первой степени, то функция совокупного спроса удовлетворяет аксиоме выявленных предпочтений.

2.93 Докажите, что если предпочтения потребителя монотонны и строго вогнуты, то его функция спроса удовлетворяет слабой аксиоме выявленных предпочтений.

2.94 ⟦MWG⟧ Для случая трех товаров спрос задается следующими функциями:

$$x_1 = \frac{p_2}{p_3}, \quad x_2 = -\frac{p_1}{p_3}, \quad x_3 = \frac{R}{p_3}.$$

(A) Проверьте что данная система функций спроса удовлетворяет закону Вальраса и однородна нулевой степени по ценам и доходу.

(B) Покажите, что для данной системы функций спроса не выполняется слабая аксиома выявленных предпочтений

2.95 Пусть $X = [0;2] \times [0;2]$, $\beta(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega} = (1;0)$. Покажите, что отображение спроса не является полунепрерывным в точке $\mathbf{p} = (0;1)$ для любой строго монотонной функции полезности.

2.96 Докажите следующие четыре утверждения, которые являются следствиями теоремы Бержа (Теорема B.60 в Приложении B на с. II-652). Все они относятся к задаче потребителя следующего вида:

$$\begin{aligned} &u(\mathbf{x}) \to \max_{\mathbf{x}\in X}, \\ &\mathbf{px} \leqslant \beta(\mathbf{p}). \end{aligned} \tag{$\asymp$}$$

(A) Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ — множество решений задачи ($\asymp$), где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X — замкнутое, выпуклое и ограниченное множество и $\mathbf{0} \in X$. Функция $u(\cdot)$ непрерывна и строго квазивогнута на X. Если функция $\beta(\mathbf{p})$ непрерывна и положительна при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ является однозначным и непрерывным в точке $\bar{\mathbf{p}}$ (непрерывной в точке $\bar{\mathbf{p}}$ функцией).

(B) Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ — множество решений задачи ($\asymp$), где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X — замкнутое, выпуклое множество и $\mathbf{0} \in X$. Функция $u(\cdot)$ непрерывна и строго квазивогнута на X. Если функция $\beta(\mathbf{p})$ непрерывна и положительна при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ однозначно и непрерывно в точке $\bar{\mathbf{p}}$ ($\mathbf{x}(\mathbf{p})$ является функцией, непрерывной в точке $\bar{\mathbf{p}}$).

(C) Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ — множество решений задачи ($\asymp$), где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X — замкнутое, выпуклое и ограниченное множество и $\mathbf{0} \in X$. Функция $u(\cdot)$ непрерывна и квазивогнута на X. Если функция $\beta(\mathbf{p})$ непрерывна и положительна при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ выпуклозначно и полунепрерывно сверху в точке $\bar{\mathbf{p}}$.

(D) Пусть $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ — множество решений задачи ($\asymp$), где $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, X — замкнутое, выпуклое и множество и $\mathbf{0} \in X$. Функция $u(\cdot)$ непрерывна и квазивогнута на X. Если функция $\beta(\mathbf{p})$ непрерывна и положительна при $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$, то отображение $\mathbf{x}(\mathbf{p})$ выпуклозначно и полунепрерывно сверху в точке $\bar{\mathbf{p}}$.

Глава

Поведение производителя (неоклассическая теория фирмы)

3

3.1. Введение

Теория рационального поведения потребителя используется для характеристики спроса на товары и услуги, производимые в экономике. Анализом же того, как *производятся* товары и услуги, занимается теория поведения производителя (теория фирмы). В этой главе будут представлены результаты неоклассической теории фирмы. Для неоклассической теории фирмы характерны следующие посылки. При выборе варианта своего функционирования фирма (производитель) принимает во внимание

- технологические ограничения, представимые производственной функцией или, в более общем виде, описанием всех технологически возможных векторов чистого выпуска;
- ограничения, накладываемые на функционирование фирмы потребителями ее продукции;
- ограничения, возникающие в силу существования других производителей, прежде всего возможных непосредственных конкурентов этой фирмы, производящих аналогичные блага или близкие их заменители.

Далее, для неоклассической теории фирмы характерна следующая поведенческая гипотеза: фирма при всех возможных обстоятельствах выбирает допустимый вариант своего функционирования, максимизирующий ее прибыль. В данной главе мы обсудим влияние на функционирование фирмы прежде всего технологических ограничений, определим различные характеристики поведения фирмы (функции прибыли, функции издержек и т. д.) и установим взаимосвязь между ними. Как правило, знание одной из характеристик позволяет получить хорошие оценки всех других, а в ряде интересных случаев (прежде всего, в случае выпуклости технологического множества) точно восстановить их. Цены производимых и используемых при их производстве благ при этом предполагаются заданными. Поведение фирмы в условиях, когда она влияет на формирование цен на продукцию, обсуждается в других главах.

3.2. Технологическое множество и его свойства

Как и ранее, рассматривается экономика с l благами. Для конкретной фирмы естественно рассматривать часть из этих товаров как факторы производства и часть — как выпускаемую продукцию. Ясно, что такое разделение довольно условно, так как фирма обладает достаточной свободой в выборе ассортимента производимой продукции и структуры затрат. В частности, одно и то же благо может при одной технологии затрачиваться, а при другой — производиться. В связи с этим в формальных микроэкономических моделях принято описывать производство с помощью векторов чистых выпусков. Если продукт производится, то он входит в вектор чистых выпусков со знаком плюс, а если затрачивается в производстве,— со знаком минус. Если продукт, производимый фирмой, также потребляется ею в процессе производства, то чистый выпуск данного продукта — это его выпуск минус затраты. Все допустимые технологии (технологически допустимые векторы чистых выпусков) $\mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_l\}$ в совокупности составляют технологическое множество (производственное множество) $Y \subset \mathbb{R}^l$.

В определенных случаях удобно различать выпуск продукции и затраты производственных факторов. Пусть число факторов производства равно n, а число видов выпускаемой продукции равно m, так что $l = m + n$. Обозначим вектор затрат через $\mathbf{r}$, а объемы выпусков через $\mathbf{y}^o$. Вектор $\mathbf{y} = (-\mathbf{r}, \mathbf{y}^o)$ является вектором чистых выпусков. По смыслу $\mathbf{r}$ и $\mathbf{y}^o$ — неотрицательные векторы, так что технологическое множество является подмножеством $\mathbb{R}^n_- \times \mathbb{R}^m_+$. Однако большинство теоретических результатов, обсуждаемых в данной главе, не зависит от знаков компонент векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{y}^o$, поэтому при необходимости можно отнести к выпуску то, что затрачивается в производстве, поменяв знак.

Перечислим свойства технологических множеств, в терминах которых обычно дается описание конкретных классов технологий. Простейшими свойствами являются непустота, замкнутость и выпуклость технологических множеств.

Непустота технологического множества ($Y \neq \varnothing$) означает принципиальную возможность осуществления производственной деятельности.

Свойство замкнутости означает, что технологическое множество содержит свою границу, и что предел любой сходящейся последовательности технологически допустимых векторов чистого выпуска также является технологически допустимым вектором чистых выпусков. Это свойство носит, скорее, технический характер (оно нужно для доказательства некоторых теорем) и не может быть установлено эмпирически.

Выпуклость означает возможность «смешивать» технологии в любой пропорции. Формально, если $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in Y$, то $\alpha\mathbf{y}' + (1-\alpha)\mathbf{y}'' \in Y$ при всех $\alpha \in [0; 1]$.

Дадим определения других важных свойств.

Определение 3.1

Технологическое множество обладает свойством свободы расходования, если из $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y}' \leqslant \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{y}' \in Y$. ◁

Свойство свободы расходования означает наличие возможности производить тот же самый объем выпуска посредством бо́льших затрат или меньший выпуск при тех же затратах. В частности, такое возможно, если применяемые технологии позволяют без дополнительных затрат утилизировать излишние блага.

Определение 3.2

Технологическое множество обладает свойством отсутствия рога изобилия[1] если из $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$ следует, что $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. ◁

Отсутствие рога изобилия означает, что для производства продукции в положительном количестве необходимы затраты в ненулевом объеме.

Определение 3.3

* Технологическое множество обладает свойством невозрастающей отдачи от масштаба, если из $\mathbf{y} \in Y$ следует, что $\lambda\mathbf{y} \in Y$ при всех $0 < \lambda < 1$.

* Технологическое множество обладает свойством неубывающей отдачи от масштаба, если из $\mathbf{y} \in Y$ следует, что $\lambda\mathbf{y} \in Y$ при всех $\lambda > 1$.

---

[1] Англ. *no free lunch* — букв. «невозможность бесплатного обеда».

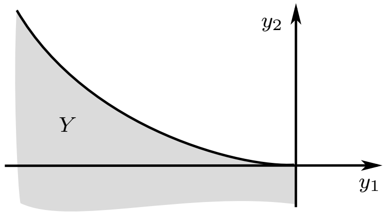


Рис. 3.1. *Технологическое множество с неубывающей отдачей от масштаба*

∗ Технологическое множество обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, если из $\mathbf{y} \in Y$ следует, что $\lambda\mathbf{y} \in Y$ при всех $\lambda > 0$. ◁

Иногда свойство невозрастающей отдачи от масштаба неформально называют (не совсем точно) убывающей отдачей от масштаба, а свойство неубывающей отдачи — возрастающей отдачей. На Рис. 3.1, 3.2 и 3.3 показаны различные случаи отдачи от масштаба. В случае двух благ, когда одно затрачивается, а другое производится, убывающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не возрастает. Если за один час студент может решить в лучшем случае пять однотипных задач по микроэкономике, то за два часа при убывающей отдаче он не смог бы решить более десять таких задач. В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, возрастающая отдача означает, что (максимально возможная) средняя производительность затрачиваемого фактора не убывает.

Свойство постоянной отдачи от масштаба выполнено тогда и только тогда, когда технологическое множество одновременно характеризуется невозрастающей и неубывающей отдачей. Геометрически постоянная отдача от масштаба означает, что Y является конусом (возможно, не содержащим $\mathbf{0}$). В случае двух товаров, когда один затрачивается, а другой производится, постоянная отдача означает, что средняя производительность затрачиваемого фактора не меняется при изменении объема производства.

Определение 3.4

Технологическое множество обладает свойством необратимости, если из $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ следует, что $(-\mathbf{y}) \notin Y$. ◁

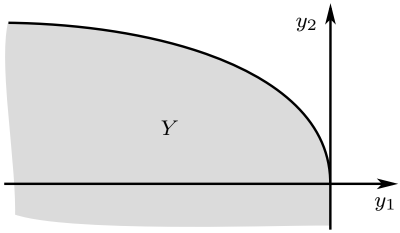


Рис. 3.2. *Выпуклое технологическое множество с невозрастающей отдачей от масштаба*

Пусть из килограмма стали можно произвести пять подшипников. Необратимость означает, что невозможно произвести из пяти подшипников килограмм стали.

Определение 3.5

Технологическое множество обладает свойством аддитивности, если из $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y}' \in Y$ следует, что $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in Y$. ◁

Свойство аддитивности означает возможность комбинирования технологий.

Определение 3.6

Технологическое множество обладает свойством допустимости бездеятельности, если $\mathbf{0} \in Y$. ◁

Следующая теорема устанавливает связи между возможными свойствами технологического множества. (Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 3.2.)

Теорема 3.1

{i} Технологическое множество обладает одновременно свойствами аддитивности и невозрастающей отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда оно является выпуклым конусом.

{ii} Из выпуклости технологического множества и допустимости бездеятельности следует невозрастающая отдача от масштаба. ⅃

Заметим, что при невозрастающей отдаче технология может быть невыпуклой (см. Рис. 3.3). В задаче 3.3 предлагается придумать другие контрпримеры к теореме.

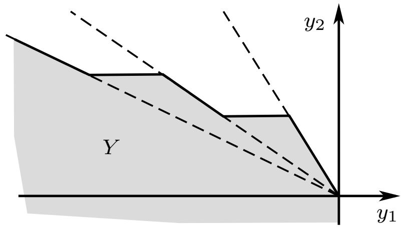


Рис. 3.3. *Невыпуклое технологическое множество с невозрастающей отдачей от масштаба*

Не все допустимые технологии в равной степени важны с экономической точки зрения. Среди допустимых особо выделяются эффективные технологии.

Определение 3.7

Допустимую технологию $\mathbf{y}$ принято называть эффективной, если не существует другой (отличной от нее) допустимой технологии $\mathbf{y}'$, такой что $\mathbf{y}' \geqslant \mathbf{y}$. $\triangleleft$

Очевидно, что такое определение эффективности неявно подразумевает, что все блага являются в определенном смысле желательными (среди них нет антиблаг, «мусора»). Эффективные технологии составляют эффективную границу технологического множества (см. Рис. 3.4). При определенных условиях оказывается возможным использовать в анализе эффективную границу вместо всего технологического множества. При этом важно, чтобы для любой допустимой технологии $\mathbf{y}$ нашлась эффективная технология $\mathbf{y}'$, такая что $\mathbf{y}' \geqslant \mathbf{y}$. Для того чтобы это условие было выполнено, требуется, чтобы технологическое множество было замкнутым и чтобы в пределах технологического множества невозможно было увеличивать до бесконечности выпуск одного блага, не уменьшая при этом выпуск других благ. Можно показать, что если технологическое множество обладает свойством свободы расходования, то эффективная граница однозначно задает соответствующее технологическое множество.

Часто в экономической теории производство моделируется посредством производственной функции. Уместен вопрос о том, при каких условиях на производственное множество такое представление возможно. Хотя можно дать более широкое определение производственной функции, однако здесь и далее мы будем говорить только

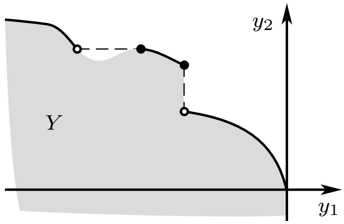


Рис. 3.4. *Эффективная граница технологического множества*

об однопродуктовых технологиях, т. е. будем исходить из того, что $m = 1$.

Пусть R — проекция технологического множества Y на пространство векторов затрат, т. е.

$$R = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists y^o \in \mathbb{R}\colon (-\mathbf{r}, y^o) \in Y \right\}.$$

Определение 3.8

Функция $f\colon R \to \mathbb{R}$ называется производственной функцией, представляющей технологию Y, если при каждом $\mathbf{r} \in R$ величина $f(\mathbf{r})$ является значением следующей задачи:

$$\begin{aligned} &y^o \to \max_{y^o}, \\ &(-\mathbf{r}, y^o) \in Y. \end{aligned} \tag{$\mathcal{F}$}$$

◁

Заметим, что любая точка эффективной границы технологического множества имеет вид $(-\mathbf{r}, f(\mathbf{r}))$. Обратное верно, если $f(\mathbf{r})$ существует и является возрастающей функцией. В этом случае $y^o = f(\mathbf{r})$ является уравнением эффективной границы.

Следующая теорема устанавливает условия, при которых задача $(\mathcal{F})$ имеет решение при всех $\mathbf{r} \in R$.

Теорема 3.2

Пусть множество Y замкнуто и обладает свойствами невозрастающей отдачи от масштаба и отсутствия рога изобилия. Тогда на R определена производственная функция (для любого $\mathbf{r} \in R$ задача $(\mathcal{F})$ имеет решение). ⌟

Доказательство: Очевидно, что задача $(\mathcal{F})$ эквивалентна задаче

$$y^o \to \max_{y^o \in F(\mathbf{r})},$$

где

$$F(\mathbf{r}) = \left\{ y^o \;\middle|\; (-\mathbf{r}, y^o) \in Y \right\}.$$

Воспользуемся тем, что при выполнении условий теоремы каждое из множеств $F(\mathbf{r})$ замкнуто и ограничено сверху и, следовательно, данная задача имеет решение.

Из замкнутости Y следует замкнутость множеств $F(\mathbf{r})$.

Покажем, что множества $F(\mathbf{r})$ ограничены сверху. Пусть это не так и при некотором $\mathbf{r} \in R$ существует неограниченно возрастающая последовательность $\{y_n\}$, такая что $y_n \in F(\mathbf{r})$. Вследствие невозрастающей отдачи от масштаба $(-\mathbf{r}/y_n, 1) \in Y$ при $y_n > 1$. Поэтому (вследствие замкнутости) $(\mathbf{0}; 1) \in Y$, что противоречит отсутствию рога изобилия. ∎

Отметим также, что если технологическое множество Y удовлетворяет гипотезе свободного расходования и существует представляющая его производственная функция $f(\cdot)$, то множество Y описывается следующим соотношением:

$$Y = \left\{ (-\mathbf{r}, y^o) \;\middle|\; y^o \leqslant f(\mathbf{r}),\ \mathbf{r} \in R \right\}.$$

Установим теперь некоторые взаимосвязи между свойствами технологического множества и представляющей его производственной функции.

Теорема 3.3

Пусть технологическое множество Y таково, что для него определена производственная функция $f(\cdot)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

{i} если множество Y выпукло, то множество R выпукло и функция $f(\cdot)$ вогнута;

{ii} если множество Y удовлетворяет гипотезе свободного расходования, то верно и обратное, т. е. если множество R выпукло и функция $f(\cdot)$ вогнута, то множество Y выпукло;

{iii} если Y выпукло, то $f(\cdot)$ непрерывна на внутренности множества R;

{iv} если множество Y обладает свойством свободы расходования, то функция $f(\cdot)$ не убывает;

{v} если Y обладает свойством отсутствия рога изобилия и $\mathbf{0} \in R$, то $f(\mathbf{0}) \leqslant 0$;

$\{\mathrm{vi}\}$ если множество Y обладает свойством допустимости бездеятельности, то $f(\mathbf{0}) \geqslant 0$. ┘

Доказательство: $\{\mathrm{i}\}$ Пусть $\mathbf{r}', \mathbf{r}'' \in R$. Имеем $(-\mathbf{r}', f(\mathbf{r}')) \in Y$ и $(-\mathbf{r}'', f(\mathbf{r}'')) \in Y$. Так как множество Y выпукло, то для всех $\alpha \in [0; 1]$ выполнено

$$(-\alpha\mathbf{r}' - (1-\alpha)\mathbf{r}'', \alpha f(\mathbf{r}') + (1-\alpha) f(\mathbf{r}'')) \in Y.$$

Отсюда $-\alpha\mathbf{r}' - (1-\alpha)\mathbf{r}'' \in R$ (множество R выпукло) и по определению производственной функции

$$\alpha f(\mathbf{r}') + (1-\alpha) f(\mathbf{r}'') \leqslant f(\alpha\mathbf{r}' + (1-\alpha)\mathbf{r}''),$$

что и означает вогнутость $f(\cdot)$.

$\{\mathrm{ii}\}$ Так как множество Y обладает свойством свободного расходования, то множество Y (с точностью до знака вектора затрат) совпадает с подграфиком функции $f(\cdot)$, а подграфик вогнутой функции — выпуклое множество.

$\{\mathrm{iii}\}$ Доказываемый факт следует из того, что вогнутая функция непрерывна во внутренности ее области определения.

$\{\mathrm{iv}\}$ Пусть $\mathbf{r}'' \geqslant \mathbf{r}'$ $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'' \in R)$. Так как $(-\mathbf{r}', f(\mathbf{r}')) \in Y$, то по свойству свободы расходования $(-\mathbf{r}'', f(\mathbf{r}')) \in Y$. Отсюда по определению производственной функции $f(\mathbf{r}'') \geqslant f(\mathbf{r}')$, т. е. $f(\cdot)$ не убывает.

$\{\mathrm{v}\}$ Неравенство $f(\mathbf{0}) > 0$ противоречит предположению об отсутствии рога изобилия. Значит, $f(\mathbf{0}) \leqslant 0$.

$\{\mathrm{vi}\}$ По предположению о допустимости бездеятельности $(\mathbf{0}; 0) \in Y$. Значит, по определению производственной функции $f(\mathbf{0}) \geqslant 0$. ■

В предположении о существовании производственной функции свойства технологии можно описывать непосредственно в терминах этой функции. Покажем это на примере так называемой эластичности от масштаба.

Пусть производственная функция дифференцируема. В точке $\mathbf{r}$, где $f(\mathbf{r}) > 0$, определим локальную эластичность масштаба $e(\mathbf{r})$ как

$$e(\mathbf{r}) = \frac{df(\lambda\mathbf{r})}{d\lambda} \frac{\lambda}{f(\mathbf{r})}\Big|_{\lambda=1}.$$

Если в некоторой точке $e(\mathbf{r})$ равна единице, то считают, что в этой точке постоянная отдача от масштаба, если больше единицы — то

возрастающая отдача, если меньше — **убывающая отдача от масштаба**. Вышеприведенное определение можно переписать в следующем виде:

$$e(\mathbf{r}) = \frac{\sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_i} r_i}{f(\mathbf{r})}.$$

Теорема 3.4

Пусть для технологического множества Y существует дифференцируемая производственная функция $f(\cdot)$ и в точке $\mathbf{r}$ выполнено $f(\mathbf{r}) > 0$. Тогда верно следующее:

{i} если технологическое множество Y обладает свойством убывающей отдачи от масштаба, то $e(\mathbf{r}) \leqslant 1$;

{ii} если технологическое множество Y обладает свойством возрастающей отдачи от масштаба, то $e(\mathbf{r}) \geqslant 1$;

{iii} если Y обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то $e(\mathbf{r}) = 1$. ┘

Доказательство: {i} Рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$, такую что $\lambda_n \in (0; 1)$ и $\lambda_n \to 1$. Тогда $(-\lambda_n \mathbf{r}, \lambda_n f(\mathbf{r})) \in Y$, откуда следует, что $f(\lambda_n \mathbf{r}) \geqslant \lambda_n f(\mathbf{r})$. Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$\frac{f(\lambda_n \mathbf{r}) - f(\mathbf{r})}{\lambda_n - 1} \leqslant f(\mathbf{r}).$$

Переходя к пределу, получаем

$$\frac{df(\lambda \mathbf{r})}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=1} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_i} r_i \leqslant f(\mathbf{r}).$$

Таким образом, $e(\mathbf{r}) \leqslant 1$.

Пункты {ii} и {iii} доказываются аналогично. ■

Технологические множества Y можно задавать также в виде неявных производственных функций.

Определение 3.9

Функция $g\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ называется **неявной производственной функцией**, если технология $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ принадлежит технологическому множеству Y тогда и только тогда, когда $g(\mathbf{y}) \geqslant 0$. ◁

Такую функцию можно найти всегда. Например, подходит функция такая, что $g(\mathbf{y}) = 1$ при $\mathbf{y} \in Y$ и $g(\mathbf{y}) = -1$ при $\mathbf{y} \notin Y$. Заметим, однако, что данная функция не является дифференцируемой. Вообще говоря, не каждое «классичекое» технологическое множество можно описать *одной* дифференцируемой неявной производственной функцией. В частности, технологические множества, рассматриваемые в начальных курсах микроэкономики, часто бывают такими, что для их описания нужно два (или больше) неравенства с дифференцируемыми функциями, поскольку требуется учитывать дополнительные ограничения неотрицательности факторов производства. Чтобы учитывать такие ограничения, можно использовать векторные неявные производственные функции, для которых условие технологической допустимости имеет вид $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \geqslant \mathbf{0}$. Тем не менее с целью упрощения изложения мы в дальнейшем (см., напр., гл. 4) для описания технологий будем использовать только одно ограничение, т. е. скалярную функцию[2].

Укажем здесь на связь неявной производственной функции и более привычной (явной) производственной функции: в ситуации, когда технология такова, что ресурсные ограничения оказываются несущественными, значение неявной производственной функции можно определить так:

$$g((-\mathbf{r}, y^o)) = f(\mathbf{r}) - y^o.$$

Задачи

3.1 Пусть технологическое множество фирмы задается условием

$$y_1 \leqslant \ln(1 - y_2), \text{ где } y_2 < 1.$$

Какими свойствами оно обладает?

3.2 Докажите Теорему 3.1.

3.3 (A) Приведите пример технологического множества, обладающего свойством невозрастающей отдачи от масштаба, но не обладающего свойством допустимости бездеятельности.

(B) Приведите пример технологического множества, обладающего свойством допустимости бездеятельности, но не обладающего свойством невозрастающей отдачи от масштаба.

[2] В задаче 3.36 требуется провести анализ решения задачи производителя в случае векторной неявной производственной функции.

(C) Приведите пример невыпуклого технологического множества, обладающего свойством аддитивности.

(D) Приведите пример выпуклого технологического множества, не обладающего свойством аддитивности.

(E) Приведите пример выпуклого технологического множества, не обладающего свойством невозрастающей отдачи от масштаба.

3.4 Технологии $(-5;4)$, $(-4;0)$ и $(-2;2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству Y. Можно ли гарантировать, что технология $(-3;2)$ принадлежит Y, если известно, что Y выпукло? Изобразите графически множество технологий, про которые можно утверждать, что они принадлежат Y.

3.5 Технологии $(-5;4)$, $(-4;0)$ и $(-2;2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству Y. Можно ли гарантировать, что технология $(-2;1)$ принадлежит Y, если известно, что Y выпукло и характеризуется убывающей отдачей? Изобразите графически множество технологий, про которые можно утверждать, что они принадлежат Y.

3.6 Технологии $(-8;10)$, $(-2;3)$ и $(-4;2)$ принадлежат некоторому технологическому множеству Y. Можно ли гарантировать, что технология $(-5;5)$ принадлежит Y, если известно, что Y характеризуется свободой расходования? Изобразите графически множество технологий, про которые можно утверждать, что они принадлежат Y.

3.7 Пусть однопродуктовая технология может быть представлена производственной функцией. Покажите, что производственное множество удовлетворяет свойству постоянной отдачи от масштаба тогда и только тогда, когда соответствующая производственная функция однородна первой степени.

3.8 Покажите, что если технологическое множество Y замкнуто и выпукло и $-\mathbb{R}^l_+ \subset Y$, то оно обладает свойством свободы расходования.

3.9 Назовем вектор $\boldsymbol{\psi}$ направлением рецессии технологического множества, если существует $\mathbf{y} \in Y$ и неограниченная последовательность положительных чисел $\{\lambda_i\}$, такая что $\mathbf{y} + \lambda_i \boldsymbol{\psi} \in Y$. Обозначим множество всех рецессивных направлений через Ψ.

(A) Покажите, что если технологическое множество Y замкнуто и выпукло, то Ψ является замкнутым выпуклым конусом. (B) Покажите, что если Y удовлетворяет условию свободы расходования, то множество Ψ содержит $-\mathbb{R}^l_+$. (C) Предположим, что Y замкнуто и выпукло, $\mathbf{0} \in Y$. Докажите, что $\boldsymbol{\psi}$ является рецессивным направлением технологического множества Y тогда и только тогда, когда $\lambda\boldsymbol{\psi} \in Y$ при всех $\lambda \geqslant 0$.

(D) Докажите, что если технологическое множество Y замкнуто и выпукло, то $Y + \Psi = Y$.

3.3. Задача производителя и ее свойства

Гипотеза, лежащая в основе модели поведения производителя в условиях рынка, заключается в том, что производитель выбирает технологически допустимый вектор чистых выпусков, максимизирующий прибыль. В терминах чистых выпусков прибыль есть скалярное произведение вектора чистых выпусков $\mathbf{y} \in Y$ на вектор цен: $\mathbf{py}$. Таким образом, если производитель, приобретая факторы производства и продавая производимые блага на рынках с совершенной конкуренцией, сталкивается с некоторым вектором цен $\mathbf{p}$ и рассматривает его как данный (является ценополучателем), то его выбор оказывается решением следующей задачи на экстремум.

Задача производителя

$$\mathbf{py} \to \max_{\mathbf{y} \in Y}. \tag{П}$$

Как нетрудно понять, решение задачи производителя (если оно существует) всегда лежит на границе технологического множества (см. задачу 3.10). Если же все цены положительны (все блага желательны), то решение задачи производителя должно лежать на эффективной границе технологического множества (см. задачу 3.11 и относящиеся к обратному утверждению задачи 3.12 и 3.13). Это свойство иллюстрируется на Рис. 3.5.

Обозначим множество цен, на котором существует решение задачи (П), через P.

Определение 3.10

Отображением предложения $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ будем называть отображение, которое ставит в соответствие каждому вектору цен $\mathbf{p} \in P$ множество решений задачи (П). Если решения единственны, то говорят о функции предложения. $\triangleleft$

Заметим, что, так как мы рассматриваем чистые выпуски, то определенное таким образом отображение точнее было бы назвать отображением чистого предложения.

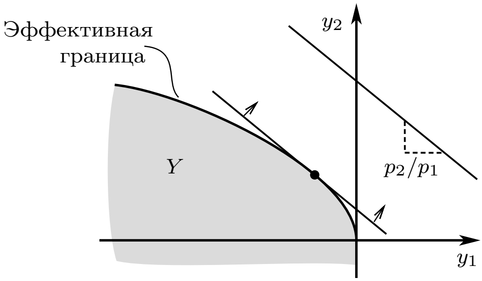


Рис. 3.5. *Решение задачи производителя при положительных ценах лежит на эффективной границе*

Определение 3.11

Функция прибыли — это функция, которая ставит в соответствие каждому вектору цен $\mathbf{p} \in P$ значение задачи (П):

$$\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{y}, \text{ где } \mathbf{y} \in \mathbf{y}(\mathbf{p}). \qquad \triangleleft$$

Существенное отличие задачи производителя (П) от задачи потребителя ($\mathcal{C}$) состоит в том, что множество ее допустимых решений Y, как правило, не является ограниченным. Более того, для технологий с неубывающей отдачей существование допустимых технологий с положительной прибылью означает существование допустимых технологий, дающих сколь угодно большую прибыль.

Пример 3.1 (отсутствие решения задачи производителя)

Пусть технологическое множество имеет вид

$$Y = \left\{ (y_1, y_2) \;\middle|\; y_1 \leqslant 0,\ y_2 + \alpha y_1 \leqslant 0 \right\},$$

цены благ равны p_1, p_2. Если выбрать $y_2 = -\alpha y_1$, то прибыль будет равна $-(\alpha p_2 - p_1)y_1$. Поэтому если $\alpha p_2 > p_1$, то прибыль не ограничена сверху и решение отсутствует.

Если $\alpha p_2 < p_1$, то решение единственно — $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$. Если $\alpha p_2 = p_1$, то решением этой задачи является любая технологически допустимая пара (y_1, y_2), такая что $y_2 + \alpha y_1 = 0$. ▲

Таким образом, существование решений можно гарантировать лишь при дополнительных предположениях относительно вектора цен $\mathbf{p}$ и структуры множества Y. Ниже мы докажем существование

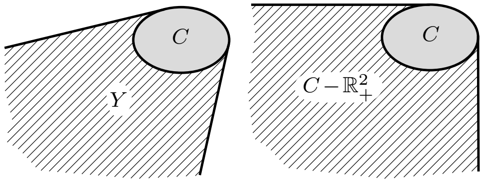


Рис. 3.6. *Иллюстрация предположения, гарантирующего существование решения задачи максимизации прибыли*

решения для всех неотрицательных цен при следующем (довольно сильном и не очень реалистичном) предположении:

$$\text{Существует компактное множество } C\text{, такое что } C \subset Y \text{ и } Y \subset C - \mathbb{R}^l_+. \qquad (©)$$

Заметим, что множество C, обладающее указанным свойством, если существует, то определяется множеством Y не единственным образом. Это несложно понять из Рис. 3.6.

Теорема 3.5

Пусть выполнено предположение (©). Тогда решение задачи (П) существует при любом неотрицательном векторе цен благ. ⌟

Доказательство: Докажем, что задача максимизации прибыли на Y в определенном смысле сводится к задаче максимизации прибыли на C. Пусть $\mathbf{y} \in Y$ и $\mathbf{y} \notin C$. Тогда по условию (©) найдется вектор $\mathbf{y}' \in C$, такой что $\mathbf{y}' - \mathbf{y} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Тем самым мы нашли допустимое решение, для которого прибыль не меньше, чем для $\mathbf{y}$. Из этого следует, что нам достаточно рассматривать только $\mathbf{y} \in C$.

Так как C — компактное множество, а прибыль $\mathbf{py}$ непрерывна по $\mathbf{y}$, то согласно теореме Вейерштрасса решение задачи (П) на множестве C всегда существует. ■

Ясно, что предположения этой теоремы слишком ограничительны, что не позволяет устанавливать существование решения задачи производителя для многих популярных технологических множеств. Так для производственной функции Кобба—Дугласа с убывающей отдачей ($f(K, L) = K^\alpha L^\beta$, $\alpha + \beta < 1$) мы можем гарантировать существование решения при положительных ценах, а условию теоремы она не удовлетворяет.

Существование решения задачи производителя в этом случае гарантируется тем фактом, что на всех так называемых «рецессивных направлениях» данного технологического множества прибыль принимает отрицательные значения. Поясним сказанное и усилим доказанную выше теорему.

Введем соответствующие понятия[3]. Пусть Y удовлетворяет свойству невозрастающей отдачи от масштаба. Назовем вектор $\boldsymbol{\psi} \neq \mathbf{0}$ **направлением рецессии** (направлением «удаления в бесконечность»), если для него выполнено $\lambda\boldsymbol{\psi} \in Y$ при всех $\lambda \geqslant 0$. Обозначим через Ψ множество всех рецессивных направлений. По построению Ψ является конусом. Построим на основе Ψ следующее множество (множество цен, которые на всех рецессивных направлениях дают отрицательную прибыль):

$$\mathring{P} = \left\{\, \mathbf{p} \;\middle|\; \mathbf{p}\boldsymbol{\psi} < 0 \text{ для всех } \boldsymbol{\psi} \in \Psi \,\right\}.$$

Справедлива следующая теорема[4].

Теорема 3.6

Пусть технологическое множество Y непусто, замкнуто и удовлетворяет свойству невозрастающей отдачи от масштаба. Тогда при всех $\mathbf{p} \in \mathring{P}$ задача (П) имеет решение ($\mathbf{y}(\mathbf{p}) \neq \varnothing$). ⌟

Доказательство: Рассмотрим $\mathbf{p} \in \mathring{P}$ и предположим, что задача (П) не имеет решения. При этом найдется последовательность допустимых технологий $\{\mathbf{y}_i\}$, такая что

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_{i+1} > \mathbf{p}\mathbf{y}_i \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty} \mathbf{p}\mathbf{y}_i = \sup_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{p}\mathbf{y}.$$

Последовательность $\{\mathbf{y}_i\}$ не может быть ограниченной, иначе у нее существовали бы сходящиеся подпоследовательности и (по замкнутости технологического множества) любой соответствующий предел (точка сгущения) был бы решением задачи (П). Следовательно, можно выбрать последовательность $\{\mathbf{y}_i\}$ так, чтобы $\mathbf{y}_i \neq \mathbf{0}$,

$$\|\mathbf{y}_{i+1}\| > \|\mathbf{y}_i\| \quad \text{и} \quad \lim_{i\to\infty} \|\mathbf{y}_i\| = +\infty.$$

Далее, последовательность нормированных векторов $\{\mathbf{y}_i/\|\mathbf{y}_i\|\}$ ограничена и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность.

[3] См. также задачу 3.9, где дано несколько отличающееся определение рецессивного направления.

[4] Доказательство теоремы технически сложно. Его можно опустить без ущерба для понимания дальнейшего материала.

Следовательно, можно выбрать последовательность $\{\mathbf{y}_i\}$ так, что $\{\mathbf{y}_i/\|\mathbf{y}_i\|\}$ имеет предел. Обозначим этот предел через $\boldsymbol{\psi}$. Покажем, что $\boldsymbol{\psi} \in \Psi$.

Возьмем $\lambda \geqslant 0$ и рассмотрим последовательность $\{\tilde{\mathbf{y}}_i\}$, где $\tilde{\mathbf{y}}_i = \lambda \mathbf{y}_i/\|\mathbf{y}_i\|$. Из того, что исходная последовательность $\mathbf{y}_i$ неограниченно возрастает, следует, что начиная с некоторого i выполнено $\lambda \leqslant \|\mathbf{y}_i\|$ и, значит, по свойству невозрастающей отдачи последовательность $\tilde{\mathbf{y}}_i$ принадлежит Y. Пределом этой последовательности будет вектор $\lambda\boldsymbol{\psi}$. Технологическое множество замкнуто, поэтому $\lambda\boldsymbol{\psi} \in Y$. Таким образом, $\boldsymbol{\psi} \in \Psi$.

Так как $\mathbf{p} \in \mathring{P}$ и $\boldsymbol{\psi} \in \Psi$, то $\mathbf{p}\boldsymbol{\psi} < 0$. Отсюда следует, что для достаточно больших i выполняется $\mathbf{p}\tilde{\mathbf{y}}_i < 0$, поэтому $\lim \mathbf{p}\mathbf{y}_i = -\infty$. Однако множество Y непусто, поэтому $\sup_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{p}\mathbf{y} > -\infty$. Полученное противоречие доказывает, что задача (П) имеет решение. ■

Из доказанной теоремы следует, что если множество рецессивных направлений Ψ совпадает с $\mathbb{R}^l_-$, то (в предположениях теоремы) решение задачи производителя существует при любых положительных ценах. Примером служит технология, задаваемая производственной функцией Кобба—Дугласа с убывающей отдачей.

Сформулируем теперь свойства функции прибыли и отображения (функции) предложения.

Теорема 3.7 (свойства отображения предложения)

{i} Отображение (функция) предложения $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ однородно нулевой степени.

{ii} Если множество Y замкнуто, то множество $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ замкнуто при всех $\mathbf{p} \in P$.

{iii} Если множество Y выпукло, то множество $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ выпукло при всех $\mathbf{p} \in P$.

{iv} Если множество Y строго выпукло, то $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ — однозначная функция на $\mathbf{p} \in P$, причем $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ непрерывна[5] на $\mathbf{p} \in \operatorname{int} P$.

---

[5] Заметим, что поскольку постоянное отображение Y непрерывно, полунепрерывность сверху отображения предложения (непрерывность функции предложения, если это отображение однозначно) гарантируется при существовании решения задачи производителя (и ограниченности множества таких решений) согласно Теореме B.62 из Приложения B (варианту теоремы Бержа для линейных целевых функций). При этом следует предположить замкнутость Y (но строгая выпуклость не нужна).

{v} Если функция прибыли $\pi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема, то матрица Якоби $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = (\partial y_s(\mathbf{p})/\partial p_k)$ функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ симметрична и положительно полуопределена, $\mathbf{p} \in \operatorname{int} P$. ⌟

Доказательство пунктов {i}—{iv} этой теоремы оставляем в качестве упражнения. Пункт {v} будет доказан ниже.

Теорема 3.8 (свойства функции прибыли)

{i} Функция $\pi(\mathbf{p})$ положительно однородна первой степени:

$$\pi(\lambda\mathbf{p}) = \lambda\pi(\mathbf{p}) \text{ для всех } \mathbf{p} \in \operatorname{int} P.$$

{ii} Функция прибыли $\pi(\mathbf{p})$ выпукла на любом выпуклом подмножестве множества P (множества цен, при которых задача (П) имеет решение).

{iii} Функция $\pi(\mathbf{p})$ непрерывна на внутренности множества P, т. е. на $\operatorname{int} P$.

{iv} Если множество Y строго выпукло, то $\pi(\mathbf{p})$ непрерывно дифференцируема на $\mathbf{p} \in \operatorname{int} P$. ⌟

Доказательство: {i} Доказательство однородности оставляем в качестве упражнения.

{ii} Докажем выпуклость $\pi(\cdot)$. Пусть от некоторых двух цен $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ взята выпуклая комбинация — цена

$$\mathbf{p}_\alpha = \alpha\mathbf{p} + (1-\alpha)\mathbf{p}'$$

при $\alpha \in [0; 1]$. С учетом условий максимизации прибыли, для $\mathbf{y}_\alpha \in \mathbf{y}(\mathbf{p}_\alpha)$ имеем, что

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_\alpha \leqslant \pi(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p}'\mathbf{y}_\alpha \leqslant \pi(\mathbf{p}').$$

Складывая эти неравенства с множителями α и $1-\alpha$ соответственно, получим требуемое неравенство:

$$\pi(\mathbf{p}_\alpha) \leqslant \alpha\pi(\mathbf{p}) + (1-\alpha)\pi(\mathbf{p}').$$

Выпуклость функции $\pi(\cdot)$ можно также доказать, используя то, что поточечный максимум семейства выпуклых функций — выпуклая функция и что $\pi(\cdot)$ является поточечным максимумом выпуклых (линейных) функций $\mathbf{p}\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in Y$.

{iii} Непрерывность функции $\pi(\cdot)$ на множестве $\operatorname{int} P$ следует, например, из того факта, что выпуклая функция непрерывна во внутренности ее области определения.

{iv} Дифференцируемость функции $\pi(\cdot)$ следует из теоремы об опорной функции[6] и из того факта, что решение задачи производителя $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ существует и единственно на множестве $\operatorname{int} P$. Кроме того, следствием теоремы об опорной функции является следующее тождество (лемма Хотеллинга, см. ниже):

$$\nabla\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{y}(\mathbf{p}).$$

Так как функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ непрерывна на $\operatorname{int} P$, то функция $\pi(\mathbf{p})$ непрерывно дифференцируема на $\operatorname{int} P$. ■

Рассматривая поведение потребителя в гл. 2, мы получили «лемму Шепарда» и «тождество Роя». Близким аналогом этих свойств в теории производства является следующая лемма Хотеллинга[7]. (Мы уже установили этот результат при доказательстве пункта {iv} Теоремы 3.8 для строго выпуклого технологического множества.)

Теорема 3.9 (лемма Хотеллинга)

Если функция прибыли $\pi(\cdot)$ определена в окрестности вектора цен $\tilde{\mathbf{p}} \in \operatorname{int} P$ и дифференцируема в $\tilde{\mathbf{p}}$, то

$$\nabla\pi(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{y}(\tilde{\mathbf{p}}).$$ ⌟

Доказательство: Доказательство аналогично доказательству леммы Шепарда для потребления (см. Теорему 2.9 на с. 139). Рассмотрим в окрестности вектора $\tilde{\mathbf{p}}$ функцию

$$\gamma(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\tilde{\mathbf{y}} - \pi(\mathbf{p}),$$

где $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\tilde{\mathbf{p}})$. По определению функции прибыли $\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) = 0$ и $\gamma(\mathbf{p}) \leqslant$ $\leqslant 0$ для произвольного вектора цен $\mathbf{p}$ (технология $\tilde{\mathbf{y}}$ не обязательно максимизирует прибыль при ценах $\mathbf{p}$), т. е. функция $\gamma(\cdot)$ достигает максимума в точке $\tilde{\mathbf{p}}$. При этом $\nabla\gamma(\tilde{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$, откуда и следует доказываемое тождество. ■

Если функция прибыли дважды непрерывно дифференцируема, то по теореме Юнга[8] ее матрица Гессе $\nabla^2\pi(\mathbf{p})$ является симметричной. Следовательно, симметричной является и совпадающая с ней

---

[6] См. Теорему B.43 на с. II-645 в Приложении B.

[7] См. H. Hotelling · Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions, *Journal of Political Economy* **60** (1932): 577–616.

[8] См. Теорему B.51 на с. II-649 в Приложении B.

матрица $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{p})$. Таким образом, для любых двух благ i и j выполнено

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial p_j \partial p_i} = \frac{\partial y_j}{\partial p_i},$$

что означает симметричность перекрестного влияния цен на чистое предложение. Это свойство аналогично уравнению Слуцкого в теории потребления, но имеет более простой вид, поскольку здесь отсутствует эффект дохода. Кроме того, из выпуклости функции прибыли следует, что матрица $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = \nabla \mathbf{y}(\mathbf{p}) = \nabla^2 \pi(\mathbf{p})$ будет положительно полуопределенной. Эти рассуждения доказывают пункт {v} Теоремы 3.7.

Если технологическое множество может быть представлено посредством производственной функции, то задача производителя сводится к следующей задаче максимизации прибыли:

$$p^o f(\mathbf{r}) - \mathbf{w}\mathbf{r} \to \max_{\mathbf{r} \in R},$$

где p^o — цена выпускаемой продукции, $\mathbf{r}$ — количество затрачиваемых факторов производства, $\mathbf{w}$ — вектор цен факторов. Прибыль (чистый доход) здесь определяется как разность между выручкой (валовым доходом) $p^o y^o$ и издержками производства $\mathbf{w}\mathbf{r}$.

Пусть $\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o)$ — функция спроса на факторы производства при векторе цен $(\mathbf{w}, p^o)$, а $y^o(\mathbf{w}, p^o)$ — функция предложения продукции при векторе цен $(\mathbf{w}, p^o)$. Как нетрудно понять, в использовавшихся ранее обозначениях $\mathbf{p} = (\mathbf{w}, p^o)$ и $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = (-\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o), y^o(\mathbf{w}, p^o))$.

Заметим, что если $p^o > 0$, то $y^o(\mathbf{w}, p^o) = f(\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o))$. В данном контексте функция прибыли записывается в следующем виде:

$$\pi(\mathbf{w}, p^o) = p^o f(\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o)) - \mathbf{w}\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o).$$

Результаты, доказанные в этом параграфе, как и те, которые будут доказаны впоследствии, можно переформулировать для случая, когда первичным объектом рассмотрения является не технологическое множество, а производственная функция.

Если $\bar{\mathbf{r}}$ — внутреннее решение задачи максимизации прибыли ($\bar{\mathbf{r}} \in \operatorname{int} R$) и производственная функция дифференцируема, то $\bar{\mathbf{r}}$ удовлетворяет следующим условиям первого порядка:

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} = w_k, \ k = 1, \ldots, l,$$

т. е. предельная производительность каждого фактора производства равна его цене. В векторных обозначениях это можно записать следующим образом:

$$p^o \nabla f(\bar{\mathbf{r}}) = \mathbf{w}.$$

При $p^o > 0$ получим следующую дифференциальную характеристику задачи производителя:

$$\frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} = \frac{w_k}{p^o},$$

т. е. предельный продукт каждого фактора производства равен его относительной цене (пропорции обмена этого производственного фактора на продукт).

Предположим, что множество R задается неравенствами $\mathbf{r} \geqslant 0$[9]. Тогда любое решение удовлетворяет соотношениям

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} \leqslant w_k,$$

причем по условиям дополняющей нежесткости

$$p^o \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} = w_k, \text{ если } r_k > 0,$$

и

$$r_k = 0, \text{ если } p^o \frac{\partial f(\bar{\mathbf{r}})}{\partial r_k} < w_k.$$

Указанные необходимые условия оптимальности оказываются достаточными в случае, если производственная функция вогнута.

Соотношения леммы Хотеллинга в этом случае принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \pi(w, p^o)}{\partial p^o} = f(\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o)) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \pi(w, p^o)}{\partial w_k} = -r_k(\mathbf{w}, p^o).$$

Можно получить аналогичную дифференциальную характеристику решения задачи производителя и в случае, если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g(\cdot)$, которая является дифференцируемой.

---

[9] Здесь функция $f(\cdot)$ определена на $\mathbb{R}^n_+$. Подразумевается, что эту функцию можно доопределить на открытом множестве, содержащем $\mathbb{R}^n_+$, причем таким образом, чтобы она была дифференцируемой на этой более широкой области определения.

Заметим, что если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g(\cdot)$, то задача производителя записывается как

$$\mathbf{py} \to \max_{\mathbf{y}},$$
$$g(\mathbf{y}) \geqslant 0.$$

При дифференцируемости функции $g(\cdot)$ решение этой задачи можно охарактеризовать, воспользовавшись теоремой Куна—Таккера в дифференциальной форме. Функция Лагранжа для задачи производителя равна

$$\mathbb{L}(\bar{\mathbf{y}}, \lambda) = \sum_{k=1}^{l} p_k y_k + \lambda g(\mathbf{y}),$$

где λ — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению.

По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что $\nabla g(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$) существует множитель Лагранжа $\lambda \geqslant 0$, такой что технология $\bar{\mathbf{y}}$, являющаяся решением задачи, удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{y}}, \lambda)}{\partial y_k} = 0$$

или

$$\lambda \frac{\partial g(\bar{\mathbf{y}})}{\partial y_k} = p_k.$$

В векторных обозначениях

$$\lambda \nabla g(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{p},$$

т. е. градиент неявной производственной функции пропорционален вектору цен.

Если не все цены равны нулю ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$), то $\lambda > 0$. Исключая множитель Лагранжа λ, для любых двух благ k и s, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial g(\bar{\mathbf{y}})/\partial y_s}{\partial g(\bar{\mathbf{y}})/\partial y_k} = MRT^{s/k}.$$

Следовательно, решение задачи производителя характеризуется равенством предельной нормы трансформации любых двух благ отношению цен этих благ.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи производителя, если выполнено дополнительное условие, что функция $g(\cdot)$ квазивогнута.

Задачи

3.10 Объясните, почему при не равных нулю ценах решение задачи производителя должно лежать на границе технологического множества.

3.11 Объясните, почему если $\bar{\mathbf{y}}$ — решение задачи производителя (П) при некоторых ценах $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, то $\bar{\mathbf{y}}$ — эффективная технология (см. Определение 3.7 на с. 212). Продемонстрируйте, что если цены неотрицательны и не равны нулю, но не все положительны, то данное утверждение, вообще говоря, неверно.

3.12 Докажите, что все точки эффективной границы выпуклого технологического множества являются решением задачи производителя при некоторых неотрицательных, не равных нулю ценах. (*Указание:* Рассмотрите два множества: множество Y и множество потенциально более эффективных, чем $\bar{\mathbf{y}}$, технологий $\bar{\mathbf{y}} + \mathbb{R}^l_{++}$. Примените к ним теорему отделимости.)

3.13 ⟦Никайдо⟧ Покажите, что утверждение, рассмотренное в предыдущей задаче, нельзя усилить, т. е. не всегда существуют строго положительные цены ($\mathbf{p} > \mathbf{0}$), при которых эффективная технология будет решением задачи потребителя. Для этого рассмотрите технологическое множество

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y_1 + y_2 + y_3^2 \leqslant 0,\ y_3 \geqslant 0 \right\}$$

и технологию $(1; -1; 0)$.

3.14 Для случая, когда технологическое множество может быть представлено производственной функцией, сформулируйте и докажите лемму Хотеллинга, пользуясь формулой вычисления прибыли и условиями первого порядка для внутреннего решения задачи производителя.

3.15 Для случая, когда Y представлено дифференцируемой неявной производственной функцией, можно доказать лемму Хотеллинга, используя условия первого порядка теоремы Куна—Таккера. Проведите это доказательство.

3.16 Докажите Теорему 3.7.

3.17 Покажите, что если производственная функция $f(\cdot)$ строго вогнута и, кроме того, $f(\mathbf{0}) = 0$, то прибыль в точке оптимума неотрицательна.

3.18 Покажите, что если производственная функция обладает возрастающей отдачей от масштаба, то прибыль не может быть положительной. На основе этого выведите, что в случае возрастающей отдачи от масштаба задача производителя либо не имеет решения, либо в точке решения прибыль равна нулю.

3.19 Пусть $\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o)$ — функция спроса на факторы, $y^o(\mathbf{w}, p^o) = f(\mathbf{r}(\mathbf{w}, p^o))$ — функция предложения, а $\mathbf{H} = \nabla^2 f(\mathbf{r})$ — матрица вторых производных производственной функции $f(\mathbf{r})$. Выведите следующие соотношения сравнительной статики для задачи производителя:

$$\frac{\partial y^o}{\partial p^o} = -\frac{1}{p^o}\nabla f^{\mathsf{T}}\mathbf{H}^{-1}\nabla f, \qquad \frac{\partial r}{\partial p^o} = -\frac{1}{p^o}\mathbf{H}^{-1}\nabla f,$$

$$\frac{\partial y^o}{\partial w} = \frac{1}{p^o}\mathbf{H}^{-1}\nabla f, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \frac{1}{p^o}\mathbf{H}^{-1}.$$

3.20 На основе результата предыдущей задачи сделайте заключение о поведении выпуска производителя и его спроса на факторы для дважды дифференцируемых вогнутых производственных функций. Сформулируйте закон спроса и закон предложения для модели производителя и обсудите условия их выполнения.

3.21 Проиллюстрируйте соотношения задачи 3.19 для производственной функции типа Кобба—Дугласа.

3.22 (А) Пусть производственное множество фирмы задается следующим образом:

$$Y = \{\, (y_1, y_2, y_3) \mid y_1 \leqslant \ln(1 - y_2),\ y_2 < 1 \,\}.$$

Постройте соответствующую функцию предложения $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ и функцию прибыли.

(В) Сделайте то же самое для производственного множества

$$Y = \{\, (y_1, y_2, y_3) \mid y_1^5 \leqslant y_2^3 y_3,\ y_2 \leqslant 0,\ y_3 \leqslant 0 \,\}.$$

3.23 Докажите, что непрерывно дифференцируемая функция спроса удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\sum_i p_i \frac{\partial y_i}{\partial p_j} = 0 \ \text{ для всех } j$$

и

$$\sum_i p_i \frac{\partial y_k}{\partial p_i} = 0 \text{ для всех } k.$$

Запишите аналогичные тождества для эластичностей чистого предложения по ценам.

3.24 Докажите, что для любых двух благ i и j выполнено неравенство

$$\frac{\partial y_i}{\partial p_i}\frac{\partial y_j}{\partial p_j} \geqslant \frac{\partial y_i}{\partial p_j}\frac{\partial y_j}{\partial p_i}$$

(что можно интерпретировать как более сильное влияние «своей» цены на чистое предложение, чем «чужой»). (*Указание:* Воспользуйтесь леммой Хотеллинга и выпуклостью функции прибыли.)

3.25 Для технологии, описываемой производственной функцией $f(r) = r^\alpha$, где $\alpha \in (0; 1)$, вычислите

- функцию прибыли;
- функцию спроса на производственный фактор;
- функцию предложения.

Покажите, что

- функция прибыли однородна и выпукла (по цене продукции p^o и цене производственного фактора w);
- функция спроса удовлетворяет закону спроса;
- функция предложения удовлетворяет закону предложения.

3.26 Найдите функцию прибыли, функцию предложения и функцию спроса на факторы для следующих производственных функций:

(A) $f(\mathbf{r}) = \prod_i r_i^{\alpha_i}$ ($\alpha_i > 0$, функция Кобба—Дугласа);
(B) $f(\mathbf{r}) = \sum_i a_i r_i^\rho$ ($a_i > 0$, $\rho \in (0; 1)$);
(C) $f(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(r_i) + r_n$.

Какими свойствами обладают найденные функции? Покажите, что для данных функций выполнена лемма Хотеллинга.

3.27 Докажите, что выручка фирмы в оптимуме ($p^o y^o(\mathbf{w}, p^o)$) не может вырасти, если цены на все факторы производства увеличатся пропорционально.

3.28 Покажите, что выручка фирмы в оптимуме может вырасти, если упадет цена по крайней мере одного из выпускаемых ею продуктов.

3.29 Покажите, что выручка фирмы в оптимуме может упасть, если упадет цена по крайней мере одного из используемых ею факторов производства.

3.30 Покажите, что прибыль фирмы упадет, если вырастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства.

3.31 Покажите, что прибыль фирмы упадет, если упадет цена по крайней мере на один из выпускаемых ею продуктов.

3.32 Предположим, что производственная функция для некоторой технологии вогнута и сепарабельна, причем предельный продукт любого фактора производства сколь угодно мал при достаточно больших объемах затрат этого фактора производства. Докажите следующие свойства.

(A) Выручка фирмы упадет, если возрастет цена по крайней мере на один из используемых ею факторов производства.

(B) Спрос данной фирмы на любой фактор производства неограниченно возрастает при падении цены этого фактора производства.

(C) Предложение данной фирмы неограниченно возрастает при росте выпускаемой этой фирмой продукции.

3.33 Покажите, что в случае однородной производственной функции показатель отдачи от масштаба не зависит от цен факторов.

3.34 Покажите, что в случае однородной производственной функции отношение функций спроса на любые два фактора производства не зависит от цены продукции.

3.35 Покажите, что функция прибыли сепарабельна тогда и только тогда, когда сепарабельна функция спроса.

3.36 Рассмотрите векторную (k-мерную) неявную производственную функцию, для которой условие технологической допустимости имеет вид $\mathbf{g}(\mathbf{y}) \geqslant \mathbf{0}$. Предполагая, что эта функция является дифференцируемой, проведите анализ необходимых условий оптимальности для задачи производителя, используя теорему Куна—Таккера.

3.4. Восстановление технологического множества

Пусть $(\mathbf{p}^i, \mathbf{y}^i)$, $i = 1, \ldots, n$ — последовательность наблюдений: при ценах $\mathbf{p}^i$ наблюдался вектор чистого выпуска $\mathbf{y}^i$. Если при каком-то векторе цен $\mathbf{p}^i$ выполнено $\mathbf{p}^i\mathbf{y}^j > \mathbf{p}^i\mathbf{y}^i$, то $\mathbf{y}^i$ не максимизирует прибыль при ценах $\mathbf{p}^i$, а это противоречит рациональности производителя. Если же $\mathbf{p}^i\mathbf{y}^j \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{y}^i$ для всех i, j, то последовательность наблюдений $(\mathbf{p}^i, \mathbf{y}^i)$, $i = 1, \ldots, n$, не противоречит гипотезе максимизации прибыли.

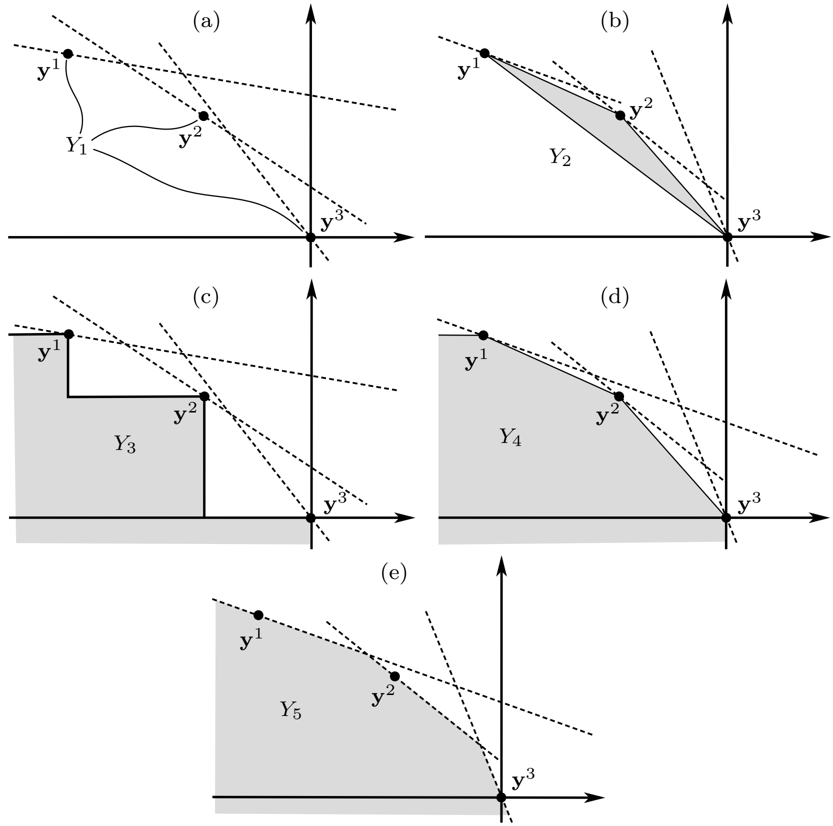


Рис. 3.7. *Возможные способы построения множества Y по наблюдаемым точкам*

Технологическое множество, которое порождает такие выборы производителя, может быть построено разными способами. Рассмотрим некоторые из них.

Наиболее простым является вариант, когда технологическое множество, которое при максимизации прибыли порождает такие выборы, состоит только из точек $\mathbf{y}^i$, т. е.

$$Y_1 = \{\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n\}.$$

Также можно в качестве технологического множества Y взять выпуклую оболочку Y_2 точек $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ (если мы предполагаем, что технологическое множество выпукло). Если мы предполагаем свободу расходования, то в качестве Y можно взять разность между Y_1 и $\mathbb{R}^l_+$

$$Y_3 = Y_1 - \mathbb{R}^l_+,$$

и между Y_2 и $\mathbb{R}_+$ (в сочетании выпуклостью)

$$Y_4 = Y_2 - \mathbb{R}^l_+.$$

Еще один вариант состоит в том, чтобы исключать только те векторы $\mathbf{y}$, которые заведомо не могут принадлежать технологическому множеству (векторы, для которых выполнено $\mathbf{p}^i\mathbf{y} > \mathbf{p}^i\mathbf{y}^i$ хотя бы для одного из наблюдений i), т. е. взять пересечение полупространств, отсекаемых соответствующими гиперплоскостями:

$$Y_5 = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}^i\mathbf{y} \leqslant \mathbf{p}^i\mathbf{y}^i,\ i = 1, \ldots, n \,\}.$$

Все эти варианты для случая $n = 3$ проиллюстрированы на Рис. 3.7. Наклон пунктирных прямых линий соответствует отношению цен. Отметим, что имеет место следующая цепочка включений для рассмотренных множеств:

$$Y_1 \begin{matrix} \subset Y_2 \subset \\ \subset Y_3 \subset \end{matrix} Y_4 \subset Y_5.$$

Таким образом, существует несколько множеств, порождающих указанный спрос, причем Y_5 является «максимальным» из этих множеств (т. е. содержит любое другое множество). Покажем, что аналогичная процедура позволяет построить подходящее технологическое множество и в случае, когда количество наблюдений может быть бесконечным.

Предположим, что функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$, определенная на множестве цен P, такова, что $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ является решением задачи максимизации прибыли при ценах $\mathbf{p}$. Требуется на основе $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ и соответствующей функции прибыли $\pi(\mathbf{p})$ восстановить соответствующее технологическое множество Y.

Заметим, что существование вектора $\mathbf{y} \in Y$, такого что $\mathbf{p}\mathbf{y} > \pi(\mathbf{p})$ при некоторых ценах $\mathbf{p}$, противоречило бы гипотезе максимизации прибыли на Y. Объединим все векторы $\mathbf{y}$ не противоречащие этому условию при ценах из области определения функции прибыли ($\mathbf{p} \in P$):

$$Y_\pi = \bigcap_{\mathbf{p} \in P} \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p}) \,\} = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p}) \text{ для всех } \mathbf{p} \in P \,\}.$$

Очевидно, что по построению выполнено $Y \subset Y_\pi$ (т. е. построенное технологическое множество будет, вообще говоря, шире, чем исходное), и что $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ является решением задачи производителя с технологическим множеством Y_π при ценах $\mathbf{p} \in P$. Как следствие функция прибыли для построенного «технологического множества» Y_π определена при всех $\mathbf{p} \in P$ и совпадает с $\pi(\mathbf{p})$.

Таким образом, мы нашли (максимальное) технологическое множество, которое может породить данные наблюдения.

Уместен вопрос: совпадет ли множество Y_π с технологическим множеством Y, на основе которого оно построено? Положительный ответ на этот вопрос позволил бы нам восстанавливать технологические множества по наблюдаемому поведению.

Ответ на вопрос зависит от свойств технологического множества Y и от множества цен P, при которых наблюдается предложение.

В общем случае Y и Y_π могут не совпадать, поскольку описанный метод построения Y_π порождает выпуклые множества (пересечение полупространств), а технологическое множество Y может быть невыпуклым (как на Рис. 3.7(a) и 3.7(c)). Кроме того, ясно, что множество цен P может быть недостаточно «богатым» для того, чтобы технологическое множество было адекватно представлено наблюдаемыми выборами при этих ценах.

В частном случае, когда $P = \mathbb{R}^l_{++}$, наш метод построения Y_π порождает множества, удовлетворяющее свойству свободы расходования. Соответственно Y и Y_π не будут совпадать, если технологическое множество Y не удовлетворяет свойству свободы расходования (как на Рис. 3.7(a) и 3.7(b)).

Теорема 3.10

Пусть технологическое множество Y непусто, замкнуто, выпукло и удовлетворяет свойству свободы расходования. Тогда при $P = \mathbb{R}^l_{++}$ оно совпадает с порождаемым им множеством Y_π. ┘

Доказательство: Так как $Y \subset Y_\pi$, то остается только показать, что $Y_\pi \subset Y$.

Рассмотрим точку $\tilde{\mathbf{y}}$, не принадлежащую технологическому множеству Y. По теореме отделимости[10] для непустого выпуклого замкнутого множества Y и точки $\tilde{\mathbf{y}}$, не принадлежащей этому

[10] См. Теорему B.42 на с. II-644 в Приложении B и комментарий после теоремы.

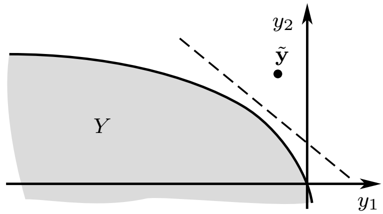


Рис. 3.8. *Иллюстрация отделимости*

множеству, существует вектор коэффициентов $\tilde{\mathbf{p}}$, не равный нулю, и число q, такие что для любой технологии $\mathbf{y} \in Y$ выполнено

$$\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}} > q \geqslant \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{y}$$

(см. Рис. 3.8.) Покажем, что $\tilde{\mathbf{p}}$ может быть вектором цен. Для этого нужно, чтобы он не имел нулевых или отрицательных компонент.

Предположим, что $\tilde{p}_i < 0$. Рассмотрим некоторую точку $\mathbf{y}' \in Y$ и луч $\mathbf{y}' - \lambda\mathbf{e}^i$ при $\lambda \geqslant 0$, где $\mathbf{e}^i$ — орт (i-я компонента равна единице, а остальные — нули). Этот луч целиком лежит во множестве Y, так как Y удовлетворяет свойству свободы расходования. Величина $\tilde{\mathbf{p}}\mathbf{y}' - \lambda\tilde{p}_i$ не ограничена сверху. Это противоречит тому, что $\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}} > \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \in Y$. Мы пришли к противоречию, поэтому $\tilde{\mathbf{p}} \geqslant \mathbf{0}$.

Более того, можно выбрать вектор коэффициентов так, что в нем не будет нулевых компонент. Действительно, рассмотрим вектор $\tilde{\mathbf{p}} + \varepsilon\mathbf{p}'$, где $\mathbf{p}'$ — произвольный вектор цен из $P = \mathbb{R}^l_{++}$. Величины $\mathbf{p}'\mathbf{y}$ при $\mathbf{y} \in Y$ ограничены сверху значением $\pi(\mathbf{p}')$, поэтому если ε достаточно мало́, то все еще будут выполняться неравенства

$$(\tilde{\mathbf{p}} + \varepsilon\mathbf{p}')\tilde{\mathbf{y}} > (\tilde{\mathbf{p}} + \varepsilon\mathbf{p}')\mathbf{y},$$

т. е. мы можем заменить $\tilde{\mathbf{p}}$ на некоторый вектор $\tilde{\mathbf{p}} + \varepsilon\mathbf{p}' \in \mathbb{R}^l_{++}$.

Из этих рассуждений следует, что существует вектор $\tilde{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, такой что $\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}} > \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{y} \in Y$. Таким образом, $\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}} > \pi(\tilde{\mathbf{p}})$ и, значит, $\tilde{\mathbf{y}} \notin Y_\pi$. Тем самым, мы показали, что любая точка, которая не принадлежит Y, не принадлежит и Y_π. А это означает, что $Y_\pi \subset Y$.■

На Рис. 3.9 приведены примеры ситуаций, когда при нарушении предположений доказанной теоремы ее утверждение ($Y_\pi \subset Y$) неверно, т. е. невозможно восстановить Y на основе функции прибыли. Заметим, что на Рис. 3.9(b) невозможность восстановления связана

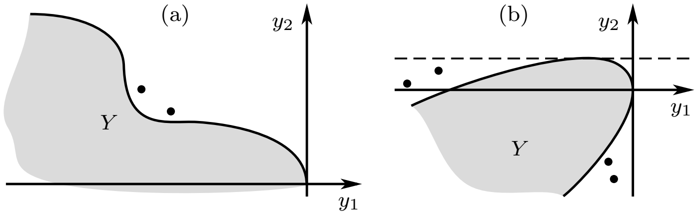


Рис. 3.9. *Ситуации, когда невозможно восстановить технологическое множество. (a) Не выполнено условие выпуклости; изображенные точки нельзя отделить. (b) Не выполнено условие свободы расходования; изображенные точки нельзя отделить гиперплоскостью с неотрицательным наклоном*

с «бедностью» множества цен; если бы множество цен P включало векторы с отрицательными компонентами, то проблем с восстановлением не было бы.

Обсудим теперь следующую проблему: как для данной функции $\pi(\mathbf{p})$ и функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$, заданных на множестве цен P, определить, могут ли они являться функцией прибыли и функцией предложения рационального производителя соответственно. При этом будем считать множество цен P открытым.

Как было показано выше, необходимыми требованиями к функции прибыли являются ее выпуклость, положительная однородность первой степени и непрерывность. Оказывается, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы произвольная функция $\pi(\mathbf{p})$ была функцией прибыли для некоторого технологического множества. В качестве такого множества можно взять рассмотренное выше множество

$$Y_\pi = \left\{ \mathbf{y} \;\middle|\; \mathbf{py} \leqslant \pi(\mathbf{p}) \;\forall \mathbf{p} \in P \right\}.$$

Другими словами, верны следующие утверждения.

◆ Если функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то построенная на ее основе функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя.

◆ Если функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции предложения производителя, то построенная на ее основе функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли.

◆ Если функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет набору необходимых условий для функции прибыли, то существует технологическое множество, порождающее $\pi(\mathbf{p})$ как функцию прибыли.

Перечислим упомянутые необходимые условия. Для удобства доказательства потребуем дополнительно, чтобы $\pi(\mathbf{p})$ была дважды непрерывно дифференцируемой, а $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ — непрерывно дифференцируемой.

Условия на функцию $\pi(\mathbf{p})$ $(\pi\colon P \to \mathbb{R})$:

(A1) положительная однородность первой степени;
(A2) выпуклость;
(A3) $\pi(\cdot)$ дважды непрерывно дифференцируема (более сильное условие, чем требуется).

Условия на функцию $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ $(\mathbf{y}\colon P \to \mathbb{R}^l)$:

(B1) положительная однородность нулевой степени,
(B2) $\mathbf{y}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, матрица первых производных $\mathbf{M}(\mathbf{p}) = (\partial y_s(\mathbf{p})/\partial p_k)$ положительно полуопределена и симметрична.

Сформулируем приведенный выше набор неформальных утверждений как теорему.

Теорема 3.11

{i} Пусть для всех k выполнено

$$y_k(\mathbf{p}) = \frac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial p_k},$$

и функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям (A1), (A2) и (A3). Тогда $\mathbf{y}(\mathbf{p}) = (y_1(\mathbf{p}), \ldots, y_l(\mathbf{p}))$ удовлетворяет условиям (B1) и (B2) налагаемым на функцию спроса-предложения производителя.

{ii} Пусть функция $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям (B1) и (B2). Тогда функция $\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{y}(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям (A1), (A2) и (A3).

{iii} Пусть функция $\pi(\mathbf{p})$ удовлетворяет условиям (A1), (A2), (A3). Тогда множество $Y_\pi = \{\, \mathbf{y} \mid \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p})\ \forall \mathbf{p} \in P \,\}$ является технологическим множеством, порождающим функцию прибыли $\pi(\mathbf{p})$. ⌟

Доказательство: {i} Так как функция $\pi(\mathbf{p})$ однородна первой степени, то ее производная $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ однородна нулевой степени.

Непрерывная дифференцируемость $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ следует из дважды непрерывной дифференцируемости функции $\pi(\mathbf{p})$.

Матрица вторых производных дважды непрерывно дифференцируемой функции симметрична. Таким образом, для функции $\pi(\mathbf{p})$ выполнено

$$\frac{\partial^2 \pi(\mathbf{p})}{\partial p_s \partial p_k} = \frac{\partial^2 \pi(\mathbf{p})}{\partial p_k \partial p_s}.$$

Матрица вторых производных функции $\pi(\mathbf{p})$ есть матрица первых производных функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$. Поэтому

$$\frac{\partial y_s}{\partial p_k} = \frac{\partial y_k}{\partial p_s}.$$

Положительная полуопределенность матрицы вторых производных (т. е. $\mathbf{r}^\mathsf{T}\mathbf{M}\mathbf{r} \geqslant 0$ при всех $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$) — необходимый (и достаточный) признак выпуклости дважды дифференцируемой функции.

{ii} Продифференцируем $\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \sum p_k y_k(\mathbf{p})$ по p_k:

$$\frac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial p_k} = y_k(\mathbf{p}) + \sum_{s=1}^{l} p_s \frac{\partial y_s(\mathbf{p})}{\partial p_k} = y_k(\mathbf{p}) + \sum_{s=1}^{l} p_s \frac{\partial y_k(\mathbf{p})}{\partial p_s}.$$

Второе равенство — следствие симметричности производных функции $\mathbf{y}(\mathbf{p})$. Так как $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ — положительно однородна нулевой степени, то по закону Эйлера

$$\sum_{s=1}^{l} p_s \frac{\partial y_k(\mathbf{p})}{\partial p_s} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \pi(\mathbf{p})}{\partial p_k} = y_k(\mathbf{p}).$$

Далее воспроизводим доказательство пункта {i} в обратном порядке.

{iii} Обозначим

$$\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \nabla \pi(\mathbf{p}).$$

Так как $\pi(\mathbf{p})$ — однородная первой степени функция и $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ — ее градиент, то по формуле Эйлера

$$\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\mathbf{y}(\mathbf{p}).$$

С учетом этого равенства по определению множества Y_π следует, что величина $\mathbf{p}\mathbf{y}(\mathbf{p})$ всегда не меньше, чем $\mathbf{p}\mathbf{y}$ в любой точке $\mathbf{y} \in Y_\pi$. Если мы докажем, что при любых ценах $\mathbf{p} \geqslant 0$ точка $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ принадлежит множеству Y_π, то тем самым мы докажем, что $\pi(\mathbf{p})$ есть функция прибыли, соответствующая технологическому множеству Y_π. Другими словами, нам требуется показать, что $\mathbf{p}'\mathbf{y}(\mathbf{p}) \leqslant \pi(\mathbf{p}')$ при всех $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{p}' \geqslant \mathbf{0}$.

Так как $\pi(\mathbf{p})$ — выпуклая дифференцируемая функция, то ее график лежит выше касательной:

$$\pi(\mathbf{p}') \geqslant \pi(\mathbf{p}) + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})\nabla\pi(\mathbf{p}).$$

Поскольку $\nabla\pi(\mathbf{p}) = \mathbf{y}(\mathbf{p})$ и $\mathbf{p}\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \pi(\mathbf{p})$, получаем требуемое для доказательства утверждения соотношение

$$\pi(\mathbf{p}') \geqslant \pi(\mathbf{p}) + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{y}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}'\mathbf{y}(\mathbf{p}). \qquad \blacksquare$$

Замечание: Пункт {iii} данной теоремы можно доказать и без предположения о дифференцируемости. Это предположение вводится для упрощения доказательства.

Определение множества Y_π, как оно дано выше, не очень удобно для прикладных задач. Желательно иметь более «операциональное» описание восстановленного технологического множества — соответствующую ему производственную функцию. Рассмотрим вопрос о том, как получить такое описание.

Определение множества Y_π не изменится (с учетом того, что функция $\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}$ положительно однородна), если нормировать подходящим образом цены. Важно только, чтобы нормированные цены (обозначим множество таких цен через $\hat{P}$) совпадали с точностью до положительного множителя с ценами из исходного множества P. (Например, если цена одного из благ всегда положительна, то ее можно принять равной единице; если цены составляют положительный ортант, то можно сумму цен положить равной единице.) Таким образом, имеем:

$$Y_\pi = \left\{ \mathbf{y} \;\middle|\; \mathbf{p}\mathbf{y} \leqslant \pi(\mathbf{p}) \text{ для всех } \mathbf{p} \in \hat{P} \right\}.$$

Можно переписать это определение в эквивалентном виде:

$$Y_\pi = \left\{ \mathbf{y} \;\middle|\; \inf_{\mathbf{p} \in \hat{P}} (\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}) \geqslant 0 \right\}.$$

Очевидно, что данный способ восстановления технологического множества по функции прибыли $\pi(\mathbf{p})$ фактически задает неявную производственную функцию[11] по формуле

$$g(\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{p}\in\hat{P}}(\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}).$$

Таким образом, для получения неявной производственной функции[12], соответствующей множеству Y_π, можно в качестве $g(\mathbf{y})$ взять значение следующей задачи:

$$\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y} \to \inf_{\mathbf{p}\in\hat{P}}.$$

Рассмотрим, например, однопродуктовую технологию с выпуском y^o (цена $p^o > 0$) и затратами $\mathbf{r}$ (цены $\mathbf{w} > 0$). Если положить $p^o = 1$, задача переписывается в виде

$$\pi(\mathbf{w}, 1) + \mathbf{w}\mathbf{r} - y^o \to \inf_{\mathbf{w}>0}.$$

Если функция прибыли строго выпукла, то, решая эту задачу, мы найдем решение как функцию $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{r})$ (определенную для тех значений затрат $\mathbf{r}$, при которых решение существует), а по ней — неявную производственную функцию

$$g(\mathbf{r}, y^o) = \pi(\mathbf{w}(\mathbf{r}), 1) + \mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{r} - y^o.$$

Условие принадлежности технологическому множеству Y_π, т. е. неравенство $g(\mathbf{r}, y^o) \geqslant 0$, можно переписать в виде $y^o \leqslant \pi(\mathbf{w}(\mathbf{r}), 1) + \mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{r}$. Ясно, что правая часть здесь представляет собой однопродуктовую явную производственную функцию, описывающую данную технологию:

$$f(\mathbf{r}) = \pi(\mathbf{w}(\mathbf{r}), 1) + \mathbf{w}(\mathbf{r})\mathbf{r}.$$

Задачи

3.37 Известно, что при ценах $(1; 2)$ производитель выбрал вектор выпуска $(1; -1)$, а при ценах $(2; 1)$ — вектор выпуска $(-1; 1)$. Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

---

[11] Можно показать (опираясь на то, что функция $\pi(\mathbf{p}) - \mathbf{p}\mathbf{y}$ положительно однородна, а P представляет собой конус), что если цены не нормировать, то эта неявная производственная функция будет принимать значения 0 (если $\mathbf{y} \in Y_\pi$) и $-\infty$ (если $\mathbf{y} \notin Y_\pi$). Это, конечно, не очень удобно.

[12] Отметим, что полученная таким образом функция $g(\mathbf{y})$ в некоторых случаях может принимать значение $-\infty$.

3.38 Известно, что при ценах $(3; 2)$ производитель выбрал вектор выпуска $(2; -1)$, а при ценах $(2; 3)$ — вектор выпуска $(1; -2)$. Совместимо ли это с максимизацией прибыли?

3.39 Известно, что при ценах $(1; 4)$ производитель выбрал вектор выпуска $(-4; 3)$, при ценах $(1; 1)$ — вектор выпуска $(0; 0)$, а при ценах $(2; 1)$ — вектор выпуска $(3; -4)$. Можно ли гарантировать, что вектор выпуска $(-1; 2)$ не принадлежит множеству допустимых технологий?

3.40 Известно, что при ценах $(1; 4)$ производитель выбрал вектор выпуска $(-4; 3)$, при ценах $(1; 1)$ — вектор выпуска $(0; 0)$, а при ценах $(2; 1)$ — вектор выпуска $(3; -4)$. Можно ли гарантировать, что вектор выпуска $(-9; 4)$ не принадлежит множеству допустимых технологий?

3.41 (A) Докажите, что в модели производителя выполнен следующий **закон предложения**: $\Delta\mathbf{p}\Delta\mathbf{y} \geqslant 0$, где $\Delta\mathbf{y}$ — изменение предложения при изменении цен на $\Delta\mathbf{p}$. Сравните закон предложения с законом спроса в теории поведения потребителя (ему посвящен п. 2.4.1).

(B) Переформулируйте закон предложения для случая, когда блага разделены на выпускаемую продукцию и затрачиваемые факторы. Сформулируйте два следствия этого свойства: закон предложения для выпускаемой продукции и закон спроса для производственных факторов.

3.42 Известно, что спрос потребителя удовлетворяет закону спроса только в случае благ, не являющихся товарами Гиффена, а спрос на факторы производства удовлетворяет закону спроса всегда. Какие особенности моделей рационального поведения производителя и потребителя предопределяют такие особенности их поведения?

3.43 (A) Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(p_1, p_2) = p_1(\ln(p_1/p_2) - 1) + p_2.$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

(B) Решите ту же задачу для функции прибыли

$$\pi(p_1, p_2, p_3) = \frac{3p_1^2 + p_2^2}{p_3}.$$

3.44 Пусть функция прибыли производителя имеет вид

$$\pi(w, p^o) = p^{o\,\frac{\alpha}{1-\alpha}} (\alpha/w)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - w^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (p^o \alpha)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Проверьте, что эта функция удовлетворяет свойствам функции прибыли. Найдите функцию спроса. Восстановите по функции прибыли соответствующее ей технологическое множество.

3.5. Затраты и издержки

Итак, мы изучили основные свойства модели рационального поведения производителя. В микроэкономике утвердилась также традиция описывать технологию посредством функции издержек, решая при этом задачу максимизиции прибыли в два этапа. На первом этапе при данных ценах факторов находится минимальная величина издержек (стоимости затрачиваемых производственных факторов), которая позволяет произвести данное количество продукции. Соответствующая зависимость между выпусками и этими (минимальными) издержками и называется функцией издержек. На втором этапе при известной функции издержек и при заданных ценах на выпускаемую продукцию (или заданной зависимости этих цен от объема производства, если не предполагается, что производитель является ценополучателем) находится тот выпуск, которому соответствует максимальная прибыль. Такое разделение задачи выбора оптимальной технологии на два этапа представляется удобным исследовательским приемом, особенно при исследовании моделей равновесия с производством, удовлетворяющим условиям постоянной отдачи от масштаба, а также при анализе моделей несовершенной конкуренции, когда поведение производителя оказывает влияние на рыночные цены[13].

В этом параграфе приведем результаты относительно свойств функций издержек и связи этих функций с теми понятиями, которые были рассмотрены выше.

Для упрощения записи вектор выпуска будем обозначать здесь через $\mathbf{y}$ (вместо $\mathbf{y}^o$), где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Как и ранее, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ — вектор соответствующих затрат.

3.5.1. Множество требуемых затрат

Через $Y^o \subset \mathbb{R}^m$ обозначим множество, состоящее из тех векторов объемов производства, которые являются допустимыми при данном

[13] Об этом см. в гл. 12 и 13.

технологическом множестве (существуют затраты, которые вместе с $\mathbf{y}$ составляют допустимую технологию):

$$Y^o = \left\{ \mathbf{y} \;\middle|\; \exists \mathbf{r}\colon (-\mathbf{r},\ \mathbf{y}) \in Y \right\}.$$

Определение 3.12

Для каждого вектора выпуска $\mathbf{y} \in Y^o$ множество требуемых затрат $V(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n$ — это множество векторов затрат, обеспечивающих этот выпуск при данном технологическом множестве Y, т. е.

$$V(\mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (-\mathbf{r}, \mathbf{y}) \in Y \right\}. \qquad \triangleleft$$

Из предполагаемых свойств Y вытекают некоторые *свойства множества* $V(\mathbf{y})$ и соответствующего отображения $V(\cdot)$:

- из выпуклости Y следует выпуклость множеств $V(\mathbf{y})$ (см. задачу 3.45);
- из свободы расходования для Y следует свобода расходования для множеств $V(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{r} \in V(\mathbf{y}) \ \text{ и } \ \mathbf{r}' \geqslant \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}' \in V(\mathbf{y})$$

  (см. задачу 3.46).

Для случая однопродуктовой технологии ($m = 1$) рассмотрим связь множества требуемых затрат с производственной функцией (в предположении, что она существует). На основе $V(\cdot)$ можно определить производственную функцию следующим образом:

$$f(\mathbf{r}) = \max_{y\colon \mathbf{r} \in V(y)} y.$$

При моделировании производства с помощью производственной функции естественно предположить, что технологическое множество обладает свойством свободы расходования по выпуску:

$$\mathbf{y} \leqslant \mathbf{y}' \ \text{ и } \ (-\mathbf{r}, \mathbf{y}') \in Y \quad \Rightarrow \quad (-\mathbf{r}, \mathbf{y}) \in Y.$$

Как нетрудно понять, свобода расходования по выпуску эквивалентна монотонности отображения $V(\cdot)$, т. е. вложенности множеств $V(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{y} \leqslant \mathbf{y}' \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{y}') \subset V(\mathbf{y})$$

(см. Рис. 3.10). При этом предположении множества $V(y)$ связаны с производственной функцией следующим образом:

$$V(y) = \left\{ \mathbf{r} \in R \;\middle|\; f(\mathbf{r}) \geqslant y \right\}.$$

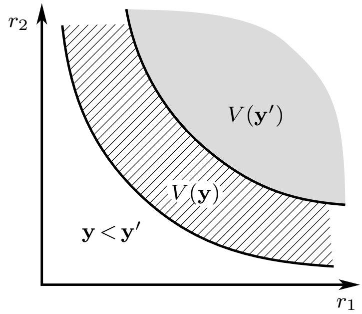


Рис. 3.10. *Монотонность $V(\cdot)$ (свобода расходования по выпуску)*

Следующая теорема связывает свойства отображения $V(\cdot)$ и соответствующей производственной функции $f(\cdot)$. (Доказательство этого утверждения оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 3.47.)

Теорема 3.12

Пусть однопродуктовая технология представима производственной функцией $f(\cdot)$ и пусть отображение $V(\cdot)$, соответствующее этой технологии, монотонно. Тогда

{i} производственная функция $f(\cdot)$ монотонна;
{ii} множества $V(y)$ выпуклы при всех $y \in Y^o$ тогда и только тогда, когда производственная функция $f(\cdot)$ квазивогнута. ┘

В терминах множеств $V(y)$ можно определить изокванты для данной технологии:

$$\left\{ \mathbf{r} \in V(y) \;\middle|\; \mathbf{r} \notin V(y') \text{ для всех } y' > y \right\}.$$

Это множество таких векторов затрат $\mathbf{r}$, которые позволяют произвести y, но не позволяют произвести больше y. Таким образом, изокванта — это граница множества $V(y)$ (см. Рис. 3.11). Например, для производственной функции Кобба—Дугласа с двумя видами затрат имеем

$$Y = \left\{ (-r_1, -r_2, y) \;\middle|\; y \leqslant r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} \right\},$$
$$V(y) = \left\{ (r_1, r_2) \;\middle|\; y \leqslant r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} \right\}.$$

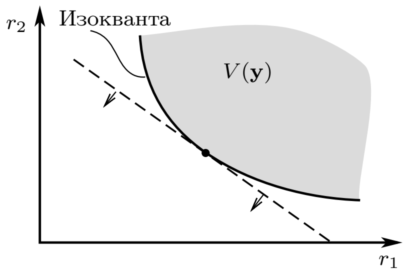


Рис. 3.11. *Построение функции издержек*

Соответственно, изокванта задается уравнением

$$r_1^{\alpha} r_2^{1-\alpha} = \text{const}.$$

3.5.2. Функция издержек

Напомним, что через $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ мы обозначили цены затрачиваемых ресурсов (часть общего вектора цен $\mathbf{p}$, соответствующая $-\mathbf{r}$). Если зафиксировать вектор выпуска $\mathbf{y} \in Y^o$ то задача максимизации прибыли (П) сводится к следующей задаче минимизации издержек:

Задача минимизации издержек

$$\begin{aligned} &\mathbf{wr} \to \min_{\mathbf{r}}, \\ &\mathbf{r} \in V(\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{C}$$

Иллюстрация этой задачи представлена на Рис. 3.11. Очевидна аналогия с задачей минимизации потребительских расходов ($\mathcal{H}$) в теории поведения потребителя (см. с. 121).

Следующая теорема дает условия, при которых задача (C) имеет решение. (Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 3.57.)

Теорема 3.13

Пусть технологическое множество Y непусто и замкнуто, и пусть $V(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n_+$ при всех $\mathbf{y} \in Y^o$. Тогда задача минимизации издержек (C) имеет решение при всех $\mathbf{y} \in Y^o$ и любых ценах факторов $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_{++}$. ⌟

В дальнейшем в этом пункте будем предполагать, что для любого $\mathbf{y} \in Y^o$ найдутся цены факторов $\mathbf{w}$, при которых задача минимизации издержек имеет решение (что, например, будет верным, если выполнены условия приведенной теоремы). Обозначим множество цен факторов, при которых существует решение задачи (C) при объеме выпуска $\mathbf{y}$, через $W(\mathbf{y})$.

Определение 3.13

Функция издержек $c(\cdot)$ — это функция, сопоставляющая значение целевой функции задачи (C) параметрам $\mathbf{w}$ и $\mathbf{y}$; для каждого вектора выпуска $\mathbf{y} \in Y^o$ и вектора цен факторов $\mathbf{w} \in W(\mathbf{y})$ значение $c(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ указывает минимальную величину издержек, при которых в соответствии с данной технологией можно произвести $\mathbf{y}$. $\lhd$

Если технологическое множество задано производственной функцией $y \leqslant f(\mathbf{r})$, то задача ($\mathsf{C}$) примет вид:

$$\mathbf{wr} \to \min_{\mathbf{r}},$$
$$y \leqslant f(\mathbf{r}).$$

Перечислим свойства, которыми обладает функция издержек.

Теорема 3.14 (свойства функции издержек)

Пусть для технологического множества Y определена функция издержек $c(\cdot)$. Тогда она обладает следующими свойствами.

{i} Функция издержек положительно однородна первой степени по ценам факторов:

$$c(\lambda\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \lambda c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \text{ при всех } \lambda > 0,\ \mathbf{y} \in Y^o \text{ и } \mathbf{w} \in W(\mathbf{y}).$$

{ii} Если отображение $V(\cdot)$ монотонно по выпуску, то функция издержек монотонна по ценам.

{iii} Если $V(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n_{++}$ при всех $\mathbf{y} \in Y^o$, то функция издержек монотонна по ценам факторов, т. е. $\mathbf{w}' \geqslant\neq \mathbf{w}$ ($\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W(\mathbf{y})$) влечет $c(\mathbf{w}', \mathbf{y}) > c(\mathbf{w}, \mathbf{y})$.

{iv} Функция издержек вогнута по ценам на любом выпуклом подмножестве множества $W(\mathbf{y})$.

{v} Функция издержек непрерывна по ценам на внутренности множества $W(\mathbf{y})$, т. е. на $\operatorname{int} W(\mathbf{y})$.

{vi} Если технологическое множество Y выпукло, то множество Y^o выпукло и функция издержек выпукла по выпуску.

{vii} Если Y выпукло, то функция издержек непрерывна по выпуску на внутренности множества Y^o. ⌟

Доказательство: Доказательство свойств {i}, {ii} {iv}, {v}, {vi} и {vii} аналогично приведенным ранее и оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 3.58). Докажем только свойство {iii} — монотонность функции издержек по ценам факторов.

Пусть $\mathbf{r}$ — оптимальные затраты при ценах факторов $\mathbf{w}$ и выпуске $\mathbf{y}$, т. е. $\mathbf{wr} = c(\mathbf{w}, \mathbf{y})$. Из $\mathbf{w}' \geqslant\neq \mathbf{w}$ следует, что $c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \mathbf{wr} < \mathbf{w}'\mathbf{r} \leqslant c(\mathbf{w}', \mathbf{y})$, поскольку $\mathbf{r} \in V(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n_{++}$. ■

В дальнейшем нам понадобится также понятие функции условного спроса.

Определение 3.14

Функция условного спроса на факторы производства $\mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ сопоставляет выпуску $\mathbf{y} \in Y^o$ и ценам факторов $\mathbf{w} \in W(\mathbf{y})$ оптимальное решение задачи (C). ◁

Следующая теорема говорит о свойствах функции условного спроса. (Его доказательство аналогично приведенным ранее и оставляется читателю в качестве упражнения; см задачу 3.59.)

Теорема 3.15 (свойства функции условного спроса на факторы)

{i} Функция условного спроса на факторы производства $\mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ положительно однородна нулевой степени как функция цен факторов производства $\mathbf{w}$.

{ii} Если множество $V(\mathbf{y})$ строго выпукло, то $\mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ — (однозначная) непрерывная функция $\mathbf{w}$.

Если, кроме того, функция издержек дифференцируема, то верна следующая лемма Шепарда, связывающая издержки и функцию условного спроса на факторы.

Теорема 3.16 (лемма Шепарда[14])

Если функция издержек дифференцируема по ценам факторов

[14] R. W. Shephard. *Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, 1970.

при объеме производства $\mathbf{y} \in Y^o$, то для всех $\mathbf{w} \in \operatorname{int} W(\mathbf{y})$ выполнено

$$\nabla_{\mathbf{w}} c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) = \mathbf{r}(\mathbf{w}, \mathbf{y})$$

или

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, \mathbf{y})}{\partial w_i} = r_i(\mathbf{w}, \mathbf{y}).$$

┘

Доказательство: Зафиксируем цены факторов на уровне $\tilde{\mathbf{w}}$, где $\tilde{\mathbf{w}} \in \operatorname{int} W(\mathbf{y})$. Введем на $W(\mathbf{y})$ следующую функцию:

$$\gamma(\mathbf{w}) = c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) - \mathbf{w}\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{y}).$$

По определению функции издержек и функции условного спроса $\gamma(\mathbf{w})$ достигает максимума, равного нулю, в точке $\tilde{\mathbf{w}}$:

$$\gamma(\mathbf{w}) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \gamma(\tilde{\mathbf{w}}) = 0.$$

Если функция издержек дифференцируема по ценам факторов, то функция $\gamma(\cdot)$ тоже дифференцируема. Так как точка $\tilde{\mathbf{w}}$ внутренняя в $W(\mathbf{y})$, то по условию первого порядка максимума градиент ее должен быть равен нулю:

$$\nabla\gamma(\tilde{\mathbf{w}}) = \nabla_{\mathbf{w}} c(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{y}) - \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

■

Как отмечалось выше, использование функции издержек позволяет рассматривать максимизацию прибыли как двухэтапную процедуру. На первом этапе по данной технологии и соответствующему множеству требуемых затрат строится функция издержек. На втором этапе решается задача выбора объема производства, максимизирующего прибыль, которая в этом случае рассчитывается как разница между выручкой и издержками:

$$\mathbf{p}\mathbf{y} - c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \to \min_{y \in Y^o}.$$

Здесь через $\mathbf{p}$ мы обозначили цены продукции, а через Y^o, как и ранее, те объемы производства, которые допустимы при данном технологическом множестве. Это один из вариантов записи задачи производителя. Если функция издержек дифференцируема и решение рассматриваемой задачи $\bar{\mathbf{y}}$ является внутренним (т.е. $\bar{\mathbf{y}} \in \operatorname{int} Y^o$), причем для $\mathbf{y}$ из некоторой окрестности $\bar{\mathbf{y}}$ множество $W(\mathbf{y})$ содержит $\mathbf{w}$, то это решение характеризуется следующим условием первого порядка:

$$\frac{\partial c(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{y}})}{\partial y_k} = p_k \text{ для всех k},$$

или (в векторной записи)

$$\nabla_{\mathbf{y}} c(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{p}.$$

Таким образом, оптимальный выпуск характеризуется тем, что предельные издержки равны цене производимого блага.

На основе решения рассматриваемой задачи можно построить функцию (отображение) предложения (предложения продукции). Она указывает оптимальный объем выпуска $\bar{\mathbf{y}}$ как функцию цен продукции $\mathbf{p}$ и цен факторов $\mathbf{w}$.

Обычно функции издержек используют в моделях частного равновесия (в моделях квазилинейных экономик, см. гл. 5).

Задачи

3.45 Покажите, что из выпуклости технологического множества следует выпуклость множеств требуемых затрат. Приведите пример, демонстрирующий, что обратное, вообще говоря, неверно.

3.46 Покажите, что если технологическое множество характеризуется свободой расходования, то для множеств требуемых затрат тоже выполнено аналогичное свойство. Приведите пример, демонстрирующий, что обратное, вообще говоря, неверно.

3.47 Докажите Теорему 3.12.

3.48 Для каждой из приведенных ниже функций определите, может ли она быть функцией издержек для некоторой технологии, и если может, то при каких условиях:

(A) $c(y, \mathbf{w}) = y^{1/2}(w_1 w_2)^{3/4}$;
(B) $c(y, \mathbf{w}) = (y + 1/y)(w^1 w^2)^{1/2}$;
(C) $c(y, \mathbf{w}) = y(w_1 - (w_1 w_2)^{1/2} + w_2)$;
(D) $c(y, \mathbf{w}) = y(w_1 + w_2)$;
(E) $c(y, \mathbf{w}) = y \min\{w_1, w_2\}$.

3.49 Для каждой из приведенных ниже функций определите, при каких параметрах a и b она может быть функцией издержек для некоторой технологии.

(A) $c(y, \mathbf{w}) = y(aw_1 + bw_2)$;
(B) $c(y, \mathbf{w}) = y \min\{aw_1, bw_2\}$;
(C) $c(y, \mathbf{w}) = y w_1^a w_2^b$.

3.50 Множество требуемых ресурсов, соответствующее объему производства y, задается неравенством

$$ar_1 + br_2 \geqslant y^2 \text{ при } a, b > 0.$$

Какой вид имеет соответствующая производственная функция? Постройте функцию издержек.

3.51 Для технологии, описываемой производственной функцией $f(r) = r^\alpha$ ($\alpha \in (0;1)$), вычислите функцию издержек. Покажите, что функция издержек однородна по цене фактора производства и выпукла по выпуску y.

3.52 Найдите функции издержек для следующих производственных функций:

(A) $f(\mathbf{r}) = \prod_i r_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i > 0)$;
(B) $f(\mathbf{r}) = \sum_i a_i r_i^\rho$ $(a_i > 0,\ \rho \in (0;1))$;
(C) $f(\mathbf{r}) = \min\{r_i/a_i\}$ $(a_i > 0)$;
(D) $f(\mathbf{r}) = \sum_i a_i r_i$ $(a_i > 0)$.

3.53 (A) Проверьте, для производственных функций задачи 3.52 локальная эластичность масштаба (см. с. 215) равна частному средних и предельных издержек.

(B) Докажите, что это свойство верно в общем случае.

3.54 Предположим, что предприятие имеет строго вогнутую производственную функцию $f(\mathbf{r})$. Рассмотрите следующие две задачи:

$$\mathbf{wr} \to \min_{\mathbf{r}},$$
$$y^* \leqslant f(\mathbf{r})$$

и

$$f(\mathbf{r}) \to \max_{\mathbf{r}},$$
$$\mathbf{wr} \leqslant c^*.$$

Докажите следующие два утверждения.

(A) Пусть $\mathbf{r}^*$ является решением первой задачи при некотором y^*. Тогда $\mathbf{r}^*$ является решением второй задачи при $c^* = \mathbf{wr}^*$.

(B) Пусть $\mathbf{r}^*$ является решением второй задачи при некотором c^*. Тогда $\mathbf{r}^*$ является решением первой задачи при $y^* = f(\mathbf{r}^*)$.

3.55 Предположим, что предприятие со строго вогнутой производственной функцией $f(\mathbf{r})$ имеет функцию издержек $c(\mathbf{w}, y)$. Докажите, что оптимальный объем производства в следующих двух задачах совпадает:

$$py - \mathbf{wr} \to \max_{y,\mathbf{r}},$$
$$y \leqslant f(\mathbf{r})$$

и

$$py - c(\mathbf{w}, y) \to \max_{y}.$$

3.56 Докажите, что если функция издержек выпукла, то производителю выгоднее производить продукцию, чем закрыться (производить нулевой объем).

3.57 Докажите Теорему 3.13.

3.58 Дайте полное доказательство Теоремы 3.14.

3.59 Докажите Теорему 3.15.

3.60 Пусть функция издержек строго вогнута и, кроме того, $c(\mathbf{w}, 0) = 0$. Докажите, что данная функция издержек была порождена производственной функцией, которая в точках оптимального выбора производителя характеризуется возрастающей отдачей от масштаба.

3.61 Покажите, что если технология характеризуется постоянной отдачей от масштаба, то функция издержек является линейной.

3.62 Покажите, что если множество R выпукло и производственная функция квазивогнутая и неубывающая, то множество Y^o выпукло и функция издержек является выпуклой.

3.63 Покажите, что если множество R выпукло и производственная функция непрерывна и строго вогнута, то множество Y^o выпукло и функция издержек строго выпукла.

3.64 Покажите, что если цены на все выпускаемые фирмой продукты увеличатся пропорционально, то издержки этой фирмы, соответствующие оптимальной технологии, возрастут.

3.65 По аналогии с параграфом 3.4 рассмотрите восстановление множества требуемых затрат. По функции издержек $c(\mathbf{w}, \mathbf{y})$ при некотором фиксированном объеме производства $\mathbf{y} \in Y^o$ можно построить следующее множество:

$$V_c(\mathbf{y}) = \left\{ \mathbf{r} \;\middle|\; \mathbf{wr} \geqslant c(\mathbf{w}, \mathbf{y}) \text{ для всех } \mathbf{w} \geqslant \mathbf{0} \right\}.$$

(А) Объясните, почему множество $V_c(\mathbf{y})$ является выпуклым при любом векторе выпуска $\mathbf{y}$.

(В) Объясните, почему если $W(\mathbf{y}) \subset \mathbb{R}^n_+$, то выполняется следующее свойство, которое можно называть свойством свободы расходования производственных факторов:

$$V_c(\mathbf{y}) = V_c(\mathbf{y}) + \mathbb{R}^n_+,$$

т. е. если $\mathbf{r}$ принадлежит множеству $V_c(\mathbf{y})$ и $\mathbf{r}' \geqslant \mathbf{r}$, то $\mathbf{r}'$ также принадлежит множеству $V_c(\mathbf{y})$.

(C) Докажите, что если исходное множество требуемых затрат $V(\mathbf{y})$ выпукло и удовлетворяет свойству свободы расходования производственных факторов, то $V(\mathbf{y}) = V_c(\mathbf{y})$.

(D) Приведите графические примеры того, что множество требуемых затрат $V(\mathbf{y})$ и восстановленное множество $V_c(\mathbf{y})$ могут не совпадать, если исходное множество $V(\mathbf{y})$ не является выпуклым или не удовлетворяет свойству свободы расходования производственных факторов.

(E) Докажите, что даже если множества $V(\mathbf{y})$ и $V_c(\mathbf{y})$ не совпадают друг с другом, это различие несущественно с точки зрения описания поведения производителя, поскольку $V_c(\mathbf{y})$ порождает ту же самую функцию издержек, что и $V(\mathbf{y})$.

3.6. Агрегирование в производстве

Пусть существует n фирм с технологическими множествами Y_j, $j = 1, \ldots, n$. Зададимся вопросом о том, можно ли найти технологическое множество Y_Σ, такое чтобы производитель с таким технологическим множеством (репрезентативный производитель или агрегированный производитель) демонстрировал в определенном смысле такое же поведение, как и n исходных производителей.

Оказывается, что такое технологическое множество построить очень просто:

$$Y_\Sigma = \sum_{j=1}^{n} Y_j,$$

т. е.

$$Y_\Sigma = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \mathbf{y}_j \;\middle|\; \mathbf{y}_j \in Y_j \right\}.$$

Действительно, верна следующая теорема. (Ее доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 3.66.)

Теорема 3.17

{i} Если при ценах $\mathbf{p}$ технология $\bar{y}_j$ является решением задачи j-го производителя, то технология

$$\bar{\mathbf{y}}_\Sigma = \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathbf{y}}_j$$

является решением задачи агрегированного производителя при тех же ценах.

{ii} Обратно, если $\bar{y}_\Sigma$ является решением задачи агрегированного производителя, то найдутся технологии $\bar{y}_j$, каждая из которых является решением задачи соответствующего производителя. ┘

Как следствие указанного свойства между функциями прибыли существует следующая связь:

$$\pi_\Sigma(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j(\mathbf{p}).$$

Если $f_j(\cdot)$ — производственная функция j-й фирмы, то агрегированная фирма будет иметь производственную функцию $f_\Sigma(\cdot)$, которая получается как значение следующей задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(\mathbf{r}_j) \to \max_{r_j \in R_j},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_\Sigma.$$

Можно показать, что построенная таким образом функция $f_\Sigma(\cdot)$ будет производственной функцией, соответствующей агрегированному технологическому множеству Y_Σ.

Аналогично если $c_j(\cdot)$ — функция издержек j-й фирмы, то агрегированная фирма будет иметь функцию издержек $c_\Sigma(\cdot)$, которая получается как значение следующей задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\mathbf{w}, \mathbf{y}_j) \to \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j^o},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{y}_j = \mathbf{y}_\Sigma.$$

Задачи

3.66 Докажите Теорему 3.17.

3.67 Обоснуйте приведенный в этом параграфе способ агрегирования производственных функций.

3.68 Обоснуйте приведенный в этом параграфе способ агрегирования функций издержек.

3.69 Технологические множества n фирм одинаковы и состоят из двух технологий: $(0;0)$ и $(-1;1)$. Опишите агрегированное технологическое множество Y_Σ. Покажите, что усредненное технологическое множество Y_Σ/n в пределе заполняет весь отрезок между $(0;0)$ и $(-1;1)$ (в том смысле, что для каждой технологии из данного отрезка существует сколь угодно близкая к ней технология из Y_Σ/n).

3.70 Повторите анализ предыдущей задачи для ситуации, когда технологические множества дополнены свободой расходования.

3.71 Технологические множества n фирм одинаковы и заданы неравенствами

$$(y_{j1}+1)^2+(y_{j2}+1)^2 \leqslant 2, \; j=1,\ldots,n.$$

Найдите неравенство, задающее соответствующее агрегированное технологическое множество.

3.72 Технологические множества n фирм одинаковы и заданы неравенствами

$$y_{j1}+y_{j2}^2 \leqslant 0, \; j=1,\ldots,n.$$

Найдите неравенство, задающее соответствующее агрегированное технологическое множество.

3.73 Найдите агрегированную производственную функцию для следующих производственных функций ($j=1,\ldots,n$):

(A) $f_j(r)=\alpha_j r$;
(B) $f_j(r)=\alpha_j \ln(r+1)$;
(C) $f_j(r)=\alpha_j \sqrt{r}$;
(D) $f_j(r)=\alpha_j(1-\exp(-r))$.

3.74 Найдите агрегированную функцию издержек для следующих функций издержек ($j=1,\ldots,n$):

(A) $c_j(w,y)=\alpha_j wy$;
(B) $c_j(w,y)=\alpha_j w(\exp(y)-1)$;
(C) $c_j(w,y)=\alpha_j wy^3$;
(D) $c_j(w,y)=-\alpha_j w\ln(1-y)$.

3.75 Фирма имеет n заводов, издержки производства которых описываются следующими функциями: $c_j(w,y)=\alpha_j wy^2$, $j=1,\ldots,n$. Определите функцию издержек фирмы.

3.76 Фирма имеет два завода, издержки производства которых описываются следующими функциями $c_1(w,y)=\alpha wy^2$, $c_2(\mathbf{y})=\beta wy$. Определите функцию издержек фирмы.

Эта страница должна быть пустой!

Глава 4

Классические (совершенные) рынки. Общее равновесие

4.1. Введение

Анализ классических (совершенных) рынков уместно начать с перечисления характеристик рынков, при наличии которых их называют совершенными или классическими.

- Отсутствие экстерналий — не опосредованных рынком влияний одних экономических субъектов на других. На поведение экономических субъектов поведение других экономических субъектов может влиять только косвенно — через уровни цен и фиксированные денежные трансферты (например, получение потребителем прибыли от принадлежащих ему предприятий).
- Существуют рынки всех благ, от которых зависят полезности потребителей и/или технологические множества производителей.
- Существующие рынки является связными: любое благо можно поменять на любое другое благо.
- Совершенная конкуренция: каждый экономический субъект принимает цены как данные (является ценополучателем, что можно объяснить тем, что он «достаточно мал»).
- Нет издержек сделок, нет «рыночного трения». Цена покупки и цена продажи совпадают.
- Совершенство информации. Уровни цен и характеристики обмениваемых благ известны каждому экономическому субъекту.

Реальные рынки далеки от совершенных рынков, однако их анализ выявляет некоторые эффекты, общие для всех рынков, и предваряет анализ несовершенных. В теоремах благосостояния мы покажем, что совершенный рынок как механизм согласования интересов экономических субъектов приводит к Парето-оптимальным исходам. В последующих главах мы рассмотрим отдельные типы рыночных несовершенств и связанные с ними отклонения равновесий от Парето-оптимальности, т. е. так называемые фиаско рынка.

В начале данной главы на основе материала предыдущих глав (моделей потребителя и производителя) излагается модель экономики в целом и вводится концепция равновесия. Один из параграфов главы посвящен проблеме существования равновесия. Более сложные теоремы существования приведены в приложении. Поскольку этот материал носит в основном технический вспомогательный характер, он может быть опущен без ущерба для понимания дальнейшего материала.

4.2. Классическая модель экономики. Допустимые состояния

Пусть имеются $l \geqslant 1$ благ и $m \geqslant 1$ потребителей. Каждый из потребителей характеризуется неоклассическими предпочтениями $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ на множестве X_i, а также принадлежащими ему **начальными запасами** $\boldsymbol{\omega}_i$. В дальнейшем, как правило, будем предполагать, что предпочтения потребителя представимы функцией полезности $u_i(\cdot)$[1]. Множество X_i — это множество всех тех наборов, которые потребитель (физически) в состоянии потребить. Обычно в микроэкономических моделях множество X_i совпадает с неотрицательным ортантом, т. е. $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Но мы не вводим такой априорной предпосылки, рассматривая и ситуации, когда X_i не совпадает с $\mathbb{R}^l_+$. Например, если одним из благ является досуг, его потребление ограничено бюджетом времени потребителя. Другое ограничение может состоять в том, что потребление тех или иных благ не может быть ниже некоторой положительной пороговой величины («прожиточного минимума»). В ситуации, когда потребители сами создают некоторые блага, последние можно моделировать отрицательными компонентами потребительских наборов.

Далее, пусть в экономике имеется n производителей (фирм), каждый из которых характеризуется технологическим множеством Y_j (множеством векторов чистого выпуска). Технологические множества Y_j в дальнейшем будем часто задавать в виде неявных производственных функций $g_j(\cdot)$. Напомним, что по определению $g_j(\cdot)$ называется неявной производственной функцией, если технология $\mathbf{y}_j$ принадлежит технологическому множеству Y_j тогда и только тогда, когда $g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0$. Как и ранее, с целью упрощения изложения

[1] Если неоклассические предпочтения непрерывны, то в соответствии с теоремой Дебре существует представляющая данные предпочтения непрерывная функция полезности $u_i(\cdot)$ (см. параграф 1.5).

мы будем рассматривать только скалярные неявные производственные функции. Переформулировка рассматриваемых ниже теорем для случая векторных неявных производственных функций (т. е. технологических множеств, задаваемых несколькими ограничениями) не связана с какими-либо концептуальными трудностями.

Таким образом, классическая модель экономики задается следующими компонентами:

- $I = \{1, \ldots, m\}$ — множество потребителей;
- $J = \{1, \ldots, n\}$ — множество производителей (фирм);
- $K = \{1, \ldots, l\}$ — множество товаров (благ);
- $X_i \subset \mathbb{R}^l$ — множество допустимых наборов i-го потребителя;
- $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ — предпочтения i-го потребителя или $u_i(\cdot)$ — функция полезности потребителя ($u_i \colon X_i \to \mathbb{R}$);
- ω_{ik} — начальный (до обмена) запас k-го блага у i-го потребителя;
- $Y_j \subset \mathbb{R}^l$ — технологическое множество (множество допустимых технологий) j-го производителя; $g_j(\cdot)$ — неявная производственная функция ($g_j \colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$).

Для описания состояния экономики используются следующие переменные:

- x_{ik} — потребление i-м потребителем k-го блага ($k \in K$);
- $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{il})$ — потребительский набор i-го потребителя;
- $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ — потребительские наборы всех потребителей;
- y_{jk} — производство j-м производителем k-го блага (это чистый выпуск, т. е. отрицательные компоненты соответствуют затратам);
- $\mathbf{y}_j = (y_{j1}, \ldots, y_{jl})$ — технология j-го производителя;
- $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$ — набор технологий всех производителей.

Набор $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle (\mathbf{x}_i)_{i \in I}, (\mathbf{y}_j)_{j \in J} \rangle$ называют состоянием экономики. Естественно рассматривать не все такие наборы, а только (физически) допустимые состояния экономики.

Определение 4.1

Под **допустимым состоянием экономики** принято понимать такую пару $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, что

* при всех $i \in I$ вектор $\mathbf{x}_i$ является допустимым набором для i-го потребителя (т. е. $\mathbf{x}_i \in X_i$),
* при всех $j \in J$ вектор $\mathbf{y}_j$ является допустимой технологией для j-го производителя (т. е. $\mathbf{y}_j \in Y_j$),

* для экономики в целом выполнены балансы, т. е. общий объем потребления в экономике по каждому благу $k \in K$ равен сумме общего объема производства и суммарных начальных запасов:

$$\sum_{i \in I} x_{ik} = \sum_{i \in I} \omega_{ik} + \sum_{j \in J} y_{jk}.$$

◁

Отметим, что иногда в моделях общего равновесия используются полубалансы, т. е. балансовые ограничения в виде неравенств:

$$\sum_{i \in I} x_{ik} \leqslant \sum_{i \in I} \omega_{ik} + \sum_{j \in J} y_{jk}.$$

При этом строгое неравенство должно означать, что в экономике осталось непотребленное благо. В рамках моделей с балансами в виде равенств возможность «выбрасывать» блага можно моделировать с помощью технологических множеств со свободой расходования по данным благам. В определенном смысле используемый здесь подход является более общим, поскольку позволяет моделировать блага, утилизация которых требует затрат ресурсов (см. задачу 4.89).

Любой механизм координации решений экономических субъектов должен приводить к допустимому состоянию экономики. Анализ экономического механизма включает описание условий, при которых он «работоспособен», и свойств тех допустимых состояний, к которым он может привести. Ниже мы проведем такое исследование для механизма ценовой координации совершенных рынков.

4.3. Общее равновесие (равновесие по Вальрасу)

В этом параграфе вводится понятие общего равновесия (или, более точно, общего конкурентного равновесия)[2] и обсуждаем ту роль, которую играет это понятие в неоклассическом анализе.

[2] Развитие этой модели связано, в частности, с именами Адама Смита, Давида Рикардо, Леона Вальраса, Кеннета Эрроу и Жерара Дебре. См., напр., L. Walras • *Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale*, Lausanne, Paris: Corbaz, 1874-1877 (рус. пер. Л. Вальрас • *Элементы чистой политической экономии или Теория общественного богатства*, М.: Экономика, 2000); L. Walras • *Théorie mathématique de la richesse sociale*, Lausanne: Corbaz, 1883; K. J. Arrow and G. Debreu • Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica* **22** (1954): 265–290; G. Debreu • *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, John Wiley & Sons, 1959 (Cowles Foundation Monograph No. 17).

4.3.1. Субъекты экономики в моделях общего равновесия

Модель потребителя

Ниже через p_k будем обозначать цену k-го блага, а через $\mathbf{p}$ вектор всех цен $(p_1, \ldots, p_l)$. Пусть потребитель $i \in I$ сталкивается с рыночными ценами $\mathbf{p}$ приобретаемых им благ. Как и ранее, предполагаем, что потребитель в соответствии со своими предпочтениями $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$ выбирает наилучший потребительский набор из тех, которые ему доступны, т. е. из потребительских наборов, принадлежащих бюджетному множеству. Под бюджетным множеством понимается множество допустимых потребительских наборов $(\mathbf{x}_i \in X_i)$, удовлетворяющих бюджетному ограничению

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \sum_{k \in K} p_k x_{ik} \leqslant \beta_i,$$

т. е. бюджетное множество имеет вид

$$B_i(\mathbf{p}, \beta_i) = \left\{ \mathbf{x}_i \in X_i \;\middle|\; \mathbf{p}\mathbf{x}_i \leqslant \beta_i \right\}.$$

Здесь $\beta_i = \beta_i(\cdot)$, где $\beta_i(\cdot)$ — функция, задающая доход потребителя. Способ формирования дохода зависит от конкретного варианта экономики. Например, в экономике обмена доход потребителя формируется за счет продажи по рыночным ценам его начальных запасов:

$$\beta_i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i = \sum_{k \in K} p_k \omega_{ik}.$$

В модели классических рынков предполагается, что начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i$, цены, а также доходы из других источников не зависят от выбора потребителя (определяются экзогенно). Другими словами, потребитель считает, что он не влияет на цены (является ценополучателем) и на свою исходную, до торговли, собственность, принимая их как данные. Поэтому при описании выбора потребителя при заданных ценах будем считать, что доходы фиксированы.

Таким образом, набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является выбором потребителя, сталкивающегося с ценами $\mathbf{p}$ и имеющего доход β_i, или, другими словами, спросом потребителя, если

- набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ принадлежит бюджетному множеству, т. е. $\bar{\mathbf{x}}_i \in$ $\in B_i(\mathbf{p}, \beta_i)$;
- любой потребительский набор $\mathbf{x}_i \in X_i$ лучший, чем $\bar{\mathbf{x}}_i$, не принадлежит бюджетному множеству, т. е. $\mathbf{x}_i \succ_i \bar{\mathbf{x}}_i$ влечет $\mathbf{x}_i \notin B_i(\mathbf{p}, \beta_i)$.

Если предпочтения потребителя описываются функцией полезности $u_i(\cdot)$, то его выбор моделируется как решение задачи максимизации функции полезности по $\mathbf{x}_i \in X_i$ при бюджетном ограничении. Таким образом, задача потребителя имеет вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i},$$
$$\mathbf{x}_i \in B_i(\mathbf{p}, \beta_i).$$

При дифференцируемости функций полезности можно охарактеризовать решение задачи потребителя, т. е. оптимальный для данного потребителя набор $\bar{\mathbf{x}}_i$, при помощи теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме[3]. Будем считать, что решение задачи потребителя внутреннее[4], т. е.

$$\bar{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i.$$

Это позволяет не учитывать ограничение $\mathbf{x}_i \in X_i$.

Функция Лагранжа для задачи потребителя имеет вид

$$\mathbb{L}(\mathbf{x}_i, \nu_i) = u_i(\mathbf{x}_i) + \nu_i\left(\beta_i - \sum_{k\in K} p_k x_{ik}\right),$$

где ν_i — множитель Лагранжа для бюджетного ограничения. По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что не все цены равны нулю) существует множитель Лагранжа $\nu_i \geqslant 0$, такой что в оптимуме для всех благ $k \in K$ выполнено $\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}_i, \nu_i)}{\partial x_{ik}} = 0$ или

$$\frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k.$$

Другими словами, градиент функции полезности пропорционален вектору цен:

$$\nabla u_i(\bar{\mathbf{x}}_i) = \nu_i \mathbf{p}.$$

Если предположить, что в решении задачи потребителя $\bar{\mathbf{x}}_i$ не все частные производные функции полезности равны нулю, т. е. $\nabla u_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0}$, то $\nu_i > 0$. Такое решение задачи потребителя может иметь место, только если цены, с которыми он сталкивается, не все

[3] См. Приложение В, параграф В.16.

[4] Напомним, что это означает, что $\bar{\mathbf{x}}_i$ принадлежит X_i вместе с некоторой своей окрестностью.

равны нулю. Исключая множитель Лагранжа, для любых двух благ $k, s \in K$, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{is}}{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik}} = MRS_i^{s/k},$$

где $MRS_i^{s/k}$ — **предельная норма замещения** блага s благом k. Следовательно, решение задачи потребителя характеризуется равенством предельной нормы замещения любых двух благ отношению цен этих благ. Таким образом, мы получили классическую дифференциальную характеристику решения задачи потребителя.

Это одно из условий первого порядка, т. е. необходимое условие максимума. Как мы предположили, градиент не равен нулю, поэтому $\nu_i > 0$ и по условию дополняющей нежесткости теоремы Куна—Таккера получаем, что бюджетное ограничение выходит на равенство:

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \beta_i.$$

Это еще одно условие первого порядка.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое (внутреннее) решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи потребителя, если выполнено дополнительное условие, состоящее в том, что множество X_i выпукло, а функция полезности $u_i(\cdot)$ вогнута[5].

Отдельного рассмотрения требует случай, когда решение задачи потребителя не является внутренним. Пусть, например, $X_i = \mathbb{R}^l_+$ и потребление некоторых благ в решении задачи потребителя может быть равно нулю. Для получения дифференциальной характеристики такого решения опять можно воспользоваться теоремой Куна—Таккера[6]. Получаем, что оптимальный набор для всех $k \in K$ должен удовлетворять условиям $\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} \leqslant 0$, причем $\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = 0$, если $\bar{x}_{ik} > 0$, или

$$\frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} \leqslant \nu_i p_k, \text{ причем } \frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k, \text{ если } \bar{x}_{ik} > 0.$$

[5] Существуют и более слабые наборы условий, гарантирующие, что условия первого порядка приводят к решению задачи потребителя. Обычно они включают выпуклость предпочтений (или квазивогнутость представляющих их функций полезности). Мы привели здесь более сильные условия, чем это необходимо.

[6] Чтобы эти рассуждения были корректными, следует предположить, что функция $u(\cdot)$ определена (и дифференцируема) на открытом множестве, содержащем $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Тогда на границе множества X_i производные определяются стандартным образом.

Модель производителя

При выборе объемов производства $\mathbf{y}_j = (y_{jk})_{k \in K}$ каждая фирма $j \in J$ ограничена своим технологическим множеством Y_j. (Напомним, что здесь речь идет о чистом выпуске, т. е. отрицательные элементы технологии $\mathbf{y}_j$ соответствуют затратам.) В качестве целевой функции «классического» производителя берется его прибыль

$$\pi_j = \mathbf{p}\mathbf{y}_j = \sum_{k \in K} p_k y_{jk}.$$

В ситуации совершенной конкуренции производитель, как и потребитель, не может влиять на цены (является ценополучателем). Таким образом, задача производителя состоит в максимизации прибыли при технологических ограничениях:

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j},$$
$$\mathbf{y}_j \in Y_j.$$

Если технологическое множество задано неявной производственной функцией $g_j(\cdot)$, то задача производителя записывается как

$$\mathbf{p}\mathbf{y}_j \to \max_{\mathbf{y}_j},$$
$$g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0.$$

При дифференцируемости функции $g_j(\cdot)$ решение этой задачи также можно охарактеризовать на основе теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме. Функция Лагранжа для задачи производителя равна

$$\mathbb{L} = \sum_{k \in K} p_k y_{jk} + \kappa_j g_j(\mathbf{y}_j),$$

где κ_j — множитель Лагранжа, соответствующий технологическому ограничению.

По теореме Куна—Таккера (при выполнении условий регулярности, которые в данном случае эквивалентны тому, что $\nabla g_j(\mathbf{y}_j) \neq \mathbf{0}$) существует множитель Лагранжа $\kappa_j \geqslant 0$, такой что в оптимуме выполнены равенства ($k \in K$)

$$\frac{\partial \mathbb{L}(\bar{\mathbf{y}}_j, \kappa_j)}{\partial y_{jk}} = 0,$$

или

$$\kappa_j \frac{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)}{\partial y_{jk}} = p_k.$$

Другими словами, градиент неявной производственной функции пропорционален вектору цен:

$$\kappa_j \nabla g_j(\bar{\mathbf{y}}_j) = \mathbf{p}.$$

Если не все цены равны нулю ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$), то $\kappa_j > 0$. Исключая множитель Лагранжа κ_j, для любых двух благ $k, s \in K$, таких что $p_k \neq 0$, получаем, что

$$\frac{p_s}{p_k} = \frac{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{js}}{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk}} = MRT_j^{s/k},$$

где $MRT_j^{s/k}$ — предельная норма трансформации блага s в благо k. Следовательно, решение задачи производителя характеризуется равенством предельной нормы трансформации любых двух благ отношению цен этих благ. Таким образом, мы получили классическую дифференциальную характеристику решения задачи производителя.

Условия первого порядка задают систему уравнений, любое решение которой по обратной теореме Куна—Таккера является решением задачи производителя, если выполнено дополнительное условие, что функция $g_j(\cdot)$ квазивогнута.

4.3.2. Модели общего равновесия

Теперь модели отдельных экономических субъектов — потребителей и производителей — объединим в модель рынка (экономики) в целом. Такие модели называются моделями общего равновесия.

Модель обмена

В случае, если в экономике производство отсутствует и потребители получают доход только за счет продажи своих начальных запасов, она называется экономикой обмена. Таким образом, экономика обмена характеризуется множеством потребителей, множествами допустимых потребительских наборов потребителей, их предпочтениями и начальными запасами, т. е.

$$\mathcal{E}_E = \left\langle I, (X_i, \succcurlyeq_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{i \in I} \right\rangle.$$

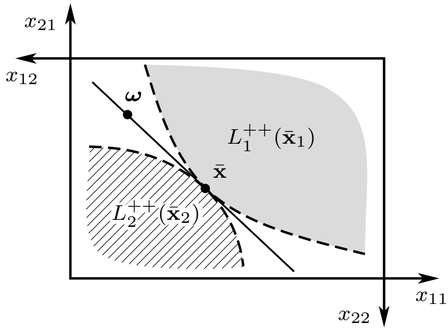


Рис. 4.1. *Геометрическая интерпретация равновесия на диаграмме Эджворта*

Введем определение равновесия для экономики обмена[7].

Определение 4.2

Общим равновесием (равновесием по Вальрасу) в экономике обмена $\mathcal{E}_E$ называется набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$, удовлетворяющий следующим условиям:

* каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя i при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i$;
* $\bar{\mathbf{x}}$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_E$, следовательно, для всякого блага k выполнено равенство

$$\sum_{i \in I} \bar{x}_{ik} = \omega_{\Sigma k},$$

где $\omega_{\Sigma k} = \sum_{i \in I} \omega_{ik}$ — суммарные запасы блага k в экономике. $\triangleleft$

Удобным средством для иллюстрации экономики обмена является диаграмма Эджворта (ящик Эджворта). Эта диаграмма позволяет наглядно представить экономику с двумя потребителями и двумя благами. Обычно предполагается, что множества допустимых потребительских наборов в такой экономике задаются неравенствами

[7] Альтернативный вариант модели предполагает введение в экономику обмена предприятия с технологическим множеством $Y = -\mathbb{R}^l_+$, что позволяет утилизировать «лишние» блага. Очевидно, что определение и свойства равновесия в такой экономике будут, вообще говоря, другими.

$\mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{0}$ и $\mathbf{x}_2 \geqslant \mathbf{0}$. На диаграмме Эджворта потребление первого потребителя (x_{11}, x_{12}) представляется в обычной системе координат, а потребление второго потребителя (x_{21}, x_{22}) — в перевернутой с центром в точке $(\omega_{\Sigma 1}, \omega_{\Sigma 2})$, если смотреть из системы координат первого потребителя. Точка (x_{11}, x_{12}) в первой системе координат совпадет с точкой (x_{21}, x_{22}) во второй системе координат, что позволяет изобразить состояние $\mathbf{x}$ одной точкой на данной диаграмме.

На Рис. 4.1, иллюстрирующем с помощью ящика Эджворта концепцию равновесия, общая для потребителей бюджетная линия в равновесии проходит через точку начальных запасов ω и равновесный вектор $\bar{\mathbf{x}}$. Наклон бюджетной прямой соответствует отношению равновесных цен $\bar{p}_1/\bar{p}_2$. У каждого потребителя множество $L_i^{++}(\bar{\mathbf{x}}_i)$ наборов, которые лучше, чем равновесный набор $\bar{\mathbf{x}}_i$, лежит по соответствующую сторону от бюджетной прямой, так что это множество не имеет общих точек с бюджетным треугольником данного потребителя.

Модель Эрроу—Дебре

Модель Эрроу—Дебре является развитием модели обмена и включает помимо потребителей производственный сектор. Особенностью модели является и то, что в ней специфицированы права собственности потребителей на владение фирмами, производящими продукцию. Таким образом, в модели предполагается, что все предприятия комуто принадлежат, т. е. каждый потребитель i владеет долей $\gamma_{ij} \geqslant 0$ предприятия j, причем $\sum_{i \in I} \gamma_{ij} = 1$.

Наличие производственного сектора влияет и на постановку задачи потребителя, поскольку доход потребителя складывается из того, что он может выручить от продажи начальных запасов, и из его дохода от участия в прибыли. Поэтому доход потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и величинах прибыли π_j равен

$$\beta_i = \sum_{k \in K} p_k \omega_{ik} + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \pi_j.$$

В целом экономика Эрроу—Дебре характеризуется множеством потребителей, множествами допустимых потребительских наборов потребителей, их предпочтениями и начальными запасами, множеством производителей, их производственными множествами и долями потребителей в прибыли фирм, т. е.

$$\mathcal{E}_{AD} = \left\langle I, (X_i, \succcurlyeq_i, \boldsymbol{\omega}_i)_{i \in I}, J, (Y_j)_{j \in J}, (\gamma_{ij})_{i \in I, j \in J} \right\rangle.$$

Определение 4.3

Общим равновесием (равновесием по Вальрасу) в экономике Эрроу—Дебре $\mathcal{E}_{AD}$ называется набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такой что:

* каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя i при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j$;
* каждый вектор $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя j при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_{AD}$, следовательно, для всякого блага k выполнено равенство

$$\sum_{i \in I} \bar{x}_{ik} = \sum_{i \in I} \omega_{ik} + \sum_{j \in J} \bar{y}_{jk}.$$

$\lhd$

Заметим, что условие допустимости состояния $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ означает выполнение балансов, что в контексте общего равновесия интерпретируется как равенство спроса и предложения[8].

Ясно, что экономика обмена является частным случаем экономики Эрроу—Дебре при отсутствии производства, а концепция равновесия в экономике обмена конкретизирует концепцию равновесия для экономики Эрроу—Дебре.

Равновесие экономики с производством удобно иллюстрировать на диаграмме, аналогичной ящику Эджворта (см. Рис. 4.2). Рассматривается экономика с одним потребителем, одним предприятием и двумя благами. Множество $\boldsymbol{\omega} + Y$, состоящее из векторов $\boldsymbol{\omega} + \mathbf{y}$, таких что $\mathbf{y} \in Y$, где $\boldsymbol{\omega}$ — начальные запасы, Y — технологическое множество,— это так называемое множество производственных возможностей экономики. Точка начальных запасов $\boldsymbol{\omega}$ лежит на границе производственных возможностей (в предположении, что $\mathbf{0}$ лежит на границе технологического множества). Вектор $\bar{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} + \bar{\mathbf{y}}$, соответствующий равновесию, тоже лежит на границе производственных

[8] Если бы мы использовали вариант модели, о которой упоминалось выше,— включающий балансы в виде неравенств (полубалансы), то в равновесии спрос мог бы быть ниже предложения. В таком случае определение равновесия потребовалось бы дополнить условием, что цены таких благ равны нулю. Точнее, потребовалось бы включить в определение равновесия *закон Вальраса*:

$$\bar{\mathbf{p}} \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{p}} \Big(\sum_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \bar{\mathbf{y}}_j \Big).$$

В противном случае «потери денег» в экономике приводили бы к существованию нереалистичных равновесий.

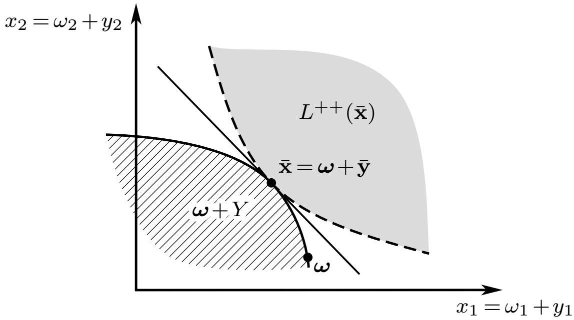


Рис. 4.2. *Геометрическая интерпретация равновесия в экономике с производством*

возможностей. Через этот вектор проходит бюджетная линия потребителя, касаясь как границы производственных возможностей, так и кривой безразличия. Наклон бюджетной прямой соответствует отношению равновесных цен. Множество лучших точек, чем точка $\bar{\mathbf{x}}$, лежит по противоположную сторону бюджетной прямой. Оно не имеет общих точек с бюджетным треугольником.

Экономика с трансфертами

Если в экономике есть фиксированные трансферты (перераспределение доходов между потребителями), то доход потребителя складывается из доходов от продажи начальных запасов, долей в прибыли фирм и трансфертов S_i:

$$\beta_i = \sum_{k \in K} p_k \omega_{ik} + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \pi_j + S_i.$$

Величина трансферта S_i может быть как положительной, так и отрицательной. Предполагается, что S_i не зависит от выбора потребителя. Сумма трансфертов по всем потребителям должна быть равна нулю[9]:

$$\sum_{i \in I} S_i = 0.$$

[9] Это можно интерпретировать как сбалансированность государственного бюджета.

Дадим определение общего равновесия для общей модели **экономики с трансфертами**, задаваемой параметрами

$$\mathcal{E}_T = \left\langle I, (X_i, \succcurlyeq_i, \boldsymbol{\omega}_i, S_i)_{i \in I}, J, (Y_j)_{j \in J}, (\gamma_{ij})_{i \in I, j \in J} \right\rangle.$$

Определение 4.4

Общим равновесием в экономике с трансфертами $\mathcal{E}_T$ называется набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такой что:

* каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя i при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \bar{\mathbf{p}} \bar{\mathbf{y}}_j + S_i$;
* каждый вектор $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя j при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_T$, следовательно, для всякого блага k выполнено равенство

$$\sum_{i \in I} \bar{x}_{ik} = \sum_{i \in I} \omega_{ik} + \sum_{j \in J} \bar{y}_{jk}. \quad \triangleleft$$

Экономика обмена и экономика Эрроу—Дебре являются частными случаями описанной здесь экономики с трансфертами.

Экономика распределения

Следующую модель равновесия[10] для экономики без производства нельзя назвать в полном смысле моделью функционирования рыночной экономики, поскольку доходы потребителей в ней, по существу, формируются государством и совокупные начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ принадлежат государству. (Как вариант можно считать, что $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ — это сумма начальных запасов и заданного экзогенно совокупного чистого выпуска в экономике с производством.) Мы изложим ее в основном для того, чтобы потом использовать в задачах.

В **экономике распределения** (в отличие от экономики обмена) задается вектор совокупных начальных запасов $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и доход R_i каждого потребителя, т. е.

$$\mathcal{E}_D = \left\langle (X_i, u_i(\cdot))_{i \in I}, \boldsymbol{\omega}_\Sigma, (R_i)_{i \in I} \right\rangle$$

Определение 4.5

Под **общим равновесием в экономике распределения** мы будем понимать пару $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}) = \langle \mathbf{p}, (\bar{\mathbf{x}}_i)_{i \in I} \rangle$, такую что:

[10] См. Э. Маленво · *Лекции по микроэкономическому анализу*, М.: Наука, 1985, гл. V, § 2.

* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$,
* каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе R_i,
* состояние $\bar{\mathbf{x}}$ является допустимым, в частности, выполнены балансы по благам, т. е. для всех $k \in K$

$$\sum_{i \in I} \bar{x}_{ik} = \sum_{i \in I} \omega_{ik}.$$

* $\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_\Sigma = \sum_{i \in I} R_i$. ◁

4.3.3. Некоторые свойства общего равновесия

Установим некоторые свойства равновесия, которые нам понадобятся в дальнейшем. При этом речь пойдет об общей модели экономики с производством и трансфертами.

Простейшим свойством общего равновесия является то, что бюджетные ограничения всех потребителей выполняются как равенства. Действительно, сумма доходов потребителей равна

$$\sum_{i \in I} \beta_i = \sum_{i \in I} \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \mathbf{p} \mathbf{y}_j + \sum_{i \in I} S_i =$$
$$= \mathbf{p}\Big(\sum_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j \sum_{i \in I} \gamma_{ij}\Big) = \mathbf{p}\Big(\sum_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \mathbf{y}_j\Big) = \mathbf{p} \sum_{i \in I} \mathbf{x}_i,$$

где последнее равенство («закон Вальраса») является следствием выполнения балансов по благам. Таким образом, сумма доходов всех потребителей равна совокупным потребительским расходам. Это тождество выполняется для любого допустимого состояния экономики при любом векторе цен. Если бы хоть один потребитель не полностью израсходовал свой доход, то, сложив бюджетные ограничения, мы получили бы неравенство

$$\bar{\mathbf{p}} \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i < \sum_{i \in I} \beta_i,$$

и пришли бы к противоречию. Поэтому в равновесии $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}}_i = \beta_i$ для любого потребителя $i \in I$.

В дальнейшем будем использовать также дифференциальные свойства равновесия. Пусть функции полезности и производственные функции дифференцируемы, равновесие является внутренним (по потреблению, т. е. $\bar{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех потребителей $i \in I$), и в точке равновесия для любого потребителя $i \in I$ выполнено

$$\nabla u_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0}.$$

Тогда существуют блага, цены которых не равны нулю. Поскольку для всех $i \in I$ потребительский набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя, а при всех $j \in J$ технология $\bar{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя, то выполняются следующие соотношения, называемые дифференциальной характеристикой равновесия:

$$\frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_k} = \frac{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{is}}{\partial u_i(\bar{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik}} = MRS_i^{s/k}(\bar{\mathbf{x}}_i),$$
$$\frac{\bar{p}_s}{\bar{p}_k} = \frac{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{js}}{\partial g_j(\bar{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk}} = MRT_j^{s/k}(\bar{\mathbf{y}}_j),$$

где k — благо с ненулевой ценой.

Это необходимое условие равновесия. Из него следует, что в равновесии предельные нормы замещения (трансформации) любых двух благ s, k для всех экономических субъектов совпадают. Так, на Рис. 4.1 в точке равновесия кривые безразличия касаются общей бюджетной прямой, а на Рис. 4.2 бюджетной прямой касаются граница производственных возможностей и кривая безразличия.

Другое необходимое условие равновесия, о котором говорилось выше, состоит в том, что бюджетные ограничения всех потребителей выполняются как равенства.

Выполнение этих двух условий для набора $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, где $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики, $\bar{\mathbf{p}}$ — вектор цен, не гарантирует, что этот набор представляет собой равновесие. Необходимые условия требуется дополнить условиями второго порядка, например предположением о вогнутости функций полезности и неявных производственных функций, чтобы превратить их в достаточные. Более подробно эти условия анализируются ниже при доказательстве второй теоремы благосостояния для дифференцируемых функций.

4.3.4. Избыточный спрос

Отображение избыточного спроса $\mathbf{E}(\cdot)$ сопоставляет каждому вектору цен превышение совокупного спроса над совокупным предложением при этих ценах. Можно переформулировать определение равновесия в терминах избыточного спроса, поскольку, как нетрудно понять, в равновесии избыточный спрос должен быть равен нулю. Таким образом, для равновесных цен $\bar{\mathbf{p}}$ выполнено условие $\mathbf{0} \in \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$. В ситуации же, когда избыточный спрос определяется однозначно, равновесные цены удовлетворяют системе уравнений $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$.

Для модели обмена отображение избыточного спроса строится следующим образом. Пусть при ценах $\mathbf{p}$ отображение спроса i-го потребителя есть $\mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \beta_i)$. Так как $\beta_i = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i$, то будем рассматривать спрос как функцию только цен, т. е. $\mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ (в прежних обозначениях $\mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i)$). Тогда избыточный спрос потребителя при этих ценах представляет собой превышение спроса над начальными запасами потребителя при данных ценах. Избыточный спрос для всей экономики есть сумма избыточных спросов всех потребителей. Таким образом, отображение избыточного спроса в модели обмена имеет вид $\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \sum_{i \in I}(\mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_i)$.

Аналогичным образом определяется избыточный спрос в модели Эрроу—Дебре. Кроме начальных запасов и спроса следует учитывать также предложение благ $\mathbf{y}_j(\mathbf{p})$. Спрос потребителя при данных ценах здесь также можно представить в виде $\mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ (в прежних обозначениях $\mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij}\pi_j(\mathbf{p}))$, где $\pi_j(\cdot)$ — функции прибыли фирм).

Определение 4.6

Функцией (отображением) избыточного спроса в модели Эрроу—Дебре называется функция (отображение)

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \sum_{i \in I}\big(\mathbf{x}_i(\mathbf{p}) - \boldsymbol{\omega}_i\big) - \sum_{j \in J}\mathbf{y}_j(\mathbf{p}).$$

Областью определения служит множество таких цен, при которых задачи производителей и потребителей имеют решения. $\lhd$

Убедимся, что равновесными цены $\mathbf{p}$ могут быть тогда и только тогда, когда они удовлетворяют условию $\mathbf{0} \in \mathbf{E}(\mathbf{p})$.

Действительно, пусть $\mathbf{0} \in \mathbf{E}(\mathbf{p})$. Это означает, что существуют потребительские наборы $\bar{\mathbf{x}}_i$ и технологии $\bar{\mathbf{y}}_j$, такие что $\bar{\mathbf{x}}_i \in \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ и $\bar{\mathbf{y}}_j \in \mathbf{y}(\mathbf{p})$, другими словами, для всех $i \in I$ набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи i-го потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij}\mathbf{p}\bar{\mathbf{y}}_j$, для всех $j \in J$ чистый выпуск $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи j-го производителя при ценах $\mathbf{p}$, и выполнено

$$\sum_{i \in I}(\bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i) - \sum_{j \in J}\bar{\mathbf{y}}_j = \mathbf{0}.$$

Значит, $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ по определению является равновесием.

Наоборот, если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие, то $\bar{\mathbf{x}}_i \in \mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{p}})$ для всех $i \in I$, $\bar{\mathbf{y}}_j \in \mathbf{y}(\bar{\mathbf{p}})$ для всех $j \in J$, и

$$\mathbf{0} = \sum_{i \in I}(\bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i) - \sum_{j \in J}\bar{\mathbf{y}}_j \in \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}).$$

Рассмотрим другие свойства избыточного спроса.

Поскольку функции (отображения) спроса и предложения положительно однородны нулевой степени, т. е. при $\alpha > 0$ выполняется

$$\mathbf{x}_i(\alpha\mathbf{p}, \alpha\beta) = \mathbf{x}_i(\mathbf{p}, \beta), \quad \mathbf{y}_j(\alpha\mathbf{p}) = \mathbf{y}_j(\mathbf{p}),$$

то, как несложно проверить, функции (отображения) избыточного спроса также *положительно однородны нулевой степени*:

$$\mathbf{E}(\alpha\mathbf{p}) = \mathbf{E}(\mathbf{p}).$$

Как мы видели, в равновесии выполняется закон Вальраса. Другими словами, в равновесии стоимость избыточного спроса в равновесных ценах равна нулю (поскольку сам избыточный спрос равен нулю). Закон Вальраса, вообще говоря, выполняется не в любой экономике и не при любых ценах. Однако, если предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то отображение избыточного спроса удовлетворяет закону Вальраса. Действительно, для любого вектора цен и любого потребителя с локально ненасыщаемыми предпочтениями выполнено $\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J}\gamma_{ij}\pi_j(\mathbf{p})$ для всех $\mathbf{x}_i \in \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$, т. е. выполнено бюджетное равенство (закон Вальраса для спроса отдельного потребителя). Сложив эти тождественные соотношения, получим $\mathbf{p}\sum_{i \in I}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\sum_{i \in I}\boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{p}\sum_{j \in J}\mathbf{y}_j$ для всех $\mathbf{x}_i \in \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$ и $\mathbf{y}_j \in \mathbf{y}_j(\mathbf{p})$. Таким образом, при любых ценах, для которых определена величина избыточного спроса, если $\mathbf{e} \in \mathbf{E}(\mathbf{p})$, то $\mathbf{p}\mathbf{e} = 0$. Соответственно, если $\mathbf{E}(\cdot)$ — функция, то $\mathbf{p}\mathbf{E}(\mathbf{p}) = 0$ при любых ценах, для которых определена величина избыточного спроса.

В заключение этого параграфа рассмотрим конкретные примеры нахождения равновесий.

Пример 4.1

Рассмотрим экономику с двумя потребителями и двумя благами. Первый потребитель имеет функцию полезности $u_1 = \min\{x_{11}, x_{12}\}$ $(x_{11}, x_{12} \geqslant 0)$ и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_1 = (9; 5)$. Второй потребитель имеет функцию полезности $u_2 = \sqrt{x_{21}} + 2\sqrt{x_{22}}$ $(x_{21}, x_{22} \geqslant 0)$ и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_2 = (6; 5)$.

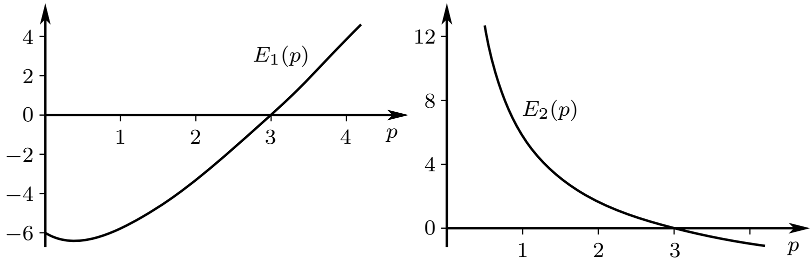


Рис. 4.3. *Избыточный спрос на рынках двух благ — иллюстрация к Примеру 4.1*

Пусть в равновесии $p_1 > 0$. Тогда можно положить $p_1 = 1$ и обозначить $p_2 = p$. Спрос первого потребителя в этих обозначениях имеет вид

$$x_{11}(p) = x_{12}(p) = \frac{9+5p}{1+p}.$$

Спрос второго потребителя

$$x_{21}(p) = \frac{p(6+5p)}{4+p}, \quad x_{22}(p) = \frac{4(6+5p)}{p(4+p)}.$$

В равновесии суммарный спрос равен предложению (т. е. суммарным начальным запасам $\omega_{\Sigma 1} = 9+6 = 15$ и $\omega_{\Sigma 2} = 5+5 = 10$) или, что то же самое, избыточный спрос равен нулю. Избыточный спрос на рынках двух благ равен

$$E_1(p) = \frac{9+5p}{1+p} + \frac{p(6+5p)}{4+p} - 15, \quad E_2(p) = \frac{9+5p}{1+p} + \frac{4(6+5p)}{p(4+p)} - 10.$$

Графики функций избыточного спроса приведены на Рис. 4.3.

При $p = 3$ избыточный спрос (на обоих рынках) равен нулю, т. е. эта цена соответствует равновесию. Без доказательства отметим, что других нулей функции избыточного спроса не имеют. Таким образом, данное равновесие единственное. Оно характеризуется следующими параметрами:

$$\bar{x}_{11} = \bar{x}_{12} = 6, \quad \bar{x}_{21} = 9, \quad \bar{x}_{22} = 4, \quad \bar{p}_1 = 1, \quad \bar{p}_2 = 3.$$

Заметим, что сбалансированность достаточно проверить для одного рынка, поскольку для другого рынка она уже будет следствием закона Вальраса $E_1(p) + E_2(p)p = 0$.

Читателю предлагается проверить самостоятельно, что равновесие не может достигаться при нулевой цене первого блага. ▲

В следующем примере иллюстрируется поиск равновесия в экономике с производством при постоянной отдаче от масштаба.

Пример 4.2

В экономике с двумя потребителями, одной фирмой и двумя благами первый потребитель имеет функцию полезности $u_1 = -(5 - x_{11})^2 - (5 - x_{12})^2$ ($x_{11} \geqslant 0$, $x_{12} \geqslant 0$) и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_1 = (4; 2)$, а второй потребитель — функцию полезности $u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}$ ($x_{21} \geqslant 0$, $x_{22} \geqslant 0$) и начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_2 = (3; 5)$. Производственное множество фирмы задается уравнением $y_1 + 3y_2 \leqslant 0$.

Решение задачи фирмы с таким производственным множеством существует только при соотношении цен $p_1/p_2 = 1/3$. Оптимальное решение задачи фирмы должно лежать на эффективной границе и, следовательно, удовлетворять уравнению $y_1 + 3y_2 = 0$. При этом прибыль равна нулю.

Можно принять $\bar{p}_1 = 1$, $\bar{p}_2 = 3$. При таких ценах, как нетрудно проверить, потребители будут предъявлять следующий спрос:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = (4; 2), \quad \bar{\mathbf{x}}_2 = (9; 3).$$

Для того чтобы на первом рынке спрос был равен предложению, необходимо, чтобы фирма производила $\bar{y}_1 = 4+9-4-3 = 6$. Для производства такого количества первого блага фирма должна затратить две единицы второго блага, т. е. $\bar{y}_2 = -2$. Как и следует ожидать, спрос на втором рынке равен предложению: $2 + 3 = 2 + 5 - 2$. ▲

Задачи

4.1 Укажите наиболее важные черты, по которым рынок называют совершенным или классическим: ◆ от чего зависят предпочтения и потребительские множества, ◆ влияние экономических субъектов на цены, ◆ определенность информации, ◆ влияние издержек сделок, ◆ существование рынков.

4.2 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \min\{x_{i1}, x_{i2}\},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ ($a, b > 0$). Найдите равновесие в этой экономике. При каких условиях оно единственно?

4.3 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, x_{12}\}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21}x_{22},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике. Покажите, что оно единственно.

4.4 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \alpha_1 x_{11} + \beta_1 x_{12}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = \alpha_2 x_{21} + \beta_2 x_{22},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике. Покажите, что оно единственно.

4.5 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}^2 + x_{12}^2, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} + x_{22},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике или докажите, что оно не существует.

4.6 В экономике обмена с двумя товарами и двумя потребителями функции полезности имеют вид

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}x_{12}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{21} + x_{22},$$

начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (0, b)$ $(a, b > 0)$. Найдите равновесие в этой экономике. Покажите, что оно единственно.

4.7 Рассмотрите экономику обмена с двумя товарами и двумя потребителями, которые имеют следующие функции полезности начальные запасы:

$$u_1(x_1, y_1) = -\frac{1}{x_1^2} - \left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{y_1^2}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = (1; 0),$$
$$u_2(x_2, y_2) = -\left(\frac{12}{37}\right)^3 \frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{y_2^2}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = (0; 1).$$

Найдите равновесие в этой экономике. Единственно ли оно?

4.8 ⟦АББ⟧ Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$E_1(p_1, p_2) = -\frac{p_2}{p_1 + p_2}, \quad E_2(p_1, p_2) = -\frac{p_1}{p_1 + p_2}.$$

(А) Является ли она положительно однородной нулевой степени?

(B) Является ли она непрерывной?

(C) Может ли она быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

4.9 ⟦АББ⟧ Пусть функция избыточного спроса имеет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{p}\mathbf{a}}\mathbf{a} - \boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Является ли она положительно однородной нулевой степени? Является ли она непрерывной? Выполняется ли для нее закон Вальраса? Может ли она быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

4.10 Пусть функции избыточного спроса на первые два товара в экономике с тремя благами имеют вид

$$E_1(\mathbf{p}) = -p_1/p_3 + p_2/p_3 + 1 \quad \text{и} \quad E_2(\mathbf{p}) = p_1/p_3 - 2p_2/p_3 + 2.$$

Найдите избыточный спрос на третий товар. Может ли $\mathbf{E}(\cdot)$ быть функцией избыточного спроса для некоторой экономики?

4.11 Пусть в экономике с двумя потребителями обращаются два товара. Функции полезности потребителей имеют вид

$$u_1(x_1, y_1) = x_1^{\alpha} y_1^{1-\alpha} \quad \text{и} \quad u_2(x_2, y_2) = x_2^{\beta} y_2^{1-\beta}.$$

Потребители обладают начальными запасами в размере $\boldsymbol{\omega}_1 = (a, b)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (c, d)$. Найдите равновесие как функцию параметров α, β, a, b, c, d.

4.12 В экономике обмена функции полезности потребителей имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \prod_{k=1}^{l} x_{ik}^{\alpha_{ik}}, \; i = 1, \ldots, m-1, \quad u_m(\mathbf{x}_m) = \sum_{k=1}^{l} x_{mk}.$$

Охарактеризуйте равновесие в этой экономике.

4.13 В экономике обмена непрямые функции полезности потребителей имеют вид

$$v_i(\mathbf{p}, \beta_i) = \ln \beta_i - \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik} \ln p_k, \; i = 1, \ldots, m.$$

Начальные запасы у всех потребителей одинаковы и положительны. Найдите равновесие в этой экономике.

4.14 Предположим, что в экономике обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают.

(А) Гарантирует ли выпуклость предпочтений, что равновесные распределения (если существуют) всегда совпадают с начальными запасами?

(В) Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений, что равновесные распределения (если существуют) всегда совпадают с начальными запасами?

Аргументируйте свой ответ.

4.15 Какими свойствами обладает равновесие в модели обмена с монотонными и строго выпуклыми предпочтениями? Аргументируйте свой ответ.

4.16 Какими свойствами обладает равновесие в модели обмена с монотонными (но, вообще говоря, не строго монотонными) предпочтениями? Аргументируйте свой ответ.

4.17 Покажите, что совпадение предпочтений потребителей, начальных запасов и положительность начальных запасов не гарантируют, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

4.18 Покажите, что совпадение предпочтений потребителей, начальных запасов и выпуклость предпочтений не гарантируют, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

4.4. Существование общего равновесия

При рассмотрении моделей общего равновесия одним из наиболее важных является вопрос о том, существует ли в данной экономике равновесие (равновесия). Ведь если равновесий не существует, то анализ их свойств становится бессмысленным. В этом параграфе мы изложим один из стандартных способов доказательства существования равновесия, делая упор на экономиках обмена. Альтернативные способы доказательства существования равновесия, несколько более сложные, но опирающиеся на более слабые предположения, приведены в приложении к данной главе.

Типичное доказательство существования равновесия основано на демонстрации того факта, что некоторое (подходящим образом построенное) отображение имеет неподвижную точку и что эта неподвижная точка соответствует состоянию равновесия. При этом, как правило, используется теорема Брауэра о существовании неподвижной точки непрерывного отображения некоторого компактного выпуклого множества (обычно — множества цен) в себя, или ее непосредственное обобщение — теорема Какутани.

В наиболее простой версии доказательства построение такого отображения опирается на функцию (отображение) избыточного спроса $\mathbf{E}(\mathbf{p})$, то есть на функцию, показывающую превышение спроса над предложением. (Формальные определения избыточного спроса для различных типов экономик приведены выше.) Рассматривается вопрос о существовании вектора цен $\bar{\mathbf{p}}$, такого что $\mathbf{0} \in \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$ ($\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$, если избыточный спрос является функцией), т. е. такого вектора цен, который уравновешивает спрос и предложение на всех рынках.

Доказательство существования равновесия проводится в два этапа. Сначала доказывается, что те или иные свойства избыточного спроса гарантируют существование равновесия. Далее для экономик различных типов указываются условия (свойства предпочтений и т. д.), которые гарантируют, что избыточный спрос для этих моделей обладает данными свойствами.

В этом параграфе мы рассмотрим условия существования равновесия в экономике обмена, в которой решение задачи каждого потребителя существует и единственно при любом положительном векторе цен благ и, следовательно, $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ является функцией, определенной на множестве положительных цен.

Функции избыточного спроса положительно однородны нулевой степени, поэтому если $\bar{\mathbf{p}}$ — равновесный вектор цен, то $\lambda\bar{\mathbf{p}}$ — также равновесный вектор цен при любом $\lambda > 0$, и наоборот. Значит, равновесный вектор цен определяется с точностью до нормировки цен. Ниже будут описаны ситуации, в которых гарантируется существование равновесия с положительными ценами. Поэтому равновесный вектор цен будем искать в следующем множестве цен (симплексе цен):

$$\mathcal{S}^{l-1} = \left\{ \mathbf{p} \geqslant \mathbf{0} \;\middle|\; \sum_{k \in K} p_k = 1 \right\}.$$

При этом каждому вектору цен $\mathbf{p}$ из $\mathbb{R}^l_+$ (за исключением нулевого вектора) можно однозначно сопоставить вектор $\lambda\mathbf{p}$ из $\mathcal{S}^{l-1}$ при некотором $\lambda > 0$. Этот способ нормировки цен удобен тем, что множество $\mathcal{S}^{l-1}$ компактно и выпукло (что, как мы увидим ниже, позволяет непосредственно использовать теорему Брауэра).

Следующее утверждение носит вспомогательный характер и используется в дальнейшем для доказательства наиболее простого варианта теоремы существования равновесия в модели обмена. Оно указывает свойства функции избыточного спроса $\mathbf{E}(\cdot)$, гарантирующие существование вектора цен, при котором этот избыточный спрос является неположительным, т. е. спрос не превышает предложение.

Теорема 4.1

Предположим, что функция избыточного спроса $\mathbf{E}(\cdot)$ определена на множестве цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$, $\mathbf{p} \neq 0$, непрерывна, положительно однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса, т. е. $\mathbf{pE}(\mathbf{p}) = 0$.

Тогда существует вектор цен $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_+$, $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$, такой что $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \mathbf{0}$.⌟

Доказательство: Определим на множестве $\mathcal{S}^{l-1}$ следующую систему функций для всех благ $k \in K$:

$$g_k(\mathbf{p}) = \frac{p_k + \max\{0, E_k(\mathbf{p})\}}{1 + \sum_{s \in K} \max\{0, E_s(\mathbf{p})\}}.$$

Вектор-функция $\mathbf{g}(\cdot) = (g_k(\cdot))_{k \in K}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Брауэра: она отображает компактное выпуклое множество $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя по построению и является непрерывной, так как основана на операциях, сохраняющих непрерывность. Поэтому существует вектор цен $\bar{\mathbf{p}}$, являющийся неподвижной точкой функции $\mathbf{g}(\cdot)$:

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}}) = \bar{\mathbf{p}},$$

т. е. такой вектор цен $\bar{\mathbf{p}}$, что для всех благ $k \in K$

$$\bar{p}_k = g_k(\bar{\mathbf{p}}) = \frac{\bar{p}_k + \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\}}{1 + \sum_{s \in K} \max\{0, E_s(\bar{\mathbf{p}})\}}.$$

Преобразуя эти равенства, получим

$$\bar{p}_k \sum_{s \in K} \max\{0, E_s(\bar{\mathbf{p}})\} = \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\}.$$

Умножим каждое из этих равенств на $E_k(\bar{\mathbf{p}})$ и сложим:

$$\sum_{k \in K} \bar{p}_k E_k(\bar{\mathbf{p}}) \sum_{s \in K} \max\{0, E_s(\bar{\mathbf{p}})\} = \sum_{k \in K} E_k(\bar{\mathbf{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\}.$$

В соответствии с законом Вальраса первый сомножитель левой части данного соотношения равен нулю, поэтому

$$\sum_{k \in K} E_k(\bar{\mathbf{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\} = 0.$$

Величина $E_k(\bar{\mathbf{p}}) \max\{0, E_k(\bar{\mathbf{p}})\}$ равна либо нулю, либо $(E_k(\bar{\mathbf{p}}))^2$. Поскольку каждое из слагаемых неотрицательно, сумма может быть равна нулю, только если каждое слагаемое равно нулю. Отсюда следует, что для всех $k \in K$ выполнено неравенство $E_k(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant 0$. ■

Использованное в приведенном доказательстве правило пересчета структуры цен, которое заключается в том, что цены $\mathbf{p}$ заменяются на цены $\mathbf{g}(\mathbf{p})$, имитирует возможную реакцию органа, ответственного за ценообразование, на отклонения от равновесия на рынках благ. В соответствии с ним цена дефицитного блага увеличивается на величину, пропорциональную дефициту. Коэффициент пропорциональности выбирается так, чтобы новый вектор цен был элементом множества $\mathcal{S}^{l-1}$.

Рассмотрим теперь, какие условия на предпочтения гарантируют выполнение предположений вышеприведенного утверждения. Предположим, что $X_i = \mathbb{R}^l_+$. Тогда строгая выпуклость и непрерывность предпочтений обеспечивают существование и единственность решения задачи потребителя, а также непрерывность функций избыточного спроса, по крайней мере на множестве строго положительных цен ($\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$). Локальная ненасыщаемость предпочтений гарантирует выполнение закона Вальраса ($\mathbf{pE}(\mathbf{p}) = 0$). Таким образом, обычные предположения относительно предпочтений обеспечивают требуемые (для существования равновесного вектора цен) свойства избыточного спроса, правда, не на всем множестве цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, а только на его подмножестве — векторах положительных цен, тогда как в доказательстве утверждения требуется выполнение аналогичных свойств на множестве всех неотрицательных и не равных нулю цен. Более того, задачи потребителей могут не иметь решения если цены некоторых благ равны нулю. Это значит, что при таких ценах функция избыточного спроса не определена.

В ряде случаев можно обойти это затруднение посредством модификации избыточного спроса таким образом, чтобы

- модифицированный спрос был определен для всех (неотрицательных, не равных нулю) цен;
- обладал свойствами, указанными в теореме;

- совпадал на множестве векторов равновесных цен с фактическим избыточным спросом.

Данный прием позволяет установить простейший вариант теоремы существования равновесия в модели обмена.

Теорема 4.2

Предположим, что в экономике обмена у всех потребителей $X_i = \mathbb{R}^l_+$, предпочтения локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы положительны ($\boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$). Предположим также, что существует потребитель, предпочтения которого строго монотонны. Тогда существует равновесие, такое что $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. ┘

Доказательство: Модифицируем задачу потребителя, введя дополнительно к бюджетному ограничению количественное ограничение (квоту на потребление) по каждому благу $k \in K$ следующего типа:

$$x_{ik} \leqslant \omega_{\Sigma k} + \varepsilon,$$

где $\omega_{\Sigma k}$ — совокупные запасы блага k в экономике, ε — произвольная положительная константа.

Модифицированное таким образом бюджетное множество каждого потребителя оказывается компактным при любом векторе цен $\mathbf{p}$ (с учетом того, что $X_i = \mathbb{R}^l_+$). Следовательно, поскольку предпочтения непрерывны, при любых ценах существует наиболее предпочитаемый потребительский набор. Поскольку предпочтения строго выпуклы, этот набор единственный, и, таким образом, оказываются определенными модифицированные функции спроса $\mathbf{x}^*_i(\mathbf{p})$, а значит, и модифицированная функция избыточного спроса $\mathbf{E}^*(\cdot)$. При этом функция $\mathbf{E}^*(\cdot)$ оказывается непрерывной.

Непрерывность функции $\mathbf{E}^*(\cdot)$ на $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$ доказывается способом, аналогичным доказательству непрерывности функции спроса на множестве цен $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$ (см. пункт {iii} Теоремы 2.2 в гл. 2, с. 109). При этом используется то, что предпочтения потребителей непрерывны и строго выпуклы, а начальные запасы потребителей строго положительны ($\boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$).

Кроме того, по аналогии с обычным спросом, можно доказать, что $\mathbf{E}^*(\cdot)$ положительно однородна нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса. При этом Теорема 4.1 гарантирует существование вектора цен $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_+ \setminus \{\mathbf{0}\}$, при котором выполняется неравенство

$$\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \mathbf{0}.$$

Покажем теперь, что для любого вектора цен $\bar{\mathbf{p}}$, такого что $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \mathbf{0}$, определен избыточный спрос исходной задачи $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$ и выполнено равенство $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$.

Пусть $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \mathbf{0}$. Тогда $\sum_{i\in I} \mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Отсюда следует, что

$$x_{ik}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \omega_{\Sigma k} - \sum_{s\neq i} x_{sk}^*(\bar{\mathbf{p}}) \leqslant \omega_{\Sigma k} < \omega_{\Sigma k} + \varepsilon.$$

С учетом выпуклости предпочтений это означает, что дополнительно введенные нами ограничения несущественны, т. е. для всех потребителей выполнено равенство $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{p}})$. (Если это не так и в бюджетном множестве потребителя i найдется набор $\mathbf{x}_i'$, более предпочтительный, чем $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}})$, то все наборы на внутренней части отрезка, соединяющего $\mathbf{x}_i'$ и $\mathbf{x}_i(\bar{\mathbf{p}})$, также более предпочтительны, чем $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}})$. Но по крайней мере часть данного отрезка принадлежит модифицированному бюджетному множеству, а это противоречит определению $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}})$.) Таким образом[11], $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$.

Так как по предположению теоремы существует потребитель, предпочтения которого строго монотонны, то $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$, т. е. цена любого блага окажется положительной. Действительно, предположение о том, что существует благо k, цена которого равна нулю, противоречит тому факту, что $\mathbf{x}_i^*(\bar{\mathbf{p}})$ является выбором такого потребителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$.

Поскольку $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, из закона Вальраса следует, что $\mathbf{E}^*(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$. Значит, $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$. ■

Заметим, что мы, вообще говоря, не можем использовать прием, состоящий во введении количественных ограничений, в ситуации, когда начальные запасы хотя бы одного из потребителей не содержат хотя бы одного блага. Как показывает приводимый ниже пример, в этом случае модифицированная функция избыточного спроса может не быть непрерывной на границе множества цен.

Пример 4.3

Пусть в экономике обмена есть только два блага ($l = 2$), функции полезности всех потребителей $i \in I$ имеют вид

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = \sqrt{x_{i1}} + \sqrt{x_{i2}},$$

[11] Легко показать, что, наоборот, если $\mathbf{E}(\mathbf{p}) \leqslant \mathbf{0}$ для некоторых цен $\mathbf{p}$, то $\mathbf{E}^*(\mathbf{p}) = \mathbf{E}(\mathbf{p})$. Более того, равенство $\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ влечет $\mathbf{E}^*(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. Это означает, что вектор цен $\mathbf{p}$ является равновесным тогда и только тогда, когда он является равновесным для модифицированной функции избыточного спроса $\mathbf{E}^*(\cdot)$.

а все начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_i = (0; 1)$. Очевидно, что предпочтения рассматриваемых потребителей локально ненасыщаемы, непрерывны и строго выпуклы.

Задача потребителя состоит в том, чтобы максимизировать $u_i(x_{i1}, x_{i2})$ при следующих ограничениях:

$$p_1 x_{i1} + p_2 x_{i2} \leqslant p_2, \quad x_{i1} \geqslant 0, \quad x_{i2} \geqslant 0.$$

При $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ спрос потребителя на второе благо равен

$$x_{i2}(p_1, p_2) = \frac{p_1}{p_1 + p_2}.$$

Таким образом, $x_{i2}(p_1, p_2) \to 1$, когда $p_2 \to 0$. Но если $p_2 = 0$, то полезность можно сделать неограниченно большой, увеличивая x_{i2} (спрос на второе благо бесконечен). Таким образом, спрос на второе благо не определен при $p_2 = 0$.

Покажем, что в такой экономике равновесие не существует. При $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ спрос потребителя на первое благо равен

$$x_{i1}(p_1, p_2) = \frac{p_2^2}{p_1(p_1 + p_2)},$$

т. е. положителен. Значит, при положительных ценах равновесия быть не может, так как в экономике первое благо отсутствует. Если же цена на одно из благ равна нулю, то соответствующий спрос бесконечен и равновесия при этих ценах тоже нет.

Покажем, что модифицированная функция избыточного спроса не является непрерывной. Если $p_1, p_2 > 0$ и цена p_2 достаточно мала, то модифицированный спрос потребителя совпадает с обычным спросом и $x_{i2}(p_1, p_2) \to 1$ при $p_2 \to 0$. Но при $p_1 > 0$ и $p_2 = 0$ модифицированный спрос на второе благо равен $n + \varepsilon$. Таким образом, модифицированный спрос на второе благо не является непрерывным при $p_2 = 0$, а значит, приведенное доказательство существования «не работает». ▲

Если в приведенном примере дать хотя бы одному из потребителей ненулевой запас первого блага, то хотя модифицированный избыточный спрос $\mathbf{E}^*(\cdot)$ по прежнему не будет непрерывным, но равновесие существует. (Читатель может убедиться в этом самостоятельно, см. задачу 4.19.) Таким образом, вышеприведенные условия на избыточный спрос являются довольно ограничительными.

В приложении к данной главе приводится другой вариант теоремы существования (см. Теоремы 4.8 и 4.10), с более слабыми условиями на избыточный спрос. Доказательство этого утверждения состоит в указании правила процесса ценообразования (отличного от описанного выше), имитирующего поведение ценообразующего органа, которое порождает отображение множества цен $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя, удовлетворяющее теореме Какутани (о существовании неподвижной точки многозначного отображения компактного выпуклого множества в себя).

Обсудим теперь вопрос о том, как использовать те же приемы и полученные результаты для экономики с производством. Чтобы избыточный спрос являлся непрерывной функцией, требуется сделать определенные предположения относительно технологий. Выше мы установили условия, при которых совокупный спрос потребителя является непрерывной функцией. Если, в дополнение к этим условиям, технологическое множество каждого производителя является строго выпуклым, то как предложение, так и совокупный избыточный спрос также будут непрерывными функциями. В случае, когда технологические множества представляются производственными функциями, можно предположить строгую вогнутость последних. Характерным примером этого типа функций является функция Кобба—Дугласа.

Вообще говоря, для многих «типичных» функций полезности и производственных функций спрос и предложение являются точечно-множественными отображениями, а не функциями (прежде всего если рассматривать их на более широком множестве, чем множество положительных цен). Поэтому подход, основанный на функциях избыточного спроса, который мы обсуждали выше, имеет не очень широкую область приложимости. Возможно заменить предположения о строгой выпуклости предпочтений и технологических множеств на предположения о выпуклости, если применить другой, более прямой подход (см. Теоремы 4.13 и 4.14 в приложении к данной главе). Он приводит к более длинному доказательству, но зато является более элегантным и расширяет область приложимости теорем существования.

И наконец, выполнение условий теоремы Какутани для отображений, построенных на основе функций избыточного спроса, можно гарантировать лишь при достаточно сильных предположениях относительно предпочтений потребителей, начальных запасов и технологических множеств производителей. Поэтому при установлении условий существования равновесия используются различные модификации функций избыточного спроса, концепций равновесия и т. д. Некоторые приемы такого такого анализа условий существования равновесий также приведены в приложении.

Задачи[12]

4.19 Пусть в ситуации, описанной в Примере 4.3, начальные запасы всех потребителей имеют вид $\boldsymbol{\omega}_i = (a, 1)$, где $a > 0$.

(A) Покажите, что модифицированный спрос $\mathbf{E}^*(\cdot)$ не является непрерывным.

(B) Покажите, что в такой экономике равновесие существует.

4.20 Можно ли утверждать, что в экономике обмена, в которой функции полезности имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{l} x_{ik}^{\alpha_{ik}},$$

а начальные запасы равны $\omega_{ik} = i \cdot k$, равновесие существует? Аргументируйте свой ответ.

4.21 Пусть в экономике обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ, дав доказательство существования равновесия либо приведя пример отсутствия равновесия.

4.22 Пусть в экономике обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений существование равновесия? Аргументируйте свой ответ, дав доказательство существования равновесия либо приведя пример отсутствия равновесия.

4.23 Покажите, что в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями, описываемыми функциями полезности

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = x_{11}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22},$$

и с начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_1 = (1; 1)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (\alpha, 1)$ при $\alpha \geqslant 0$ равновесие существует тогда и только тогда, когда $\alpha \neq 0$. Какие условия известной вам теоремы существования равновесия нарушаются в случае, когда равновесие не существует?

[12] Часть задач относится к материалу из приложения к данной главе.

4.24 Покажите, что в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями, предпочтения которых описываются функциями полезности

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = \min\{x_{11}, x_{12}\}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = x_{22},$$

не существует равновесия при начальных запасах $\boldsymbol{\omega}_1 = (0, \gamma)$ $(\gamma \geqslant 0)$ и $\boldsymbol{\omega}_2 = (\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha < \beta)$. Какие условия известной вам теоремы существования равновесия здесь нарушаются?

4.25 Рассмотрите экономику с l благами и m потребителями, функции полезности которых имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_{ik}\sqrt{x_{ik}}, \ \alpha_{ik} \geqslant 0.$$

При каких начальных запасах известные вам утверждения (какие?) гарантируют существование равновесия в такой экономике?

4.26 В экономике обмена только два блага $(l = 2)$, функции полезности всех потребителей i имеют вид

$$u_i(x_i^1, x_i^2) = \sqrt{x_i^1} + \sqrt{x_i^2},$$

а начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_i = (0; 1)$. Вычислите квазиравновесия в этой модели.

4.27 Рассмотрите экономику с l благами и m потребителями, предпочтения которых представляются функциями полезности Кобба—Дугласа, а начальные запасы положительны. При каких начальных запасах известные вам утверждения (какие?) гарантируют существование равновесия в такой экономике?

4.28 Рассмотрите экономику с четырьмя благами и четырьмя потребителями, функции полезности которых имеют вид

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}_i) &= \min\{x_{i1}, x_{i2}\}, \ i = 1, 2, \\ u_3(\mathbf{x}_3) &= x_{31} + \min\{x_{33}, x_{34}\}, \\ u_4(\mathbf{x}_4) &= x_{42} + \min\{x_{43}, x_{44}\}. \end{aligned}$$

Начальные запасы имеют вид $\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{e}^i$ (i-й орт). Охарактеризуйте все квазиравновесия, в которых не все цены равны нулю. Какие из них не являются равновесиями?

4.29 Рассмотрите экономику с четырьмя благами и четырьмя потребителями, функции полезности которых имеют вид

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \min\{x_{i1}, x_{i2}\},\ i = 1, 2,$$
$$u_i(\mathbf{x}_i) = \min\{x_{i3}, x_{i4}\},\ i = 3, 4,$$

Первый потребитель имеет по единице первого и третьего блага, второй — по единице второго и четвертого. У остальных потребителей нет начальных запасов. Охарактеризуйте все квазиравновесия, в которых не все цены равны нулю, и покажите, что ни одно из них не является равновесием.

4.30 Рассмотрите экономику Эрроу—Дебре, в которой все продукты производятся на основе первичных факторов, принадлежащих потребителям, причем совокупные запасы этих факторов положительны. Предположите, что каждая фирма является однопродуктовой, ее технология описывается производственной функцией Кобба—Дугласа, а также что каждый продукт производится какой-то фирмой.

(A) Убедитесь, что все технологические множества выпуклы, замкнуты и обладают свойством допустимости бездеятельности.

(B) Убедитесь, что совокупное технологическое множество $Y_\Sigma = \sum_{j \in J} Y_j$ обладает свойствами отсутствия рога изобилия и необратимости.

(C) Какие дополнительные условия гарантируют существование квазиравновесия (равновесия) в такой экономике?

4.31 Предположим, что $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, $\bar{\mathbf{p}} \geqslant \mathbf{0}$, $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$, $X_i = \mathbb{R}^l_+$, предпочтения потребителей строго выпуклы, непрерывны и монотонны. Пусть также $\mathbf{0} \in Y_j$, $\boldsymbol{\omega}_i \geqslant \mathbf{0}$, $\sum_{i=1}^m \boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$. Покажите, что это квазиравновесие является равновесием по Вальрасу.

4.5. Парето-оптимальные состояния экономики и их характеристики

В неоклассической экономической теории тот или иной механизм координации решений экономических субъектов (например, рыночный механизм) принято оценивать на основе результатов его работы, т. е. характеристик тех состояний экономики, к которым он приводит, безотносительно к самому по себе процессу координации. В духе традиции методологического индивидуализма считается, что подобная оценка состояний экономики должна строиться на основе оценок составляющих ее индивидуумов.

Но при сравнении состояний экономики возникает следующая трудность. Если мы рассматриваем отдельного индивидуума, то можем судить об экономической эффективности выбора по тому уровню благосостояния, который является результатом выбора. Однако реально в экономике взаимодействует большое число индивидуумов, и их интересы зачастую не совпадают. Если сравнивать два состояния экономики — S_1 и S_2, то для одного индивидуума S_1 может быть предпочтительнее, чем S_2, а для другого наоборот. Только если мнения всех индивидуумов совпадут, имеет смысл говорить о том, что одно состояние *с точки зрения данного сообщества в целом* предпочтительнее другого и, следовательно, это другое состояние не является эффективным. Данный тезис лежит в основе критерия оптимальности состояния экономики, сформулированного В. Парето.[13].

Ясно, что критерий Парето является довольно слабым, поскольку не позволяет сравнивать между собой те состояния, которые не улучшаемы по Парето. Кроме того, критерий Парето игнорирует такие волнующие большинство людей соображения, как равенство и справедливость.

Как бы то ни было, понятие эффективности (оптимальности) по Парето является одним из ключевых в экономической теории, в других общественных науках, а также в теории игр. Оптимальность по Парето — это важный критерий для оценки функционирования экономических систем и результатов экономической политики. Таким образом, в связи с анализом рыночного равновесия представляет интерес вопрос о том, является ли равновесие эффективным, т. е. принадлежит ли оно границе Парето.

Определение 4.7

Допустимое состояние экономики $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ является Парето-улучшением для допустимого состояния $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или, другими словами, доминирует его по Парето, если для каждого потребителя $i \in I$ выполнено $\tilde{\mathbf{x}}_i \succcurlyeq_i \mathbf{x}_i$ и существует хотя бы один потребитель i_0 для которого $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \mathbf{x}_{i_0}$.

Допустимое состояние экономики $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ называется Парето-оптимальным, если для него не существует Парето-улучшений. $\lhd$

Множество оптимальных по Парето состояний экономики обра-

[13] V. Pareto. *Manuele di economia politica*, Milan: Societa Editrice Libaria, 1906.

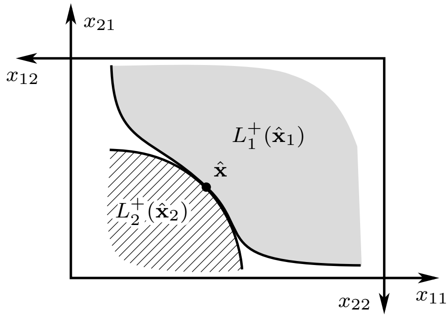


Рис. 4.4. *Иллюстрация Парето-оптимальности на ящике Эджворта*

зует границу Парето. Будем в дальнейшем обозначать ее $\mathcal{P}$.

Проиллюстрируем понятие оптимальности по Парето с помощью диаграммы Эджворта (см. Рис. 4.4). Парето-оптимальность состояния $\hat{\mathbf{x}}$ равносильна тому, что множества $L_1^+(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\mathbf{x}}_2)$ не имеют общих точек и множества $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^+(\hat{\mathbf{x}}_2)$ не имеют общих точек на ящике Эджворта. Здесь $L_i^+(\hat{\mathbf{x}}_i)$ — множество потребительских наборов, которые не хуже для потребителя i, чем набор $\hat{\mathbf{x}}_i$, а $L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i)$ — множество потребительских наборов, которые лучше, чем набор $\hat{\mathbf{x}}_i$. Для оптимальности достаточно, чтобы множества $L_1^+(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^+(\hat{\mathbf{x}}_i)$ имели только одну общую точку — $\hat{\mathbf{x}}$.

4.5.1. Характеризация границы Парето через задачу максимизации взвешенной суммы полезностей

Для нахождения границы Парето, удобно пользоваться вспомогательной задачей. Сопоставим каждому из потребителей коэффициент $\alpha_i \geqslant 0$, так чтобы $\sum_{i\in I}\alpha_i = 1$, и рассмотрим следующую задачу максимизации взвешенной суммы полезностей на множестве допустимых состояний экономики:

Задача нахождения оптимума Парето

$$\begin{gathered}\sum_{i\in I}\alpha_i u_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x},\mathbf{y}},\\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{E}.\end{gathered} \qquad (\mathcal{P}^\alpha)$$

Здесь $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathcal{E}$ означает, что $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — допустимое состояние экономики $\mathcal{E}$. Чтобы показать связь этой задачи с Парето-границей, введем вспомогательное понятие слабой Парето-границы.

Определение 4.8

Допустимое состояние экономики $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ является строгим Парето-улучшением для допустимого состояния $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или, другими словами, строго доминирует его по Парето, если для каждого потребителя $i \in I$ выполнено $\tilde{\mathbf{x}}_i \succ_i \mathbf{x}_i$.

Допустимое состояние экономики $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, если не существует другого допустимого состояния, которое строго доминирует его по Парето. $\triangleleft$

Слабую границу Парето будем обозначать $\mathcal{WP}$.

Очевидно, что по определению обычная (сильная) граница Парето $\mathcal{P}$ всегда содержится в слабой границе Парето $\mathcal{WP}$, т. е. $\mathcal{P} \subset \mathcal{WP}$.

Теорема 4.3

{i} Если $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — решение задачи $(\mathcal{P}^{\alpha})$, то $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, а если, кроме того, $\alpha_i > 0$ при всех $i \in I$, то $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит (сильной) границе Парето.

{ii} Пусть множества X_i выпуклы, функции полезности $u_i(\cdot)$ вогнуты, технологические множества Y_j выпуклы. Тогда если $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, то найдутся такие неотрицательные коэффициенты α_i ($\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$), что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи $(\mathcal{P}^{\alpha})$. $\lrcorner$

Доказательство: {i} Предположим, что существует решение задачи $(\mathcal{P}^{\alpha})$, $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$, которое не принадлежит слабой границе Парето. Тогда найдется такое допустимое состояние $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, что $u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) > u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$ для всех $i \in I$. При этом значение целевой функции задачи $(\mathcal{P}^{\alpha})$ будет больше в точке $\tilde{\mathbf{x}}$, чем в точке $\hat{\mathbf{x}}$, а это противоречит тому, что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — решение задачи $(\mathcal{P}^{\alpha})$. Доказательство для случая положительных коэффициентов и обычной (сильной) границы Парето полностью аналогично.

{ii} Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето. Введем обозначение

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}_1), \ldots, u_n(\mathbf{x}_n))$$

и рассмотрим следующее множество:

$$U^{-} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \exists (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{E} \colon \mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) \right\}.$$

Множество U^- непусто, так как $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) \in U^-$. Покажем, что U^- — выпуклое множество. Пусть $\mathbf{v}' \in U^-$ и $\mathbf{v}'' \in U^-$. Это означает, что существуют допустимые состояния экономики $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ и $(\mathbf{x}'', \mathbf{y}'')$, такие что $\mathbf{v}' \leqslant \mathbf{u}(\mathbf{x}')$ и $\mathbf{v}'' \leqslant \mathbf{u}(\mathbf{x}'')$. Выпуклая комбинация этих состояний,

$$(\beta\mathbf{x}' + (1-\beta)\mathbf{x}'', \beta\mathbf{y}' + (1-\beta)\mathbf{y}''), \text{ где } \beta \in [0;1],$$

является допустимым состоянием экономики. Так как $u_i(\cdot)$ — вогнутые функции, то

$$\mathbf{u}(\beta\mathbf{x}' + (1-\beta)\mathbf{x}'') \geqslant \beta\mathbf{u}(\mathbf{x}') + (1-\beta)\mathbf{u}(\mathbf{x}'').$$

Это означает, что $\beta\mathbf{v}' + (1-\beta)\mathbf{v}'' \leqslant \mathbf{u}(\beta\mathbf{x}' + (1-\beta)\mathbf{x}'')$, т. е. выпуклая комбинация точек из U^- тоже принадлежит U^-:

$$\beta\mathbf{v}' + (1-\beta)\mathbf{v}'' \in U^- \text{ при } \beta \in [0;1].$$

Множество $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++} = \{\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} > \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}_i) \,\}$ также является непустым и выпуклым.

Так как $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето, то рассмотренные множества не имеют общих точек:

$$U^- \cap (\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}) = \varnothing.$$

В противном случае мы нашли бы допустимое состояние экономики, в котором каждый потребитель имел бы бóльшую полезность, чем в $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$. По теореме отделимости[14] существует разделяющая эти два множества гиперплоскость, т. е. существуют вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ и число b, такие что

$$\mathbf{av} \leqslant b \text{ при } \mathbf{v} \in U^-$$

и

$$\mathbf{av} \geqslant b \text{ при } \mathbf{v} \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}.$$

Покажем, что $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}$. Предположим, что существует потребитель i, для которого $a_i < 0$. Тогда если $\mathbf{v} \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, то $\mathbf{v} + t\mathbf{e}^i \in \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$, где t — положительное число, а $\mathbf{e}^i$ — i-й орт. Мы всегда можем подобрать достаточно большое t, чтобы выполнялось $\mathbf{a}(\mathbf{v} + t\mathbf{e}^i) < b$, а это противоречит тому, что $\mathbf{v} + t\mathbf{e}^i \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$.

Рассмотрим последовательность $\mathbf{v}^N = \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + 1/N \cdot \mathbb{1}$, где $\mathbb{1}$ — вектор, состоящий из единиц. Поскольку $\mathbf{v}^N \in \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$ $\forall N$, то $\mathbf{av}^N \geqslant b$. Переходя к пределу, получим $\mathbf{au}(\hat{\mathbf{x}}) \geqslant b$. В то же время, $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) \in U^-$ и $\mathbf{au}(\hat{\mathbf{x}}) \leqslant b$. Следовательно, $\mathbf{au}(\hat{\mathbf{x}}) = b$.

[14] См. Теорему B.41 на с. II-644 в Приложении B.

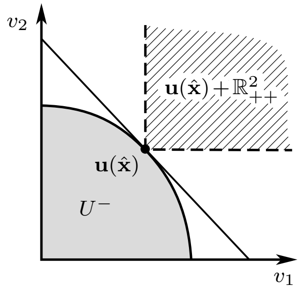


Рис. 4.5. *Иллюстрация к доказательству пункта* {ii} *Теоремы 4.3*

Таким образом, мы доказали существование гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$, с коэффициентами $\mathbf{a} \geqslant\neq \mathbf{0}$, которая проходит через $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})$ и разделяет множества U^- и $\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbb{R}^n_{++}$ (см. Рис. 4.5). Возьмем в качестве коэффициентов α_i нормированные коэффициенты a_i:

$$\alpha_i = \frac{a_i}{\sum_{j\in I} a_j}.$$

Не существует допустимого состояния $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, такого что

$$\sum_{i\in I} \alpha_i u_i(\mathbf{x}_i) > \sum_{i\in I} \alpha_i u_i(\hat{\mathbf{x}}_i).$$

Действительно, для такого состояния выполнено $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in U^-$, откуда $\mathbf{a}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{a}\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})$. Разделив это неравенство на $\sum_{i\in I} a_i$, получим $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}(\mathbf{x}) \leqslant \boldsymbol{\alpha}\mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})$. Это означает, что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$. ■

Из доказанной теоремы следует, что множество решений задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$ при неотрицательных коэффициентах совпадает со слабой границей Парето и, следовательно, содержит в себе границу Парето. В то же время, множество решений задачи $(\mathcal{P}^\alpha)$ при положительных коэффициентах содержится в границе Парето. Другими словами, эта задача позволяет получить для границы Парето оценки сверху и снизу. Кроме того, если сильная и слабая границы Парето совпадают, то задача $(\mathcal{P}^\alpha)$ полностью характеризует границу Парето. Следующая теорема предлагает возможные условия, при которых такое совпадение имеет место.

Теорема 4.4

{i} Если предпочтения каждого потребителя заданы на $X_i = \mathbb{R}^l_+$, строго монотонны и непрерывны, то сильная граница Парето совпадает со слабой: $\mathcal{P} = \mathcal{WP}$.

{ii} Если предпочтения каждого потребителя заданы на $X_i = \mathbb{R}^l_+$, являются полустрого монотонными[15], непрерывными и выпуклыми, то все состояния экономики, принадлежащие слабой границе Парето, в которых потребительские наборы содержат все блага в положительных количествах, также принадлежат и сильной границе Парето. ┘

Доказательство: {i} Поскольку $\mathcal{P} \subset \mathcal{WP}$, то достаточно показать, что $\mathcal{WP} \subset \mathcal{P}$. Пусть это не так, т. е. существует допустимое состояние $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$, принадлежащее слабой границе Парето, но не сильной. Поскольку $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$ не принадлежит границе Парето, существует другое допустимое состояние $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, такое что для всех потребителей $\tilde{\mathbf{x}}_i \succcurlyeq_i \check{\mathbf{x}}_i$ и $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \check{\mathbf{x}}_{i_0}$ хотя бы для одного потребителя $i_0 \in I$.

Из строгой монотонности следует, что $\check{\mathbf{x}}_{i_0} \succcurlyeq_{i_0} \mathbf{0}$, поэтому $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}$ не может быть нулевым вектором. Следовательно, потребитель i_0 потребляет хотя бы одно благо k в положительном количестве: $\tilde{x}_{i_0 k} > 0$. Пусть $\mathbf{e}^k$ — k-й орт (вектор, где на k-м месте стоит единица, а на остальных местах — нули). Рассмотрим следующую последовательность перераспределений ($N = 1, 2, \ldots$):

$$\dot{\mathbf{x}}_{i_0}(N) = \tilde{\mathbf{x}}_{i_0} - \frac{1}{N}\mathbf{e}^k \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{x}}_i(N) = \tilde{\mathbf{x}}_i + \frac{1}{N(N-1)}\mathbf{e}^k \text{ при } i \neq i_0.$$

По свойству строгой монотонности при любом N имеем $\dot{\mathbf{x}}_i(N) \succ_i$ $\succ_i \tilde{\mathbf{x}}_i(N)$ для $i \neq i_0$. Кроме того, для потребителя i_0 найдется достаточно большой номер $\bar{N}$, такой что набор $\dot{\mathbf{x}}_{i_0}(\bar{N})$ допусти́м и (по свойству непрерывности предпочтений) $\dot{\mathbf{x}}_{i_0}(\bar{N}) \succ_{i_0} \check{\mathbf{x}}_{i_0}$.

Таким образом, мы нашли допустимое распределение $(\dot{\mathbf{x}}_{i_0}(\bar{N}), \tilde{\mathbf{y}})$ которое строго доминирует допустимое распределение $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$, чего быть не может, так как? по предположению, $(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$ принадлежит слабой границе Парето.

{ii} Доказательство второй части теоремы оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 4.34). ■

[15] Предпочтения называются полустрого монотонными, если они монотонны и из $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

4.5.2. Дифференциальная характеристика границы Парето

Переформулируя определение Парето-оптимальности, можно утверждать, что $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является Парето-оптимумом, если полезность ни для одного из потребителей нельзя увеличить, не уменьшая полезность для остальных потребителей (при том ограничении, что рассматриваются только допустимые состояния). Такая формулировка подсказывает следующую характеристику Парето-оптимальных состояний: для того чтобы состояние $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ было Парето-оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось решением следующих оптимизационных задач для всех $i_0 \in I$:

$$\begin{gathered}
u_{i_0}(\mathbf{x}_{i_0}) \to \max_{(\mathbf{x},\mathbf{y})}, \\
u_i(\mathbf{x}_i) \geqslant \hat{u}_i = u_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \ \forall i \in I, i \neq i_0, \\
\mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I, \\
g_j(\mathbf{y}_j) \geqslant 0 \ \forall j \in J, \\
\sum_{i \in I}(x_{ik} - \omega_{ik}) = \sum_{j \in J} y_{jk} \ \forall k \in K.
\end{gathered} \tag{$\mathcal{P}_{i_0}$}$$

Рассмотрим одну из таких задач для произвольного потребителя i_0 и в предположении, что состояние экономики $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ внутреннее в том смысле, что $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ при всех $i \in I$ и что функции полезности и производственные функции дифференцируемы, применим к ней теорему Куна—Таккера[16]. Соответствующий лагранжиан имеет вид (с точностью до постоянных слагаемых)

$$\mathbb{L} = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(\mathbf{x}_i) + \sum_{j \in J} \mu_j g_j(\mathbf{y}_j) + \sum_{k \in K} \sigma_k \Big(\sum_{j \in J} y_{jk} - \sum_{i \in I}(x_{ik} - \omega_{ik})\Big).$$

Согласно теореме Джона найдутся множители Лагранжа $\lambda_i \geqslant 0$ $(i \in I)$, $\mu_j \geqslant 0$ $(j \in J)$ и σ_k $(k \in K)$, такие что в точке $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ производные функции Лагранжа по всем x_{ik} и y_{jk} равны нулю:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{ik}} = \lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} - \sigma_k = 0 \ \forall i, k, \\
\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y_{jk}} = \mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0 \ \forall j, k.
\end{gathered}$$

Предположим, что в рассматриваемом состоянии $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ градиенты всех функций полезности и производственных функций не равны

[16] См. Приложение В, параграф В.16.

нулю. Другими словами, мы предполагаем, что для каждого потребителя i найдется благо k, такое что $\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik} \neq 0$, и что для каждого производителя j найдется благо k, такое что $\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk} \neq 0$. Эти предположения гарантируют выполнение условий регулярности теоремы Куна—Таккера.

Для проверки выполнения условий регулярности нужно убедиться, что градиенты всех активных ограничений (т. е. выполняющихся в рассматриваемом Парето-оптимальном состоянии как равенства) линейно независимы. Для этого достаточно показать, что градиенты всех, а не только активных, ограничений линейно независимы. Для доказательства этого факта проводится проверка ранга матрицы градиентов ограничений: записав структуру матрицы, следует убедиться что если линейная комбинация ее строк равна нулю, то все коэффициенты линейной комбинации нулевые. Мы здесь опускаем эту проверку (см. задачу 4.37).

Теорема Куна—Таккера утверждает, что можно выбрать множитель Лагранжа λ_{i_0} равным единице.

Из $\lambda_{i_0} = 1$ и из того, что существует благо k_0, такое что $\partial u_{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{i_0})/\partial x_{i_0 k_0} \neq 0$, следует, что $\sigma_{k_0} > 0$. Следовательно, как нетрудно проверить, из условий первого порядка следует, что все $\lambda_i > 0$ $(i \in I)$ и $\mu_j > 0$ $(j \in J)$.

Отсюда, исключая коэффициенты λ_i и μ_j, получим дифференциальную характеристику внутренних Парето-оптимальных состояний:

$$\frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik}}{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}},$$
$$\frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk}}{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)/\partial y_{jk_0}} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{k_0}}.$$

Она означает совпадение предельных норм замещения (трансформации) любых двух товаров k, k_0 $(\sigma_{k_0} > 0)$ для всех экономических субъектов. Так, на приведенном выше Рис. 4.4 (с. 291) кривые безразличия двух потребителей касаются друг друга.

Чтобы получить достаточные условия Парето-оптимальности внутреннего состояния экономики, можно воспользоваться обратной теоремой Куна—Таккера в применении к задачам $(\mathcal{P}_{i_0})$. Для всех таких задач условия $\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{ik}} = 0$ и $\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial y_{jk}} = 0$ приводят к уравнениям одного и того же вида:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{ik}} = \sigma_k, \quad \mu_j \frac{\partial g_j}{\partial y_{jk}} = -\sigma_k.$$

Для каждой из задач нам требуется, чтобы $\lambda_{i_0} = 1$ или, что эквивалентно, $\lambda_{i_0} > 0$. Таким образом, следует искать множители Лагранжа для функций полезности, которые бы все были положительными ($\lambda_i > 0$) и удовлетворяли (вместе с $\mu_j \geqslant 0$ и σ_k) указанным уравнениям. Далее, условия дополняющей нежесткости для ограничений задачи $(\mathcal{P}_{i_0})$ сводятся к тому, что $\mu_j g_j = 0$. Для применимости обратной теоремы Куна—Таккера нужно, чтобы функции полезности и неявные производственные функции были вогнутыми.

При выводе дифференциальной характеристики точек Парето-границы мы использовали задачи $(\mathcal{P}_{i_0})$. Но можно было бы воспользоваться задачей $(\mathcal{P}^\alpha)$. При этом, как нетрудно убедиться, получаемые уравнения будут очень схожи с теми, которые здесь выведены. Аналогами множителей Лагранжа λ_i будут веса α_i.

Если $X_i = \mathbb{R}^l_+$, то при использовании теоремы Куна—Таккера можно учесть в явном виде ограничения $x_i \geqslant 0$ и охарактеризовать *все* точки Парето-границы, а не только внутренние. Следующий пример демонстрирует соответствующую технику.

Пример 4.4

В экономике обмена два блага и два потребителя с функциями полезности

$$u_1 = -0{,}5(7 - x_{11})^2 - (4 - x_{12})^2, \quad u_2 = -0{,}5(6 - x_{21})^2 - (4 - x_{22})^2,$$

заданными на $\mathbb{R}^2_+$. Совокупные начальные запасы равны $\omega_{\Sigma 1} = 8$, $\omega_{\Sigma 2} = 3$.

Можно выразить из балансов потребление второго потребителя через потребление первого и затем представить полезность для второго потребителя как функцию x_{11} и x_{12}:

$$u_2 = -0{,}5(2 - x_{11})^2 - (1 + x_{12})^2.$$

Запишем задачу $(\mathcal{P}^\alpha)$ для такой экономики с учетом сделанной подстановки:

$$\begin{gathered} \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \to \max_{x_{11}, x_{12}}, \\ x_{11} \geqslant 0, \quad x_{12} \geqslant 0, \quad x_{11} \leqslant 8, \quad x_{12} \leqslant 3. \end{gathered} \tag{$\bowtie$}$$

Здесь мы ввели обозначение $\alpha_1 = \alpha$ (соответственно при этом $\alpha_2 = 1 - \alpha$ и $\alpha \in [0; 1]$). Все присутствующие в этой задаче функции вогнуты ($u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ строго вогнуты, а ограничения на неотрицательность потребления линейны). Таким образом, примени́м пункт {ii}

Теоремы 4.3, и поэтому необходимое условие Парето-оптимальности точки (x_{11}, x_{12}) состоит в том, что она является решением данной задачи при некотором $\alpha \in [0; 1]$.

Далее, функция Лагранжа для задачи ($\bowtie$) с учетом ограничений на неотрицательность потребления (с множителями Лагранжа δ_j) будет иметь вид

$$\mathbb{L} = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 + \delta_1 x_{11} + \delta_2 x_{12} + \delta_3(8 - x_{11}) + \delta_4(3 - x_{12}).$$

Приравнивая производные лагранжиана к нулю, получим следующие равенства:

$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{11}} = \alpha(7 - x_{11}) + (1-\alpha)(2 - x_{11}) + \delta_1 - \delta_3 = 0,$$
$$\frac{\partial \mathbb{L}}{\partial x_{12}} = \alpha(8 - 2x_{12}) - (1-\alpha)(2 + 2x_{12}) + \delta_2 - \delta_4 = 0.$$

или

$$5\alpha + 2 - x_{11} + \delta_1 - \delta_3 = 0,$$
$$10\alpha - 2 - 2x_{12} + \delta_2 - \delta_4 = 0.$$

Градиенты тех ограничений на неотрицательность потребления, которые могут быть активными одновременно, являются линейно независимыми. Например, одновременно может быть $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$ (но при этом $x_{11} < 8$, $x_{12} < 3$), а градиенты этих ограничений равны $(1; 0)$ и $(0; 1)$. Следовательно, выполнены условия регулярности теоремы Куна—Таккера.

Из (прямой) теоремы Куна—Таккера и из пункта {ii} Теоремы 4.3 следует, что если точка (x_{11}, x_{12}) соответствует оптимуму Парето, то найдутся числа $\alpha \in [0; 1]$, $\delta_j \geqslant 0$, такие что будут выполнены полученные выше равенства, а также соответствующие условия дополняющей нежесткости ($\delta_1 x_{11} = 0$, $\delta_2 x_{12} = 0$, $\delta_3(8 - x_{11}) = 0$, $\delta_4(3 - x_{12}) = 0$). Сначала охарактеризуем все точки ящика Эджворта, которые удовлетворяют указанным условиям (т. е. для них найдутся такие α и δ_j). (Остальные точки ящика Эджворта не могут принадлежать границе Парето.) Далее мы покажем, опираясь на обратную теорему Куна—Таккера и пункт {i} Теоремы 4.3, что все найденные таким образом точки действительно соответствуют оптимуму Парето.

Анализ Парето-границы требует перебора. Перебор можно осуществлять либо по знакам множителей Лагранжа (равен нулю, положителен), либо по ограничениям (активно, неактивно). Воспользуемся вторым способом. Существует девять возможных типов допустимых состояний рассматриваемой экономики: внутренняя часть ящика Эджворта, внутренние части четырех сторон ящика и четыре угла. Рассмотрим эти случаи, по возможности объединяя их анализ.

1. Внутренняя часть Парето-границы, $x_{11} \in (0;8)$, $x_{12} \in (0;3)$. Ограничения неотрицательности потребления неактивны, поэтому по условиям дополняющей нежесткости соответствующие множители Лагранжа равны нулю, т. е. $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$, $\delta_4 = 0$. При этом Парето-граница будет характеризоваться уравнениями

$$5\alpha = x_{11} - 2, \quad 5\alpha = 1 + x_{12}.$$

Таким образом, точки внутренней части границы Парето должны удовлетворять уравнению

$$x_{12} = x_{11} - 3.$$

Чтобы точка была внутренней, требуется, чтобы $x_{11} \in (3;6)$ (тогда $x_{12} \in (0;3)$). Это соответствует условию $\alpha \in (0{,}2;0{,}8)$.

В то же время, точки вида $(x_{11}, x_{12}) = (2 + 5\alpha, 5\alpha - 1)$, где $\alpha \in (0{,}2;0{,}8)$, по обратной теореме Куна—Таккера являются решениями задачи ($\bowtie$), поскольку выполнены условия Куна—Таккера, а целевая функция и функции, задающие ограничения задачи, являются вогнутыми[17]. Согласно пункту {i} Теоремы 4.3 эти точки соответствуют Парето-оптимальным состояниям.

2. Рассмотрим нижнюю сторону ящика Эджворта, т. е. случай, когда $x_{11} \in (0;8)$, $x_{12} = 0$. По условиям дополняющей нежесткости в этом случае $\delta_1, \delta_3, \delta_4 = 0$. Уравнения, характеризующие Парето-границу, принимают вид

$$5\alpha = x_{11} - 2, \quad \delta_2 = 2 - 10\alpha.$$

Условие $\delta_2 \geqslant 0$ выполняется, если $\alpha \leqslant 0{,}2$. Условие $x_{11} \in (0;8)$ выполняется, если $\alpha \in (-0{,}4;1{,}2)$. Таким образом, Парето-границе могут принадлежать только точки $(x_{11}, 0)$, где $x_{11} = 2+5\alpha$, при $\alpha \in [0;0{,}2]$. Согласно пункту {i} Теоремы 4.3 эти точки соответствуют Парето-оптимальным состояниям при $\alpha \in (0;0{,}2]$.

Точку $x_{11} = 2$, $x_{12} = 0$ (случай, когда $\alpha = 0$) следует рассмотреть отдельно. В этой точке $u_2 = -1$. Как нетрудно проверить, при $x_{12} \geqslant 0$ и $x_{11} \neq 2$ выполнено неравенство $u_2(x_{11}, x_{12}) < -1$, т. е. никакая допустимая точка не может обеспечить Парето-улучшение

[17] Целевая функция строго вогнута при всех α, поскольку $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ строго вогнуты.

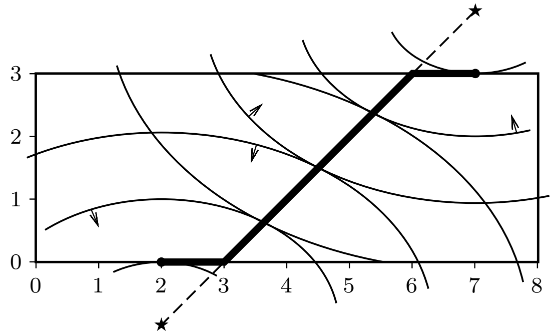


Рис. 4.6. *Парето-граница экономики, рассмотренной в Примере 4.4 (показана жирной линией)*

(второй потребитель всегда проигрывает). Значит, точка $(2; 0)$ соответствует Парето-оптимуму.

Таким образом, Парето-оптимальные точки в этом случае имеют вид $(x_{11}, 0)$, где $x_{11} \in [2; 3]$.

3. Верхняя сторона ящика Эджворта, т. е. $x_{11} \in (0; 8)$, $x_{12} = 3$. Этот случай анализируется по той же схеме, что и предыдущий. Парето-оптимальные точки в этом случае имеют вид $(x_{11}, 3)$, где $x_{11} \in [6; 7]$.

4. Рассмотрим левую сторону ящика Эджворта вместе с углами, т. е. случай когда $x_{11} = 0$, $x_{12} \in [0; 3]$. По условиям дополняющей нежесткости в этом случае $\delta_3 = 0$. Условия первого порядка принимают следующий вид:

$$\delta_1 = -5\alpha - 2, \quad 10\alpha - 2 - 2x_{12} + \delta_2 - \delta_4 = 0.$$

Очевидно, что первое из равенств при $\delta_1 \geqslant 0$ и $\alpha \in [0; 1]$ не может быть выполнено. Таким образом, на левой стороне ящика Эджворта нет Парето-оптимальных точек.

5. Аналогично можно рассмотреть правую сторону ящика Эджворта вместе с углами ($x_{11} = 8$, $x_{12} \in [0; 3]$) и убедиться, что для нее необходимые условия Парето-оптимальности не могут быть выполнены.

Таким образом, все точки Парето-границы найдены. Можно изобразить найденную Парето-границу на диаграмме Эджворта (Рис. 4.6). ▲

Задачи

4.32 Рассмотрите экономику, в которой предпочтения всех потребителей зависят от единственного блага (денег) и строго монотонны по этому благу.

(A) Предположите, что общий запас денег в экономике фиксирован. Опишите Парето-эффективные состояния в данной экономике. Обоснуйте свой ответ.

(B) Пусть существует технология, которая позволяет избавляться от денег. Ответьте на тот же вопрос.

4.33 Рассмотрите экономику, в которой два индивидуума — Бим и Бом.

(A) Предположите, что Бим любит только пряники, а Бом — только пирожки. Имеется фиксированный положительный запас пряников и пирожков. Опишите Парето-эффективные состояния в такой экономике. Обоснуйте свой ответ.

(B) Предположите теперь, что для Бима пряники и пирожки комплементарны, так что он предпочитает потреблять пряники и пирожки в пропорции один к одному, а для Бома пряники и пирожки взаимозаменяемы, и пряник для него эквивалентен пирожку. Ответьте на тот же вопрос.

4.34 Докажите пункт {ii} Теоремы 4.4.

4.35 Для экономики обмена, в которой имеется два потребителя со строго монотонными, строго вогнутыми функциями полезности, заданными на $\mathbb{R}^l_+$, а общесистемные запасы благ строго положительны, докажите, что Парето-граница является связной кривой, соединяющей два угла ящика Эджворта, причем на каждой кривой безразличия в ящике Эджворта лежит ровно одна точка Парето, и что кривая Парето-границы не имеет колец. (*Указание:* Можно воспользоваться представлением Парето-границы через оптимизационную задачу с параметром, задающим «вес» полезности одного из потребителей, и теоремой о непрерывности по параметру решения задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве.)

4.36 Покажите, что в экономике обмена (с m потребителями) с совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей и совпадающими начальными запасами векторы начальных запасов потребителей составляют Парето-оптимальное распределение.

4.37 Восполните рассуждения п. 4.5.2, проверив, что условия регулярности теоремы Куна—Таккера выполнены, т. е. что градиенты ограничений линейно независимы.

4.38 Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют линейные функции полезности, заданные на $X_i = \mathbb{R}^2_+$, т. е.

$$u_1 = \alpha_1 x_{11} + \beta_1 x_{12} \quad \text{и} \quad u_2 = \alpha_2 x_{21} + \beta_2 x_{22},$$

с положительными коэффициентами ($\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$), совокупные начальные запасы положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая границы Парето совпадают в такой экономике. Найдите их в зависимости от значений параметров.

4.39 Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют следующие функции полезности, заданные на $X_1 = \mathbb{R}^2_{++}$ и $X_2 = \mathbb{R}^2_+$ соответственно:

$$u_1 = \ln x_{11} + \ln x_{12} \quad \text{и} \quad u_2 = x_{21} + x_{22},$$

совокупные начальные запасы экономики положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$). Продемонстрируйте формально, что сильная и слабая границы Парето совпадают в такой экономике. Найдите их в зависимости от величины начальных запасов.

4.40 Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют следующие функции полезности:

$$u_1 = \min\{x_{11}, x_{12}\} \quad \text{и} \quad u_2 = \min\{x_{21}, x_{22}\}.$$

(A) Найдите сильную и слабую границы Парето в предположении, что множества допустимых потребительских наборов имеют вид $X_i = \mathbb{R}^2_+$ и что совокупные начальные запасы обоих благ одинаковы.

(B) Найдите сильную и слабую границы Парето в предположении, что совокупные начальные запасы первого блага больше, чем второго.

(C) Найдите сильную и слабую границы Парето в предположении, что блага могут потребляться в целых неотрицательных количествах и что совокупные начальные запасы обоих благ равны 6.

(D) Найдите сильную и слабую границы Парето в предположении, что блага могут потребляться в целых неотрицательных количествах, и что совокупные начальные запасы благ равны 10 и 5 соответственно.

4.41 (A) Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют следующие функции полезности:

$$u_1 = -(2 - x_{11})^2 - (3 - x_{12})^2 \quad \text{и} \quad u_2 = x_{21} + x_{22},$$

множества допустимых потребительских наборов имеют вид $X_i = \mathbb{R}^2_+$, начальные запасы благ равны $\boldsymbol{\omega}_\Sigma = (2; 2)$. Найдите границу Парето.

(B) Решите ту же задачу с функциями полезности

$$u_1 = x_{11} + x_{12} \quad \text{и} \quad u_2 = -(2 - x_{21})^2 - (3 - x_{22})^2,$$

и начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_\Sigma = (1; 3)$.

4.42 Распределение $\mathbf{x}$ в экономике обмена называется справедливым, если $\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \mathbf{x}_j$ для любой пары потребителей i, j (никто никому не завидует).

(A) Покажите, что множество справедливых распределений непусто.

(B) Покажите, что если предпочтения строго выпуклы, непрерывны и строго монотонны, а совокупные начальные запасы положительны, то множество справедливых распределений, которые являются Парето-оптимальными, непусто.

(C) Как выглядит множество Парето-оптимальных справедливых распределений, если предпочтения потребителей одинаковы?

4.6. Связь равновесия и Парето-оптимума. Теоремы благосостояния

Сопоставляя дифференциальные характеристики оптимума Парето и равновесия, можно обнаружить, что они совпадают. Совпадение дифференциальных характеристик позволяет заключить, что при определенных условиях совпадают и сами эти состояния. Указание этих условий составляет содержание так называемых **теорем благосостояния**[18] (или, как их еще называют, фундаментальных теорем экономики благосостояния). Первая теорема благосостояния утверждает, что равновесие Парето-оптимально. Вторая теорема благосостояния утверждает, что на основе Парето-оптимума можно построить равновесие.

Для доказательства первой теоремы благосостояния нам потребуется определение локальной ненасыщаемости предпочтений[19].

[18] Идею этих теорем можно найти в книге В. Парето. Несколько известных экономистов (А. Лернер, Х. Хотеллинг, О. Ланге, М. Алле) занимались этими вопросами в 1930—1940-е гг. и дали наброски доказательств. Формальные доказательства теорем разработали Кеннет Эрроу (1951) и Жерар Дебре (1951, 1954).

[19] Это определение уже давалось в гл. 1 (см. Определение 1.11 на с. 55).

Определение 4.9

Предпочтения потребителя $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ называются **локально ненасыщаемыми**, если для любого допустимого набора $\mathbf{x}_i \in X_i$ в любой окрестности этого набора $V(\mathbf{x}_i)$ найдется другой лучший для него допустимый набор $\check{\mathbf{x}}_i$, т. е. такой набор, что $\check{\mathbf{x}}_i \in X_i$, $\check{\mathbf{x}}_i \in V(\mathbf{x}_i)$ и $\check{\mathbf{x}}_i \succ \mathbf{x}_i$. $\lhd$

Для локальной ненасыщаемости, в частности, достаточно, чтобы функция полезности в каждой точке множества X_i строго возрастала хотя бы по одному из благ и чтобы $X_i = \mathbb{R}^l_+$. (Для внутренних потребительских наборов ($\mathbf{x}_i > \mathbf{0}$) строгое возрастание по одному из благ здесь можно заменить на строгое убывание по одному из благ).

Теорема 4.5 (первая теорема благосостояния)

Пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — общее равновесие экономики и функции полезности всех потребителей локально ненасыщаемы. Тогда состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ Парето-оптимально. $\lrcorner$

Доказательство: Доказательство проводится от противного: пусть есть другое допустимое состояние $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$, доминирующее состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ в смысле Парето, т. е. такое, что для всех $i \in I$ выполнено $\tilde{\mathbf{x}}_i \succcurlyeq_i \bar{\mathbf{x}}_i$, и для некоторого потребителя i_0 выполнено $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0} \succ_{i_0} \bar{\mathbf{x}}_{i_0}$.

(1) Набор $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}$ дороже, чем нужно, чтобы удовлетворять бюджетному ограничению при равновесных ценах и доходах, т. е.

$$\bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{x}}_{i_0} > \beta_{i_0}.$$

Если бы это было не так, то набор $\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}$, более предпочтительный для потребителя i_0, чем $\bar{\mathbf{x}}_{i_0}$, являлся бы допустимым в задаче этого потребителя, что противоречит определению равновесия.

Аналогично для прочих потребителей $\bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{x}}_i \geqslant \beta_i$. Действительно, в противном случае (при $\bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{x}}_i < \beta_i$) существовала бы окрестность набора $\tilde{\mathbf{x}}_i$, все точки которой удовлетворяли бы бюджетному ограничению, и по условию локальной ненасыщаемости в этой окрестности нашелся бы альтернативный допустимый набор $\check{\mathbf{x}}_i \in X_i$, который лучше для потребителя, чем $\tilde{\mathbf{x}}_i$, и удовлетворяет бюджетному ограничению (см. Рис. 4.7). Этот набор лучше для потребителя, чем равновесный набор $\bar{\mathbf{x}}_i$, что невозможно.

Отметим, что локальная ненасыщаемость предпочтений потребителя влечет за собой то, что решение задачи потребителя выводит бюджетное ограничение на равенство. Однако этот факт не добавляет ничего нового к характеристикам равновесия, поскольку, как показано выше, в любом равновесии бюджетное ограничение выполнено как равенство.

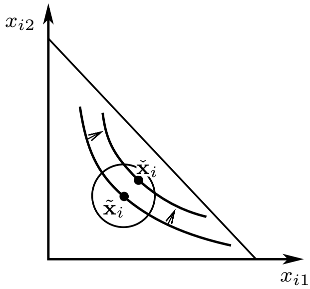


Рис. 4.7. *Иллюстрация к доказательству первой теоремы благосостояния*

Суммируя полученные неравенства по всем потребителям, получаем

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\tilde{\mathbf{x}}_i > \sum_{i\in I}\beta_i.$$

(2) Далее вычислим сумму доходов потребителей в равновесии:

$$\sum_{i\in I}\beta_i = \sum_{i\in I}\left(\sum_{k\in K}\bar{p}_k\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\sum_{k\in K}\bar{p}_k\bar{y}_{jk} + S_i\right) =$$

$$= \sum_{k\in K}\bar{p}_k\left(\sum_{i\in I}\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}\sum_{i\in I}\gamma_{ij}\right) + \sum_{i\in I}S_i = \sum_{k\in K}\bar{p}_k\left(\sum_{i\in I}\omega_{ik} + \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk}\right)$$

или

$$\sum_{i\in I}\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j.$$

(3) Поскольку $\bar{\mathbf{y}}_j$ — оптимальная технология для j-го предприятия при ценах $\bar{\mathbf{p}}$, то

$$\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j \geqslant \bar{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{y}}_j.$$

Суммируя по всем предприятиям, получим

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j \geqslant \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\tilde{\mathbf{y}}_j.$$

(4) Сопоставим три полученных выше соотношения:

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\tilde{\mathbf{x}}_i > \sum_{i\in I}\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j \geqslant \bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\tilde{\mathbf{y}}_j$$

или

$$\bar{\mathbf{p}} \sum_{i \in I} \tilde{\mathbf{x}}_i > \bar{\mathbf{p}} \sum_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}} \sum_{j \in J} \tilde{\mathbf{y}}_j.$$

Это последнее неравенство противоречит тому, что $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние, поскольку в допустимом состоянии должны выполняться балансы

$$\sum_{i \in I} \tilde{\mathbf{x}}_i = \sum_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \tilde{\mathbf{y}}_j.$$

Получено противоречие, поэтому для $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ нельзя найти Парето-улучшение. Это означает, что $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимум. ■

Рассмотрим пример экономики с потребителем, обладающим локально насыщаемыми предпочтениями, и проиллюстрируем его с помощью ящика Эджворта.

Пример 4.5

Первый потребитель имеет функцию полезности с «толстой» кривой безразличия

$$u_1 = \begin{cases} x_{11}x_{12}, & x_{11}x_{12} \leqslant 2, \\ 2, & 2 \leqslant x_{11}x_{12} \leqslant 3, \\ x_{11}x_{12} - 1, & x_{11}x_{12} \geqslant 3. \end{cases}$$

У второго же потребителя функция полезности линейна

$$u_2 = x_{21} + x_{22}.$$

Начальные запасы в экономике достаточно большие.

Данная ситуация представляет собой контрпример к первой теореме благосостояния и показывает важность условия локальной ненасыщаемости. Точки в закрашенной области на Рис. 4.8 принадлежат слабой границе Парето, но не принадлежат сильной. Их можно реализовать как равновесие при ценах $p_1 = p_2 = 1$, но они не являются Парето-оптимальными. ▲

Перейдем к доказательству того, что всякое Парето-оптимальное состояние можно реализовать как равновесие (вторая теорема благосостояния). Мы докажем здесь эту теорему в предположении дифференцируемости функций с использованием теоремы Куна—Таккера.

Теорема 4.6 (вторая теорема благосостояния)

Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — Парето-оптимальное состояние экономики, причем

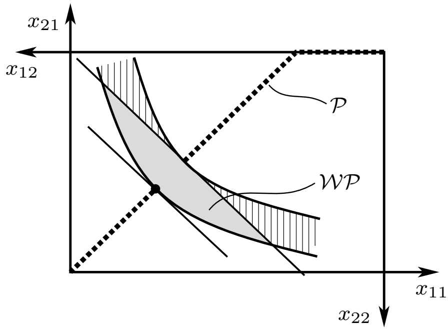


Рис. 4.8. *Контрпример к первой теореме благосостояния*

- ⁎ функции полезности и производственные функции дифференцируемы;
- ⁎ множества X_i выпуклы, а функции полезности и производственные функции вогнуты[20];
- ⁎ рассматриваемый Парето-оптимум внутренний (т. е. для всех потребителей $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$);
- ⁎ в рассматриваемом состоянии градиенты всех функций полезности и производственных функций не равны нулю:

$$\nabla u_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0} \ \forall i \in I \quad \text{и} \quad \nabla g_j(\hat{\mathbf{y}}_j) \neq \mathbf{0} \ \forall j \in J.$$

Тогда найдется вектор цен $\mathbf{p}$ и трансферты S_i, $i = 1, \ldots, m$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — общее равновесие. ┘

Доказательство: Выше мы доказали, что в условиях теоремы найдутся множители Лагранжа $\lambda_i > 0$ $(i \in I)$, $\mu_j > 0$ $(j \in J)$ и σ_k $(k \in K)$, такие что в состоянии $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ выполняются следующие условия первого порядка:

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \sigma_k \ \forall i, k \quad \text{и} \quad \mu_j \frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)}{\partial y_{jk}} + \sigma_k = 0 \ \forall j, k.$$

Возьмем в качестве равновесных цен множители Лагранжа для балансовых ограничений, т. е. $p_k = \sigma_k$ $(k \in K)$ и выберем такие трансферты S_i, чтобы доход каждого потребителя совпадал с расходами,

[20] Здесь достаточно потребовать квазивогнутость.

требуемыми на покупку набора $\hat{\mathbf{x}}_i$ при ценах $\mathbf{p}$ ($\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$), т. е.

$$S_i = \beta_i - \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i - \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}_j = \mathbf{p}\Big(\hat{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_i - \sum_{j \in J} \gamma_{ij} \hat{\mathbf{y}}_j\Big).$$

Нетрудно проверить, что сумма этих трансфертов равна нулю.

Для того чтобы доказать, что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является равновесием, нам достаточно доказать, (1) что для всех потребителей $\hat{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходах $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$ и (2) что для всех производителей $\hat{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\mathbf{p}$.

(1) Очевидно, что набор $\hat{\mathbf{x}}_i$ является допустимым в задаче потребителя. Докажем, что он является оптимальным. Для этого воспользуемся обратной теоремой Куна—Таккера.

Требуется найти неотрицательный множитель Лагранжа ν_i для бюджетного ограничения, такой что для $k \in K$ выполнены условия (см. п. 4.3.1)

$$\frac{\partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = \nu_i p_k.$$

Этому требованию удовлетворяет $\nu_i = 1/\lambda_i$, поскольку выполнено $\lambda_i \partial u_i(\hat{\mathbf{x}}_i)/\partial x_{ik} = \sigma_k$ и $\lambda_i > 0$.

Условие дополняющей нежесткости для бюджетного ограничения выполнено, поскольку в точке $\hat{\mathbf{x}}_i$ бюджетное ограничение активно. Так как функция полезности вогнута[21], бюджетное ограничение задается линейной (а значит, вогнутой) функцией, множество X_i выпукло, то выполнены все требования обратной теоремы Куна—Таккера. Следовательно, $\hat{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя.

(2) Докажем теперь, что технология $\hat{\mathbf{y}}_j$ является оптимальной для j-го производителя. Требуется найти неотрицательный множитель Лагранжа κ_j для технологического ограничения, такой что для $k \in K$ выполнены условия (см. п. 4.3.1)

$$\kappa_j \frac{\partial g_j(\hat{\mathbf{y}}_j)}{\partial y_{jk}} = p_k.$$

Этому требованию удовлетворяет $\kappa_j = \mu_j$. Условие дополняющей нежесткости для технологического ограничения выполнено, поскольку соответствующее условие с точностью до замены μ_j на κ_j выполнено в Парето-оптимуме. Таким образом, выполнены условия Куна—

[21] Фактически здесь достаточно квазивогнутости, поскольку $\nabla u_i(\hat{\mathbf{x}}_i) \neq \mathbf{0}$ (см. Теорему B.71 в Приложении B, с. II-662).

Таккера, и, поскольку целевая функция (прибыль) линейна, а неявная производственная функция, задающая ограничение задачи, вогнута, то $\hat{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя. ■

Замечание: В экономике без трансфертов, чтобы доходы β_i равнялись требуемым расходам $\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$, следует соответствующим образом распределить собственность, т. е. указать начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i$ и доли в прибылях γ_{ij}. Для этого достаточно найти долю θ_i каждого потребителя в совокупных расходах потребителей

$$\theta_i = \frac{\mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i}{\sum_{s \in I} \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_s}$$

и поделить собственность в соответствующих пропорциях, т. е. взять $\gamma_{ij} = \theta_i$ для всех $i \in I, j \in J$ и $\boldsymbol{\omega}_i = \theta_i \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ для всех $i \in I$, где $\boldsymbol{\omega}_\Sigma$ — совокупные начальные запасы.

В экономике чистого обмена достаточно выбрать $\boldsymbol{\omega}_i = \hat{\mathbf{x}}_i$.

Использование теоремы Куна—Таккера в дифференциальной форме — только один из возможных путей доказательства. Мы воспользовались им здесь, поскольку этот подход понадобится нам в дальнейшем для проверки противоположных утверждений — о неоптимальности несовершенных рынков. Условия дифференцируемости функций во второй теореме благосостояния на самом деле избыточны.

Теорема 4.7 (вторая теорема благосостояния без дифференцируемости)

Пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — оптимальное по Парето состояние и выполнено следующее:

* у всех потребителей множества допустимых потребительских наборов X_i выпуклы, предпочтения $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$ выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы;
* технологические множества Y_i каждого производителя выпуклы;
* $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех $i \in I$ (т. е. данное Парето-оптимальное состояние является внутренним).

Тогда существуют цены $\mathbf{p}$ и трансферты S_i, $i = 1, \ldots, m$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является общим равновесием. ⌟

Доказательство: Введем ряд обозначений которые нам понадобятся в дальнейшем для доказательства этого утверждения.

Обозначим множество наборов, которые лучше для потребителя i, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$, через $L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i)$:

$$L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i) = \{\, \mathbf{x}_i \in X_i \mid \mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i \,\}\,.$$

Поскольку предпочтения потребителей выпуклы, и множества допустимых потребительских наборов X_i выпуклы, то, как нетрудно показать, $L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i)$ также выпуклы, а значит, их сумма

$$L^{++}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i\in I} L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i) = \left\{ \sum_{i\in I} \mathbf{x}_i \;\middle|\; \mathbf{x}_i \in X_i,\ \mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i\ \forall i \in I \right\}$$

выпукла. Кроме того, $L_i^{++}(\hat{\mathbf{x}}_i)$ непусты по локальной ненасыщаемости, значит, и $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ непусто.

Множество производственных возможностей

$$Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \sum_{j\in J} Y_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma = \left\{ \sum_{j\in J} \mathbf{y}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \;\middle|\; \mathbf{y}_j \in Y_j\ \forall j \in J \right\}$$

тоже является выпуклым в силу выпуклости технологических множеств и непустым, так как ему принадлежит точка $\sum_{j\in J} \hat{\mathbf{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$.

Поскольку $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — оптимум Парето, то множества $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ и $Y_\Sigma + {}$ $+ \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ не имеют общих точек:

$$L^{++}(\hat{\mathbf{x}}) \cap (Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma) = \varnothing.$$

Предположим, что существует общая точка $\mathbf{z} \in L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ и $\mathbf{z} \in Y_\Sigma + {}$ $+ \boldsymbol{\omega}_\Sigma$. Это означало бы, что существует состояние экономики $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, такое что $\mathbf{x}_i \in X_i$, $\mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$ $\forall i$, $\mathbf{y}_j \in Y_j$ $\forall j$, $\sum_{i\in I} \mathbf{x}_i = \mathbf{z}$ и $\sum_{j\in J} \mathbf{y}_j + {}$ $+\boldsymbol{\omega}_\Sigma = \mathbf{z}$. Тем самым мы нашли бы допустимое состояние экономики, которое доминирует[22] оптимальное по Парето состояние $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$, чего быть не может.

Поскольку множества $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ и $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ выпуклы, непусты и не пересекаются, к ним применима теорема отделимости[23]. Поэтому существуют вектор $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ и число $r \in \mathbb{R}$, такие что

$$\mathbf{pz} \geqslant r,\ \text{ если } \mathbf{z} \in L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$$

и

$$\mathbf{pz} \leqslant r,\ \text{ если } \mathbf{z} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

[22] Причем строго доминирует.

[23] См. Теорему В.41 на с. II-644 в Приложении В.

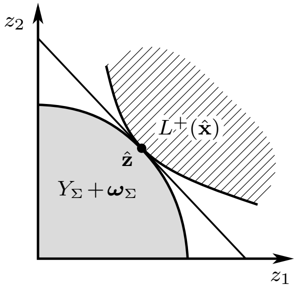


Рис. 4.9. *Иллюстрация к доказательству второй теоремы благосостояния*

Пусть $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_i)$ — такой набор допустимых потребительских наборов, что $\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \hat{\mathbf{x}}_i$ для всех потребителей i, что можно по аналогии записать как $\mathbf{x} \in L^+(\hat{\mathbf{x}})$. Покажем, что $\mathbf{p}\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i \geqslant r$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что для любого натурального числа N в окрестности $V_{1/N}(\mathbf{x}_i)$ набора $\mathbf{x}_i$ существует набор $\mathbf{x}_i^N$, такой что $\mathbf{x}_i^N \succ_i \mathbf{x}_i$, где $V_{1/N}(\mathbf{x}_i)$ — шар с центром $\mathbf{x}_i$ и радиусом $1/N$. Так как $\mathbf{x}_i^N \succ_i \mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \hat{\mathbf{x}}_i$, то $\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i^N \in L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$, откуда $\mathbf{p}\sum_{i\in I}\mathbf{x}_i^N \geqslant$ $\geqslant r$. Последовательность $\mathbf{x}_i^N$ сходится к $\mathbf{x}_i$. Переходя к пределу по N, получим требуемое неравенство.

Введем обозначение

$$\hat{\mathbf{z}} = \sum_{i\in I}\hat{\mathbf{x}}_i = \sum_{j\in J}\hat{\mathbf{y}}_j + \boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

(Второе равенство здесь является следствием балансов по благам.) С одной стороны, так как $\hat{\mathbf{z}} \in L^+(\hat{\mathbf{x}})$ (по рефлексивности отношения $\succcurlyeq_i$ — каждый из наборов $\hat{\mathbf{x}}_i$ не хуже себя самого), то $\mathbf{p}\hat{\mathbf{z}} \geqslant r$. С другой стороны, так как Парето-оптимум технологически допусти́м, то $\hat{\mathbf{z}} \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и $\mathbf{p}\hat{\mathbf{z}} \leqslant r$. Следовательно, $r = \mathbf{p}\hat{\mathbf{z}}$.

Таким образом, мы нашли гиперплоскость, проходящую через точку $\hat{\mathbf{z}}$ и разделяющую множества $Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$ и $L^+(\hat{\mathbf{x}})$ (см. Рис. 4.9). Возьмем коэффициенты $\mathbf{p}$, соответствующие этой гиперплоскости, в качестве цен и покажем, что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является равновесием при соответствующем подборе трансфертов.

Покажем сначала, что при этих ценах максимум прибыли предприятия j достигается на технологии $\hat{\mathbf{y}}_j$. Пусть $\mathbf{y}_j \in Y_j$. Тогда

$$\mathbf{y}_j + \sum_{s\neq j}\hat{\mathbf{y}}_s + \boldsymbol{\omega}_\Sigma \in Y_\Sigma + \boldsymbol{\omega}_\Sigma$$

и выполнено

$$\mathbf{p}\left(\mathbf{y}_j + \sum_{s\neq j} \hat{\mathbf{y}}_s + \boldsymbol{\omega}_\Sigma\right) \leqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{p}\left(\sum_{s\in J} \hat{\mathbf{y}}_s + \boldsymbol{\omega}_\Sigma\right).$$

Отсюда $\mathbf{p}\mathbf{y}_j \leqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{y}}_j$. Другими словами, производитель не может при ценах $\mathbf{p}$ увеличить свою прибыль, выбрав $\mathbf{y}_j$ вместо $\hat{\mathbf{y}}_j$, т.е. $\hat{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи производителя.

Аналогичным образом доказывается, что любой набор $\mathbf{x}_i \in X_i$, который не хуже $\hat{\mathbf{x}}_i$ ($\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \hat{\mathbf{x}}_i$), не может стоить дешевле, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$, в ценах $\mathbf{p}$. Действительно, так как $(\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \mathbf{x}_i, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_n)$ не хуже для каждого потребителя, чем $\hat{\mathbf{x}}$, то

$$\mathbf{p}\left(\mathbf{x}_i + \sum_{s\neq i} \hat{\mathbf{x}}_s\right) \geqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{p}\sum_{s\in I} \hat{\mathbf{x}}_s.$$

Таким образом, из $\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \hat{\mathbf{x}}_i$ следует $\mathbf{p}\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$.

Докажем, что при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$ полезность каждого потребителя i максимальна в точке $\hat{\mathbf{x}}_i$. Для этого требуется усилить только что доказанный факт и доказать, что из $\mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$ следует $\mathbf{p}\mathbf{x}_i > \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Другими словами, требуется доказать, что лучший набор $\mathbf{x}_i$ ($\mathbf{x}_i \in X_i$ и $\mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$) должен стоить дороже, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$ в ценах $\mathbf{p}$. Мы уже доказали, что $\mathbf{p}\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$, поэтому осталось показать, что равенство здесь достигаться не может.

Предположим, что это не так и $\mathbf{p}\mathbf{x}_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$, притом что $\mathbf{x}_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$.

Условие $\hat{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ означает, что $\hat{\mathbf{x}}_i$ принадлежит множеству X_i вместе с некоторой своей окрестностью. Поскольку не все цены равны нулю ($\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$), то в этой окрестности найдется набор $\mathbf{x}'_i$, который в ценах $\mathbf{p}$ стоит дешевле $\hat{\mathbf{x}}_i$ и, следовательно, дешевле $\mathbf{x}_i$. Действительно, пусть $p_k \neq 0$ для некоторого блага k. Если $p_k > 0$, то можно немного уменьшить потребление этого блага по сравнению с $\hat{x}_{ik}$, а если $p_k < 0$, то немного увеличить. Таким образом, существует допустимый набор $\mathbf{x}'_i$, такой что $\mathbf{p}\mathbf{x}'_i < \mathbf{p}\mathbf{x}_i$.

Рассмотрим выпуклые комбинации $\alpha\mathbf{x}'_i + (1-\alpha)\mathbf{x}_i$, $\alpha \in [0; 1]$. Поскольку множество допустимых потребительских наборов X_i выпукло, то все такие наборы допустимы. В силу непрерывности предпочтений, если положительное α является достаточно малым, то набор

$$\mathbf{x}''_i = \alpha\mathbf{x}'_i + (1-\alpha)\mathbf{x}_i$$

лучше, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$. Кроме того, так как $\mathbf{p}\mathbf{x}'_i < \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{p}\mathbf{x}_i$, то $\mathbf{p}\mathbf{x}''_i < \mathbf{p}\mathbf{x}_i$. (См. Рис. 4.10.)

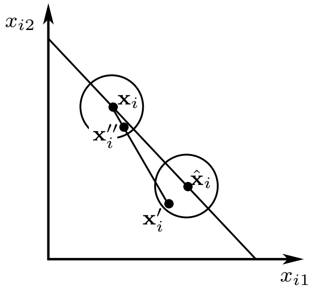


Рис. 4.10. *Иллюстрация к доказательству второй теоремы благосостояния*

В то же время, из $\mathbf{x}_i'' \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i$ следует, что $\mathbf{p}\mathbf{x}_i'' \geqslant \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Получили противоречие.

Таким образом, $\mathbf{p}\mathbf{x}_i > \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Значит, невозможно найти допустимый набор, который был бы лучше $\hat{\mathbf{x}}_i$, но стоил бы не дороже, чем $\hat{\mathbf{x}}_i$. Таким образом, $\hat{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и доходе $\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$.

Для того чтобы доказать, что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ — равновесие Вальраса, нам осталось найти такие трансферты, равные в сумме нулю, чтобы с учетом трансфертов $\beta_i = \mathbf{p}\hat{\mathbf{x}}_i$. Рассуждения здесь повторяют рассуждения Теоремы 4.6. ■

Рассмотрим примеры того, что отказ от предположений второй теоремы благосостояния приводит к тому, что она перестает быть верной. При этом удобно воспользоваться для иллюстрации ящиком Эджворта. Для того чтобы на основе Парето-оптимума можно было построить равновесие, требуется найти прямую, которая бы разделяла множества $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\mathbf{x}}_2)$ на диаграмме Эджворта. Например, на Рис. 4.1 такая гиперплоскость имеется, поэтому точка $\bar{\mathbf{x}}$ является одновременно Парето-оптимальной и равновесной. На Рис. 4.4 изображена ситуация, когда первый потребитель имеет невыпуклые предпочтения и Парето-оптимальную точку $\hat{\mathbf{x}}$ нельзя реализовать как равновесие — не существует прямой, которая бы разделяла $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\mathbf{x}}_2)$. Приведем еще несколько примеров.

Пример 4.6

Пусть потребители имеют функции полезности $u_1 = x_{11} + \sqrt{x_{12}}$ и $u_2 = x_{22}$.

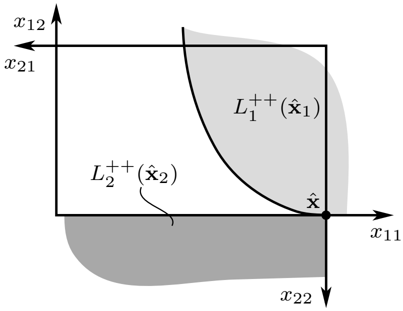


Рис. 4.11. *Контрпример ко второй теореме благосостояния: не внутренний Парето-оптимум*

Правый нижний угол ящика Эджворта ($\hat{\mathbf{x}}$) лежит на границе Парето, но не может быть реализован как равновесие ни при каких ценах (см. Рис. 4.11). Такая экономика представляет собой контрпример ко второй теореме благосостояния с не внутренним оптимумом Парето. Прямая, разделяющая $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$ и $L_2^{++}(\hat{\mathbf{x}}_2)$, существует — она проходит горизонтально. Однако это разделение нестрогое, поскольку частично эта прямая лежит в $L_1^{++}(\hat{\mathbf{x}}_1)$. Действительно, нетрудно проверить, что при ценах $p_1 = 0$ и $p_2 > 0$ набор $\hat{\mathbf{x}}_1$ не является решением задачи первого потребителя, так как полезность не ограничена сверху. ▲

В следующем примере вместо ящика Эджворта используется диаграмма, аналогичная той, что изображена на Рис. 4.2.

Пример 4.7

Пусть в экономике имеется один потребитель с локально насыщаемыми предпочтениями и один производитель. Точка Парето-оптимума $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} + \hat{\mathbf{y}}$ лежит на границе производственных возможностей и находится внутри «толстой» кривой безразличия (см. Рис. 4.12). Так как множество производственных возможностей и множество лучших наборов $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$ не имеют на диаграмме общих точек, то это действительно оптимум.

Чтобы точка $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} + \hat{\mathbf{y}}$ была равновесной, нужно, чтобы отношение цен было равно наклону границы производственных возможностей в этой точке. Однако в рамках бюджетного ограничения, соответствующего такому наклону бюджетной прямой, точка $\hat{\mathbf{x}}$ не будет

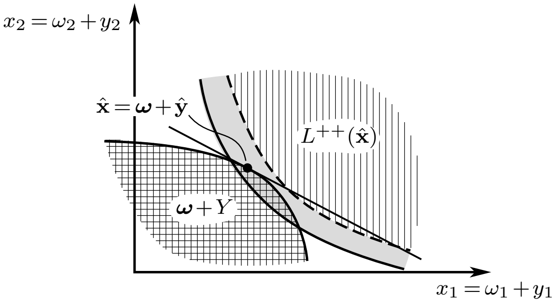


Рис. 4.12. *Контрпример ко второй теореме благосостояния: предпочтения потребителя не являются локально ненасыщаемыми*

решением задачи потребителя, так как гипотетический бюджетный треугольник имеет общие точки с множеством $L^{++}(\hat{\mathbf{x}})$.

Аналогичный пример можно построить, если взять Парето-оптимум внутри множества производственных возможностей и внутри «толстой» кривой безразличия. Из такого оптимума нельзя сконструировать равновесие, поскольку (при ненулевых ценах) решение задачи производителя должно лежать на границе технологического множества. На этом примере видно, что рыночное равновесие, в отличие от концепции оптимальности по Парето, предполагает самостоятельную роль предприятий и технологическую эффективность. В равновесии достигается технологическая эффективность даже тогда, когда с общественной точки зрения она бесполезна.

Оба эти примера демонстрируют некоторую содержательную недостаточность второй теоремы благосостояния. Дело в том, что в обеих экономиках имеются Парето-оптимумы, эквивалентные рассматриваемым Парето-оптимумам с точки зрения потребителей (в данном случае — единственного потребителя), на основе которых уже *можно* сконструировать равновесие. ▲

Задачи

4.43 Найдите равновесие и Парето-границу в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями:

$$u_1(\mathbf{x}_1) = \ln(x_{11}) + \ln(x_{12}), \qquad u_2(\mathbf{x}_2) = \ln(x_{21}) + \ln(x_{22}),$$
$$\boldsymbol{\omega}_1 = (1; 3), \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = (3; 1).$$

Проиллюстрируйте этот анализ на диаграмме Эджворта и дайте графическую интерпретацию обеим теоремам благосостояния.

4.44 В экономике с двумя потребителями и двумя благами функции полезности имеют вид

$$u_1 = x_{11} + 2\sqrt{x_{12}} \quad \text{и} \quad u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}.$$

Начальные запасы первого потребителя равны $(1;3)$, а второго — $(2;1)$.

Пусть $x_{11} = 2$, $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $S_1 = -1$, $S_2 = 1$, где S_i — величина трансфертов.

(А) Покажите формально, что $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ является равновесием с трансфертами.

(В) Является ли это равновесие оптимальным по Парето? Обоснуйте свой ответ.

4.45 В экономике с двумя благами функция полезности единственного потребителя имеет вид

$$u = 2\sqrt{x_1} + x_2,$$

а его начальные запасы равны $(3;1)$. Технология единственного предприятия задана неявной производственной функцией

$$g = -y_1 + 2\sqrt{-y_2}.$$

Пусть $x_1 = 4$, $x_2 = 3/4$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1/4$.

(А) Покажите формально, что $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является Парето-оптимальным состоянием.

(В) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

4.46 В экономике с двумя потребителями и двумя благами функции полезности имеют вид

$$u_1 = x_{11} + 4\sqrt{x_{12}} \quad \text{и} \quad u_2 = 2\sqrt{x_{21}} + x_{22}.$$

Начальные запасы первого потребителя равны $(2;4)$, а второго — $(1;1)$. Пусть $x_{11} = 1$, $x_{12} = 2$, $x_{21} = 2$, $x_{22} = 3$.

(А) Покажите формально, что $\mathbf{x}$ является Парето-оптимальным состоянием.

(В) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

4.47 В экономике с двумя благами функция полезности единственного потребителя имеет вид

$$u = x_1 + 2\sqrt{x_2},$$

а его начальные запасы равны $(3; 0)$. Технология единственного предприятия задана неявной производственной функцией

$$g = 4\sqrt{-y_1} - y_2.$$

Пусть $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $y_1 = -1$, $y_2 = 4$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$.

(А) Покажите формально, что $(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ является равновесием.

(В) Можно ли на основе этого Парето-оптимального состояния сконструировать равновесие? Обоснуйте свой ответ.

4.48 Привести пример равновесия в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, в котором первая теорема благосостояния была бы неприменима из-за нарушения предположений и равновесие нарушало бы ее утверждение. Можно привести графический пример, либо указать конкретные начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, функции полезности $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ и равновесие $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$.

4.49 Привести пример равновесия в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, в котором первая теорема благосостояния была бы неприменима из-за нарушения предположений, но утверждение первой теоремы благосостояния оставалось бы справедливым.

4.50 Привести пример экономики обмена с двумя потребителями и двумя благами, для которой вторая теорема благосостояния неприменима и

(А) утверждение второй теоремы благосостояния остается справедливым;

(В) утверждение второй теоремы благосостояния неверно.

Этом может быть графический пример или же пример с конкретными начальными запасами $\boldsymbol{\omega}$, функциями полезности $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ и состоянием этой экономики $\mathbf{x}$.

4.51 Сформулируйте и докажите теоремы благосостояния для модели экономики обмена в условиях строгой монотонности, строгой выпуклости предпочтений и положительности совокупных начальных запасов.

4.52 Для каждого из предположений второй теоремы благосостояния покажите (приведя соответствующий пример), что отказ от этого предположения приводит к тому, что утверждение теоремы оказывается неверным.

4.53 Что можно сказать о соотношениях предельных норм замены товаров в потреблении и производстве в точке равновесия? Связано ли это соотношение с отсутствием Парето-улучшающего изменения состояния? Если данное соотношение нарушается, как следует строить Парето-улучшение данного состояния экономики?

4.54 Пусть допустимые потребительские наборы задаются неравенствами $\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{0}$. Определите, какие из следующих функций полезности представляют предпочтения, удовлетворяющие условиям первой и (или) второй теоремы благосостояния:

(A) $u(x_1, x_2) = x_1$; (B) $u(x_1, x_2) = \exp(x_1)x_2$;
(C) $u(x_1, x_2) = \text{const}$; (D) $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
(E) $u(x_1, x_2) = x_1x_2$; (F) $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$;
(G) $u(x_1, x_2) = -x_1$; (H) $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$;
(I) $u(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$; (J) $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$.

4.55 Пусть начальные запасы в экономике обмена лежат на Парето-границе. Какие дополнительные условия гарантируют, что на основе точки начальных запасов можно построить равновесие?

4.56 Пусть в экономике обмена с двумя потребителями их функции полезности равны

$$u_1(\mathbf{x}_1) = x_{11}^2 + x_{12}^2 \quad \text{и} \quad u_2(\mathbf{x}_2) = x_{21}^2 + x_{22}^2.$$

Найти Парето-границу. Какие из точек Парето-границы можно реализовать как равновесие подбором цен и распределения собственности? Решите эту задачу для случаев, когда

(A) суммарные начальные запасы двух благ одинаковы;
(B) суммарные начальные запасы двух благ различаются.

4.57 В классической экономике обмена с двумя потребителями, функции полезности которых, заданные на $\mathbb{R}_+^2$, равны

(1) $u_1 = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}, \quad u_2 = 6 + x_1 - x_2$;
(2) $u_1 = \min\{x_1, x_2\}, \quad u_2 = 6 - x_1 + x_2$;
(3) $u_1 = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}, \quad u_2 = 6 - x_1 - x_2$.

(A) Определите, в каких из трех экономик окажется, что любое равновесие Парето-оптимально (почему именно в этих, а в других — нет?).

(B) Определите, в каких из трех указанных экономик окажется, что любое Парето-оптимальное состояние $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ можно превратить в равновесие подбором распределения собственности (почему именно в этих, а в других — нет?).

4.58 Докажите, что общее равновесие принадлежит слабой границе Парето. Какие предположения здесь требуется сделать?

4.59 Сформулируйте и докажите вариант первой теоремы благосостояния (о Парето-оптимальности равновесий) на основе сопоставления дифференциальных характеристик Парето-оптимальных и равновесных состояний. Какие дополнительные предположения о свойствах функций полезности (помимо дифференцируемости) необходимо сделать?

4.60 Первая теорема благосостояния (о Парето-оптимальности равновесий) доказывается от противного: предполагаем, что существует альтернативное к равновесному состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, более желательное для некоторого потребителя i. Условие локальной ненасыщаемости предпочтений (сформулировать) используется для того, чтобы проверить, что...

- альтернативный вариант дороже чем равновесный для потребителя i;
- спрос сбалансирован с предложением в равновесии;
- ....

Укажите словами верный вариант взамен приведенных и запишите его формулой.

4.61 В доказательстве первой теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума), не использующем дифференцируемость, условие выпуклости используется для того, чтобы применить теорему ...... к множествам .... Сформулируйте применяемую теорему и определение соответствующих множеств.

4.62 В доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума), использующем дифференцируемость, условие выпуклости используется для того чтобы с помощью теоремы ...... доказать, что соответствующие компоненты построенного состояния экономики являются решениями задач .... Сформулируйте применяемую теорему, соответствующие задачи и способ применения теоремы.

4.63 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия), использующем дифференцируемость, условия на градиенты функций нужны для того, чтобы применить Теорему ...... к задаче ....

4.64 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при отсутствии свойства локальной ненасыщаемости не удается показать, что ......, так как может оказаться, что .... (Сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком.)

4.65 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при невыполнении условия выпуклости предпочтений не удается показать, что ......, так как может оказаться, что ...... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

4.66 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о реализуемости Парето-оптимума как равновесия) при невыполнении условия, что рассматриваемая точка — внутренняя, не удается показать, что ......, так как может оказаться, что ...... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

4.67 При доказательстве второй теоремы благосостояния (о Парето-оптимальности равновесных распределений) при невыполнении условия локальной ненасыщаемости, не удается показать, что ......, так как может оказаться, что ...... (сформулируйте ответ в трех-пяти фразах и поясните, сказанное рисунком).

4.68 Пусть два потребителя (потребление первого обозначим x, потребление второго обозначим z) в классической ситуации обмена имеют функции полезности

$$u_x(\mathbf{x}) = x_1^a + x_2^b, \quad u_z(\mathbf{z}) = cz_1 + dz_2,$$

где $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}$, и обладают начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_x$ и $\boldsymbol{\omega}_z$.

(A) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно гарантировать, что состояние экономики, не улучшаемое по Парето, можно реализовать как равновесие?

(B) Предположим, что в этой экономике осуществилось равновесие. При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно гарантировать, что оно не улучшаемо по Парето?

(C) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно утверждать, что для обоих потребителей равновесие не лучше, чем начальное состояние?

(D) При каких значениях параметров $(a, b, c, d, \boldsymbol{\omega})$ можно утверждать, что для одного из потребителей равновесие не лучше, чем начальное состояние? о каком из потребителей идет речь?

4.69 В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, а другой — $u_z(z_1, z_2)$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (1; 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2; 1)$.

(A) Укажите функцию $u_z(\cdot)$ и равновесие Вальраса такие, что равновесное состояние не является Парето-оптимальным состоянием данной экономики.

(B) Какое условие теоремы (какой?) при этом будет нарушаться?

(C) Объясните, почему это равновесие не Парето-оптимально.

4.70 В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2)$, а другой — $u_z(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (4; 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2; 2)$.

(A) Укажите функцию $u_x(\cdot)$ и равновесие Вальраса в соответствующей экономике такие, что равновесное состояние этой экономики не является Парето-оптимальным. Объяснить, почему это равновесие не Парето-оптимально.

(B) Какое условие теоремы (какой?) при этом нарушается?

4.71 В экономике обмена один потребитель имеет функцию полезности $u_x(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, а другой — $u_z(z_1, z_2)$ $(x_1, x_2, z_1, z_2 \geqslant 0)$. Начальные запасы равны $\boldsymbol{\omega}_x = (3; 2)$ и $\boldsymbol{\omega}_z = (2; 1)$.

(A) Укажите такую функцию $u_z(\cdot)$, чтобы не каждый Парето-оптимум можно было реализовать как равновесие. Какое условие теоремы (какой?) при этом нарушается?

(B) Какие именно Парето-оптимальные состояния нельзя реализовать как равновесие? Объяснить, почему.

4.72 В экономике имеются один производитель с технологией, задаваемой неявной производственной функцией $g(\mathbf{y}) = -y_1 - \sqrt{y_2}$, и один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Начальные запасы равны $(\omega_1, \omega_2) = (2; 0)$. Известно, что функция полезности может быть одного из трех видов: $u = \min(Ax_1, Bx_2)$, $u = \max(Ax_1, Bx_2)$ или же $u = Ax_1 + Bx_2$. Выберите функцию и подберите параметры A и B так, чтобы точка $(x_1, x_2) = (1; 1)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на графике с помощью множества производственных возможностей и кривых безразличия.

4.73 В экономике имеются потребители $i = 1, 2$ с функциями полезности $u_i(x_{iA}, x_{iB})$, где $x_{iA}, x_{iB} \geqslant 0$. Суммарные начальные запасы равны $(\omega_{\Sigma A}, \omega_{\Sigma B}) = (2; 2)$. Известно, что $u_2 = \sqrt{x_{2A}} + x_{2B}$, а другая функция полезности может быть одного из трех видов: $u_1 = \alpha \ln(1 + x_{1A}) + \beta \ln(1 + x_{1B})$, $u_1 = \alpha x_{1A} + \beta x_{1B}$ или же $u_1 = \alpha(x_{1A})^2 + \beta(x_{1B})^2$. Выберите функцию и подберите параметры α и β так, чтобы точка $(x_{1A}, x_{1B}) = (2; 0)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на диаграмме Эджворта.

4.74 В экономике имеются один производитель с технологией, задаваемой неявной производственной функцией $g(\mathbf{y}) = -y_1 - y_2$, и один потребитель с функцией полезности $u(x_1, x_2)$. Начальные запасы равны $(\omega_1, \omega_2) = (1; 3)$. Известно, что функция полезности может быть одного из трех видов: $u = \min(Ax_1, x_2)$, $u = Ax_1 + x_2$ или же $u = \max(x_1 x_2, A)$. Выберите функцию и подберите параметр A так, чтобы точка $(x_1, x_2) = (1; 1)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему ее нельзя реализовать как равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на графике с помощью множества производственных возможностей и кривых безразличия.

4.75 В экономике два потребителя $i = 1, 2$ с функциями полезности $u_i(x_{iA}, x_{iB})$, где $x_{iA}, x_{iB} \geqslant 0$. Суммарные начальные запасы равны $(\omega_{\Sigma A}, \omega_{\Sigma B}) = (2; 2)$. Известно, что $u_1 = (x_{1A})^2 + (x_{1B})^2$, а другая функция полезности может быть одного из трех видов: $u_2 = \max(x_{2A}, \alpha + x_{2B})$, $u_2 = \alpha x_{2A} + x_{2B}$ или же $u_2 = \alpha x_{2A} x_{2B}$. Выберите функцию и подберите параметр α так, чтобы точка $(x_{1A}, x_{1B}) = (1; 2)$ соответствовала оптимуму Парето, но на ее основе нельзя было бы сконструировать равновесие. Объясните, почему это будет оптимум. Объясните, почему нельзя сконструировать равновесие. Какие условия теоремы (какой?) при этом нарушены? Проиллюстрируйте анализ на диаграмме Эджворта.

4.76 Для выполнения первой теоремы благосостояния требуется, чтобы функция полезности удовлетворяла свойствам...

(A) только локальной ненасыщаемости,
(B) локальной ненасыщаемости и вогнутости,
(C) дифференцируемости и вогнутости,
(D) только вогнутости.

4.77 Для выполнения второй теоремы благосостояния требуется, чтобы функция полезности удовлетворяла свойствам...

(A) локальной ненасыщаемости,
(B) локальной ненасыщаемости и вогнутости,
(C) вогнутости,
(D) вогнутости и дифференцируемости.

4.78 Если функция полезности одного из потребителей является локально ненасыщаемой, то...

(A) первая теорема благосостояния несправедлива;
(B) бюджетное ограничение выполняется как равенство;
(C) точка равновесия не является внутренней;
(D) вторая теорема благосостояния несправедлива.

4.79 Вторая теорема благосостояния может не выполняться, если...

(A) у одного из потребителей в его множестве потребительских наборов есть наилучший набор;
(B) технологические множества выпуклы;
(C) функция полезности хотя бы одного из потребителей недифференцируема;
(D) функция полезности хотя бы одного из потребителей локально ненасыщаема.

4.80 При каких дополнительных предположениях относительно параметров модели обмена (с m потребителями) и совпадающими, выпуклыми и строго монотонными предпочтениями, представимыми непрерывно дифференцируемыми функциями полезности, распределение, состоящее из векторов начальных запасов, можно реализовать как равновесие? при каких ценах?

4.81 Рассмотрите экономику обмена с двумя благами, двумя потребителями с функциями полезности $u_1 = x_{11}$, $u_2 = x_{21}$ ($x_{ik} \geqslant 0$) и положительными совокупными начальными запасами ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$). Покажите формально, что выполнены следующие утверждения.

(A) Любая точка ящика Эджворта ($\mathbf{x}_1 \in [0, \omega_{\Sigma 1}] \times [0, \omega_{\Sigma 2}]$) принадлежит слабой и сильной границе Парето.

(B) Каждую из точек ящика Эджворта можно реализовать как равновесие, и при этом $p_2 = 0$.

4.82 Рассмотрите экономику обмена с двумя благами, двумя потребителями с функциями полезности $u_1 = x_{11}$, $u_2 = x_{22}$ ($x_{ik} \geqslant 0$) и положительными совокупными начальными запасами ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma > 0$). Покажите формально, что выполнены следующие утверждения.

(A) Правая ($x_{11} = \omega_{\Sigma 1}$, $x_{12} \in [0, \omega_{\Sigma 2}]$) и нижняя ($x_{11} \in [0, \omega_{\Sigma 1}]$, $x_{12} = 0$) стороны ящика Эджворта составляют слабую границу Парето, а правый нижний угол ($\mathbf{x}_1 = (\omega_{\Sigma 1}, \omega_{\Sigma 2})$) — (сильную) границу Парето.

(B) Сильную границу Парето можно реализовать как равновесие при любых неотрицательных ценах.

4.83 В ситуации Примера 4.5 при достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально сильную и слабую границы Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие. Как соотносятся между собой эти три множества?

4.84 Пусть в экономике обмена с двумя благами потребители имеют следующие функции полезности, заданные на $X_i = \mathbb{R}^2_+$:

$$u_1 = -(x_{11} - 1)^2 - (x_{12} - 1)^2 \quad \text{и} \quad u_2 = 2x_{21} + x_{22}.$$

При достаточно больших совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

4.85 В ситуации Примера 4.6 при положительных совокупных начальных запасах найдите формально границу Парето и множество точек, которые можно реализовать как равновесие.

4.86 Могут ли в экономике обмена с одинаковыми предпочтениями потребителей и одинаковыми начальными запасами существовать возможности для взаимовыгодных обменов?

4.87 Могут ли в экономике обмена с одинаковыми выпуклыми предпочтениями потребителей и одинаковыми начальными запасами существовать возможности для взаимовыгодных обменов?

Приложение 4.A. Теоремы существования равновесия

4.A.1. Существование равновесия в экономике обмена

Приведем альтернативный вариант теоремы существования равновесия в модели обмена, в котором, в отличие от теоремы существования, приведенной в основном тексте, используются более слабые условия на избыточный спрос.

Теорема 4.8

Предположим, что функция $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ удовлетворяет следующим условиям:

- $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ непрерывна на $\mathcal{S}_+^{l-1} = \{\, \mathbf{p} > \mathbf{0} \mid \sum_{k \in K} p_k = 1 \,\}$;
- $\mathbf{E}(\mathbf{p})$ положительно однородна нулевой степени на $\mathcal{S}_+^{l-1}$;
- при всех $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_+^{l-1}$ выполнено $\mathbf{pE}(\mathbf{p}) = 0$ (закон Вальраса);
- функции избыточного спроса ограничены снизу, т. е. существует число t, такое что $E_k(\mathbf{p}) > t$ при всех $k \in K$ и $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1}$;
- если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности, т. е. если $\mathbf{p}^n \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\mathbf{p}^n \to \mathbf{p}^0$ при $n \to \infty$, причем существует благо k', такое что $p^0_{k'} = 0$, то

$$\max_k (E_k(\mathbf{p}^n)) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда существует вектор $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$, такой что $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$. ┘

Доказательство: Доказательство условно разобьем на три этапа:

(1) построение отображения единичного симплекса $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя;

(2) проверка замкнутости графика и выпуклозначности построенного отображения и применение к нему теоремы о неподвижной точке;

(3) демонстрация того, что найденная неподвижная точка является вектором равновесных цен в рассматриваемой экономике.

(1) Каждой цене $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_+^{l-1}$ сопоставим множество

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \{\, \mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \mid \mathbf{qE}(\mathbf{p}) \geqslant \mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p})\ \forall \mathbf{q}' \in \mathcal{S}^{l-1} \,\} = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1}} \mathbf{qE}(\mathbf{p})$$

и тем самым построим отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ из $\mathcal{S}_+^{l-1}$ в $\mathcal{S}^{l-1}$. Другими словами, значение отображения $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ — множество всех векторов цен из $\mathcal{S}^{l-1}$, максимизирующих стоимость избыточного спроса, вычисленного при старых ценах $\mathbf{p}$. Можно заметить, что любому неравновесному вектору цен $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_+^{l-1}$ (т. е. в данном случае вектору $\mathbf{p}$, такому что $\mathbf{E}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$) данное отображение ставит в соответствие подмножество (грань меньшей размерности) симплекса цен, а любому равновесному вектору — весь симплекс цен.

На границе симплекса цен $\mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}^{l-1}_{+}$ определим $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ по правилу:

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \mid \mathbf{qp} = 0 \right\} = \left\{ \mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1} \mid q_k = 0, \text{ если } p_k > 0 \right\}.$$

Отметим, что множество $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ непусто при любом $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1}$.

(2) Выпуклозначность построенного отображения очевидна в силу того, что условия, определяющие множества $\mathbf{g}(\mathbf{p})$, линейны. Таким образом, для доказательства существования неподвижной точки остается показать, что отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график.

Предположим, что последовательности $\{\mathbf{p}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\{\mathbf{q}^n\} \in \in \mathcal{S}^{l-1}$ с пределами $\mathbf{p}^0$ и $\mathbf{q}^0$ соответственно таковы, что $\mathbf{q}^n \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^n)$. Покажем, что $\mathbf{q}^0 \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^0)$. Возможны две ситуации: $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1}_{+}$ ($\mathbf{p}^0$ лежит внутри симплекса) или $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}^{l-1}_{+}$ ($\mathbf{p}^0$ лежит на границе симплекса).

В случае $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1}_{+}$ существует N, такое что при $n > N$ выполнено $\mathbf{p}^n \in \mathcal{S}^{l-1}_{+}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{q}' \in \mathcal{S}^{l-1}$. При $n > N$ выполнено

$$\mathbf{q}^n \mathbf{E}(\mathbf{p}^n) \geqslant \mathbf{q}' \mathbf{E}(\mathbf{p}^n).$$

Переходя к пределу, получим, что $\mathbf{q}^0 \mathbf{E}(\mathbf{p}^0) \geqslant \mathbf{q}' \mathbf{E}(\mathbf{p}^0)$. Тем самым мы показали, что в этом случае $\mathbf{q}^0 \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^0)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}^{l-1}_{+}$. Пусть k — благо, для которого $p^0_k > 0$. Покажем, что при достаточно больших n выполнено $q^n_k = 0$. Тем самым мы покажем, что $q^0_k = \lim q^n_k = 0$, и, следовательно, $\mathbf{q}^0 \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^0)$.

Если $\mathbf{p}^n \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}^{l-1}_{+}$, то по определению отображения $\mathbf{g}(\cdot)$ имеем $q^n_k = 0$. Таким образом, нам осталось доказать в случае $\mathbf{p}^n \in \mathcal{S}^{l-1}_{+}$, что если $p^0_k > 0$, то при достаточно больших n выполнено $q^n_k = 0$. По закону Вальраса имеем

$$p^n_k E_k(\mathbf{p}^n) = -\sum_{k' \neq k} p^n_{k'} E_{k'}(\mathbf{p}^n).$$

Из ограниченности снизу функции избыточного спроса следует, что

$$-\sum_{k' \neq k} \mathbf{p}^n_{k'} E_{k'}(\mathbf{p}^n) \leqslant -t \sum_{k' \neq k} \mathbf{p}^n_{k'} = -t(1 - p^n_k).$$

Отсюда

$$E_k(\mathbf{p}^n) \leqslant -\frac{t(1 - p^n_k)}{p^n_k}.$$

Поскольку p_k^n сходится к положительному пределу, это означает, что значение $E_k(\mathbf{p}^n)$ ограничено сверху. С другой стороны, величина $\max_s\{E_s(\mathbf{p}^n)\}$ стремится к бесконечности. Поэтому при достаточно больших n выполнено неравенство

$$E_k(\mathbf{p}^n) < \max_s\{E_s(\mathbf{p}^n)\}.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших n вектор $\mathbf{q} \in \mathbf{g}(\mathbf{p}^n)$ должен иметь $q_k = 0$. Действительно, согласно определению $\mathbf{g}(\cdot)$ для любого вектора $\mathbf{q}'$ из $\mathcal{S}^{l-1}$ должно быть выполнено $\mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p}^n) \leqslant \mathbf{q}\mathbf{E}(\mathbf{p}^n)$. Однако если бы $q_k > 0$, то при $E_k(\mathbf{p}^n) < \max_s\{E_s(\mathbf{p}^n)\}$ мы могли бы построить на основе вектора $\mathbf{q}$ вектор $\mathbf{q}'$, для которого $\mathbf{q}'\mathbf{E}(\mathbf{p}^n) > \mathbf{q}\mathbf{E}(\mathbf{p}^n)$. Пусть s — такое благо, для которого $E_k(\mathbf{p}^n) < E_s(\mathbf{p}^n)$. Чтобы получить требуемое противоречие можно взять $\mathbf{q}' = \mathbf{q} - q_k\mathbf{e}^k + q_k\mathbf{e}^s$, где $\mathbf{e}^k$ и $\mathbf{e}^s$ — соответствующие орты.

Тем самым мы полностью доказали, что отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график.

Поскольку отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ имеет замкнутый график, выпуклозначно и отображает непустое компактное выпуклое множество $\mathcal{S}^{l-1}$ в себя, то к нему применима теорема Какутани[24] и существует неподвижная точка $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{S}^{l-1}$:

$$\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}}).$$

(3) Покажем, что неподвижная точка отображения $\mathbf{g}(\cdot)$ является вектором цен равновесия.

Неподвижная точка $\bar{\mathbf{p}}$ отображения $\mathbf{g}(\cdot)$ не может принадлежать границе симплекса цен ($\mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}_+^{l-1}$). Этот факт следует из того, что согласно определению $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ для $\mathbf{p} \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}_+^{l-1}$ при всех $\mathbf{q} \in \mathbf{g}(\mathbf{p})$ должно быть выполнено равенство $\mathbf{q}\mathbf{p} = 0$. Если бы $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}})$, где $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{S}^{l-1} \setminus \mathcal{S}_+^{l-1}$, то мы имели бы $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{p}} = \|\bar{\mathbf{p}}\|^2 = 0$. Этому условию удовлетворяет только точка $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$, не принадлежащая симплексу цен.

Таким образом, $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$ и поэтому, как было отмечено при определении отображения, $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$. Покажем это формально.

Предположим противное. В силу закона Вальраса, если $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) \neq \mathbf{0}$ и $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, то существуют блага s и s', такие что $E_s(\bar{\mathbf{p}}) > 0$ и $E_{s'}(\bar{\mathbf{p}}) < 0$. Поскольку $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}})$ и $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$, то по определению $\mathbf{g}(\bar{\mathbf{p}})$ для любого $\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1}$ должно быть выполнено $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) \geqslant \mathbf{q}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$. Однако так как $E_s(\bar{\mathbf{p}}) > E_{s'}(\bar{\mathbf{p}})$, то нетрудно подобрать вектор цен $\mathbf{q} \in \mathcal{S}^{l-1}$ так,

[24] См. Теорему В.48 на с. II-648 в Приложении В.

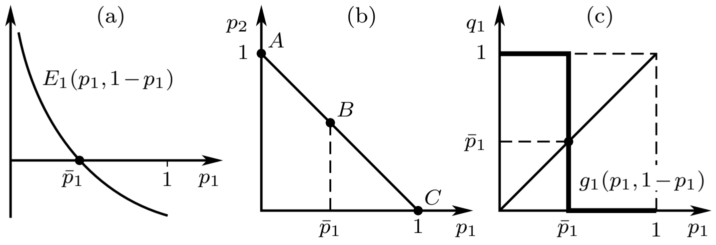


Рис. 4.13. *Иллюстрация доказательства теоремы существования*

что будет выполнено противоположное неравенство $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}}) < \mathbf{q}\mathbf{E}(\bar{\mathbf{p}})$. Можно взять, например, следующий вектор $\mathbf{q}$: $q_s = \bar{p}_s + \bar{p}_{s'}$, $q_{s'} = 0$, $q_k = \bar{p}_k,\ k \neq s, s'$. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Тем самым мы доказали существование цен $\bar{\mathbf{p}}$, при которых избыточный спрос равен нулю. ■

Приведенное доказательство можно проиллюстрировать графически (см. Рис. 4.13). Отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ определено на симплексе AC (Рис. 4.13(b)). Рассмотрим точки внутренней части отрезка AB. Они соответствуют таким ценам, при которых избыточный спрос на первое благо на Рис. 4.13(a) положителен (при этом, как следствие закона Вальраса, спрос на второе благо отрицателен). Таким точкам отображение $\mathbf{g}(\cdot)$ сопоставляет множество всех векторов цен из симплекса, при которых стоимость соответствующего избыточного спроса максимальна. Есть только один подобный вектор цен — с максимально возможной ценой первого блага и минимально возможной ценой второго блага, т. е. точка C. Аналогично точки внутренней части отрезка BC (которым соответствуют отрицательный избыточный спрос на первое благо) отображаются в точку A. Далее, точке B соответствует нулевой избыточный спрос. Стоимость нулевого избыточного спроса при всех ценах нулевая, поэтому точка B отображается в весь симплекс (отрезок AC). Граничная точка A отображается в точку C (для $\mathbf{p} = (0; 1)$ имеется только один вектор $\mathbf{q}$ из симплекса, такой что $\mathbf{pq} = 0$,— это $\mathbf{q} = (1; 0)$). Аналогично C отображается в A.

На Рис. 4.13(c) показан график отображения $\mathbf{g}(\cdot)$ в части, относящейся к ценам первого блага. При цене $\bar{p}_1$ этот график пересекается с диагональю квадрата с единичной стороной. Видим, что $(\bar{p}_1, 1 - \bar{p}_1)$ — неподвижная точка отображения $\mathbf{g}(\cdot)$. Это точка B на Рис. 4.13(b).

Опираясь на доказанную Теорему 4.8, можно показать, что в моделях обмена при непрерывности, строгой выпуклости и строгой монотонности предпочтений потребителей равновесие существует, если *совокупные* начальные запасы строго положительны, т. е. $\boldsymbol{\omega}_\Sigma > \mathbf{0}$. Это утверждение очевидно в силу того, что функция избыточного спроса в модели обмена при данных условиях на предпочтения потребителей является непрерывной, положительно однородной нулевой степени и удовлетворяет закону Вальраса на $\mathcal{S}_+^{l-1}$. Ограниченность избыточного спроса снизу следует из того факта, что спрос потребителей неотрицателен (в качестве константы t можно взять $t = -\max_k \omega_{\Sigma k}$).

Для того чтобы продемонстрировать выполнение условий Теоремы 4.8 для случая непрерывных, строго выпуклых и строго монотонных предпочтений, осталось показать выполнение последнего условия теоремы: если хотя бы одна из цен стремится к нулю, то избыточный спрос хотя бы на одно благо стремится к бесконечности. Покажем это формально.

Из $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{S}^{l-1}$ и $\boldsymbol{\omega}_\Sigma > \mathbf{0}$ следует $\mathbf{p}^0\boldsymbol{\omega}_\Sigma > \mathbf{0}$. Таким образом, существует потребитель i, такой что $\mathbf{p}^0\boldsymbol{\omega}_i > 0$. Следующее утверждение демонстрирует, что спрос этого потребителя по крайней мере на одно из благ стремится к бесконечности по мере того как $\mathbf{p}^n$ стремится к $\mathbf{p}^0$, т. е.

$$\max_k x_{ik}(\mathbf{p}^n) \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

что и доказывает, что

$$\max_k E_k(\mathbf{p}^n) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Теорема 4.9

Пусть $\{\mathbf{p}^n\} \in \mathcal{S}^{l-1}$ — последовательность цен, причем $\mathbf{p}^n \to \mathbf{p}^0$ при $n \to \infty$, и существует благо k, такое что $p_k^0 = 0$. Пусть, кроме того,

* потребитель имеет строго монотонные непрерывные предпочтения, заданные на $\mathbb{R}_+^l$;
* начальные запасы потребителя $\boldsymbol{\omega}$ таковы, что $\mathbf{p}^0\boldsymbol{\omega} > 0$[25].

Тогда

$$\max_k x_k(\mathbf{p}^n) \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

⌟

[25] Индекс потребителя для упрощения не вводим.

Доказательство: Предположим противное. Пусть спрос потребителя на все товары ограничен, т. е. существует некоторое число A, такое что $\mathbf{0} \leqslant x_k(\mathbf{p}) \leqslant A$ для всех $k \in K$. В силу того что бесконечная последовательность на компакте имеет точки сгущения, найдется некоторая подпоследовательность $\{\mathbf{p}^{n_t}\}$, такая что

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) \to \bar{\mathbf{x}}.$$

Так как $\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t})$ — оптимальное решение задачи потребителя, а предпочтения строго монотонны, то при ценах $\mathbf{p}^{n_t}$ выполняется бюджетное равенство, т. е.

$$\mathbf{p}^{n_t}\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) = \mathbf{p}^{n_t}\boldsymbol{\omega}.$$

Переходя в этом тождестве к пределу, получим, $\mathbf{p}^0\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{p}^0\boldsymbol{\omega}$.

Пусть $p_k^0 = 0$ для некоторого блага $k \in K$. Тогда в силу строгой монотонности предпочтений $\bar{\mathbf{x}} + \sigma\mathbf{e}^k \succ \bar{\mathbf{x}}$, где σ — произвольное положительное число, а $\mathbf{e}^k$ — орт. В силу того, что предпочтения потребителей непрерывны, найдется такое $\delta > 0$, что $\hat{\mathbf{x}} \succ \bar{\mathbf{x}}$, где $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \sigma\mathbf{e}^k - \delta\mathbf{e}^s$, а $s \in K$ — индекс блага, для которого $p_s^0 > 0$. Очевидно также, что

$$\mathbf{p}^0\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{p}^0\bar{\mathbf{x}} + \sigma p_k^0 - \delta p_s^0 = \mathbf{p}^0\bar{\mathbf{x}} - \delta p_s^0 < \mathbf{p}^0\bar{\mathbf{x}}.$$

В силу непрерывности предпочтений существует N, такое что $\hat{\mathbf{x}} \succ \mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t})$ для каждого $t > N$.

Так как $\mathbf{p}^{n_t} \to \mathbf{p}^0$ и $\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) \to \bar{\mathbf{x}}$, то

$$\lim \mathbf{p}^{n_t}(\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) - \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}^0(\bar{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) > 0.$$

Из определения предела следует, что найдется число M, такое что для каждого t, большего M, справедливо, что $\mathbf{p}^{n_t}(\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) - \hat{\mathbf{x}}) > 0$, т. е.

$$\mathbf{p}^{n_t}\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t}) > \mathbf{p}^{n_t}\hat{\mathbf{x}}.$$

Таким образом, мы получили, что при $t > \max\{M, N\}$ набор $\hat{\mathbf{x}}$ строго лучше набора $\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t})$ и при этом стоит дешевле. Тем самым мы получили противоречие с оптимальностью набора $\mathbf{x}(\mathbf{p}^{n_t})$. Таким образом, не существует такого A, чтобы $\mathbf{0} \leqslant x_k(\mathbf{p}) \leqslant A$ для всех k, т. е. $\max_k x_k(\mathbf{p}^n) \to \infty$ при $n \to \infty$. ■

Резюмируя проделанные выше рассуждения, сформулируем утверждение о существовании равновесия в экономике обмена при более слабых, чем ранее, предположениях.

Теорема 4.10

Пусть в экономике обмена предпочтения потребителей заданы на $X_i = \mathbb{R}^l_+$, локально ненасыщаемы, непрерывны, строго выпуклы и монотонны, а совокупные начальные запасы положительны ($\boldsymbol{\omega}_\Sigma > \mathbf{0}$). Тогда в этой экономике существует равновесие, такое что $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^l_{++}$. ⌟

4.A.2. Существование равновесия в экономике Эрроу—Дебре

Ниже будет предложено утверждение (о существовании квазиравновесия), на основе которого могут быть установлены различные условия существования равновесия (доказаны теоремы о существовании равновесия) в модели Эрроу—Дебре.

Предваряя это утверждение, сформулируем для потребителей вспомогательную задачу, решение которой при определенных условиях совпадает с решением обычной задачи потребителя. Вместе с тем решения этой задачи ведут себя «достаточно хорошо» при изменении ее параметров (отображение, которое ставит в соответствие вектору цен множество решений данной задачи является полунепрерывным сверху), чем мы и воспользуемся при доказательстве существования квазиравновесия и равновесия.

Модифицированная задача потребителя

- $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i \leqslant \beta_i$,
- $\bar{\mathbf{x}}_i$ не хуже любого другого набора $\mathbf{x}_i \in X_i$, $(\mathcal{C}^*)$
  который стоит в ценах $\mathbf{p}$ меньше, чем β_i.

Следующее утверждение устанавливает свойства решений данной задачи. Это, в частности, характеристика условий, при которых решение модифицированной задачи потребителя $(\mathcal{C}^*)$ является самым дешевым из тех, которые не хуже для этого потребителя, чем $\bar{\mathbf{x}}_i$. В свою очередь, такая задача минимизации потребительских расходов является взаимной к обычной задаче потребителя, и при определенных условиях эти задачи фактически эквивалентны (см. Теорему 2.6 на с. 129). В данном утверждении, таким образом, приведены условия, при которых решение задачи $(\mathcal{C}^*)$ является решением обычной задачи потребителя.

Теорема 4.11

Предположим, что предпочтения потребителя локально ненасыщаемы и $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи ($\mathcal{C}^*$) при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i. Тогда

{i} любой набор $\mathbf{x}_i \in X_i$, который не хуже $\bar{\mathbf{x}}_i$, сто́ит не меньше β_i ($\mathbf{p}\mathbf{x}_i \geqslant \beta_i$);

{ii} потребительский набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ удовлетворяет соотношению $\mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i = \beta_i$ и минимизирует затраты на достижение уровня благосостояния, определяемого вектором $\bar{\mathbf{x}}_i$, при ценах $\mathbf{p}$, т. е. решает следующую задачу:

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i \to \min_{\mathbf{x}_i \in X_i},$$
$$\mathbf{x}_i \succcurlyeq_i \bar{\mathbf{x}}_i.$$ ┘

Доказательство: {i} Пусть $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи ($\mathcal{C}^*$) и пусть существует допустимый набор $\mathbf{x}_i$, который сто́ит меньше β_i ($\mathbf{p}\mathbf{x}_i < \beta_i$) и который не хуже $\bar{\mathbf{x}}_i$. Тогда найдется окрестность набора $\mathbf{x}_i$, все наборы в которой дешевле β_i. В этой окрестности существует потребительский набор, который лучше $\mathbf{x}_i$, а значит, и лучше $\bar{\mathbf{x}}_i$, в противоречие с тем, что $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи ($\mathcal{C}^*$).

Пункт {ii} является очевидным следствием пункта {i}. ■

Теорема 4.12

Предположим, что $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи ($\mathcal{C}^*$) при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i, множество X_i выпукло, предпочтения потребителя непрерывны и существует $\mathbf{x}_i \in X_i$, такой что $\mathbf{p}\mathbf{x}_i < \beta_i$. Тогда $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя[26]. ┘

Доказательство: Утверждение доказывается аналогично пункту {ii} теоремы взаимности (см. Теорему 2.6 на с. 103). ■

Прежде чем приступить к доказательству теорем существования, введем вспомогательное понятие квазиравновесия, основанное на модифицированной задаче потребителя ($\mathcal{C}^*$).

Определение 4.10

Набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ называется квазиравновесием экономики Эрроу—Дебре, если выполняются следующие условия:

[26] Такой $\mathbf{x}_i \in X_i$ существует, например, при условии, что $\bar{\mathbf{x}}_i \in \operatorname{int} X_i$ и $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

* для каждого потребителя $\bar{\mathbf{x}}_i$ удовлетворяет условиям задачи $(\mathcal{C}^*)$ при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходах $\beta_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J}\gamma_{ij}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j$;
* $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи j-го производителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
* выполнены балансы по каждому благу $k \in K$:

$$\sum_{i\in I}\bar{x}_{ik} = \sum_{j\in J}\bar{y}_{jk} + \sum_{i\in I}\omega_{ik}. \qquad \triangleleft$$

Заметим, что на приобретение потребительского набора, соответствующего квазиравновесию, каждый потребитель тратит весь свой бюджет, т. е. *бюджетное ограничение выполняется как равенство.* Действительно, если хотя бы одно неравенство строгое, то совокупное потребление сто́ит меньше совокупного дохода, а это противоречит допустимости квазиравновесия.

Понятие квазиравновесия отличается от понятия равновесия только формулировкой задачи потребителя. Полунепрерывность сверху спроса для задачи $(\mathcal{C}^*)$ имеет место при более общих условиях, чем для обычной задачи потребителя. Соответственно условия существования квазиравновесия оказываются достаточно общими (см. приведенную ниже Теорему 4.13). Выполнение же условий совпадения квазиравновесия и равновесия для многих моделей общего равновесия проверяется достаточно просто. Поэтому представляется удобным разделить условия существования равновесия на условия существования квазиравновесия и условия совпадения квазиравновесия и равновесия. Это позволяет установить на основе одной Теоремы 4.13 серию теорем существования равновесия. С технической точки зрения преимущество такого двухэтапного подхода заключается в том, что в его рамках условия совпадения решения задачи $(\mathcal{C}^*)$ и обычной задачи потребителя требуется обеспечить и проверить только в найденной точке квазиравновесия, а не при всех возможных параметрах задачи потребителя, что, как правило, значительно проще. С содержательной точки зрения такой подход удачен тем, что не требует чрезмерно «смелых» предположений о предпочтениях потребителей и множествах допустимых потребительских наборов.

Теорема 4.13

Предположим, что

* для каждого потребителя $i \in I$ предпочтения $\langle \succ_i, \succcurlyeq_i, \sim_i \rangle$

локально ненасыщаемы, выпуклы и непрерывны, X_i — выпуклое замкнутое множество[27], $X_i \subset \mathbb{R}^l_+$, $\boldsymbol{\omega}_i \in X_i$;

* для каждого производителя $j \in J$ технологическое множество Y_j выпукло, замкнуто и содержит нулевой вектор (допустимость бездеятельности);
* совокупное технологическое множество $Y_\Sigma = \sum_{j\in J} Y_j$ обладает свойствами отсутствия рога изобилия (из $\mathbf{y}_\Sigma \in$ $\in Y_\Sigma \cap \mathbb{R}^l_+$ следует, что $\mathbf{y}_\Sigma = \mathbf{0}$) и необратимости (из $\mathbf{y}_\Sigma \in Y_\Sigma$ и $-\mathbf{y}_\Sigma \in Y_\Sigma$ следует, что $\mathbf{y}_\Sigma = \mathbf{0}$).

Тогда в этой экономике существует квазиравновесие $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такое что $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$. ⌟

Доказательство: Прежде всего отметим, что из условий теоремы следует ограниченность множества допустимых состояний экономики. В произвольном допустимом состоянии рассматриваемой экономики $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ все потребительские наборы $\mathbf{x}_i$ не содержат отрицательных элементов и, следовательно, их сумма тоже неотрицательна: $\sum_{i\in I} \mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{0}$. Отсюда следует, что множество векторов совокупного производства, соответствующих допустимым состояниям экономики, ограничено снизу:

$$\sum_{j\in J} \mathbf{y}_j \geqslant -\boldsymbol{\omega}_\Sigma.$$

Из предположений теоремы относительно множеств Y_j и Y_Σ следует, что наборы технологий $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_j)_{j\in J}$, такие что $\mathbf{y}_j \in Y_j$ и $\sum_{j\in J} \mathbf{y}_j \geqslant -\boldsymbol{\omega}_\Sigma$, составляют множество, которое является ограниченным. Доказательство этого факта достаточно длинное и техническое, и мы его опускаем[28].

Как следствие, можно указать такое число N, что в произвольном допустимом состоянии экономики выполнено $|y_{jk}| \leqslant N$ для всех $j \in J, k \in K$ и $\omega_{\Sigma k} + \sum_{j\in J} y_{jk} \leqslant N$ для всех $k \in K$. Можно выбрать число N таким (это мы используем в дальнейшем), чтобы $\omega_{\Sigma k} \leqslant N$ для всех $k \in K$. При таком выборе N в произвольном допустимом состоянии экономики суммарное потребление по каждому благу $k \in K$

[27] Рассуждения остаются по существу теми же, если взять в качестве X_i произвольные выпуклые замкнутые, ограниченные снизу множества.

[28] Его можно найти в классической статье K. J. Arrow and G. Debreu • Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, *Econometrica* **22** (1954): 265–290. См. также Х. Никайдо • *Выпуклые структуры и математическая экономика*, М.: Мир, 1972.

должно удовлетворять ограничениям $0 \leqslant \sum_{i\in I} x_{ik} \leqslant N$, и такому же ограничению удовлетворяют наборы всех потребителей: $0 \leqslant x_{ik} \leqslant N$.

Подобно рассмотренным ранее доказательствам существования мы будем искать квазиравновесие как неподвижную точку некоторого специальным образом сконструированного отображения из выпуклого, компактного, непустого множества $\Theta = \bigtimes_{i=1}^m \hat{X}_i \times \bigtimes_{j=1}^n \hat{Y}_j \times P$ в себя. Здесь

$$\hat{X}_i = \left\{ \mathbf{x}_i \in X_i \;\middle|\; x_{ik} \leqslant N + \varepsilon \; \forall k \in K \right\},$$
$$\hat{Y}_j = \left\{ \mathbf{y}_j \in Y_j \;\middle|\; |y_{jk}| \leqslant N + \varepsilon \; \forall k \in K \right\},$$
$$P = \left\{ \mathbf{p} \geqslant \mathbf{0} \;\middle|\; \|\mathbf{p}\|^2 \leqslant 1 \right\},$$

где ε — произвольное положительное число. Типичный элемент множества Θ будем обозначать через $\boldsymbol{\theta}$, где $\boldsymbol{\theta} = \left\langle (\mathbf{x}_i)_{i\in I}, (\mathbf{y}_j)_{j\in J}, \mathbf{p} \right\rangle$.

Покажем, что каждое из этих множеств выпукло, непусто, замкнуто и ограничено, а значит, их произведение Θ тоже выпукло, непусто, замкнуто и ограничено. Замкнутость и выпуклость модифицированных множеств допустимых потребительских наборов $\hat{X}_i$ и технологических множеств $\hat{Y}_j$ следует из того, что они являются пересечениями выпуклых замкнутых множеств. Множество $\hat{X}_i$ непусто, поскольку содержит по крайней мере начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i$ ($\boldsymbol{\omega}_i \in X_i$ и $\omega_{ik} \leqslant N$). Кроме того, $\mathbf{0} \in \hat{Y}_j$, т. е. эти множества тоже непусты. Замкнутость, выпуклость и непустота множества цен P очевидны.

Рассмотрим отображение $\boldsymbol{\varphi}\colon \Theta \rightrightarrows \Theta$ вида

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\theta}) = \bigtimes_{i\in I} \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}) \times \bigtimes_{j\in J} \boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta}) \times \boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{\theta}),$$

где отдельные компоненты определяются следующим образом:

$$\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}) =$$
$$= \left\{ \mathbf{x}'_i \in \hat{X}_i \;\middle|\; \mathbf{p}\mathbf{x}'_i \leqslant \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}),\ \mathbf{x}'_i \not\succ \mathbf{x}''_i \; \forall \mathbf{x}''_i \in \hat{X}_i\colon \mathbf{p}\mathbf{x}''_i < \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \right\},$$

где $\beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i + \max\{0, \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\mathbf{p}\mathbf{y}_j\} + 1 - \|\mathbf{p}\|^2$,

$$\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{y}'_j \in \hat{Y}_j} \mathbf{p}\mathbf{y}'_j,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname*{argmax}_{\mathbf{p}' \in P} \left\{ \mathbf{p}' \Big(\sum_{i\in I} \mathbf{x}_i - \boldsymbol{\omega}_\Sigma - \sum_{j\in J} \mathbf{y}_j \Big) \right\}.$$

Поясним смысл компонент отображения $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$.

Отображение $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$ сопоставляет каждому вектору цен и состоянию экономики решение задачи $(\mathcal{C}^*)$ с $X_i = \hat{X}_i$ и $\beta_i = \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Заметим, что используемое здесь определение дохода потребителя $\beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$ гарантирует непустоту модифицированного бюджетного множества $\{\, \mathbf{x}'_i \in \hat{X}_i \mid \mathbf{p}\mathbf{x}'_i \leqslant \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y}) \,\}$ при любых производственных планах $\mathbf{y}$ и ценах $\mathbf{p} \in P$. Бюджетное множество изменено по трем направлениям. Во-первых, в него включаются только потребительские наборы из модифицированного множества потребительских наборов $\hat{X}_i$ (которое является замкнутым и ограниченным). Во-вторых, если доходы от прибыли предприятий отрицательны, то потребитель не несет соответствующих убытков. В-третьих, к доходам потребителя добавляется «субсидия» $1 - \|\mathbf{p}\|^2$ (обеспечивающая, в частности, при $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ наличие в потребительском множестве наборов, стоимость которых меньше величины дохода потребителя).

Отображение $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta})$ сопоставляет вектору цен решение задачи производителя на модифицированном («усеченном») технологическом множестве $\hat{Y}_j$. Отображение $\boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{\theta})$ ставит в соответствие вектору избыточного спроса такие векторы цен из множества P, при которых этот избыточный спрос имеет максимальную стоимость.

Докажем, что если $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{p}})$ — неподвижная точка отображения $\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$, т. е.

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} \in \boldsymbol{\varphi}(\bar{\boldsymbol{\theta}}),$$

то она является квазиравновесием рассматриваемой экономики. Для этого, в соответствии с определением квазиравновесия, требуется показать, что

(1) $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — допустимое состояние экономики,

(2) $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя $(\mathcal{C}^*)$ для каждого $i \in I$,

(3) $\bar{\mathbf{y}}_j$ — решение задачи потребителя для каждого $j \in J$.

Докажем, что в данном состоянии выполнены балансы. Другими словами, докажем, что равен нулю избыточный спрос $\bar{\mathbf{e}} = \sum_{i\in I} \bar{\mathbf{x}}_i - \boldsymbol{\omega}_\Sigma - \sum_{j\in J} \bar{\mathbf{y}}_i$. Пусть это не так, т. е. $\bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$.

Поскольку выполнено $\bar{\mathbf{p}} \in \boldsymbol{\varphi}_p(\bar{\boldsymbol{\theta}})$, то $\bar{\mathbf{p}}$ является решением следующей задачи:

$$\mathbf{p}\bar{\mathbf{e}} \to \max_{\mathbf{p}\colon \|\mathbf{p}\|^2 \leqslant 1}.$$

Мы предположили, что $\bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$, поэтому, как несложно проверить, решение данной задачи единственно и имеет вид $\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{e}}/\|\bar{\mathbf{e}}\|$, причем $\|\bar{\mathbf{p}}\|^2 = 1$. Соответствующий максимум равен $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{e}} = \|\bar{\mathbf{e}}\|^2/\|\bar{\mathbf{e}}\| = \|\bar{\mathbf{e}}\|$. Так как $\bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{0}$, то $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{e}} > 0$.

Поскольку каждый производственный план $\bar{\mathbf{y}}_j$ максимизирует прибыль при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{0} \in \hat{Y}_j$, то $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j \geqslant 0$. Таким образом, доход потребителя в точке $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ имеет обычный вид: $\beta_i(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j \in J} \gamma_{ij}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j$. Складывая бюджетные неравенства, соответствующие точке $\bar{\boldsymbol{\theta}}$, по всем потребителям, получим, что для экономики в целом выполнено соотношение:

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i \in I}\bar{\mathbf{x}}_i \leqslant \sum_{i \in I}\beta_i(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_\Sigma + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j \in J}\bar{\mathbf{y}}_j,$$

т. е. $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{e}} \leqslant 0$. С другой стороны, как мы видели, $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{e}} > 0$. Получили противоречие. Таким образом мы доказали, что $\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$, т. е. рассматриваемое состояние сбалансировано.

По определению отображения все потребительские наборы и векторы чистого выпуска в $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ допустимы. Таким образом, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ соответствует допустимому состоянию экономики. Чтобы доказать, что $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ является квазиравновесием, нам остается убедиться в том, что $\bar{\mathbf{x}}_i$ и $\bar{\mathbf{y}}_i$ являются решениями соответствующих задач потребителя и производителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$.

Дополнительные количественные ограничения в условиях, определяющих отображения $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\cdot)$ и $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\cdot)$, выполнены как строгие неравенства, поскольку $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ соответствует допустимому состоянию экономики:

$$\bar{x}_{ik} \leqslant N < N + \varepsilon \quad \text{и} \quad |\bar{y}_{jk}| \leqslant N < N + \varepsilon.$$

Нам требуется показать, что эти ограничения несущественны в том смысле, что если их убрать, то решения соответствующих задач потребителя и производителя не изменятся[29].

Предположим, что для потребителя i это не так, и, следовательно, существует такой набор $\mathbf{x}'_i \in X_i$, что $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}'_i < \beta_i(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{y}})$ и $\mathbf{x}'_i \succ_i \bar{\mathbf{x}}_i$. Так как $\bar{x}_{ik} < N + \varepsilon$, то на отрезке, соединяющем $\bar{\mathbf{x}}_i$ и $\mathbf{x}'_i$, найдется набор $\mathbf{x}''_i$ (достаточно близкий к $\bar{\mathbf{x}}_i$), такой что $x''_{ik} \leqslant N + \varepsilon$. Для этого набора, с одной стороны, $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}''_i < \beta_i(\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}})$, а с другой стороны, $\mathbf{x}''_i \succcurlyeq_i \bar{\mathbf{x}}_i$ (поскольку предпочтения выпуклы), а это согласно Теореме 4.11 противоречит тому, что $\bar{\mathbf{x}}_i \in \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$.

Схожим образом доказывается, что $\bar{\mathbf{y}}_j$ при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ максимизирует прибыль на всем множестве Y_j. Если это не так, то найдется вектор $\mathbf{y}'_j \in Y_j$, который дает более высокую прибыль. Так как

[29] Следует понимать, что тот факт, что ограничение выполняется как строгое неравенство, не означает автоматически, что при отказе от ограничения решение не изменится!

$|y_{jk}| < N+\varepsilon$, то на отрезке между $\bar{\mathbf{y}}_j$ и $\mathbf{y}'_j$ найдется $\mathbf{y}''_j$, для которого $|y''_{jk}| < N+\varepsilon$ и который дает более высокую прибыль, чем $\bar{\mathbf{y}}_j$, а этого не может быть по определению множества $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\bar{\boldsymbol{\theta}})$.

Покажем теперь, что $\|\bar{\mathbf{p}}\|^2 = 1$. Бюджетные ограничения потребителей должны выполняться как равенства, поскольку предпочтения локально ненасыщаемы (см. Теорему 4.11). Сложив все бюджетные ограничения, получим,

$$\bar{\mathbf{p}}\sum_{i\in I}\bar{\mathbf{x}}_i = \sum_{i\in I}\beta_i(\bar{\mathbf{p}},\bar{\mathbf{y}}) = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_{\Sigma} + \bar{\mathbf{p}}\sum_{j\in J}\bar{\mathbf{y}}_j + m(1-\|\bar{\mathbf{p}}\|^2).$$

Поскольку, как мы показали, экономика сбалансирована, то отсюда следует, что $1-\|\bar{\mathbf{p}}\|^2 = 0$.

Таким образом, $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ действительно является квазиравновесием, причем $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$.

Выше мы показали, что Θ выпукло, непусто, замкнуто и ограничено. Для того чтобы показать, что рассматриваемая неподвижная точка существует, требуется проверить выполнение других условий теоремы Какутани: что значение отображения $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\theta})$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ непусто и выпукло, а также, что это отображение имеет замкнутый график.

Очевидно, что множества $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta})$ и $\boldsymbol{\varphi}_{p}(\boldsymbol{\theta})$ непусты, поскольку каждое из них является множеством решений задачи максимизации непрерывной (линейной) функции на компактном множестве.

Множество $\{\, \mathbf{x}'_i \in \hat{X}_i \mid \mathbf{p}\mathbf{x}'_i \leqslant \beta_i(\mathbf{p},\mathbf{y}) \,\}$ содержит $\boldsymbol{\omega}_i$ и является компактным. Задача нахождения наилучшего набора на этом множестве имеет хотя бы одно решение, поскольку предпочтения потребителя предполагаются непрерывными (следовательно, их можно представить непрерывной функцией полезности). Любое такое решение принадлежит и множеству $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$. Действительно, пусть $\hat{\mathbf{x}}_i$ — такое решение, т. е. $\hat{\mathbf{x}}_i$ не хуже любого набора $\mathbf{x}''_i \in \hat{X}_i$, такого что $\mathbf{p}\mathbf{x}''_i \leqslant \beta_i(\mathbf{p},\mathbf{y})$. Очевидно, что $\hat{\mathbf{x}}_i$ также не хуже любого набора $\mathbf{x}''_i \in \hat{X}_i$, такого что $\mathbf{p}\mathbf{x}''_i < \beta_i(\mathbf{p},\mathbf{y})$, а это и означает по определению, что $\hat{\mathbf{x}}_i \in \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$. Отсюда следует, что множество $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$ непусто.

Множество решений задачи максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве представляет собой выпуклое множество, поэтому множества $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta})$ и $\boldsymbol{\varphi}_{p}(\boldsymbol{\theta})$ выпуклы.

Докажем выпуклость множества $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\mathbf{x}'_i$ и $\mathbf{x}''_i$ — два различных набора, принадлежащие этому множеству. Рассмотрим их выпуклую комбинацию $\mathbf{x}_\alpha = \alpha\mathbf{x}'_i + (1-\alpha)\mathbf{x}''_i$ $(\alpha \in (0;1))$. Покажем, что $\mathbf{x}_\alpha$ тоже принадлежит $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$. Поскольку модифицированное бюджетное множество выпукло, то $\mathbf{x}_\alpha$ ему принадлежит. Нужно показать, что $\mathbf{x}_\alpha$ не хуже любого набора из модифицированного бюджетного множества, который стоит дешевле $\beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Пусть это не так и существует набор $\tilde{\mathbf{x}}_i \in \hat{X}_i$, такой что $\mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}_i < \beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$, который лучше $\mathbf{x}_\alpha$. По определению $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta})$ наборы $\mathbf{x}'_i$ и $\mathbf{x}''_i$ должны быть не хуже $\tilde{\mathbf{x}}_i$. Следовательно, оба они лучше своей выпуклой комбинации $\mathbf{x}_\alpha$. Но это невозможно, поскольку по условию теоремы предпочтения потребителя выпуклы.

Для доказательства теоремы осталось проверить, что построенное отображение множества Θ в себя имеет замкнутый график. Предположим, что последовательности $\{\boldsymbol{\theta}^n\} \in \Theta$ и $\{\hat{\boldsymbol{\theta}}^n\} \in \Theta$ с пределами $\boldsymbol{\theta}^0$ и $\hat{\boldsymbol{\theta}}^0$ соответственно таковы, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}^n \in \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\theta}^n)$. Нам требуется показать, что $\hat{\boldsymbol{\theta}}^0 \in \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\theta}^0)$.

Покажем, что $\hat{\mathbf{x}}_i^0 \in \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}^0)$. Так как $\hat{\mathbf{x}}_i^n \in \boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}^n)$, то $\mathbf{p}^n\hat{\mathbf{x}}_i^n \leqslant \leqslant \beta(\mathbf{p}^n, \mathbf{y}^n)$. С учетом того, что $\beta(\cdot)$ является непрерывной функцией, в этих неравенствах можно перейти к пределу: $\mathbf{p}^0\hat{\mathbf{x}}_i^0 \leqslant \beta(\mathbf{p}^0, \mathbf{y}^0)$. Так как множество $\hat{X}_i$ замкнуто, то $\hat{\mathbf{x}}_i^0$ лежит в $\hat{X}_i$ как предел последовательности, целиком принадлежащей $\hat{X}_i$. Пусть $\mathbf{x}'_i \in \hat{X}_i$ — набор, такой что он лучше $\hat{\mathbf{x}}_i^0$. Покажем, что он не может стоить меньше $\beta_i(\mathbf{p}, \mathbf{y})$. Действительно, поскольку предпочтения непрерывны, то найдется номер M, такой что $\mathbf{x}'_i \succ_i \hat{\mathbf{x}}_i^n$ при $n > M$. Тогда, по определению множеств $\boldsymbol{\varphi}_{xi}(\boldsymbol{\theta}^0)$, при $n > M$ должно выполняться $\mathbf{p}^n\hat{\mathbf{x}}'_i \geqslant \beta(\mathbf{p}^n, \mathbf{y}^n)$. Переходя к пределу, получим $\mathbf{p}^0\hat{\mathbf{x}}'_i \geqslant \beta(\mathbf{p}^0, \mathbf{y}^0)$.

Доказательство того, что $\hat{\mathbf{y}}_j^0 \in \boldsymbol{\varphi}_{yj}(\boldsymbol{\theta}^0)$ и $\hat{\mathbf{p}}^0 \in \boldsymbol{\varphi}_p(\boldsymbol{\theta}^0)$ не представляет особой сложности, поскольку отображения $\boldsymbol{\varphi}_{yj}(\cdot)$ и $\boldsymbol{\varphi}_p(\cdot)$ основаны на задачах максимизации линейной функции на замкнутом множестве. ■

Как анонсировалось выше, на основе Теоремы 4.13 (с учетом Теорем 4.11 и 4.12) можно доказать несколько различных вариантов теорем существования вальрасовского равновесия в модели Эрроу—Дебре при дополнительных предположениях, гарантирующих, что найденное квазиравновесие является равновесием.

Теорема 4.14

Пусть выполнены условия Теоремы 4.13 и $\boldsymbol{\omega}_i \in \operatorname{int} X_i$ для всех $i \in I$[30]. Тогда верны следующие утверждения.

[30] Например, множества допустимых потребительских наборов имеют вид $X_i = \mathbb{R}^l_+$, и $\boldsymbol{\omega}_i > \mathbf{0}$.

{i} В рассматриваемой экономике существует равновесие по Вальрасу $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такое что $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$.

{ii} Если предпочтения хотя бы одного из потребителей (i') монотонны и выполнено $X_{i'} + \mathbb{R}^l_+ \subset X_{i'}$, то в рассматриваемой экономике существует равновесие по Вальрасу $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такое что $\bar{\mathbf{p}} \geqslant\neq \mathbf{0}$. ⌟

Доказательство: {i} Пусть $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — квазиравновесие в экономике Эрроу—Дебре, в котором не все цены равны нулю (согласно Теореме 4.13 оно существует). Покажем, что это квазиравновесие является равновесием. Рассмотрим произвольного потребителя i. Доход данного потребителя в квазиравновесии имеет вид $\bar{\beta}_i = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{y}}_j$. Второе слагаемое — доход от прибыли предприятий — неотрицательная величина, поскольку, по предположению, $\mathbf{0} \in Y_j$. Таким образом, $\bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i \leqslant \bar{\beta}_i$. Набор $\mathbf{x}_i^\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_i - \varepsilon\bar{\mathbf{p}}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ является допустимым для потребителя i. Стоимость этого набора в ценах $\bar{\mathbf{p}} \neq \mathbf{0}$ меньше $\bar{\beta}_i$, поскольку $\bar{\mathbf{p}}\mathbf{x}_i^\varepsilon = \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i - \varepsilon\|\bar{\mathbf{p}}\|^2 < \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i \leqslant \bar{\beta}_i$. Согласно Теореме 4.12 наличие такого набора $\mathbf{x}_i^\varepsilon$ означает, что набор $\bar{\mathbf{x}}_i$, являющийся решением модифицированной задачи потребителя $(\mathcal{C}^*)$ при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\bar{\beta}_i$, должен быть также решением соответствующей обычной задачи потребителя. Таким образом, $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ является также и вальрасовским равновесием.

{ii} Как показано в предыдущем пункте, каждое квазиравновесие является равновесием. Покажем, что в квазиравновесии все цены неотрицательны. Пусть это не так и $\bar{p}_k < 0$ для некоторого блага k. Увеличивая количество этого блага у потребителя i', найдем допустимый набор, который не хуже набора $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ (по монотонности предпочтений) и сто́ит меньше его. Это, согласно Теореме 4.11, противоречит тому, что $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ — решение задачи $(\mathcal{C}^*)$. ■

Теорема 4.15

Пусть выполнены условия Теоремы 4.13, для каждого потребителя $i \in I$ предпочтения строго монотонны, множество допустимых потребительских наборов удовлетворяет условию $X_i + \mathbb{R}^l_+ \subset X_i$ и содержит некоторый набор $\underline{\mathbf{x}}_i$, такой что $\underline{\mathbf{x}}_i \leqslant\neq \boldsymbol{\omega}_i$. Пусть также $\sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i > \sum_{i\in I} \underline{\mathbf{x}}_i$. Тогда в рассматриваемой экономике существует равновесие по Вальрасу $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, такое что $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$. ⌟

Доказательство: Согласно Теореме 4.13 существует квазиравновесие $\bar{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$. По аналогии с предыдущей теоремой доказывается, что в этом квазиравновесии $\bar{\mathbf{p}} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Умножая неравенство $\sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i > \sum_{i\in I} \underline{\mathbf{x}}_i$ на цены, получим $\bar{\mathbf{p}} \sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i > \bar{\mathbf{p}} \sum_{i\in I} \underline{\mathbf{x}}_i$, откуда следует, что хотя бы для одного потребителя i' выполнено $\bar{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{x}}_{i'} < \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_{i'} \leqslant \bar{\beta}_i$. Таким образом, по Теореме 4.12 набор $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ является решением задачи этого потребителя.

Покажем, что в квазиравновесии все цены положительны. Пусть это не так и $\bar{p}_k = 0$ для некоторого блага k. Увеличивая количество этого блага у потребителя i', найдем допустимый набор, который лучше набора $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ (по строгой монотонности предпочтений) и сто́ит столько же. Это противоречит тому, что $\bar{\mathbf{x}}_{i'}$ — решение задачи потребителя. Таким образом, $\bar{\mathbf{p}} > \mathbf{0}$.

Для произвольного потребителя, умножая соотношение $\underline{\mathbf{x}}_i \leqslant\neq \boldsymbol{\omega}_i$ на положительные цены, получим $\bar{\mathbf{p}}\underline{\mathbf{x}}_i < \bar{\mathbf{p}}\boldsymbol{\omega}_i \leqslant \bar{\beta}_i$. Таким образом, согласно Теореме 4.12 набор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя. ■

Задачи к главе

4.88 Покажите, что в экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами, если предпочтения гомотетичны и одинаковы, то граница Парето совпадает с диагональю ящика Эджворта. Как найти равновесие в такой экономике, используя свойства границы Парето?

4.89 В моделях общего равновесия часто рассматривают альтернативную концепцию допустимого состояния экономики, заменяя балансы благ

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{i=1}^{m} \omega_{ik} + \sum_{j=1}^{n} y_{jk} \ \forall k \in K$$

на полубалансы

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \omega_{ik} + \sum_{j=1}^{n} y_{jk} \ \forall k \in K.$$

Обозначим такую экономику $\mathcal{E}_A$.

Равновесием в этом случае называют набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$, удовлетворяющий следующим условиям:

- цены $\bar{\mathbf{p}}$ неотрицательны;
- каждый вектор $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи потребителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и доходе $\beta_i = \sum_{k\in K} \bar{p}_k\omega_{ik} + \sum_{j\in J} \gamma_{ij}\pi_j$;

- каждый вектор $\bar{\mathbf{y}}_j$ является решением задачи производителя при ценах $\bar{\mathbf{p}}$;
- состояние $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ является допустимым;
- выполнен закон Вальраса, т. е.

$$\bar{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{m} \bar{\mathbf{x}}_i = \bar{\mathbf{p}} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\omega}_i + \bar{\mathbf{p}} \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathbf{y}}_j.$$

Рассмотрите также экономику с одним дополнительным производителем, технологическое множество которого имеет вид $Y_{n+1} = -\mathbb{R}^l_+$ (технология утилизации благ без издержек), и с балансами в виде равенств. Обозначим такую экономику $\mathcal{E}_U$. Рассмотрите равновесие в этой экономике и продемонстрируйте его эквивалентность равновесию в экономике $\mathcal{E}_A$, а именно:

(A) Покажите, что в любом равновесии экономики $\mathcal{E}_U$ цены благ неотрицательны.

(B) Покажите, что если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_A$, то $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}_{n+1}))$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_U$, где

$$\bar{\mathbf{y}}_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\mathbf{x}}_i - \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\omega}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{\mathbf{y}}_j.$$

(C) Покажите, что если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, (\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}_{n+1}))$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_U$, тогда $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ — равновесие в экономике $\mathcal{E}_A$.

4.90 Рассмотрим экономику чистого обмена с m потребителями. *Коалицией* называется любое непустое подмножество множества потребителей. Говорят, что коалиция $S \subset I$ *блокирует* данное состояние экономики $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$, если существует состояние экономики $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m)$, такое что $\mathbf{y}_i \succ_i \mathbf{x}_i$ для всех i из S и $\sum_{i \in S} \mathbf{y}_i \leqslant \sum_{i \in S} \boldsymbol{\omega}_i$, где $\boldsymbol{\omega}_i$ — начальные запасы потребителя i, а $\succ_i$ — его предпочтения (другими словами, участники коалиции могут, обмениваясь только друг с другом, улучшить свое положение, по сравнению с рассматриваемым состоянием $\mathbf{x}$). Наконец, *ядро* данной экономики состоит из распределений $\mathbf{x}$, которые не блокируются ни одной из коалиций.

Предположим, что допустимые потребительские наборы задаются неравенствами $\mathbf{x}_i \geqslant \mathbf{0}$.

(A) Докажите, что если предпочтения потребителей строго монотонны и непрерывны, то каждое распределение из ядра Парето-оптимально.

(B) Покажите, приведя соответствующий контрпример, что отказ от условия строгой монотонности делает утверждение, вообще говоря, неверным.

(C) Докажите следующий аналог первой теоремы благосостояния: если предпочтения потребителей локально ненасыщаемы, то равновесное распределение принадлежит ядру экономики.

4.91 Приведите пример экономики обмена, ядро которой…

(A) совпадает с границей Парето;
(B) содержит границу Парето как собственное подмножество;
(C) содержит только одно состояние экономики.

4.92 Найдите ядро в экономике обмена с двумя благами и двумя потребителями, предпочтения которых описываются функциями Кобба—Дугласа, а начальные запасы равны $(1, a)$ и $(b, 1)$ соответственно при разных значениях $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

4.93 Найти в соответствующей экономике обмена с двумя потребителями и двумя благами (и потребительским множеством, удовлетворяющим ограничениям $\mathbf{x}_i \geqslant 0$) и с начальными запасами $\boldsymbol{\omega}_1 = (1; 1)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (1; 1)$

- равновесие,
- границу Парето,
- ядро.

Функции полезности обоих потребителей одинаковы и имеют вид

(A) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$;
(B) $u(x_1, x_2) = \alpha_1 \sqrt{x_1} + \alpha_2 \sqrt{x_2}$;
(C) $u(x_1, x_2) = \alpha_1 \sqrt{x_1} + \alpha_2 x_2$;
(D) $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} \exp(\alpha_2 x_2)$.

4.94 Предположим, что предпочтения потребителей в модели обмена допускают представление линейными функциями полезности. Какие свойства этих функций гарантируют, что каждое равновесие этой модели…

- принадлежит слабой границе Парето;
- принадлежит сильной границе Парето.

4.95 Покажите, что выпуклость предпочтений потребителей и Парето-эффективность состояния экономики с начальными запасами в качестве потребительских наборов не гарантирует, что начальное распределение является равновесным. Приведите соответствующий контрпример.

4.96 Покажите, что в экономике обмена прирост начальных запасов потребителя может привести к падению его полезности в точке равновесия. (*Указание:* Рассмотрите экономику с двумя товарами и двумя потребителями с одинаковыми предпочтениями, описываемыми квазилинейной функцией полезности $u(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1} + x_2$. Рассмотрите сравнительную статику потребителя 1 в зависимости от изменения начальных запасов $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$.)

4.97 (A) Предположим, что в экономике обмена с непрерывными, строго выпуклыми и строго монотонными квазилинейными сепарабельными предпочтениями происходит перераспределение начальных запасов. Покажите, что если начальные запасы потребителя возрастают, то его полезность не может уменьшиться.

(B) Рассмотрим, как и выше, передачу ресурсов от первого потребителя ко второму, но на этот раз предпочтения не квазилинейные. Предположите, что передаваемое количество мало́ и что изменение (относительное) равновесной цены мало́. Покажите, что полезность потребителя 1 может уменьшиться. Проинтерпретируйте с точки зрения соотношения между эффектом замены и эффектом дохода.

(C) Покажите, что в экономике с двумя товарами и двумя потребителями этот парадокс может произойти только в случае единственности равновесия. (*Указание:* Покажите, что если передача начальных запасов потребителя 1 ведет к уменьшению его полезности, то в первоначальной ситуации должно существовать еще одно равновесие с еще более низким уровнем полезности у потребителя 1.)

4.98 Рассмотрим экономику обмена с двумя благами и тремя потребителями, которые имеют положительные начальные запасы и следующие функции полезности:

$$u_1(x_{11}, x_{12}) = e^{x_{11}} x_{12}, \quad u_2(x_{21}, x_{22}) = \sqrt{x_{21}} + \sqrt{x_{22}},$$
$$u_3(x_{31}, x_{32}) = \min\{x_{31}, x_{32}\}.$$

(A) Найдите функции спроса потребителей, опишите их свойства.

(B) Найдите функции избыточного спроса и проверьте, что они являются положительно однородными нулевой степени и удовлетворяют закону Вальраса.

(C) При каких начальных запасах известные вам утверждения гарантируют существование равновесия в этой экономике?

(D) Вычислите равновесие при следующих начальных запасах:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (2; 3), \quad \boldsymbol{\omega}_2 = (1; 4), \quad \boldsymbol{\omega}_3 = (2; 1).$$

4.99 Пусть начальные запасы в экономике обмена лежат на Парето-границе. При каких дополнительных условиях можно гарантировать существование и единственность равновесия в этой экономике?

4.100 Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли в этом случае выпуклость предпочтений единственность равновесия (если оно существует)? Аргументируйте свой ответ, дав доказательство единственности равновесия либо приведя пример неединственности.

4.101 Пусть в модели обмена предпочтения потребителей и их начальные запасы совпадают. Гарантирует ли строгая выпуклость предпочтений единственность равновесия (если оно существует)? Аргументируйте свой ответ, дав доказательство единственности равновесия либо приведя пример неединственности.

4.102 (A) Рассмотрите экономику обмена (с m потребителями) с совпадающими и строго выпуклыми предпочтениями потребителей, представимыми непрерывно дифференцируемыми функциями полезности, и совпадающими начальными запасами. Покажите, что равновесие, если существует, единственно. Какими будут при этом равновесные цены и равновесное распределение?

(B) Какие дополнительные предположения относительно этой экономики гарантируют существование равновесия? Аргументируйте свой ответ.

4.103 Рассмотрите модель обмена с m одинаковыми потребителями со строго выпуклыми предпочтениями.

(A) Покажите, что эгалитарное распределение $\mathbf{x}_i = \sum_{i\in I} \boldsymbol{\omega}_i/m$ принадлежит границе Парето.

(B) Принадлежит ли это распределение ядру данной экономики?

(C) При каких дополнительных предположениях это эгалитарное распределение можно реализовать как равновесие? при каких ценах?

(D) Что можно сказать о таких ценах в случае, если предпочтения представимы строго монотонной дифференцируемой функцией полезности?

(E) Остается ли это утверждение справедливым при отказе от предположения о выпуклости предпочтений?

Глава

Квазилинейная экономика и частное равновесие

5

5.1. Введение

В этой главе мы рассмотрим теоретическое основание моделей частного равновесия, т. е. таких моделей, в которых рассматривается равновесие на рынке одного товара в предположении, что цены всех остальных товаров остаются фиксированными. Такие модели были популяризированы Альфредом Ма́ршаллом в классической книге «Принципы экономикс»[1]. Теперь этот подход чрезвычайно широко используется в начальных курсах микроэкономики, поскольку он позволяет проводить простой графический анализ многих экономических явлений.

Как известно, спрос и предложение каждого блага в моделях *общего равновесия* зависят, вообще говоря, от цен всех рассматриваемых благ. Такая зависимость не позволяет анализировать рынки благ по отдельности, поскольку изменения на одном рынке влияют на ситуацию на других рынках, приводя к сдвигу кривых спроса и предложения на этих рынках. Это, в свою очередь, приводит к сдвигам кривых спроса и предложения на данном рынке и т. д. Поэтому частный равновесный анализ оказывается корректным только в ситуациях, когда указанные зависимости отсутствуют. Это случай так называемых квазилинейных предпочтений. Если предпочтения потребителей *квазилинейны*, то функция спроса, соответствующая этим предпочтениям, характеризуется отсутствием эффекта дохода (по всем благам, кроме одного). Если к тому же предпочтения и технологии *сепарабельны*, то рынки (всех благ, кроме одного) оказываются полностью независимыми и при изменениях на одном из них состояния прочих рынков остаются неизменными. В данной главе нам

[1] A. Marshall · *Principles of Economics*, London: Macmillan & Co., 1890; рус. пер. А. Маршалл · *Принципы экономической науки*, М.: Прогресс, 1983.

предстоит проиллюстрировать сказанное. Таким образом, экономика с квазилинейными сепарабельными предпочтениями годится для моделирования ситуаций, в которых в первом приближении можно пренебречь эффектом дохода и взаимозависимостью рынков.

Экономику с квазилинейными предпочтениями потребителей назовем **квазилинейной**. Приведем соответствующие обозначения и определения. Рассмотрим экономику с $l+1$ благом, m потребителями и n производителями. Обозначим через $I = \{1, \ldots, m\}$ множество потребителей, а через $J = \{1, \ldots, n\}$ множество производителей.

Предположим, что предпочтения i-го потребителя описываются функцией полезности следующего вида:

$$u_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}, z_i) = v_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}) + z_i.$$

Эту функцию полезности принято называть **квазилинейной**. Последнее благо будем интерпретировать как деньги[2]. В дальнейшем будем делать два различных предположения о допустимых значениях величины z_i: что $z_i \in \mathbb{R}$ (может принимать и отрицательные значения[3]) или же что $z_i \geqslant 0$. Будем предполагать, что множество физически допустимых потребительских наборов потребителя i имеет вид $X_i \times \mathbb{R}$ ($X_i \times \mathbb{R}_+$ соответственно), где X_i — множество физически допустимых потребительских наборов из первых l благ. Обычно предполагается, что $X_i = \mathbb{R}^l_+$, но можно анализировать также случаи, когда некоторое благо потребляется в дискретных количествах, например, когда $x_{ik} = 0$ или 1 (благо потребляется или нет), или когда $x_{ik} = 0, 1, 2, \ldots$ (благо потребляется в целых неотрицательных количествах).

Как обычно, каждый потребитель сталкивается с бюджетным ограничением, формируемым его начальными запасами и доходами, получаемыми от его доле́й в фирмах. Пусть каждый потребитель обладает начальными запасами только $(l+1)$-го блага. Другими словами, начальный запас потребителя i имеет вид $(0, 0, \ldots, 0, \omega_i)$, причем $\omega_i \geqslant 0$. Предполагается также, что потребитель $i \in I$ получает доход от владения активами в виде доле́й от прибылей фирм. Числа

---

[2] Тем самым мы имеем в виду следующую интерпретацию: рассматриваемая нами экономика является малой частью некоторой большей экономики, в которой эти деньги можно потратить на покупку производимых там товаров.

[3] Это предположение введено для упрощения анализа. В дальнейшем предлагаются условия, которые гарантируют неотрицательность значений z_i в рассматриваемых состояниях равновесия.

$\gamma_{ij} \geqslant 0$ $(i \in I,\ j \in J)$ задают распределение прав на получение прибыли, т. е. γ_{ij} обозначает долю потребителя i в прибыли фирмы j.

Производители в модели представлены технологиями вида

$$(\mathbf{y}, -r) = (y_1, \ldots, y_l, -r),$$

где y_k для $k = 1, \ldots, l$ — объемы выпуска первых l благ, а r — затраты последнего, $(l+1)$-го, блага на производство первых l благ. Таким образом, предполагается, что единственным затрачиваемым благом в каждом технологическом процессе является $(l+1)$-е благо — деньги[4]. В анализе удобно описывать технологии с помощью **функции издержек** $c_j(y_1, \ldots, y_l)$, которая каждому вектору объемов первых l благ сопоставляет необходимые для производства этих объемов затраты $(l+1)$-го блага. Для того чтобы формально установить связь функции издержек с технологическим множеством j-го предприятия (Y_j), рассмотрим следующую задачу:

$$r \to \min_r,$$
$$(y_1, \ldots, y_l, -r) \in Y_j.$$

Функция $c_j(\mathbf{y})$ сопоставляет каждому вектору объемов производства $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_l)$ значение целевой функции этой задачи.

Пусть $Y_j^o \subset \mathbb{R}^l$ — множество всех векторов выпуска, которые могут быть произведены при помощи некоторых затрат $(l+1)$-го блага при данном производственном множестве Y_j, т. е.

$$Y_j^o = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^l \;\middle|\; (\mathbf{y}, -r) \in Y_j \text{ для некоторого } r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Если предположить, что для данного $\mathbf{y} \in Y_j^o$ множество тех затрат r, которые его могут обеспечить, является ограниченным снизу (например, затраты не могут быть меньше нуля) и что производственное множество Y_j замкнуто, то в указанной задаче существует оптимальное решение. Для такого вектора выпуска определено значение издержек $c_j(\mathbf{y})$.

Свойства определенной таким образом функции издержек тесно связаны со свойствами функции издержек, как она определена в гл. 3. В частности, из выпуклости множества Y_j следует выпуклость функции $c_j(\cdot)$ (см. пункт {vi} Теоремы 3.14).

[4] Вообще говоря, мы можем предполагать, что некоторые из первых l благ затрачиваются в производстве и для них может выполняться $y_k < 0$; это мало повлияет на анализ.

В разных моделях возникают различные множества Y_j^o. В некоторых случаях допустимы только неотрицательные целочисленные выпуски, т. е. $Y_j^o = \{0, 1, 2, \ldots\}$ в случае одного блага ($l = 1$). Есть модели с конечным числом возможных выпусков, например, $Y_j^o = \{0, 1\}$. Но чаще всего предполагается, что $Y^o = \mathbb{R}_+^l$, или же, если имеет место свободное расходование произведенной продукции (возможность избавиться от нее), что $Y_j^o = \mathbb{R}^l$.

Учитывая особый характер $(l+1)$-го блага в квазилинейной экономике, естественно предположить, что производственные множества характеризуются свободой расходования этого блага, т. е. если $(\mathbf{y}, -r) \in Y_j$, то $(\mathbf{y}, -r') \in Y_j$ для всех $r' \geqslant r$. При этом предположении, если $c_j(\cdot)$ определена на всем множестве Y_j^o, то производственное множество Y_j однозначно описывается функцией издержек:

$$(\mathbf{y}, -r) \in Y_j \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} \in Y_j^o \text{ и } r \geqslant c_j(\mathbf{y}).$$

(Доказательство этого факта тривиально; см. задачу 5.1.) В дальнейшем будем считать, что данные условия выполнены.

Следует понимать, что помимо того, что из соображений удобства делаются дополнительные предположения и вводятся обозначения, о которых говорилось выше, само по себе производство в моделях квазилинейной экономики мало чем отличается от производства в моделях экономики общего вида. То есть в производстве нет ничего специфически «квазилинейного» — экономика квазилинейна только постольку, поскольку предпочтения потребителей являются квазилинейными. В то же время, квазилинейная экономика будет сепарабельной, только если сепарабельными являются как предпочтения потребителей, так и функции издержек.

Мы будем рассматривать два типа экономик. В одной из них (экономика $\mathcal{E}_Q$) потребитель не сталкивается с ограничением типа $z_i \geqslant 0$ (может «брать в долг» неограниченную сумму денег), в другой же эти ограничения присутствуют (экономика $\mathcal{E}_Q^+$).

Под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q$ мы будем понимать такое состояние $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{r}) = \langle(\mathbf{x}_1, z_1), \ldots, (\mathbf{x}_m, z_m), (\mathbf{y}_1, r_1), \ldots, (\mathbf{y}_n, r_n)\rangle$, что выполнены соотношения

$$\sum_{i \in I} x_{ik} = \sum_{j \in J} y_{jk} \quad \text{при } k = 1, \ldots, l,$$

$$\sum_{i \in I} z_i + \sum_{j \in J} r_j = \sum_{i \in I} \omega_i,$$

$$r_j \geqslant c_j(\mathbf{y}_j)\ \forall j \in J,$$
$$\mathbf{x}_i \in X_i\ \forall i \in I, \quad \mathbf{y}_j \in Y_j^o\ \forall j \in J.$$

Соответственно под допустимым состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q^+$ будем понимать такое состояние, что выполнены все вышеприведенные условия и, кроме того, $z_i \geqslant 0$ для всех потребителей.

5.2. Характеристика Парето-оптимальных состояний

Квазилинейностью предпочтений потребителей объясняется ряд особых свойств рассматриваемой экономики. В частности, анализировать Парето-оптимальные состояния в квазилинейной экономике можно с помощью следующей задачи оптимизации:

Задача максимизации благосостояния

$$\begin{gathered}\sum_{i\in I} v_i(\mathbf{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\mathbf{y}_j) \to \max_{\mathbf{x},\mathbf{y}},\\ \sum_{i\in I} x_{ik} = \sum_{j\in J} y_{jk}\ \forall k = 1,\ldots,l,\\ \mathbf{x}_i \in X_i\ \forall i \in I, \quad \mathbf{y}_j \in Y_j^o\ \forall j \in J.\end{gathered} \tag{$\mathcal{W}$}$$

Целевая функция этой задачи представляет собой индикатор благосостояния, о котором речь пойдет ниже. Следующая теорема дает полное описание границы Парето в экономике $\mathcal{E}_Q$ с помощью задачи $(\mathcal{W})$.

Теорема 5.1

Состояние $\hat{S} = \langle(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\mathbf{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\mathbf{y}}_n, \hat{r}_n)\rangle$ является Парето-оптимальным состоянием в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q$ тогда и только тогда, когда

$$(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) = (\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m, \hat{\mathbf{y}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{y}}_n)$$

является решением задачи $(\mathcal{W})$,

$$\hat{r}_j = c_j(\hat{\mathbf{y}}_j)$$

и

$$\sum_{i\in I} \hat{z}_i = \sum_{i\in I} \omega_i - c_j(\hat{\mathbf{y}}_j).$$

┘

Доказательство: ($\Rightarrow$) Докажем сначала, что если $\hat{S}$ — Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q$, то $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи $(\mathcal{W})$.

Напомним, что Парето-оптимальное состояние при любом $i_0 \in I$ является решением следующей задачи условной максимизации:

$$\begin{gathered} v_{i_0}(\mathbf{x}_{i_0}) + z_{i_0} \to \max_{\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{r}}, \\ v_i(\mathbf{x}_i) + z_i \geqslant v_i(\hat{\mathbf{x}}_i) + \hat{z}_i \ \forall i \neq i_0, \\ \sum_{i\in I} x_{ik} = \sum_{j\in J} y_{jk} \ \forall k = 1, \ldots, l, \\ \sum_{i\in I} z_i + \sum_{j\in J} r_j = \sum_{i\in I} \omega_i, \\ r_j \geqslant c_j(\mathbf{y}_j) \ \forall j \in J, \\ \mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I, \quad \mathbf{y}_j \in Y_j^o \ \forall j \in J. \end{gathered}$$

Нетрудно показать, в этой задаче первое и четвертое ограничения можно заменить на равенства, не изменяя множество решений задачи. Это связано с тем, что у всех потребителей полезность возрастает по «квазилинейному» благу. Выражая из этих равенств z_i и r_j и исключая их из оставшихся неравенств, видим, что данная задача сводится к задаче $(\mathcal{W})$.

($\Leftarrow$) Обратно, пусть $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ является решением задачи $(\mathcal{W})$. Рассмотрим произвольные $\hat{z}_i$, удовлетворяющие балансам

$$\sum_{i\in I} \hat{z}_i = \sum_{i\in I} \omega_i - \sum_{j\in J} \hat{r}_j, \tag{$*$}$$

где $\hat{r}_j = c_j(\hat{\mathbf{y}}_j)$ для всех $j \in J$. Нетрудно видеть, что состояние $\hat{S}$ является допустимым состоянием экономики $\mathcal{E}_Q$. Докажем, что оно Парето-оптимально.

Пусть это не так и существует другое допустимое состояние экономики $\mathcal{E}_Q$

$$\tilde{S} = \langle (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n) \rangle$$

такое что для всех потребителей выполнено

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\hat{\mathbf{x}}_i) + \hat{z}_i$$

и существует по крайней мере один потребитель i_0, для которого выполнено

$$v_{i_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\hat{\mathbf{x}}_{i_0}) + \hat{z}_{i_0}.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \sum_{i\in I} \tilde{z}_i > \sum_{i\in I} v_i(\hat{\mathbf{x}}_i) + \sum_{i\in I} \hat{z}_i. \qquad (**)$$

Так как $\tilde{S}$ — допустимое состояние, то

$$\sum_{i\in I} \tilde{z}_i + \sum_{j\in J} \tilde{r}_j = \sum_{i\in I} \omega_i$$

и

$$\tilde{r}_j \geqslant c_j(\tilde{\mathbf{y}}_j)$$

для всех $j \in J$, откуда

$$\sum_{i\in I} \tilde{z}_i \leqslant \sum_{i\in I} \omega_i - \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\mathbf{y}}_j). \qquad (***)$$

Складывая $(*)$, $(**)$ и $(***)$, получаем

$$\sum_{i\in I} v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\tilde{\mathbf{y}}_j) > \sum_{i\in I} v_i(\hat{\mathbf{x}}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\hat{\mathbf{y}}_j).$$

Поскольку $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})$ является допустимым в задаче $(\mathcal{W})$, то это означает, что существование состояния $\tilde{S}$ противоречит оптимальности $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ в задаче $(\mathcal{W})$. ■

Как видно из доказанной теоремы, задача поиска Парето-оптимума для экономики $\mathcal{E}_Q$ эквивалентна задаче $(\mathcal{W})$. В то же время множество допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_Q^+$ является подмножеством множества допустимых состояний для экономики $\mathcal{E}_Q$. Поэтому не исключена ситуация, в которой Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q^+$ не является Парето-оптимумом экономики $\mathcal{E}_Q$ и, следовательно, не будет решением задачи $(\mathcal{W})$.

Несложно придумать пример экономики $\mathcal{E}_Q^+$, такой чтобы в какой-нибудь точке Парето-границы ограничение $z_i \geqslant 0$ оказалось активным для одного из потребителей и чтобы при снятии этого ограничения можно было бы увеличить полезность одного из потребителей, не уменьшая полезность остальных. Читатель может сконструировать такой пример самостоятельно (см. задачу 5.2). Но даже если в Парето-оптимуме экономики $\mathcal{E}_Q^+$ все ограничения $z_i \geqslant 0$ выполняются как строгие неравенства, снятие данных ограничений может позволить осуществить Парето-улучшение. Приведем пример.

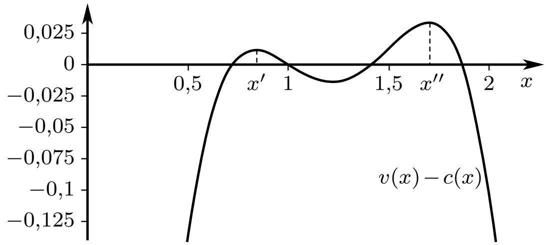


Рис. 5.1. *Пример существенности ограничения неотрицательности потребления $(l+1)$-го блага*

Пример 5.1

Рассмотрим экономику с одним потребителем ($m = 1$), одним производителем ($n = 1$) и двумя благами ($l + 1 = 2$). Для упрощения обозначений индексы будем опускать. Предпочтения потребителя заданы функцией $v(x) = 5x^3 - 9x^2 + 6{,}9x$ ($x \geqslant 0$), а технологическое множество фирмы — функцией издержек $c(y) = y^4$ ($y \geqslant 0$). В Парето-оптимуме должны выполняться равенства $y = x$, $r = c(x)$ и $z + r = \omega$. Исключая z, y и r, видим, что поиск Парето-оптимума сводится к максимизации функции

$$v(x) - c(x)$$

по x на отрезке $[0, c^{-1}(\omega)]$. (Здесь ограничение $x \leqslant c^{-1}(\omega)$ соответствует ограничению $z \geqslant 0$.)

Пусть $\omega = 1$; при этом $c^{-1}(\omega) = 1$. Функция $v(x) - c(x)$ имеет два локальных максимума: $x' \approx 0{,}83473$ и $x'' \approx 1{,}6988$ (Рис. 5.1). Только второй из этих максимумов является глобальным. Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q^+$ достигается при $x = x'$, поскольку допустимые значения x составляют отрезок $[0; 1]$. В то же время Парето-оптимум экономики $\mathcal{E}_Q$ и, следовательно, оптимум в задаче $(\mathcal{W})$ достигается при $x = x''$. ▲

В этом примере ключевым моментом является то, что функция $v(\cdot)$ не является вогнутой. Можно было построить подобный пример иначе — так, чтобы функция $v(\cdot)$ была вогнутой, но функция издержек не была выпуклой (см. задачу 5.3). Таким образом, для доказательства аналога первой части предыдущей теоремы в экономике $\mathcal{E}_Q^+$ следует потребовать, чтобы эта эконимика была «выпуклой», т. е. все функции $v_i(\cdot)$ были вогнутыми, а функции $c_j(\mathbf{y}_j)$ — выпуклыми.

Для доказательства аналога второй части предыдущей теоремы следует сделать дополнительное предположение, что совокупные начальные запасы достаточно велики.

Теорема 5.2

{i} Предположим, что функции $v_i(\cdot)$ вогнуты, а функции издержек $c_j(\cdot)$ выпуклы, и пусть

$$\hat{S} = \langle(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\mathbf{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{r}_1), \ldots, (\hat{\mathbf{y}}_n, \hat{r}_n)\rangle \text{ —}$$

Парето-оптимальное состояние в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q^+$, причем $\hat{z}_i > 0$ для всех $i \in I$. Тогда набор $(\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m, \hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n)$ является решением задачи $(\mathcal{W})$.

{ii} Обратно, пусть $(\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m, \hat{\mathbf{y}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{y}}_n)$ является решением задачи $(\mathcal{W})$, причем

$$\sum_{i \in I} \omega_i - \sum_{j \in J} c_j(\hat{\mathbf{y}}_j) \geqslant 0.$$

Тогда для произвольных $\hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_m \geqslant 0$, удовлетворяющих балансам

$$\sum_{i \in I} \hat{z}_i = \sum_{i \in I} \omega_i - c_j(\hat{\mathbf{y}}_j),$$

набор

$$\langle(\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{z}_1), \ldots, (\hat{\mathbf{x}}_m, \hat{z}_m), (\hat{\mathbf{y}}_1, c_1(\hat{\mathbf{y}}_1)), \ldots, (\hat{\mathbf{y}}_n, c_n(\hat{\mathbf{y}}_n))\rangle$$

является Парето-оптимальным состоянием квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q^+$. ┘

Доказательство: {i} Доказательство опирается на следующее вспомогательное утверждение: если $\hat{S}$ — Парето-оптимум в экономике $\mathcal{E}_Q^+$, удовлетворяющий условиям теоремы, то он также является Парето-оптимумом в соответствующей экономике $\mathcal{E}_Q$. Если это утверждение верно, то доказываемое является тривиальным следствием предыдущей Теоремы 5.1.

Докажем это вспомогательное утверждение от противного. Пусть в соответствующей экономике $\mathcal{E}_Q$ существует допустимое состояние

$$\tilde{S} = \langle(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n)\rangle,$$

которое доминирует по Парето состояние $\hat{S}$. Рассмотрим выпуклую комбинацию этих двух состояний:

$$S(\alpha) = \alpha\hat{S} + (1-\alpha)\tilde{S},\ \alpha \in [0; 1].$$

Существует достаточно малое $\alpha > 0$, такое что $S(\alpha)$ является допустимым в экономике $\mathcal{E}_Q^+$. Однако при $\alpha > 0$ состояние $S(\alpha)$ представляет собой Парето-улучшение в экономике $\mathcal{E}_Q^+$ по сравнению с $\hat{S}$, что противоречит предположению теоремы.

Подробное изложение доказательства оставляется читателю в качестве упражнения.

{ii} Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 5.4). ■

Приведенные выше результаты позволяют в случае квазилинейной экономики использовать задачу $(\mathcal{W})$ для анализа Парето-оптимальных состояний.

В ситуации, когда функции $v_i(\cdot)$ строго вогнуты, а функции $c_j(\cdot)$ выпуклы, решение задачи $(\mathcal{W})$ единственно, поэтому два Парето-оптимальных состояния в экономике $\mathcal{E}_Q$ (в экономике $\mathcal{E}_Q^+$, если $\tilde{z}_i$ и $\check{z}_i$ положительны)

$$\langle(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n)\rangle,$$
$$\langle(\check{\mathbf{x}}_1, \check{z}_1), \ldots, (\check{\mathbf{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\mathbf{y}}_1, \check{r}_1), \ldots, (\check{\mathbf{y}}_n, \check{r}_n)\rangle$$

могут различаться лишь объемами потребления $(l+1)$-го блага. Другими словами, $\tilde{\mathbf{x}}_i = \check{\mathbf{x}}_i$ для всех $i \in I$ и $\tilde{\mathbf{y}}_j = \check{\mathbf{y}}_j$ для всех $j \in J$. Поэтому, как нетрудно заметить, в случае экономики $\mathcal{E}_Q$ граница Парето представляет собой гиперплоскость вида

$$\sum_{i \in I} u_i = \text{const}.$$

(Читателю предлагается доказать этот результат самостоятельно; см. задачу 5.5.)

В экономике $\mathcal{E}_Q^+$ граница Парето может «изгибаться» из-за того, что некоторые из ограничений $z_i \geqslant 0$ являются существенными. Покажем это на примере.

Пример 5.2

На Рис. 5.2. изображена Парето-граница в экономике типа $\mathcal{E}_Q^+$ в координатах (u_1, u_2) со следующими параметрами: два блага $(l + 1 = 2)$, два потребителя с функциями полезности

$$u_1 = 2\sqrt{x_1} + z_1 \quad \text{и} \quad u_2 = 4\sqrt{x_2} + z_2$$

и один производитель с функцией издержек $c(y) = y$. Начальные запасы второго блага равны 10.

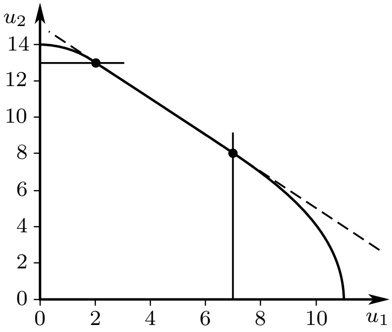


Рис. 5.2. *Парето-граница в экономике типа* $\mathcal{E}_Q^+$

Нетрудно проверить, что решение задачи $(\mathcal{W})$ дает $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Однако это решение описывает точки границы Парето только при $u_1 \in [2; 7]$. Парето-граница при этом имеет вид

$$u_2 = 15 - u_1.$$

При $u_1 \in [0; 2]$ Парето-граница имеет вид

$$u_2 = 14 - \frac{u_1^2}{4},$$

а при $u_1 \in [7; 11]$ —

$$u_2 = 4\sqrt{11 - u_1}. \qquad \blacktriangle$$

В случае двух благ можно привести графическую иллюстрацию внутренней части Парето-границы экономики типа $\mathcal{E}_Q^+$ с производством на основе диаграммы Эджворта (Рис. 5.3). Внутренняя часть границы Парето показана на рисунке жирной пунктирной линией.

Так как в достаточно широком классе случаев решения задачи $(\mathcal{W})$ описывают Парето-границу, то целевую функцию задачи $(\mathcal{W})$ можно использовать для решения вопроса о принадлежности некоторого допустимого состояния к Парето-границе. В связи с этим естественно рассматривать функцию

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i) - \sum_{j \in J} c_j(\mathbf{y}_j)$$

в качестве индикатора благосостояния. Основанием для этого является следующая теорема. (Ее доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 5.6.)

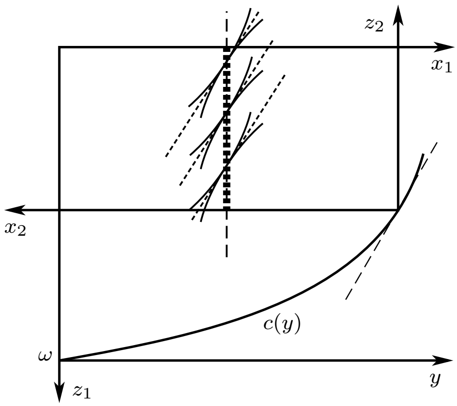


Рис. 5.3. *Внутренняя часть Парето-границы в экономике типа* $\mathcal{E}_Q^+$

Теорема 5.3

Пусть

$$\tilde{S} = \langle (\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n) \rangle,$$

и

$$\check{S} = \langle (\check{\mathbf{x}}_1, \check{z}_1), \ldots, (\check{\mathbf{x}}_m, \check{z}_m), (\check{\mathbf{y}}_1, \check{r}_1), \ldots, (\check{\mathbf{y}}_n, \check{r}_n) \rangle \text{ —}$$

два допустимых состояния в квазилинейной экономике ($\mathcal{E}_Q$ или $\mathcal{E}_Q^+$), причем для всех $j \in J$ выполнено[5] $\tilde{r}_j = c_j(\tilde{\mathbf{x}}_j)$ и $\check{r}_j = c_j(\check{\mathbf{x}}_j)$.

{i} Если каждый из потребителей в состоянии $\tilde{S}$ имеет не меньшую полезность, чем в состоянии $\check{S}$, т. е.

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \tilde{z}_i \geqslant v_i(\check{\mathbf{x}}_i) + \check{z}_i \quad \text{для всех } i \in I,$$

то

$$W(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) \geqslant W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}).$$

Более того, если существует потребитель i_0, такой что

$$v_{i_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}) + \tilde{z}_{i_0} > v_{i_0}(\check{\mathbf{x}}_{i_0}) + \check{z}_{i_0}$$

(т. е. состояние $\tilde{S}$ доминирует $\check{S}$ по Парето), то

$$W(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) > W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}}).$$

[5] Это условие технологической эффективности будет, например, выполнено в классическом общем равновесии. Естественно ожидать его выполнения и в других равновесных моделях.

{ii} Для экономики $\mathcal{E}_Q$ выполнено и обратное: если для состояний $\tilde{S}$ и $\check{S}$ верно $W(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) > W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$, то можно подобрать $\tilde{z}'_1, \ldots, \tilde{z}'_m$ такие, что состояние экономики

$$\langle(\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{z}'_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{x}}_m, \tilde{z}'_m), (\tilde{\mathbf{y}}_1, \tilde{r}_1), \ldots, (\tilde{\mathbf{y}}_n, \tilde{r}_n)\rangle$$

будет допустимым, причем

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) + \tilde{z}'_i > v_i(\check{\mathbf{x}}_i) + \check{z}_i \quad \text{для всех } i \in I. \qquad \lrcorner$$

Первая часть данного утверждения говорит о том, что любое Парето-улучшение сопровождается ростом индикатора $W(\cdot)$. Смысл второй части приведенного утверждения состоит в том, что если $W(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) > W(\check{\mathbf{x}}, \check{\mathbf{y}})$, то можно в состоянии $\tilde{S}$ произвести такие трансферты (перераспределить деньги), что новое состояние будет строго доминировать состояние $\check{S}$ по Парето. Таким образом, мы можем сравнить любые два состояния квазилинейной экономики по единому показателю — благосостоянию. Если уровень благосостояния в текущем состоянии экономики меньше, чем мог бы быть, то теоретически возможно проведение экономической реформы, от которой выиграет *каждый* потребитель. Заметим, что некоторые z_i при этом могут оказаться отрицательными, поэтому вторая часть утверждения, вообще говоря, неприменима к экономике $\mathcal{E}_Q^+$.

В Парето-оптимуме квазилинейной экономики индикатор благосостояния достигает максимума. Пусть $\hat{W}$ — это максимальное значение. Разность между $\hat{W}$ и уровнем индикатора $W(S)$ в некотором состоянии S называется **чистыми потерями благосостояния**:

$$DL = \hat{W} - W(S).$$

Сравнение уровней благосостояния в анализируемом состоянии и в идеальной ситуации позволяет количественно оценить, насколько далеко данное неэффективное состояние от границы Парето и сколько экономика в целом теряет вследствие неэффективности.

5.3. Характеристика поведения потребителей

5.3.1. Задача потребителя и свойства ее решений

Рассмотрим особенности анализа поведения потребителя, имеющего квазилинейные предпочтения. Как и ранее, будем исходить из стандартного предположения, что потребители являются ценополучателями. Естественно ожидать, что цена $(l+1)$-го блага в равновесии будет положительной (поскольку все потребители «любят» это благо). Удобно принять эту цену за единицу. Выбирая потребительский набор $(\mathbf{x}_i, z_i)$ при рыночных ценах благ $(\mathbf{p}, 1)$ и доходе β_i, потребитель в экономике $\mathcal{E}_Q$ решает следующую задачу:

Задача потребителя в квазилинейной экономике $\mathcal{E}_Q$

$$\begin{gathered} v_i(\mathbf{x}_i) + z_i \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i, z_i}, \\ \mathbf{p}\mathbf{x}_i + z_i \leqslant \beta_i. \end{gathered} \tag{$\mathcal{C}_Q^0$}$$

Соответствующая задача в экономике $\mathcal{E}_Q^+$ включает дополнительное ограничение $z_i \geqslant 0$. (Будем обозначать эту задачу $(\mathcal{C}_Q^{0+})$.)

Так как квазилинейные предпочтения локально ненасыщаемы, то очевидно, что потребитель, решающий задачу $(\mathcal{C}_Q^0)$, полностью израсходует свой доход β_i, так что в любом решении $z_i = \beta_i - \mathbf{p}\mathbf{x}_i$. Подставляя z_i в целевую функцию и убрав несущественную константу β_i, получим эквивалентную задачу:

$$v_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i}. \tag{$\mathcal{C}_Q$}$$

При естественном предположении, что $v_i(\mathbf{0}) = 0$, величина $v_i(\mathbf{x}_i)$ представляет собой денежную оценку потребителем потребления благ $k = 1, \ldots, l$ в количестве $\mathbf{x}_i$. Величину $v_i(\mathbf{x}_i)$ принято называть **готовностью платить**, поскольку это та сумма денег (количество $(l+1)$-го блага), которую потребитель будет готов отдать за приобретение набора $\mathbf{x}_i$, если у него нет в наличии ни одного из благ $k = 1, \ldots, l$. Разность $v_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i$ (при $v_i(\mathbf{0}) = 0$) принято называть **потребительским излишком**. Это разность между той суммой, которую *готов отдать* потребитель, и той суммой, которую он *реально отдает* за набор $\mathbf{x}_i$, если сталкивается с рыночными ценами $\mathbf{p}$. В дальнейшем мы еще вернемся к потребительскому излишку.

Следующая теорема устанавливает связь между задачами $(\mathcal{C}_Q^0)$ и $(\mathcal{C}_Q)$. (Ее доказательство, как и доказательство других теорем этого параграфа, оставляется читателю в качестве упражнения.)

Теорема 5.4

Набор $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ является решением задачи потребителя $(\mathcal{C}_Q^0)$ при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i тогда и только тогда, когда $\bar{z}_i = \beta_i - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i$, и $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи $(\mathcal{C}_Q)$ при ценах $\mathbf{p}$. ⌟

Из данной теоремы следует, в частности, что спрос потребителя на первые l благ не зависит от его дохода.

Аналог Теоремы 5.4 верен и в случае задачи ($\mathcal{C}_Q^{0+}$), когда допустимые потребительские наборы удовлетворяют дополнительному условию $z_i \geqslant 0$, что показывает следующая теорема.

Теорема 5.5

{i} Предположим, что $v_i(\cdot)$ — вогнутая функция, а $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ — решение задачи потребителя ($\mathcal{C}_Q^{0+}$) при ценах $\mathbf{p}$ и некотором доходе β_i, такое что $\bar{z}_i > 0$. Тогда $\bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи ($\mathcal{C}_Q$) при ценах $\mathbf{p}$.

{ii} Обратно, пусть $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи ($\mathcal{C}_Q$) при ценах $\mathbf{p}$ и пусть $\beta_i \geqslant \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i$. Тогда $(\bar{\mathbf{x}}_i, \beta_i - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i)$ — решение задачи ($\mathcal{C}_Q^{0+}$) при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i. ┘

В классе квазилинейных экономик важную роль играет случай, когда предпочтения всех потребителей помимо свойства квазилинейности обладают свойством сепарабельности, т. е. когда множество допустимых наборов первых l благ имеет вид $X_i = \bigtimes_{k=1}^{l} X_{ik}$, а функции полезности представимы в виде

$$u_i(\mathbf{x}_i, z_i) = v_i(\mathbf{x}_i) + z_i = \sum_{k \in K} v_{ik}(x_{ik}) + z_i.$$

Если функция полезности i-го потребителя имеет такой вид, то задачу потребителя ($\mathcal{C}_Q$) можно разложить на l задач — по одной на каждое благо за исключением $(l+1)$-го:

$$v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik} \to \max_{x_{ik} \in X_{ik}}. \qquad (\mathcal{C}_{Qk})$$

Теорема 5.6

Набор $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ является решением задачи потребителя ($\mathcal{C}_Q^{0}$) при ценах $\mathbf{p}$ и доходе β_i тогда и только тогда, когда $\bar{z}_i = \beta_i - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i$ и $\bar{x}_{ik}$ является решением каждой из задач ($\mathcal{C}_{Qk}$) при цене p_k $(k = 1, \ldots, l)$.┘

Из данной теоремы следует, что функция спроса на k-е благо зависит только от цены на это благо, т. е. имеет вид $x_{ik}(p_k)$.

Предположим дополнительно дифференцируемость[6] функции $v_i(\cdot)$, определенной на $X_i = \mathbb{R}_+^l$. Тогда для решения задачи

[6] Более точно, мы предполагаем, что функция $v_i(\cdot)$ определена на открытом множестве, содержащем $\mathbb{R}_+^l$, и дифференцируема на нем.

оптимального выбора потребителя $(\mathcal{C}_Q^0)$ (или $(\mathcal{C}_Q^{0+})$ при $z_i > 0$) должно выполняться следующее условие:

$$\nabla v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \leqslant \mathbf{p},$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$\frac{\partial v_i(\bar{\mathbf{x}}_i)}{\partial x_{ik}} = p_k.$$

Это обычное для квазилинейной экономики условие, что *предельная полезность (предельная оценка) блага равна его цене.* Если решение задачи потребителя внутреннее по всем благам ($\bar{\mathbf{x}}_i > \mathbf{0}$ и, кроме того, $z_i > 0$ в случае задачи $(\mathcal{C}_Q^{0+})$), то

$$\nabla v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{p}.$$

Другими словами, градиент функции $v_i(\cdot)$, вычисленный для набора благ, совпадающего со спросом потребителя, равен вектору рыночных цен этих благ. Таким образом, градиент функции $v_i(\cdot)$ представляет собой *обратную функцию спроса* $\mathbf{p}_i(\mathbf{x}_i)$ потребителя i — вектор цен первых l благ, при котором потребитель предъявляет спрос именно на этот набор благ.

При сепарабельности функции полезности необходимое условие оптимальности потребительского набора $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{z}_i)$ (как в случае экономики $\mathcal{E}_Q$, так и в случае $\mathcal{E}_Q^+$ при $z_i > 0$) имеет вид

$$v'_{ik}(\bar{x}_{ik}) \leqslant p_k,$$

причем если $\bar{x}_{ik} > 0$, то

$$v'_{ik}(\bar{x}_{ik}) = p_k$$

Это условие является также и достаточным, если предельная полезность убывает.

Рассмотрим теперь существование и единственность решения задачи $(\mathcal{C}_Q^0)$ и свойства соответствующих функций спроса. Сделаем это только для случая, когда функция полезности сепарабельна. Из Теоремы 5.6 следует, что вместо исходной задачи мы можем использовать для анализа спроса на k-е благо задачу $(\mathcal{C}_{Qk})$: решение исходной задачи $(\mathcal{C}_Q^0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют решения задач $(\mathcal{C}_{Qk})$ при любом $k = 1, \ldots, l$. Таким образом анализ спроса сводится к исследованию свойств задачи $(\mathcal{C}_{Qk})$.

Будем предполагать, что для любого блага k функция $v_{ik}(x_{ik})$ определена на $\mathbb{R}_+$ и непрерывно дифференцируема, и что предельная полезность $v'_{ik}(x_{ik})$ убывает. Для анализа спроса можно воспользоваться приведенными выше условиями первого порядка для задачи $(\mathcal{C}_Q)$. Они совпадают с условиями первого порядка (необходимыми условиями оптимальности) для задач $(\mathcal{C}_{Qk})$. Заметим, что убывание предельной полезности гарантирует, что если решение задачи $(\mathcal{C}_{Qk})$ существует, то оно единственно (проверьте этот факт самостоятельно). Очевидно, что это единственное решение $(x_{ik}(p_k))$ есть значение функции спроса рассматриваемого потребителя на k-е благо при данном p_k.

Нам понадобятся следующие обозначения:

$$p_k^c = v'_{ik}(0) \quad \text{и} \quad p_k^0 = \inf_{x_{ik}>0} v'_{ik}(x_{ik}).$$

Здесь p_k^c — это так называемая цена «удушения» спроса. При любой цене $p_k \geqslant p_k^c$ в точке $x_{ik} = 0$ выполнено условие первого порядка $v'_{ik}(0) \leqslant p_k$. Нетрудно понять, что в силу убывания предельной полезности это необходимое условие оптимальности является также и достаточным. Отсюда следует, что при $p_k \geqslant p_k^c$ спрос на данное благо существует и равен нулю, т. е. $x_{ik}(p_k) = 0$.

При любой цене p_k из отрезка (p_k^0, p_k^c), решение задачи $(\mathcal{C}_{Qk})$ существует, т. е. спрос на k-е благо определен. Действительно, в силу непрерывности функции $v'_{ik}(\cdot)$, существует уровень потребления $\bar{x}_{ik}$, такой что $v'_{ik}(\bar{x}_{ik}) = p_k$. Очевидно, что $\bar{x}_{ik} > 0$. Этот $\bar{x}_{ik}$ должен быть решением задачи потребителя при ценах p_k. Из убывания предельной полезности следует, что функция спроса $x_{ik}(\cdot)$ на отрезке (p_k^0, p_k^c) является убывающей.

При цене $p_k \leqslant p_k^0$ задача $(\mathcal{C}_{Qk})$ не имеет решения. Если бы такое решение $\bar{x}_{ik}$ существовало, то оно удовлетворяло бы условию первого порядка $v'_{ik}(\bar{x}_{ik}) \leqslant p_k$. Но тогда предельная полезность для любого уровня потребления, превышающего $\bar{x}_{ik}$, в силу убывания предельной полезности была бы ниже инфимума p_k^0, чего быть не может. Поскольку при такой цене с ростом потребления данного блага потребительский излишек возрастает, можно считать, что потребитель будет предъявлять бесконечный спрос на это благо.

Рассмотрим теперь случай, когда благо k может потребляться только в положительных количествах ($X_{ik} = \mathbb{R}_{++}$). Предположим, что функция $v_{ik}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_{++}$, предельная полезность $v'_{ik}(\cdot)$ убывает и $\lim_{x_{ik}\to 0} v'_{ik}(x_{ik}) = \infty$. Последнее условие фактически означает, что цена удушения спроса бесконечна ($p_k^c = \infty$)[7].

Как и в предыдущем случае, при $p_k \leqslant p_k^0$ решения задачи ($\mathcal{C}_{Qk}$) не существует (спрос бесконечен). При любой цене $p_k > p_k^0$ по непрерывности предельной полезности уравнение $v'_{ik}(x_{ik}) = p_k$ будет иметь решение $x_{ik}(p_k)$. Это решение будет также решением задачи ($\mathcal{C}_{Qk}$), причем единственным. Таким образом, данное уравнение определяет функцию спроса $x_{ik}(p_k)$ при $p_k > p_k^0$. Из убывания предельной полезности следует, что функция спроса является убывающей. Кроме того, так как предельная полезность убывает, то для всякого $\varepsilon > 0$ при ценах $p_k > v'_{ik}(\varepsilon)$ выполнено $0 < x_{ik}(p_k) < \varepsilon$. Таким образом, $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$, т. е. спрос «убывает до нуля» при росте цены блага.

В обоих рассмотренных случаях функция спроса определена для всех цен, превышающих p_k^0, и убывает (до нуля). Как правило, в примерах, иллюстрирующих применение микроэкономического анализа, а также в приложениях используются функции, для которых $p_k^0 = 0$, т. е. спрос определен при всех положительных ценах.

5.3.2. Потребительский излишек: определение, связь с прямой и обратной функциями спроса

Как уже говорилось выше, потребительским излишком (излишком потребителя) называется разность между готовностью платить за данный набор благ $v_i(\mathbf{x}_i) - v_i(\mathbf{0})$ и фактически заплаченной за этот набор суммой (обозначим ее через t_i):

$$CS_i = v_i(\mathbf{x}_i) - v_i(\mathbf{0}) - t_i.$$

Такое определение включает и случай, когда затраты на приобретение благ нелинейно зависят от приобретаемого количества благ[8]. В классическом случае $t_i = \mathbf{p}\mathbf{x}_i$, так что

$$CS_i = v_i(\mathbf{x}_i) - v_i(\mathbf{0}) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i.$$

[7] Примером такой функции является $v_{ik}(x_{ik}) = \ln x_{ik}$. Мы могли бы также рассмотреть случай, когда благо k может потребляться в любых неотрицательных количествах ($X_{ik} = \mathbb{R}_+$), но предельная полезность в нуле не определена и предел ее равен бесконечности. Это, в частности, позволило бы распространить анализ на функцию $v_{ik}(x_{ik}) = \sqrt{x_{ik}}$. Оказывается, что выводы будут такими же, как в рассматриваемом случае (см. задачу 5.8).

[8] Это может быть, в частности, следствием нелинейного ценообразования, с помощью которого монополия может проводить ценовую дискриминацию потребителей (см. гл. 12).

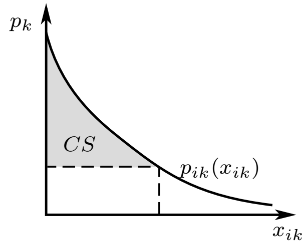


Рис. 5.4. *Излишек потребителя*

В дальнейшем без потери общности будем предполагать, что $v_i(\mathbf{0}) = 0$.

Рассмотрим случай квазилинейных сепарабельных функций полезности, т. е. $v_i(x_{i1}, \ldots, x_{il}) = \sum_{k=1}^{l} v_{ik}(x_{ik})$. Потребительский излишек при этом получается суммированием потребительских излишков, получаемых потребителем на рынках отдельных благ:

$$CS_i = \sum_{k=1}^{l} (v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik},$$

где $CS_{ik} = v_{ik}(x_{ik}) - p_k x_{ik}$.

Пользуясь выведенными выше характеристиками потребительского выбора, проанализируем связь излишка потребителя с площадью под кривой спроса потребителя. Пусть $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{p})$, т. е. является спросом потребителя при ценах $\mathbf{p}$. В этом случае геометрически излишек потребителя на рынке k-го блага равен площади фигуры, лежащей под графиком обратной функции спроса выше цены этого блага (Рис. 5.4).

Поясним это. Рассмотрим потребительский излишек как функцию цен:

$$CS_i(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{l} [v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k)] = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p_k).$$

Функции $CS_{ik}(p_k) = v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k)$ определены при всех ценах $p_k \geqslant p_k^0$ и, кроме того, не могут быть отрицательными[9].

Как было доказано, $x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$, откуда следует, что $v_{ik}(x_{ik}(p_k)) \to 0$ при $p_k \to \infty$. Поскольку $p_k x_{ik}(p_k) \leqslant v_{ik}(x_{ik}(p_k))$, то

[9] Так как $x_{ik} = 0$ является допустимым в задаче потребителя ($\mathcal{C}_{Qk}$), то $CS_{ik}(p_k) = v_{ik}(x_{ik}(p_k)) - p_k x_{ik}(p_k) \geqslant v_{ik}(0) - p_k \cdot 0 = 0$ и тем самым $CS_{ik}(p_k) \geqslant 0$.

при росте цены блага расходы на его приобретение стремятся к нулю, т. е. $p_k x_{ik}(p_k) \to 0$ при $p_k \to \infty$.

Функция $CS_i(\mathbf{p})$ является дифференцируемой, если функция полезности дважды дифференцируема. Дифференцируя ее, получаем (с учетом условий первого порядка для задачи потребителя), что при $x_{ik}(p_k) > 0$

$$x_{ik}(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

(Читателю предоставляется проверить этот факт самостоятельно; см. задачу 5.9.)

Если $x_{ik}(t) > 0$ при всех $t \geqslant p_k$, то, проинтегрировав обе части этого дифференциального уравнения, получим

$$-\int_{p_k}^{\infty} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t)dt.$$

Отсюда

$$CS_{ik}(p) - \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t)dt,$$

что позволяет выразить излишек потребителя i от потребления блага k в виде[10]

$$CS_{ik}(p) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t)dt + \lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t).$$

Так как второе слагаемое в этом соотношении равно нулю:

$$\lim_{t\to\infty} CS_{ik}(t) = 0,$$

то

$$CS_{ik}(p) = \int_{p}^{\infty} x_{ik}(t)dt.$$

В силу того, что функция $p_{ik}(\cdot)$ является обратной к функции $x_{ik}(\cdot)$, имеет место соотношение[11]

$$CS_{ik}(p) = \int_{0}^{x_{ik}(p)} p_{ik}(q)dq - px_{ik}(p).$$

[10] Заметим, что если существует цена p_k^c, такая что $x_k(t) > 0$ при всех $t < p_k^c$ и $x_k(t) = 0$ при всех $t \geqslant p_k^c$, то при $p_k \leqslant p_k^c$

$$-\int_{p_k}^{p_k^c} \frac{\partial CS_{ik}(t)}{\partial t} dt = \int_{p_k}^{p_k^c} x_{ik}(t)dt.$$

[11] Равенство доказывается интегрированием по частям и заменой переменных.

По-видимому, впервые такой метод вычисления потребительского излишка

В итоге общий потребительский излишек потребителя i получаем суммированием этих интегралов по всем рынкам:

$$CS_i(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{l} CS_{ik}(p) = \sum_{k=1}^{l} \int_{p_k}^{\infty} x_{ik}(t)dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{l} \int_{0}^{x_{ik}(p)} p_{ik}(t)dt - p\sum_{k=1}^{l} x_{ik}(p).$$

5.4. Характеристика поведения производителей

5.4.1. Задача производителя и свойства ее решений

Проанализируем теперь поведение производителей в квазилинейной экономике. Как уже говорилось, с точки зрения производства квазилинейная экономика фактически ничем не отличается от экономики более общего вида. Теория поведения производителя, являющегося ценополучателем, уже рассматривалась в общем виде в гл. 3. Здесь же мы отойдем от предположения о совершенстве конкуренции и будем считать, что, возможно, производители не являются ценополучателями. Это позволяет применять данную модель в случае несовершенной конкуренции (см. гл. 12 и 13).

Пусть, как и ранее, Y_j^o — множество возможных векторов выпуска и пусть функция издержек $c_j(\cdot)$ определена на всем множестве Y_j^o. Предположим, что j-й производитель сталкивается с некоторой обратной функцией спроса на производимые им блага

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_j(\mathbf{y}_j),$$

определенной на Y_j^o. Прибыль формируется как разница между выручкой и издержками:

$$\pi_j(\mathbf{y}_j) = \mathbf{p}_j(\mathbf{y}_j)\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j).$$

(и в целом вычисление чистых потерь интегрированием) был введен французским инженером Жюлем Дюпюи (J. Dupuit. De la Mesure de l'Utilité des Travaux Publics, *Annales des Ponts et Chaussées* **8** (1844): 332–375; рус. пер. Ж. Дюпюи. О мере полезности гражданских сооружений, в кн. *Теория потребительского поведения и спроса*, В. М. Гальперин (ред.), СПб.: Экономическая школа, 1993: 28–66.

Как обычно, мы предполагаем, что производитель выбирает объемы производства, максимизирующие прибыль:

$$\pi_j(\mathbf{y}_j) \to \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j^o}.$$

В случае, если функции полезности сепарабельны, спрос на каждое благо зависит только от его цены. В этом случае цена любого блага зависит только от продаваемого количества блага, т. е.

$$p_{jk} = p_{jk}(y_{jk}).$$

Если предположить, что функция издержек производителя также сепарабельна, т. е.

$$c_j(\mathbf{y}_j) = \sum_{k=1}^{l} c_{jk}(y_{jk}),$$

то прибыль приобретает следующий сепарабельный по благам вид:

$$\pi_j(\mathbf{y}_j) = \sum_{k=1}^{l} [p_{jk}(y_{jk})y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})],$$

как если бы предприятие состояло из l заводов, каждый из которых специализировался бы на производстве только одного вида продукции. Задача максимизации прибыли распадается, таким образом, на l независимых задач.

Предположим, что функции $\mathbf{p}_j(\cdot)$ и $c_j(\cdot)$ определены и дифференцируемы на множестве[12] $Y_j^o = \mathbb{R}_+^l$. В этом случае необходимые условия оптимальности выпуска $\mathbf{y}_j$ производителя j имеют вид

$$\frac{\partial \pi_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}} = p_{jk}(\mathbf{y}_j) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial p_{js}(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}} - \frac{\partial c_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}} \leqslant 0 \text{ для } k = 1, \ldots, l,$$

причем если $y_{jk} > 0$, то

$$p_{jk}(\mathbf{y}_j) + \sum_{s=1}^{l} \frac{\partial p_{js}(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}} = \frac{\partial c_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}}.$$

[12] Более точно, на открытом множестве, содержащем $\mathbb{R}_+^l$.

Альтернативно, можно предположить, что $Y_j^o = \mathbb{R}^l$, производственное множество характеризуется свободой расходования и

$$c_j(y_1, \ldots, y_l) = c_j(\min\{y_1, 0\}, \ldots, \min\{y_l, 0\}),$$

т. е. отрицательные выпуски возможны, только если блага «выбрасываются».

Это условие говорит о том, что в оптимуме задачи производителя предельная выручка должна быть равна предельным издержкам.

В случае сепарабельности условия первого порядка приобретают более простой вид:

$$p_{jk}(y_{jk}) + p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} \leqslant c'_{jk}(y_{jk}),$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p_{jk}(y_{jk}) + p'_{jk}(y_{jk})y_{jk} = c'_{jk}(y_{jk}).$$

Если цены спроса не зависят от продаваемого объема блага, т. е.

$$\mathbf{p}_j(\mathbf{y}_j) = \mathbf{p}_j = \text{const},$$

(производители являются ценополучателями, в отрасли складывается ситуация совершенной конкуренции), то все производные функции $\mathbf{p}_j(\mathbf{y}_j)$ равны нулю и условия первого порядка приобретают вид

$$p_{jk} \leqslant \frac{\partial c_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}},$$

причем при $y_{jk} > 0$

$$p_{jk} = \frac{\partial c_j(\mathbf{y}_j)}{\partial y_{jk}},$$

т. е. для оптимального выпуска цена равна предельным издержкам.

В случае сепарабельности функции издержек последнее соотношение можно переписать в виде

$$p_{jk} = c'_{jk}(y_{jk}).$$

Оно задает функцию предложения k-го блага j-м предприятием. Эта функция зависит только от цены k-го блага. Предельные издержки $c'_{jk}(\cdot)$ фактически представляют собой обратную функцию предложения, т. е. показывают для данного (положительного) выпуска ту цену, при которой производитель выберет этот выпуск.

5.4.2. Излишек производителя

Предположим, что фирма, произведя $\mathbf{y}_j$, получила от этой продукции валовой доход (выручку) t_j. В то же время ее издержки на производство в объеме $\mathbf{y}_j$ составили $c_j(\mathbf{y}_j)$, и, по-видимому, она готова была бы произвести и отдать объем $\mathbf{y}_j$ именно за такую сумму.

По аналогии с излишком потребителя можно назвать эту величину **излишком производителя**. Очевидно, что эта величина совпадает с прибылью:

$$PS_j = \pi_j = t_j - c_j(\mathbf{y}_j).$$

Если произведенная продукция продана по ценам $\mathbf{p}$, то выручка равна $\mathbf{p}\mathbf{y}_j$ и

$$PS_j = \pi_j = \mathbf{p}\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j).$$

Заметим, что сумму, за которую производитель готов был бы произвести и отдать объем $\mathbf{y}_j$, можно определять по-разному. (Поэтому, отождествляя эту сумму с издержками, мы сказали «по-видимому».) Все зависит от того, какие возможности есть у данного производителя и какой смысл вкладывается в слова «готов отдать». В частности, такую сумму можно определить как разность между издержками при объеме производства $\mathbf{y}_j$ и издержками при нулевом объеме производства, т. е. как величину $c_j(\mathbf{y}_j) - c_j(\mathbf{0})$. При этом излишек производителя следует определить как

$$t_j - c_j(\mathbf{y}_j) + c_j(\mathbf{0}) = \pi_j + c_j(\mathbf{0}).$$

Но нам удобнее отождествить излишек производителя с прибылью, и в дальнейшем мы будем придерживаться именно такого определения.

В случае, если функция издержек сепарабельна, излишек производителя можно представить как сумму излишков по l рынкам:

$$PS_j = \sum_{k=1}^{l} [p_k y_{jk} - c_{jk}(y_{jk})] = \sum_{k=1}^{l} PS_{jk}.$$

Подобно излишку потребителя излишек производителя на k-м рынке можно представить в виде интеграла:

$$PS_{jk} = \int_0^{y_{jk}} [p_k - c'_{jk}(t)]dt - c_{jk}(0).$$

Он равен (с точностью до константы $c_{jk}(0)$) площади фигуры, образуемой прямой, проходящей через точку $(0, p_{jk})$ параллельно оси абсцисс, и кривой предельных издержек $c'_{jk}(y_{jk})$ (см. Рис. 5.5). В случае, когда $c_{jk}(0) = 0$, получаем, что излишек производителя равен

$$PS_{jk} = \int_0^{y_{jk}} [p_k - c'_{jk}(t)]dt.$$

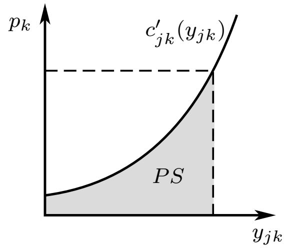


Рис. 5.5. *Излишек производителя*

(Заметим, что это также формула для излишка производителя, если определять излишек производителя как $\pi_j + c_j(\mathbf{0})$.)

Если рассматривать производителя как ценополучателя, то, как уже говорилось, предельные издержки совпадают для положительных выпусков с обратной функцией предложения. По аналогии с излишком потребителя мы можем вычислять излишек производителя как площадь под соответствующей кривой предложения $y_{jk}(p_k)$:

$$PS_{ik}(p) = py_{jk}(p) - \int_{c'_{jk}(0)}^{p} y_{jk}(t)dt - c_{jk}(0).$$

5.5. Связь излишков с благосостоянием

Предположим, что в результате работы некоторого рыночного механизма реализовалось допустимое состояние экономики $S = \langle(\mathbf{x}_1, z_1), \ldots, (\mathbf{x}_m, z_m), (\mathbf{y}_1, r_1), \ldots, (\mathbf{y}_n, r_n)\rangle$, и пусть при этом потребительские расходы i-го потребителя ($i \in I$) составили t_i, а выручка j-й фирмы ($j \in J$) — t_j. Предположим также, что денежные потоки в экономике сбалансированы[13], т. е. выполнено

$$\sum_{i \in I} t_i = \sum_{j \in J} t_j.$$

С учетом этого величину благосостояния, соответствующее рассматриваемому состоянию экономики, можно записать в следующем

[13] В величины t_i и t_j следует включить любые государственные трансферты, налоги, и т. п.

виде:

$$
\begin{aligned}
W(S) &= \sum_{i\in I} v_i(\mathbf{x}_i) - \sum_{j\in J} c_j(\mathbf{y}_j) = \\
&= \sum_{i\in I} (v_i(\mathbf{x}_i) - t_i) + \sum_{j\in J} (t_j - c_j(\mathbf{y}_j)) = CS + PS,
\end{aligned}
$$

где

$$CS = \sum_{i\in I} CS_i \,—$$

суммарный потребительский излишек,

$$PS = \sum_{j\in J} \pi_j = \sum_{j\in J} PS_j \,—$$

суммарный производительский излишек. Другими словами, индикатор благосостояния $W(S)$ равен сумме излишков потребителей и производителей. Часто его называют **общественным излишком**.

В частном случае, когда товары покупаются и продаются по единым ценам $\mathbf{p}$ и выполнено $t_i = \mathbf{p}\mathbf{x}_i$, $t_j = \mathbf{p}\mathbf{y}_j$, сбалансированность доходов является следствием выполнения балансов по благам в допустимом состоянии экономики:

$$\sum_{i\in I} t_i - \sum_{j\in J} t_j = \sum_{i\in I} \mathbf{p}\mathbf{x}_i - \sum_{j\in J} \mathbf{p}\mathbf{y}_j = \mathbf{p}\left(\sum_{i\in I} \mathbf{x}_i - \sum_{j\in J} \mathbf{y}_j\right) = 0.$$

При этом

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i\in I} (v_i(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}\mathbf{x}_i) + \sum_{j\in J} (\mathbf{p}\mathbf{y}_j - c_j(\mathbf{y}_j)).$$

В сепарабельной экономике излишки потребителей и производителей представляют собой суммы соответствующих излишков на l рынках:

$$CS = \sum_{k=1}^{l} CS_k, \quad PS = \sum_{k=1}^{l} PS_k,$$

где CS_k и PS_k представляют собой, в свою очередь, суммы излишков отдельных экономических субъектов:

$$CS_k = \sum_{i\in I} CS_{ik}, \quad PS_k = \sum_{j\in J} PS_{jk}.$$

Для квазилинейной сепарабельной экономики можно определить чистые потери благосостояния отдельно для каждого блага (рынка): DL_k. Это разность между максимально достижимой величиной общего излишка на данном рынке $\sum_{i\in I} v_{ik}(\hat{x}_{ik}) - \sum_{j\in J} c_{jk}(\hat{y}_{jk})$, где через $\hat{x}_{ik}$ и $\hat{y}_{jk}$ мы обозначили соответствующие Парето-оптимальные объемы, и фактически достигнутой величиной общего излишка $CS_k + PS_{jk}$. Таким образом,

$$DL_k = \sum_{i\in I} v_{ik}(\hat{x}_{ik}) - \sum_{j\in J} c_{jk}(\hat{y}_{jk}) - \left(\sum_{i\in I} v_{ik}(x_{ik}) - \sum_{j\in J} c_{jk}(y_{jk})\right).$$

Ясно, что совокупные чистые потери благосостояния по экономике складываются из чистых потерь по рынкам отдельных благ:

$$DL = \sum_{k=1}^{l} DL_k.$$

5.6. Репрезентативный потребитель

Часто при изучении моделей частного равновесия бывает удобно использовать предположение, что суммарный спрос порождается решением задачи *одного* потребителя. Если такой потребитель существует, его называют **репрезентативным потребителем**.

Покажем что репрезентативный потребитель в экономике $\mathcal{E}_Q$ существует, причем его предпочтения на множестве потребительских наборов $(\mathbf{x}, z)$ $(\mathbf{x} \in X)$, могут быть представлены квазилинейной функцией полезности вида

$$u(\mathbf{x}, z) = v(\mathbf{x}) + z,$$

где множество допустимых наборов первых l благ имеет вид

$$X = \sum_{i\in I} X_i = \left\{ \mathbf{x} \;\middle|\; \mathbf{x} = \sum_{i\in I} \mathbf{x}_i \text{ и } \mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I \right\}.$$

Рассмотрим следующую задачу распределения некоторого фиксированного общего количества $\mathbf{x}_\Sigma \in X$ первых k благ таким образом, чтобы достигался максимум суммарной оценки потребителями потребления этих благ:

$$
\begin{gathered}
\sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m}, \\
\sum_{i \in I} \mathbf{x}_i \leqslant \mathbf{x}_\Sigma, \\
\mathbf{x}_i \in X_i \ \forall i \in I.
\end{gathered}
\tag{❉}
$$

Тогда в качестве $v(\mathbf{x})$ мы можем взять значение этой задачи при $\mathbf{x}_\Sigma = \mathbf{x}$. Если решение единственно, то его можно записать в виде функции параметра: $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_\Sigma)$. В этих обозначениях

$$
v(\mathbf{x}_\Sigma) = \sum_{i \in I} v_i(\mathbf{x}_i(\mathbf{x}_\Sigma)).
$$

Если $X_i = \mathbb{R}^l_+$, то множество допустимых решений задачи (❉) непусто (при $\mathbf{x}_\Sigma \in X$) и компактно, поэтому если функции $v_i(\cdot)$ непрерывны, то задача имеет решение. Задача также всегда имеет решение, если множества X_i конечны и если они имеют вид $X_i = 0, 1, 2, \ldots$. Если X_i выпуклы, а функции $v_i(\cdot)$ строго вогнуты, то решение единственно.

Пусть $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи i-го потребителя при некоторых ценах $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$. Докажем, что $(\bar{\mathbf{x}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_m)$ являются решением задачи (❉) при $\mathbf{x}_\Sigma = \bar{\mathbf{x}}$, где $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i$ — совокупный спрос при ценах $\mathbf{p}$.

Заметим, во-первых, что $(\bar{\mathbf{x}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_m)$ допустимы в задаче (❉) при $\mathbf{x}_\Sigma = \bar{\mathbf{x}}$. Если эти наборы не составляют оптимальное решение, то, рассуждая от противного, мы должны предположить существование другого допустимого решения задачи (❉) при $\mathbf{x}_\Sigma = \bar{\mathbf{x}}$, $(\check{\mathbf{x}}_1, \ldots, \check{\mathbf{x}}_m)$, такого что

$$
\sum_{i \in I} v_i(\check{\mathbf{x}}_i) > \sum_{i \in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i).
$$

Это альтернативное допустимое решение должно удовлетворять ограничению задачи:

$$
\sum_{i \in I} \check{\mathbf{x}}_i \leqslant \bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i.
$$

Умножим последнее неравенство на неотрицательные цены $\mathbf{p}$:

$$
\mathbf{p} \sum_{i \in I} \check{\mathbf{x}}_i \leqslant \mathbf{p} \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i.
$$

Складывая два неравенства, получаем

$$\sum_{i \in I} v_i(\check{\mathbf{x}}_i) - \sum_{i \in I} \mathbf{p}\check{\mathbf{x}}_i > \sum_{i \in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \sum_{i \in I} \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i.$$

Это означает, что по крайней мере для одного из потребителей выполнено

$$v_i(\check{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{p}\check{\mathbf{x}}_i > v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i,$$

что противоречит оптимальности набора $\bar{\mathbf{x}}_i$ при ценах $\mathbf{p}$ для этого потребителя.

Из доказанного следует, что

$$v(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i \in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i).$$

Это означает, что индикатор благосостояния в экономике с одним репрезентативным потребителем упорядочивает интересующие нас состояния экономики так же, как и индикатор благосостояния первоначальной экономики.

Далее, в предположении, что при любом $\mathbf{x}_\Sigma \in X$ существует решение задачи (❄) и, следовательно, определена величина $v(\mathbf{x}_\Sigma)$, покажем, что если $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи i-го потребителя при ценах $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, то $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i$ является решением задачи репрезентативного потребителя с функцией полезности $v(\mathbf{x}) + z$ при ценах $\mathbf{p}$. Будем доказывать от противного.

Задачу репрезентативного потребителя по свойствам квазилинейных предпочтений можно записать в эквивалентной форме:

$$v(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\mathbf{x} \to \max_{x \in X}.$$

Пусть существует $\tilde{\mathbf{x}} \in X$, такой что

$$v(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}} > v(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}.$$

Здесь $v(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i \in I} v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i)$, где $(\tilde{\mathbf{x}}_1, \ldots, \tilde{\mathbf{x}}_m)$ — решение задачи (❄) при $\mathbf{x}_\Sigma = \tilde{\mathbf{x}}$. Умножив ограничение задачи на неотрицательные цены, получим

$$\sum_{i \in I} \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}_i \leqslant \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}.$$

Таким образом, имеем следующую цепочку соотношений:

$$\sum_{i \in I} v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \sum_{i \in I} \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}_i \geqslant v(\tilde{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}} > v(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \sum_{i \in I} \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i.$$

(Последнее равенство следует из того, что, как мы доказали, $(\bar{\mathbf{x}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{x}}_m)$ является решением задачи (❄) при $\mathbf{x}_\Sigma = \bar{\mathbf{x}} = \sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_i$.) Мы пришли к противоречию, так как это означает, что по крайней мере для одного из потребителей $\bar{\mathbf{x}}_i$ не является наилучшим выбором при ценах $\mathbf{p}$:

$$v_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{p}\tilde{\mathbf{x}}_i > v_i(\bar{\mathbf{x}}_i) - \mathbf{p}\bar{\mathbf{x}}_i.$$

Задачи к главе

5.1 Пусть функция издержек определена на всем множестве возможных выпусков Y_j^o и производственное множество Y_j характеризуются свободой расходования $(l+1)$-го блага. Покажите, что производственное множество Y_j однозначно описывается функцией издержек, т. е. что $(\mathbf{y}, -r) \in Y_j$ выполнено тогда и только тогда, когда $\mathbf{y} \in Y_j^o$ и $r \geqslant c_j(\mathbf{y})$.

5.2 Постройте контрпример с вогнутыми функциями $v_i(\cdot)$ и выпуклыми функциями $c_j(\cdot)$, который показывал бы, что условие $\hat{z}_i > 0$ для всех $i \in I$ существенно в пункте {i} Теоремы 5.2.

5.3 Постройте контрпример, который показывал бы, что условие выпуклости функции издержек существенно в пункте {i} Теоремы 5.2.

5.4 Докажите пункт {ii} Теоремы 5.2.

5.5 Покажите, что в случае квазилинейной экономики без ограничений на «квазилинейное» благо $(\mathcal{E}_Q)$ Парето-граница в координатах полезностей u_i представляет собой гиперплоскость вида $\sum_{i \in I} u_i = \text{const}$.

5.6 Докажите Теорему 5.3.

5.7 Докажите Теоремы 5.4, 5.5 и 5.6.

5.8 Рассмотрите задачу $(\mathcal{C}_{Qk})$, предполагая, что благо k может потребляться в любых неотрицательных количествах $(X_{ik} = \mathbb{R}_+)$, функция $v_{ik}(\cdot)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}_{++}$, предельная полезность $v'_{ik}(\cdot)$ убывает и $\lim_{x_{ik} \to 0} v'_{ik}(x_{ik}) = \infty$. Покажите, что $x_{ik} = 0$ не может являться решением задачи потребителя. Покажите, что выводы в этом случае повторяют те, которые получены для случая $X_{ik} = \mathbb{R}_{++}$.

5.9 Докажите, что при $x_{ik}(p_k) > 0$ выполнено

$$x_{ik}(p_k) = -\frac{\partial CS_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} = -\frac{\partial CS_{ik}(p_k)}{\partial p_k}.$$

5.10 Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{r})$ — допустимое состояние квазилинейной экономики, такое что технология каждой фирмы $j \in J$ лежит на эффективной границе ее технологического множества. Докажите, что

$$\sum_{i \in I} u_i(\mathbf{x}_i, z_i) = W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i \in I} \omega_i.$$

5.11 В экономике два блага $(l + 1 = 2)$ и два потребителя, имеющие функции полезности $u_1 = \sqrt{x_1} + z_1$ и $u_2 = 2\sqrt{x_2} + z_2$. Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

5.12 Решите предыдущую задачу с функциями полезности $u_1 = -9/x_1^3 + z_1$ и $u_2 = -3/x_2^3 + z_2$.

5.13 Потребители $(i = 1, \ldots, m)$ имеют квазилинейные функции полезности вида

(A) $u_i = 2\alpha_i\sqrt{x_i} + z_i$, (B) $u_i = -\alpha_i^2 \frac{1}{x_i} + z_i$,
(C) $u_i = \alpha_i \ln x_i + z_i$.

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя в каждом из случаев.

5.14 Пусть предпочтения потребителей представляются квазилинейными сепарабельными функциями полезности. Тогда без потери общности можно считать, что в экономике два блага $(l + 1 = 2)$. Пусть $x_i(p)$ — спрос на первое благо i-го потребителя при ценах p, $D(p) = \sum x_i(p)$ — суммарный спрос потребителей на первое благо, а $p(x) = D^{-1}(x)$ — обратная функция спроса. Предположим, что функция $p(x)$ является непрерывной и убывающей при $x \geqslant 0$. Докажите, что если

$$v(x) = \int_0^x p(q)dq,$$

то $v(x) + z$ является функцией полезности репрезентативного потребителя.

5.15 В ситуации предыдущей задачи функция спроса на благо имеет вид

$$D(p) = \frac{1}{4p^2}.$$

Найдите функцию полезности репрезентативного потребителя.

5.16 Пусть в экономике имеется два блага и цена второго блага равна 1. Функция спроса потребителя на первое благо является линейной убывающей функцией цены этого блага и не зависит от дохода.

Покажите, что предпочтения потребителя можно представить квазилинейной функцией полезности. Найдите эту функцию полезности.

5.17 Пусть в экономике имеется $l + 1$ благо и цена $(l + 1)$-го блага равна 1. Функция спроса потребителя на каждое из первых l благ является убывающей функцией цены этого блага и не зависит от дохода и цен остальных благ. Покажите, что предпочтения потребителя можно представить квазилинейной сепарабельной функцией полезности. Как найти эту функцию полезности на основе функции спроса?

5.18 Сформулируйте и докажите для квазилинейной экономики $\mathcal{E}_Q$ теоремы благосостояния, исключив $(l + 1)$-е благо, т. е. используйте задачу $(\mathcal{W})$ для характеристики Парето-оптимальных состояний, задачу $(\mathcal{C}_Q)$ — для характеристики спроса потребителей и т. д.

Глава

Риск и неопределенность

6

6.1. Введение

Принятие экономическим субъектом решений в условиях риска (неопределенности) означает, что его благосостояние в будущем зависит от двух факторов: его решения в данный момент и от того, какое состояние мира (состояние природы) реализуется в будущем: какая будет погода, экономическая конъюнктура и т. п. Что именно произойдет, человек, принимающий решение, может только догадываться. Когда же определенное состояние реализуется, то принятое решение уже нельзя изменить.

Таким образом, для характеристики ситуации выбора в условиях неопределенности мы должны, в дополнение к множеству возможных решений A, описать множество состояний мира S и множество исходов (результатов) принятия решений X. При этом исход $\mathbf{x}_a(s) \in X$ описывает, что «получает» данный субъект в состоянии мира $s \in S$, если принимает решение $a \in A$. Это может быть, например, некоторый набор из множества допустимых потребительских наборов. Часто рассматривают случай, когда $X = \mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}_+$). В этом случае исходы обычно называют выигрышами (денежными выигрышами). Ряд положений теории выбора в условиях неопределенности не зависит от природы рассматриваемых исходов.

Предполагается, что на множестве состояний мира S задано тем или иным способом распределение вероятностей. Этот объект называется вероятностным пространством. Тогда с точки зрения теории вероятностей множество состояний мира S — это множество элементарных событий, а функция $\mathbf{x}_a(\cdot)$, описывающая исходы действия a во всех состояниях мира,— это случайная величина. Соответствующую случайную величину будем обозначать $\tilde{\mathbf{x}}_a$. В дальнейшем, чтобы не усложнять анализ техническими деталями, мы, как правило, будем предполагать, что множество состояний мира S конечно:

$S = \{1, \ldots, N\}$. Тогда случайная величина $\tilde{\mathbf{x}}_a$ является дискретной и может быть описана следующей таблицей:

1	2	$\cdots$	N
$\mathbf{x}_{a1}$	$\mathbf{x}_{a2}$	$\cdots$	$\mathbf{x}_{aN}$
μ_{a1}	μ_{a2}	$\cdots$	μ_{aN}

Здесь $\mu_{as} \geqslant 0$ — вероятность того, что реализуется состояние мира s при условии, что осуществлены действия a (принято решение a). Сумма вероятностей равна единице: $\sum_{s \in S} \mu_{as} = 1$.

Мы будем часто говорить об $\tilde{\mathbf{x}}_a$ как о случайных величинах, но, вообще говоря, речь неявно идет и о соответствующих вероятностных пространствах. А именно, объект $\tilde{\mathbf{x}}_a$ включает в себя не только информацию о функции $\mathbf{x}_a(\cdot)$, но и о вероятностях состояний мира μ_{as}, т. е. всю информацию, содержащуюся в приведенной таблице. Будем называть $\tilde{\mathbf{x}}_a$ **случайным потребительским набором**.

Как обычно, мы следуем неоклассической парадигме и предполагаем, что индивидуум осуществляет принятие решения в условиях риска на основе своих *предпочтений*. Вообще говоря, для предсказания поведения индивидуума достаточно задать его предпочтения на множестве возможных решений A. Однако хотелось бы иметь более общее описание, чтобы анализировать поведение в условиях риска не в одной конкретной ситуации, задаваемой набором исходов $\mathbf{x}_{as}$ и вероятностей состояний мира μ_{as}, а в некотором достаточно богатом множестве таких ситуаций. Таким образом, следует предположить существование предпочтений на множестве $A \times \tilde{X}$ пар $(a, \tilde{\mathbf{x}})$, где случайный потребительский набор $\tilde{\mathbf{x}}$ включает исходы $\mathbf{x}_s$ и их вероятности μ_s $(s \in S)$, $\tilde{X}$ — множество допустимых случайных потребительских наборов.

Рассматривая предпочтения на $A \times \tilde{X}$, мы неявно предполагаем, что, вообще говоря, индивидууму не безразлично, какие действия a он предпринял. Содержательно это означает, что при принятии решения важны как исходы $\mathbf{x}_s$ принятого решения при всех возможных состояниях мира S, так и (говоря неформально) возможные издержки получения исходов, связанные с действиями a. Однако все последствия предпринятых действий мы можем включить в наборы $\mathbf{x}_s$, так что сами по себе действия a будут носить «нейтральный» характер. Другими словами, без потери общности мы можем рассматривать ситуацию, когда экономическому субъекту безразлично, какое решение привело к данным результатам:

> Для любых двух решений $a, b \in A$ и любого случайного потребительского набора $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$ выполнено $(a, \tilde{\mathbf{x}}) \sim (b, \tilde{\mathbf{x}})$.

Таким образом, можно считать, что предпочтения заданы на множестве $\tilde{X}$.

В следующих двух параграфах мы опишем классический, наиболее часто используемый способ задания предпочтений на множестве случайных потребительских наборов $\tilde{X}$. При таком способе задания предпочтений существует представляющая их функция полезности $U(\cdot)$ особого вида (линейная по вероятностям состояний мира). Этот материал может быть опущен без ущерба для понимания последующего изложения.

Итак, наша цель состоит в том, чтобы ввести некоторые упрощающие предположения и показать, что при этих предположениях представляющая рассматриваемые предпочтения функция полезности имеет вид

$$U(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s).$$

Функция $U(\cdot)$ такого вида называется **функцией Неймана—Моргенштерна** (**ожидаемой полезностью**), а функция $u(\cdot)$, заданная на множестве исходов X,— **элементарной функцией полезности** (функцией Бернулли)[1].

6.2. Представление предпочтений линейной функцией полезности

Классический подход к моделированию предпочтений на случайных потребительских наборах исходит из предположения, что для потребителя не имеет значения само по себе состояние мира. Это предположение позволяет характеризовать предпочтения на случайных потребительских наборах $\tilde{\mathbf{x}}$ посредством предпочтений на *лотереях* — объектах более простой природы. Если для потребителя

[1] Эта функция впервые была выведена на основе аксиом Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном в их знаменитой книге J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944 (рус. пер. Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение*, М.: Наука, 1970). Сама идея ожидаемой полезности появилась гораздо раньше (см., напр., работу Даниила Бернулли, упоминаемую в сноске 5 на с. 403).

не имеет значения само по себе состояние мира и потребление $\mathbf{x}_s$ в нескольких различных состояниях мира совпадает, то можно «объединить» эти состояния и сложить их вероятности. Получившийся объект и будет называться лотереей. Лотерея включает информацию только о результатах, которые непосредственно влияют на потребителя, и о вероятностях получения этих результатов, но не содержит информации о том, как эти результаты получены и каким состояниям мира они соответствуют. При таком подходе можно изначально задать предпочтения на лотереях, а затем перенести на случайные потребительские наборы.

Покажем, как построить такие лотереи по случайным потребительским наборам. Пусть, например, имеется три равновероятных состояния мира: «желтое», «фиолетовое» и «голубое». В желтом состоянии мира потребитель потребит 1 кг огурцов и 2 л кваса, в фиолетовом также 1 кг огурцов и 2 л кваса, а в голубом — 3 кг огурцов и 1 л кваса. В результате получаем лотерею, в которой набор $(1; 2)$ имеет вероятность $2/3$, а набор $(3; 1)$ — вероятность $1/3$.

В общем случае пусть $\tilde{\mathbf{x}}$ — случайный потребительский набор. Рассмотрим множество $\{\dot{\mathbf{x}}_j\}$ всех различающихся между собой исходов $\mathbf{x}_s$ из этого случайного набора, которым соответствуют положительные вероятности (другими словами, это носитель соответствующей случайной величины). Каждому исходу $\dot{\mathbf{x}}_j$ сопоставляется вероятность p_j, равная сумме вероятностей состояний мира, в которых исход равен $\dot{\mathbf{x}}_j$, т. е.

$$p_j = \sum_{s\colon x_s = \dot{x}_j} \mu_s.$$

Такие объекты (множества различных исходов и их вероятности) принято называть **лотереями** на множестве X. Построенную на основе исходного случайного потребительского набора $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$ лотерею будем обозначать $\ell(\tilde{\mathbf{x}})$.

Множеству $\tilde{X}$ допустимых случайных потребительских наборов соответствует множество $\mathcal{L} = \{\, \ell(\tilde{\mathbf{x}}) \mid \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X} \,\}$ получающихся на их основе лотерей. Если множество состояний мира конечно, то все полученные таким образом лотереи $\ell(\tilde{\mathbf{x}})$ будут простыми.

Определение 6.1

Простой лотереей называют лотерею с конечным носителем, т. е. пару $(X_p, \mathbf{p})$, где X_p — конечное подмножество множества исходов X, а $\mathbf{p}$ — вектор (положительных) вероятностей получения исходов из X_p. $\triangleleft$

Простую лотерею можно представить следующей таблицей (где, как говорилось выше, все $\dot{\mathbf{x}}_j$ предполагаются различными):

$\dot{\mathbf{x}}_1$	$\dot{\mathbf{x}}_2$	$\cdots$	$\dot{\mathbf{x}}_k$
p_1	p_2	$\cdots$	p_k

В дальнейшем удобно простую лотерею представлять в виде функции $p(\cdot)$, заданной на всем множестве X, считая, что $p(\mathbf{x}) = 0$, если $\mathbf{x} \notin X_p$ и $p(\mathbf{x}_j) = p_j$. Тогда без потери общности простую лотерею $(X_p, \mathbf{p})$ можно отождествлять с $\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ понимается как сокращенное обозначение функции $p(\cdot)$. В дальнейшем будем придерживаться этого упрощения. Будем обозначать соответствующее $\mathbf{p}$ множество X_p, т. е. носитель лотереи, через $\operatorname{Supp}(\mathbf{p})$.

$$\operatorname{Supp}(\mathbf{p}) = \left\{\, \mathbf{x} \in X \;\middle|\; p(\mathbf{x}) > 0 \,\right\}.$$

Понятно, что по определению вероятности

$$\sum_{\mathbf{x} \in \operatorname{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x}) = 1.$$

Множество всех простых лотерей обозначим через $\mathcal{S}$. Сначала мы охарактеризуем условия существования функции полезности Неймана—Моргенштерна для предпочтений, заданных на множестве $\mathcal{S}$. Позже мы покажем, что предпочтения на $\mathcal{S}$ задают предпочтения на $\tilde{X}$ и функция Неймана—Моргенштерна на $\mathcal{S}$ задает функцию Неймана—Моргенштерна на $\tilde{X}$.

Первое предположение, которое мы сделаем, состоит в том, что у потребителя существуют предпочтения, упорядочивающие все возможные пары элементов множества $\mathcal{S}$, причем эти предпочтения являются рациональными в стандартном неоклассическом смысле (см. Определение 1.3 на с. 30).

(A1) На множестве простых лотерей $\mathcal{S}$ заданы неоклассические предпочтения $\langle \succ, \succcurlyeq, \sim \rangle$.

Кроме предположения о наличии рациональных предпочтений на лотереях, нам потребуются еще два важных предположения о свойствах комбинаций лотерей.

Определение 6.2

Для любой пары простых лотерей $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ и числа $\alpha \in [0; 1]$ определим выпуклую комбинацию или, другими словами, смесь лотерей $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ как простую лотерею, носителем которой является объединение носителей лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$:

$$\mathrm{Supp}(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \mathrm{Supp}(\mathbf{p}) \cup \mathrm{Supp}(\mathbf{q}),$$

а вероятность исхода $\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}))$ рассчитывается по формуле

$$\alpha p(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) q(\mathbf{x})$$

(соответственно 0, если $\mathbf{x} \notin \mathrm{Supp}(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q})$). $\triangleleft$

Легко понять, что множество всех простых лотерей $\mathcal{S}$ содержит все выпуклые комбинации своих элементов: если $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$, тогда $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ для всех $\alpha \in [0; 1]$.

Построение выпуклой комбинации лотерей с различающимися множествами исходов проиллюстрировано на Рис. 6.1.

Одна из возможных интерпретаций операции выпуклой комбинации лотерей $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ состоит в том, что рассматривается двухэтапная лотерея: лотерея с двумя исходами, которые, в свою очередь, являются обычными одноэтапными лотереями. В первоначальной лотерее вероятности равны α и $1 - \alpha$: с вероятностью α реализуется исход $\mathbf{p}$, а с вероятностью $1 - \alpha$ — исход $\mathbf{q}$. При этом предполагается, что оценка лотереи потребителем не зависит от способа ее реализации, т. е. двухэтапная и соответствующая ей одноэтапная лотереи эквивалентны. Другими словами, в оценке любой лотереи потребитель ориентируется лишь на исходы этой лотереи и вероятности, с которыми эти исходы реализуются. Так, две показанные на Рис. 6.1 лотереи эквивалентны, поскольку приводят в конечном итоге к одним и тем же исходам с одинаковыми вероятностями этих исходов, и поэтому их можно рассматривать как одну и ту же альтернативу.

Мы будем исходить из того, что для выпуклых комбинаций лотерей верны следующие два предположения.

(A2) Аксиома независимости от посторонних альтернатив
Пусть $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ — произвольная лотерея. Тогда для любого $\alpha \in (0; 1]$ выполняется соотношение $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$.

Эту аксиому можно интерпретировать через двухэтапные лотереи. Предположим, что индивидуум считает лотерею $\mathbf{p}$ более предпочтительной, чем $\mathbf{q}$. Если проводится лотерея, в которой с вероятностью $1 - \alpha$ потребителю достается лотерея $\mathbf{r}$, а с вероятностью α —

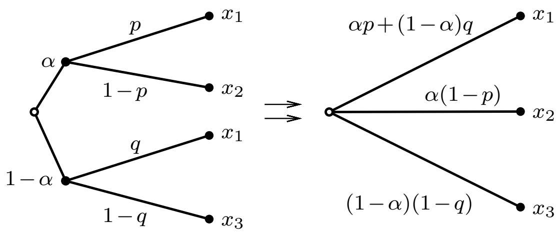


Рис. 6.1. *Две простые лотереи* $\mathbf{p}$ *и* $\mathbf{q}$ *и их выпуклая комбинация* $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$

по желанию $\mathbf{p}$ или $\mathbf{q}$, то в последнем случае потребитель всегда будет выбирать $\mathbf{p}$, какова бы ни была лотерея $\mathbf{r}$. Что будет, если предложить потребителю выбрать между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ *заранее*? Естественно предположить, что он тоже выберет $\mathbf{p}$. Но это фактически то же, что выбирать между двумя двухэтапными лотереями: лотереей, где исходами являются $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ с вероятностями α и $1-\alpha$ соответственно, и лотереей, где исходами являются $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ с вероятностями α и $1-\alpha$. Следовательно, индивидууму следует выбрать первую из этих двухэтапных лотерей, что и означает, что $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$.

(A3) Аксиома исчерпания Архимеда

Если $\mathbf{p} \succ \mathbf{q} \succ \mathbf{r}$, то существуют числа $\alpha, \beta \in (0;1)$, такие что

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{r}.$$

Эта аксиома утверждает, что если лотерея $\mathbf{q}$ лучше $\mathbf{r}$, но хуже $\mathbf{p}$, то не может быть так, чтобы *все* нетривиальные смеси лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ были либо лучше, либо хуже $\mathbf{q}$: найдется хотя бы одна смесь, которая хуже $\mathbf{q}$, и хотя бы одна смесь, которая лучше $\mathbf{q}$. Смысл аксиомы состоит в том, что предпочтения на лотереях в определенном смысле непрерывны.

При этих предположениях предпочтения на простых лотереях можно описать функцией, которая линейна по вероятностям (имеет вид Неймана—Моргенштерна).

Определение 6.3

Функция полезности $U\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, представляющая предпочтения на простых лотереях, называется функцией полезности Неймана—Моргенштерна, если существует функция $u\colon X \to \mathbb{R}$, такая что

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}).$$

$\lhd$

Мы хотим доказать следующий результат[2].

Теорема 6.1

Если предпочтения на множестве простых лотерей $\mathcal{S}$ удовлетворяют предположениям (A1)—(A3), то существует представляющая их функция полезности $U(\cdot)$, имеющая вид Неймана—Моргенштерна. Такое представление единственно с точностью до линейного преобразования. ⌟

Доказательство этой теоремы достаточно громоздкое. Оно приведено в следующем параграфе.

Данная теорема говорит о том, что мы можем определить полезность U как функцию от лотереи $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$. Эта же функция косвенным образом задает предпочтения на множестве исходных случайных потребительских наборов $\tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X}$. Как мы видели, каждому случайному потребительскому набору соответствует лотерея $\ell(\tilde{\mathbf{x}}) \in \mathcal{S}$. Естественно сопоставить набору $\tilde{\mathbf{x}}$ величину полезности $U = U(\ell(\tilde{\mathbf{x}}))$.

Определенная таким образом функция $U(\tilde{\mathbf{x}})$ оказывается линейной по исходным вероятностям μ_s. Для того чтобы это показать, следует вспомнить, как мы построили вероятности $p(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{p})$ на основе исходных вероятностей состояний мира μ_s:

$$
\begin{aligned}
U = \sum_{\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{k} p_j u(\dot{x}_j) = \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{s:\ x_s = \dot{x}_j} \mu_s u(x_j) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s).
\end{aligned}
$$

Окончательно получаем следующий вид для функции полезности, представляющей исходные предпочтения на $\tilde{X}$:

$$
U(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s).
$$

Заметим, что, в соответствии с определением функции Неймана—Моргенштерна, ее можно записать в следующем виде (в виде

[2] Здесь используется не та система аксиом, которая предложена в книге фон Неймана и Моргенштерна. Мы исходим из ставшей традиционной системы аксиом Н. Йенсена (N. Jensen • An Introduction to Bernoullian Utility Theory, I: Utility Functions, *Swedish Journal of Economics* **69** (1967): 163–183.).

ожидаемой полезности):

$$U(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}}).$$

где E — оператор математического ожидания. Заметим также, что этот вид не зависит от предположений о конечности множества состояний мира. Если это множество не является конечным, то соответствующие суммы по $s \in S$ заменяются интегралами. В дальнейшем мы чаще всего будем пользоваться оператором E, а не соответствующей суммой, поскольку это упрощает обозначения и позволяет формулировать и доказывать утверждения в более общей форме. Что именно спрятано за оператором E имеет значение в основном тогда, когда требуется брать производные от $U(\cdot)$.

Сделаем еще ряд существенных замечаний.

Можно было бы исходить из того, что на случайных потребительских наборах из множества $\tilde{X}$ заданы предпочтения, и предположить, что при сравнении разных $\tilde{\mathbf{x}}$ принимаются во внимание только исходы и вероятности их получения, т. е. они удовлетворяют следующему свойству:

Если для $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{X}$ выполнено $\ell(\tilde{\mathbf{x}}) = \ell(\tilde{\mathbf{y}})$, то $\tilde{\mathbf{x}} \sim \tilde{\mathbf{y}}$.

Тогда предпочтения на множестве $\tilde{X}$ порождают предпочтения на множестве лотерей, порожденных этими величинами, более конкретно, на множестве $\mathcal{L} = \{\, \ell(\tilde{\mathbf{x}}) \mid \tilde{\mathbf{x}} \in \tilde{X} \,\}$. Ясно, что подобные предпочтения на множестве $\mathcal{L}$ будут неоклассическими, если исходные предпочтения являются таковыми.

Множество $\mathcal{L}$ является подмножеством множества простых лотерей $\mathcal{S}$, если множество состояний мира конечно. Однако при этом $\mathcal{L}$ не может содержать *все* простые лотереи, поскольку количество исходов в носителе лотереи не может быть больше числа состояний мира. Таким образом, предпочтения на множестве всех простых лотерей $\mathcal{S}$ будут заданы только частично.

Можно было бы рассмотреть вопрос о том, возможно ли дополнить эти частично заданные предпочтения таким образом, чтобы они удовлетворяли предположениям (A1)—(A3). Однако эта проблема выходит далеко за рамки данного учебника. Поэтому мы просто постулируем существование рациональных предпочтений на простых лотереях. Поскольку многие ситуации выбора в условиях риска изначально представляются как ситуации выбора на множестве лотерей, такой подход имеет и самостоятельное значение.

В ряде приложений теории выбора в условиях риска предпочтения оказываются заданными на лотереях более общего типа, например на непрерывных распределениях. В этой связи возникает вопрос об условиях существования функций полезности Неймана—Моргенштерна, представляющих такие предпочтения. Мы не будем останавливаться детально на описании таких условий. Укажем лишь на тот факт, что множество простых лотерей (простых мер) — всюду плотное подмножество множества борелевских мер (а значит, и непрерывных распределений). Поэтому если предпочтения заданы на некотором подмножестве борелевских мер и непрерывны в слабой топологии, то при некоторых дополнительных предположениях функцию полезности, определенную на простых мерах, можно по непрерывности распространить и на более широкий класс лотерей. Читатель может попробовать доказать соответствующие утверждения самостоятельно, обращаясь, в случае необходимости, к учебникам по математическому анализу и топологии.

В заключение этого параграфа укажем на на то, что, рассматривая предпочтения на лотереях, мы исходим из предположения, что для потребителя не имеет значения само по себе состояние мира, однако такое предположение содержательно далеко не всегда оправданно. Во многих реальных ситуациях польза от блага зависит от того, в каком состоянии мира происходит потребление этого блага. Можно, например, рассмотреть два состояния — «солнечная погода» и «дождливая погода» и два блага — солнцезащитные очки и зонтик. Ясно, что наличие очков в дождливую погоду не приносит никакой пользы потребителю. То же верно и для зонтика в ясную погоду. Решение этой проблемы состоит в том, чтобы рассматривать лотереи не на самих по себе потребительских благах, а на тех «услугах», которые они оказывают потребителю. В рассматриваемом примере следует перейти от набора благ (количество солнцезащитных очков, количество зонтиков) к набору услуг, которые они оказывают: (услуга защиты глаз от солнца, услуга защиты от дождя).

В общем случае, пусть имеется функция $\mathbf{z}_s(\mathbf{x})$, ставящая в соответствие потребительскому набору $\mathbf{x}$ в состоянии мира s оказываемые этим набором потребителю услуги $\mathbf{z}$. Предполагается, что польза от услуг уже не связана с состоянием мира. В этом случае можно применить рассматриваемую теорию к лотереям, заданным на $\mathbf{z}$, а потом построить на этой основе функцию полезности, заданную на наборах благ $\mathbf{x}$. Если $u_0(\mathbf{z})$ — элементарная функция полезности, заданная на «услугах» благ, то $u_s(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{z}_s(\mathbf{x}))$ —

соответствующая элементарная функция полезности, заданная на благах. Заметьте, что она *зависит от состояния мира*. При этом функция полезности Неймана—Моргенштерна принимает следующий более общий вид:

$$U = \sum_{s \in S} \mu_s u_s(\mathbf{x}_s).$$

6.3. Представление линейной функцией полезности: доказательство

В этом параграфе нам предстоит доказать Теорему 6.1. Для упрощения выкладок понадобятся некоторые свойства операции смеси (выпуклой комбинации) лотерей. Доказательство их достаточно очевидно (см. задачу 6.1).

Теорема 6.2

Операция выпуклой комбинации лотерей на множестве всех простых лотерей $\mathcal{S}$ обладает следующими свойствами:

* $\mathbf{p} \diamond 1 \diamond \mathbf{q} = \mathbf{p}$,
* $\mathbf{p} \diamond 0 \diamond \mathbf{q} = \mathbf{q}$,
* $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} = \mathbf{q} \diamond (1-\alpha) \diamond \mathbf{p}$,
* $(\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}) \diamond \alpha \diamond (\mathbf{p} \diamond \gamma \diamond \mathbf{q}) = \mathbf{p} \diamond (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) \diamond \mathbf{q}$. ┘

Сначала сформулируем две леммы, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 6.3

Пусть для предпочтений на простых лотереях выполнены свойства (A1)—(A3). Тогда верны следующие утверждения.

{i} Для любой пары лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, таких что $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$, и пары чисел $\alpha, \beta \in [0;1]$ условие

$$\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\beta > \alpha$.

{ii} Если $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, и $\mathbf{r}$ — произвольная лотерея, то для любого $\alpha \in [0;1]$ выполняется соотношение $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \sim \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$. ┘

Доказательство: {i} Докажем сначала, что из $\beta > \alpha$ следует $\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$.

Рассмотрим лотерею $\mathbf{r} = \mathbf{p} \diamond \frac{\alpha}{\beta} \diamond \mathbf{q}$. Для нее выполнено

$$\mathbf{r} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} = \left(\mathbf{p} \diamond \frac{\alpha}{\beta} \diamond \mathbf{q}\right) \diamond \beta \diamond \mathbf{q} = \mathbf{p} \diamond \frac{\alpha}{\beta}\beta \diamond \mathbf{q} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}.$$

Так как $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$, то по аксиоме (A2) при $\frac{\alpha}{\beta} \in [0;1)$ выполнено

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} \diamond \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \diamond \mathbf{p} \succ \mathbf{q} \diamond \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \diamond \mathbf{p} = \mathbf{p} \diamond \frac{\alpha}{\beta} \diamond \mathbf{q} = \mathbf{r}.$$

Полученное соотношение $\mathbf{p} \succ \mathbf{r}$ позволяет при $\beta \in (0;1]$ еще раз применить аксиому (A2):

$$\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{r} \diamond \beta \diamond \mathbf{q},$$

откуда получаем $\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$.

Докажем обратное. Пусть для некоторых α и β выполнено $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \prec \mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}$, но при этом $\alpha \geqslant \beta$. Если $\alpha > \beta$, то по только что доказанному $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}$, а это противоречит асимметричности строгого отношения предпочтения. Если же $\alpha = \beta$, то лотереи $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ и $\mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}$ совпадают, и получаем противоречие с иррефлексивностью отношения $\succ$. Таким образом, утверждение доказано.

{ii} Доказательство этого пункта оставляем читателю как упражнение (см. задачи 6.3 и 6.4). ■

Нам понадобится еще тот факт, что функция Неймана—Моргенштерна — это синоним функции линейной по вероятностям. Под линейностью по вероятностям здесь понимается следующее.

Определение 6.4

Будем называть функцию полезности $U\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, представляющую предпочтения на лотереях, линейной (по вероятностям), если для произвольных лотерей $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ и числа $\alpha \in [0;1]$ верно соотношение

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1 - \alpha)U(\mathbf{q}). \qquad \triangleleft$$

Докажем, что линейность функции полезности эквивалентна тому, что это функция Неймана—Моргенштерна.

Теорема 6.4

Функция $U(\cdot)$ является линейной функцией полезности, представляющей предпочтения на множестве лотерей $\mathcal{S}$, тогда и только тогда, когда она имеет вид Неймана—Моргенштерна. ⌟

Доказательство: Пусть функция $U(\cdot)$ линейна. Обозначим через $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})$ лотерею, в которой $\mathbf{x}$ является единственным исходом, т. е.

$$\mathrm{Supp}(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})) = \{\mathbf{x}\}.$$

Определим функцию $u(\cdot)$ на множестве элементарных исходов X по формуле

$$u(\mathbf{x}) = U(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})).$$

Тогда $U(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x})$. Докажем это утверждение по индукции.

Очевидно, что для лотереи с одним исходом это утверждение выполнено. Предположим, что утверждение верно для лотерей с k и менее исходами. Пусть $\mathbf{p}$ — лотерея с $k+1$ исходом, и пусть $\mathbf{x}'$ — один из этих исходов, т. е. $\mathbf{x}' \in \mathrm{Supp}(\mathbf{p})$. Тогда

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}') \diamond p(\mathbf{x}') \diamond \mathbf{q},$$

где $\mathbf{q}$ — лотерея с $\mathrm{Supp}(\mathbf{q}) = \mathrm{Supp}(\mathbf{p}) \setminus \{\mathbf{x}'\}$ и $q(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})/(1-p(\mathbf{x}'))$ при $\mathbf{x} \in \mathrm{Supp}(\mathbf{q})$.

Так как функция $U(\cdot)$ линейна, то

$$U(\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x}') \diamond p(\mathbf{x}') \diamond \mathbf{q}) = p(\mathbf{x}')u(\mathbf{x}') + (1-p(\mathbf{x}'))U(\mathbf{q}).$$

В силу предположения индукции

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{q})} q(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{q})} \frac{p(\mathbf{x})}{1-p(\mathbf{x}')}\, u(\mathbf{x}) = \frac{1}{1-p(\mathbf{x}')} \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{q})} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}).$$

В итоге получим требуемый результат:

$$U(\mathbf{p}) = p(\mathbf{x}')u(\mathbf{x}') + (1-p(\mathbf{x}'))\frac{1}{1-p(\mathbf{x}')} \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{q})} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) =$$

$$= \sum_{\mathbf{x}\in\mathrm{Supp}(\mathbf{p})} p(\mathbf{x})u(\mathbf{x}).$$

Доказательство обратного достаточно очевидно. ■

Следующая теорема является обратной к той, которую мы хотим доказать.

Теорема 6.5

Если предпочтения на множестве лотерей представимы линейной функцией полезности $U(\cdot)$, то эти предпочтения удовлетворяют свойствам (A1)—(A3). ⌟

Доказательство: (A1) Это свойство очевидно. Если предпочтения заданы функцией полезности, то предпочтения являются неоклассическими.

(A2) Пусть $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$. Тогда $U(\mathbf{p}) > U(\mathbf{q})$.

Пусть $\mathbf{r}$ — произвольная лотерея, α — число, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{r}) > \\ > \alpha U(\mathbf{q}) + (1-\alpha)U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}).$$

Поэтому $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$. Значит, предпочтения удовлетворяют свойству независимости от посторонних альтернатив.

(A3) Пусть $\mathbf{p} \succ \mathbf{q} \succ \mathbf{r}$, то есть

$$U(\mathbf{p}) > U(\mathbf{q}) > U(\mathbf{r}).$$

Тогда если

$$1 \geqslant \alpha > \frac{U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{r})}{U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{r})},$$

то $\alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{r}) > U(\mathbf{q})$, откуда по свойству линейности $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q}$. Аналогично если

$$0 \leqslant \beta < \frac{U(\mathbf{q}) - U(\mathbf{r})}{U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{r})},$$

то $\mathbf{q} \succ \mathbf{p} \diamond \beta \diamond \mathbf{r}$. Значит, выполнена «аксиома исчерпания Архимеда». ■

Если предпочтения потребителя на лотереях удовлетворяют аксиомам (A1)—(A3), то можно подобрать линейную функцию полезности, которая представляет эти предпочтения, притом такая линейная функция полезности единственна с точность до линейного преобразования. Ниже мы докажем это[3], используя следующее вспомогательное предположение (теорема верна и без этого предположения[4]):

(A4) Множество $\mathcal{S}$ содержит наихудший $\mathbf{w}$ и наилучший $\mathbf{b}$ элементы:

$$\mathbf{w} \preccurlyeq \mathbf{p} \preccurlyeq \mathbf{b} \text{ для всех } \mathbf{p} \in \mathcal{S}.$$

[3] Эти доказательства можно сделать более элегантными, если предположить конечность множества X.

[4] См., напр., P. C. Fishburn. *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley & Sons, 1970 (рус. пер. П. Фишбёрн. *Теория полезности для принятия решений*, М.: Наука, 1978). В задаче 6.5 предлагается доказать это утверждение самостоятельно в виде серии утверждений.

Для доказательства общей теоремы докажем еще две леммы. Всюду предполагается, что выполнены свойства (A1)—(A4).

В случае, когда $\mathbf{b} \sim \mathbf{w}$, все лотереи из множества $\mathcal{S}$ эквивалентны и построение функции полезности с нужными свойствами не вызывает затруднений:

$$U(\mathbf{p}) = C,$$

где C — произвольное число. (Понятно, что константа — линейная функция.) Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\mathbf{w} \succ \mathbf{b}$.

Будем обозначать через $\mathbf{f}(\alpha)$ выпуклую комбинацию лучшей и худшей лотерей с коэффициентом $\alpha \in [0;1]$, т. е.

$$\mathbf{f}(\alpha) = \mathbf{b} \diamond \alpha \diamond \mathbf{w}.$$

Обозначим множество таких лотерей через $\mathbf{f}([0;1])$. Напомним, что мы рассматриваем только случай $\mathbf{b} \succ \mathbf{w}$. Из Теоремы 6.3 следует, что функция $\mathbf{f}(\cdot)$ задает взаимно однозначное соответствие между отрезком $[0;1]$ и множеством $\mathbf{f}([0;1])$. Следующее утверждение показывает, что на основе функции $\mathbf{f}(\cdot)$ можно построить функцию полезности.

Теорема 6.6

Для любой лотереи $\mathbf{p}$ из $\mathcal{S}$ найдется единственное число $U(\mathbf{p}) \in$ $\in [0;1]$ такое, что справедливо $\mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \sim \mathbf{p}$. Функция $U(\cdot)$ является функцией полезности, представляющей данные предпочтения.⌋

Доказательство: Для любой лотереи $\mathbf{p} \in \mathcal{S}$ нам нужно установить, что существует эквивалентная ей лотерея из $\mathbf{f}([0;1])$.

Когда $\mathbf{p} \sim \mathbf{b}$ или же $\mathbf{p} \sim \mathbf{w}$, доказательство существования числа $U(\mathbf{p})$ тривиально — оно равно 1 и 0 соответственно.

Рассмотрим случай $\mathbf{w} \prec \mathbf{p} \prec \mathbf{b}$.

Обозначим множество чисел, соответствующих лотереям из $\mathbf{f}([0;1])$, которые лучше, чем $\mathbf{p}$, через A^+:

$$A^+ = \left\{ \alpha \in [0;1] \mid \mathbf{p} \prec \mathbf{f}(\alpha) \right\}.$$

Аналогично множество чисел, соответствующих лотереям из $\mathbf{f}([0;1])$, которые хуже, чем $\mathbf{p}$, обозначим через A^-:

$$A^- = \left\{ \alpha \in [0;1] \mid \mathbf{f}(\alpha) \prec \mathbf{p} \right\}.$$

Эти два множества непусты, поскольку $1 \in A^+$ и $0 \in A^-$.

Так как множества A^+, A^- непусты и ограничены, то существуют числа

$$\alpha^+ = \inf A^+,\ \alpha^- = \sup A^-.$$

Для этих чисел справедливо соотношение $\alpha^- \leqslant \alpha^+$; в противном случае нашелся бы общий элемент $\alpha \in A^-$, $\alpha \in A^+$, что противоречит иррефлексивности $\succ$.

Покажем, что $\mathbf{f}(\alpha^+) \preccurlyeq \mathbf{p} \preccurlyeq \mathbf{f}(\alpha^-)$, т. е. $\alpha^+ \notin A^+$ и $\alpha^- \notin A^-$. Предположим противное. Пусть, например, $\mathbf{w} \prec \mathbf{p} \prec \mathbf{f}(\alpha^+)$. В таком случае в силу (A3) существует $\gamma > 0$, такое что для лотереи $\mathbf{w} \diamond \gamma \diamond \mathbf{f}(\alpha^+)$ справедливо соотношение

$$\mathbf{w} \diamond \gamma \diamond \mathbf{f}(\alpha^+) \succ \mathbf{p}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\mathbf{w} \diamond \gamma \diamond \mathbf{f}(\alpha^+) = \mathbf{w} \diamond \gamma \diamond (\mathbf{b} \diamond \alpha^+ \diamond \mathbf{w}) = \\ = \mathbf{b} \diamond \alpha^+(1-\gamma) \diamond \mathbf{w} = \mathbf{f}(\alpha^+(1-\gamma)),\end{aligned}$$

то это означает, что $\mathbf{f}(\alpha^+(1-\gamma)) \succ \mathbf{p}$. Значит, $\alpha^+(1-\gamma) \in A^+$, а это противоречит определению числа α^+. Итак, предположение $\mathbf{f}(\alpha^+) \succ \mathbf{p}$ неверно. Поэтому $\mathbf{f}(\alpha^+) \preccurlyeq \mathbf{p}$. Рассуждения для α^- аналогичны. Таким образом,

$$\mathbf{f}(\alpha^+) \preccurlyeq \mathbf{p} \preccurlyeq \mathbf{f}(\alpha^-).$$

Если сопоставить это с вытекающим из Теоремы 6.3 и из неравенства $\alpha^- \leqslant \alpha^+$ соотношением

$$\mathbf{f}(\alpha^-) \preccurlyeq \mathbf{f}(\alpha^+),$$

то

$$\mathbf{f}(\alpha^-) \sim \mathbf{p} \sim \mathbf{f}(\alpha^+).$$

Таким образом, мы можем выбрать $U(\mathbf{p}) = \alpha^+$. Существование числа $U(\mathbf{p})$ доказано.

Единственность числа $U(\mathbf{p})$ следует из Теоремы 6.3.

Теперь покажем, что $U(\mathbf{p})$ есть функция полезности. Из Теоремы 6.3 следует, что из двух лотерей из $\mathbf{f}([0;1])$ хуже та, коэффициент которой меньше и обратно:

$$\mathbf{f}(\alpha) \prec \mathbf{f}(\beta) \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Для двух произвольных лотерей $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ соотношение $\mathbf{p} \prec \mathbf{q}$ эквивалентно тому, что $\mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \prec \mathbf{f}(U(\mathbf{q}))$. Поэтому

$$\mathbf{p} \prec \mathbf{q} \Leftrightarrow U(\mathbf{p}) < U(\mathbf{q}).$$

■

Докажем теперь, что построенная таким образом функция является единственной линейной функцией, представляющей рассматриваемые предпочтения.

Теорема 6.7

Функция полезности $U(\cdot)$, такая что $\mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \sim \mathbf{p}$, является линейной.

Эта функция — единственная (с точностью до линейного преобразования) линейная функция полезности, представляющая данные предпочтения. ⌟

Доказательство: (Линейность) Мы хотим доказать, что для любых лотерей $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$ и числа $\alpha \in [0;1]$ выполнено

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha) U(\mathbf{q}).$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ доказываемое очевидно.

Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$.

Пусть утверждение теоремы неверно. Пусть например для некоторых $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{S}$

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) < \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha) U(\mathbf{q}).$$

Тогда можно подобрать числа $0 \leqslant \beta \leqslant U(\mathbf{p})$ и $0 \leqslant \gamma \leqslant U(\mathbf{q})$, такие что

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \alpha\beta + (1-\alpha)\gamma,$$

причем либо $\beta < U(\mathbf{p})$, либо $\gamma < U(\mathbf{q})$. При этом

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \sim \mathbf{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma).$$

По свойствам операции комбинирования лотерей

$$\mathbf{f}(\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) = \mathbf{b} \diamond (\alpha\beta + (1-\alpha)\gamma) \diamond \mathbf{w} = \\ = (\mathbf{b} \diamond \beta \diamond \mathbf{w}) \diamond \alpha \diamond (\mathbf{b} \diamond \gamma \diamond \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\beta) \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma).$$

Если $\beta < U(\mathbf{p})$, то $\mathbf{f}(\beta) \prec \mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \sim \mathbf{p}$, и по аксиоме (A2) получим

$$\mathbf{f}(\beta) \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \prec \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma).$$

Если же $\beta = U(\mathbf{p})$, то $\mathbf{f}(\beta) = \mathbf{f}(U(\mathbf{p})) \sim \mathbf{p}$ и согласно пункту {ii} Теоремы 6.3

$$\mathbf{f}(\beta) \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \sim \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma).$$

Аналогичным образом, если $\gamma < U(\mathbf{q})$, то верно соотношение $\mathbf{f}(\gamma) \prec \mathbf{f}(U(\mathbf{q})) \sim \mathbf{q}$, и по аксиоме (A2)

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) = \mathbf{f}(\gamma) \diamond (1-\alpha) \diamond \mathbf{p} \prec \mathbf{q} \diamond (1-\alpha) \diamond \mathbf{p} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}.$$

Если же $\gamma = U(\mathbf{q})$, то $\mathbf{f}(\gamma) \sim \mathbf{q}$ и по пункту {ii} Теоремы 6.3

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \sim \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}.$$

Получаем цепочку соотношений

$$\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \sim \mathbf{f}(\beta) \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \preccurlyeq \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{f}(\gamma) \preccurlyeq \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}.$$

Одно из соотношений «не хуже» будет строгим («хуже»). Значит, получено противоречие.

Аналогичным образом можно прийти к противоречию с аксиомой (A1), предположив, что $U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) > \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{q})$. Значит,

$$U(\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha)U(\mathbf{q}).$$

(Единственность) Предположим, что $V(\cdot)$ — другая линейная функция полезности. Обозначим

$$V^*(\mathbf{p}) = \frac{V(\mathbf{p}) - V(\mathbf{w})}{V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{w})}.$$

Данное преобразование является линейным. Покажем, что $V^*(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p})$. Поскольку $V(\cdot)$ линейна, то $V^*(\mathbf{p})$ также линейна. Кроме того, функции $V^*(\cdot)$ и $U(\cdot)$ совпадают для худшей и лучшей лотерей:

$$V^*(\mathbf{w}) = U(\mathbf{w}) = 0 \quad \text{и} \quad V^*(\mathbf{b}) = U(\mathbf{b}) = 1.$$

Это означает, что функции $V^*(\cdot)$ и $U(\cdot)$ в силу линейности совпадают на $\mathbf{f}([0;1])$. Так как любая лотерея из $\mathcal{S}$ эквивалентна лотерее из $\mathbf{f}([0;1])$, то $V^*(\cdot)$ и $U(\cdot)$ совпадают на любой лотерее из $\mathcal{S}$. ■

Сопоставляя доказанные в этом параграфе теоремы, видим, что мы фактически доказали Теорему 6.1. Правда, при этом мы использовали дополнительное предположение (A4). (Способ доказательства Теоремы 6.1 обрисован в задаче 6.5.)

Задачи

6.1 Докажите свойства операции смеси лотерей, указанные в Теореме 6.2.

6.2 Пусть для предпочтений на простых лотереях выполнены свойства (A1) и (A2). Покажите, что если $\mathbf{p} \succ \mathbf{q}$ и $\mathbf{r} \succ \mathbf{s}$, то $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{s}$ при $\alpha \in [0;1]$.

6.3 Пусть для предпочтений на простых лотереях выполнены свойства (A1) и (A2). Покажите, что если $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, то $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q} \sim \mathbf{p} \sim \mathbf{q}$ $(\alpha \in [0;1])$.

Указание: Предположите, что $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, но $\mathbf{s} \prec \mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, где $\mathbf{s} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ и $\alpha \in (0;1)$. Покажите, что из $\mathbf{s} \prec \mathbf{p}$ следует, что $\mathbf{s} \prec \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{s}$, а из $\mathbf{q} \succ \mathbf{s}$ следует, что $\mathbf{s} \succ \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{s}$, т.е. получите противоречие.

6.4 Пусть выполнены свойства (A1)—(A3). Покажите, что если $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, и $\mathbf{r}$ — произвольная лотерея, то $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \sim \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$ $(\alpha \in [0;1])$.

Указание: В случае $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \sim \mathbf{r}$ можно воспользоваться утверждением из задачи 6.3.

Пусть $\mathbf{p} \sim \mathbf{q}$, но $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$ при некотором $\mathbf{r}$ и $\alpha \in (0;1)$. Требуется получить противоречие, рассмотрев два случая для $\mathbf{r}$: $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \prec \mathbf{r}$ и $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \succ \mathbf{r}$.

Выбрав случай $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \prec \mathbf{r}$, покажите, что из $\mathbf{r} \succ \mathbf{p}$ следует $\mathbf{r} \succ \mathbf{s} \succ \mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$, где $\mathbf{s} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}$. Объясните, почему существует число $\beta \in (0;1)$, такое что

$$\mathbf{s} \succ \mathbf{r} \diamond \beta \diamond (\mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}).$$

Далее, покажите, что из $\mathbf{r} \succ \mathbf{q}$ следует $\mathbf{r} \diamond \beta \diamond \mathbf{q} \succ \mathbf{p}$, из чего, в свою очередь, следует

$$(\mathbf{r} \diamond \beta \diamond \mathbf{q}) \diamond \alpha \diamond \mathbf{r} \succ \mathbf{s}$$

и

$$\mathbf{r} \diamond \beta \diamond (\mathbf{q} \diamond \alpha \diamond \mathbf{r}) \succ \mathbf{s}.$$

Аналогичное противоречие получается в случае $\mathbf{p} \sim \mathbf{q} \succ \mathbf{r}$.

6.5 Докажите Теорему 6.1, т.е. «подправьте» доказательства, приведенные в этом параграфе, таким образом, чтобы не требовалось использовать предположение (A4).

Указание: Пусть $\mathbf{b}$ и $\mathbf{w}$ — две простые лотереи, такие что $\mathbf{b} \succ \mathbf{w}$ (не обязательно лучшая и худшая). Для любой пары лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, таких что $\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w}$ и $\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{q} \succcurlyeq \mathbf{w}$, их смесь $\mathbf{s} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ тоже удовлетворяет $\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{s} \succcurlyeq \mathbf{w}$ (это требуется доказать). Тогда, как было показано выше, существует функция полезности Неймана—Моргенштерна, определенная на множестве простых лотерей $\{\, \mathbf{p} \mid \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w} \,\}$.

Пусть теперь $\mathbf{p}$ — любая лотерея. Тогда, в силу отрицательной транзитивности $\succ$ выполняется одно из трех соотношений:

$$\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w}, \quad \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{w}, \quad \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{w} \succcurlyeq \mathbf{p}.$$

Предположим, что функция полезности Неймана—Моргенштерна, представляющая отношение предпочтения, определена на множестве $\{\,\mathbf{p} \mid \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w}\,\}$, и пусть $\mathbf{p}$ удовлетворяет соотношению $\mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{w}$ ($\mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{w} \succcurlyeq \mathbf{p}$). Тогда существует (и единственно) число α, такое что

$$\mathbf{b} = \mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{w} \text{ (соответственно, } \mathbf{w} = \mathbf{b} \diamond \alpha \diamond \mathbf{p})$$

Определим $U(\cdot)$ следующим образом:

$$U(\mathbf{b}) = \alpha U(\mathbf{p}) + (1-\alpha) U(\mathbf{w})$$
$$\text{(соответственно, } U(\mathbf{w}) = \alpha U(\mathbf{b}) + (1-\alpha) U(\mathbf{p})).$$

Демонстрация линейности определенной таким образом функции в значительной степени воспроизводит этапы доказательства теоремы в частном случае, когда $U(\cdot)$ определена лишь на множестве $\{\,\mathbf{p} \mid \mathbf{b} \succcurlyeq \mathbf{p} \succcurlyeq \mathbf{w}\,\}$.

6.4. Предпочтения потребителя в условиях риска

Модифицируем модель поведения потребителя, чтобы учесть в ней неопределенность. Следуя Эрроу, будем различать блага не только по их физическим характеристикам, но и по состояниям мира, в которых они потребляются. Будем называть такие блага **контингентными** или **условно-случайными**. Каждое контингентное благо характеризуется двумя индексами — индексом блага $k \in K$ и индексом состояния мира $s \in S$. Тогда x_{ks} — количество блага k, которое потребитель потребил (планирует потребить) в состоянии мира s.

Таким образом, к параметрам экономики добавляется множество состояний мира $S = \{1, \ldots, \hat{s}\}$. Мы будем считать его конечным. Потребляемый набор благ для i-го потребителя будет описываться вектором $\mathbf{x}_i = (x_{iks})_{k \in K, s \in S}$, $\mathbf{x}_i \in X_i \times \cdots \times X_i$. В предположении, что потребитель приписывает состояниям мира вероятности их реализации μ_{is}, каждому такому потребительскому набору $\mathbf{x}_i$ соответствует случайная величина, которую мы будем обозначать $\tilde{\mathbf{x}}_i$ (это l-мерная дискретная случайная величина, принимающая значения $\mathbf{x}_{is}$

с вероятностями μ_{is}). Будем называть ее случайным потребительским набором. Следуя сложившейся традиции, будем предполагать, что на множестве допустимых случайных потребительских наборов $\tilde{X}_i$ потребитель имеет неоклассические (рациональные) предпочтения, которые допускают представление функцией полезности. Эту функцию полезности будем обозначать $U_i(\cdot)$ $(U_i\colon \tilde{X}_i \to \mathbb{R})$. В этой функции в общем случае должны быть учтены как услуги для потребителя каждого товара в каждом состоянии мира (например, зонт полезнее в дождь), так и его личные гипотезы о вероятностях событий.

Поскольку в этом параграфе анализируется поведение единственного потребителя, индекс i будем опускать.

В предположении, что оценки вероятностей состояний мира у данного потребителя не меняются, можно считать, что его функция полезности $U(\cdot)$ задана на различных потребительских наборах из множества допустимых потребительских наборов $X \times \cdots \times X$, и записывать $U(\mathbf{x})$ вместо $U(\tilde{\mathbf{x}})$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что множество X является выпуклым.

Различают следующие типы потребителей в соответствии с их поведением в ситуациях с неопределенностью (свойствами предпочтений).

Определение 6.5

Будем называть потребителя имеющим неприятие риска, если его функция полезности $U(\cdot)$ (как функция $\mathbf{x}$) квазивогнута.

Будем называть потребителя имеющим строгое неприятие риска или рискофобом, если его функция полезности $U(\cdot)$ строго квазивогнута.

Будем называть потребителя нейтральным к риску, если $U(\cdot)$ линейна.

Будем называть потребителя рискофилом, если $U(\cdot)$ строго квазивыпукла. $\triangleleft$

Напомним, что функция квазивогнута тогда и только тогда, когда множества потребительских наборов, предпочитаемых наборам на кривой безразличия, выпуклы для каждой кривой безразличия. Вогнутость функции влечет за собой ее квазивогнутость, но не наоборот.

На Рис. 6.2 эти понятия иллюстрируются для случая одного (физического) блага и двух состояний мира. На графиках изображены

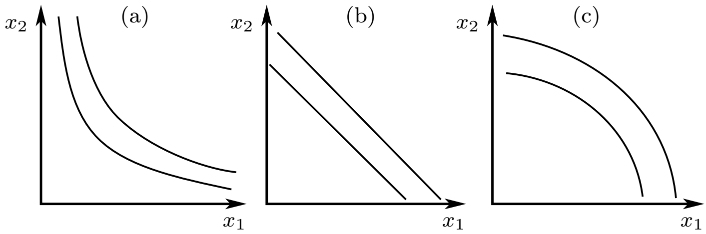


Рис. 6.2. *Кривые безразличия для потребителей с разным отношением к риску: (a) рискофоб, (b) нейтральный к риску, (c) рискофил*

кривые безразличия для потребителей с разным отношением к риску в предположении, что x_1 — потребление данного блага в первом, а x_2 — во втором состоянии мира.

В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что функция $U(\cdot)$ имеет вид Неймана—Моргенштерна. Это частный, но наиболее удобный и поэтому наиболее часто используемый для анализа случай функции полезности $U(\cdot)$:

$$U(\mathbf{x}) = \mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(\mathbf{x}_s),$$

где μ_s — оценки потребителем вероятностей состояний мира $s \in S$, $\mathbf{x}_s \in X$ — потребительский набор в состоянии мира s (контингентный потребительский набор), а $u \colon X \to \mathbb{R}$ — элементарная функция полезности (функция Бернулли) рассматриваемого потребителя, не зависящая от состояния мира, а зависящая только от потребления благ как таковых. Как правило, будем предполагать, что элементарная функция полезности является возрастающей. Вероятности, заложенные в функции полезности потребителя могут быть и ошибочными, поэтому в общем случае их следует рассматривать как субъективные вероятности.

Переопределим для функции Неймана—Моргенштерна отношение к риску в терминах элементарной функции полезности.

Определение 6.6

Будем называть потребителя с глобальной функцией полезности $U(\cdot)$ типа Неймана—Моргенштерна имеющим (строгое) неприятие риска (рискофобом), если его элементарная функция полезности $u(\cdot)$ (строго) вогнута, нейтральным к риску, если она линейна,

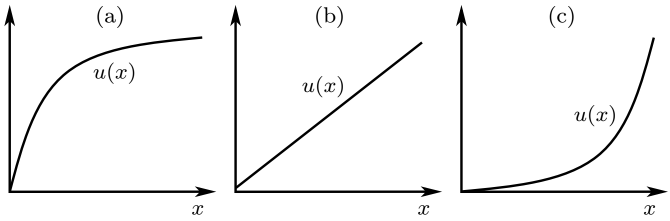


Рис. 6.3. *Элементарные функции полезности для потребителей с разным отношением к риску: (a) рискофоб, (b) нейтральный к риску, (c) рискофил*

и (строго) предпочитающим риск (рискофилом), если она (строго) выпукла. ◁

Данные определения иллюстрируются на Рис. 6.3.

Можно показать, что из определения неприятия риска в терминах $u(\cdot)$ следует определение неприятия в терминах $U(\cdot)$ (обратное, вообще говоря, неверно). Из вогнутости $u(\cdot)$ следует вогнутость $U(\cdot)$, а следовательно, и квазивогнутость.

В дальнейшем будем рассматривать только поведение экономических субъектов, характеризующихся неприятием риска, как более типичное.

Часто рассматривают ситуации, когда контингентные потребительские наборы содержат единственное благо — деньги. Соответствующие лотереи называют денежными. Количество денег x_s, которое получает индивидуум в состоянии мира s, будем называть *доходом* в этом состоянии мира или *выигрышем*. При этом используют следующие понятия (индекс блага опускаем).

Ожидаемый доход $\mathsf{E}\,\tilde{x}$ — это математическое ожидание дохода. В данном случае он вычисляется как

$$\mathsf{E}\,\tilde{x} = \sum_{s \in S} \mu_s x_s.$$

В терминах ожидаемого дохода рассмотренные выше три группы потребителей в зависимости от их отношения к риску характеризуются следующими соотношениями между ожидаемой полезностью денежной лотереи и полезностью ожидаемого дохода от нее:

- рискофилы: $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) > u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$;
- рискофобы: $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) < u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$;
- нейтральные по отношению к риску: $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) = u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$.

Здесь $\tilde{\mathbf{x}}$ — любая «нетривиальная» случайная величина (формально это означает, что вероятность того, что она не совпадает со своим математическим ожиданием, не равна нулю).

Заметим, что соотношение $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) \geqslant u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$ (которое называют **неравенством Йенсена**) выполнено для всех случайных величин тогда и только тогда, когда функция $u(\cdot)$ вогнута. Фактически это и есть определение вогнутой функции. Строгое неравенство $\mathsf{E}(u(\tilde{\mathbf{x}})) < u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{x}}))$ для произвольной «нетривиальной» случайной величины $\tilde{\mathbf{x}}$ выполнено тогда и только тогда, когда функция строго вогнута.

Безрисковым или **гарантированным** называется такой случайный потребительский набор $\tilde{x}$, что в любом состоянии мира потребитель имеет один и тот же доход: $x_s = \mathsf{E}\,\tilde{x}$ для всех $s \in S$.

Безрисковым или гарантированным эквивалентом данного потребительского набора $\tilde{x}$ называется такой доход x^*, что соответствующий безрисковый потребительский набор $\tilde{x}^*$ дает потребителю ту же самую полезность:

$$\mathsf{E}\,u(\tilde{x}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s) = \mathsf{E}\,u(\tilde{x}^*) = u(x^*).$$

Величина Δx называется **вознаграждением за риск** для данного потребительского набора $\tilde{x}$, если $\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x$ является безрисковым эквивалентом $\tilde{x}$:

$$\mathsf{E}\,u(\tilde{x}) = u(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x).$$

Эта величина показывает, какую сумму денег (в терминах ожидаемого дохода) готов потерять потребитель, чтобы избавиться от риска.

У рискофобов безрисковый эквивалент ниже ожидаемого дохода от любой рискованной денежной лотереи (величина вознаграждения за риск положительна). Соответственно у рискофилов он выше ожидаемого дохода (величина вознаграждения за риск отрицательна), а у нейтральных по отношению к риску потребителей совпадает (величина вознаграждения за риск равна нулю). Читателю предоставляется показать это самостоятельно (см. задачу 6.6).

Проиллюстрируем введенные понятия графически. На Рис. 6.4 изображена элементарная функция полезности потребителя с неприятием риска (функция вогнута). Потребитель предполагает, что могут произойти два события (A и B) с некоторыми вероятностями (μ_A и μ_B). Его потребительский набор имеет вид $\mathbf{x} = (x_A, x_B)$, где x_A и x_B — доходы, которые получит потребитель, если произойдут

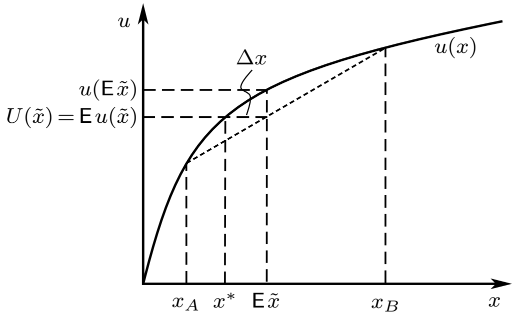


Рис. 6.4. *Различные характеристики лотереи с двумя событиями*

события A и B соответственно. Как нетрудно понять, точка $(\mathsf{E}\,\tilde{x}, U)$ лежит на отрезке, соединяющем точки $(x_A, u(x_A))$ и $(x_B, u(x_B))$, и делит его в отношении μ_B к μ_A. Здесь $\mathsf{E}\,\tilde{x}$ — ожидаемый доход набора, а U — полезность. Поскольку потребитель не любит риск, то график функции полезности лежит выше указанного отрезка и ожидаемая полезность $U = \mathsf{E}\,u(\tilde{x})$ больше полезности ожидаемого дохода $u(\mathsf{E}\,\tilde{x})$. Гарантированный эквивалент $\tilde{x}$ выбирается так, чтобы $U(\tilde{x}) = u(x^*)$. Плата за риск Δx равна разности между ожидаемой доходностью и доходностью гарантированного эквивалента.

Пример 6.1 (санкт-петербургский парадокс[5])

«Петр бросает вверх монету, пока она не упадет лицевой стороной вверх; если это происходит после первого броска, он должен дать Павлу 1 дукат, но если только после второго — 2 дуката, после третьего — 4, после четвертого — 8 и так далее, так что после каждого броска число дукатов удваивается. Спрашивается: какова оценка жребия для Павла?».

Ожидаемый доход от этой игры для Павла бесконечно велик, однако вряд ли кто согласится заплатить за право участия в такой игре неограниченно большую сумму. В этом и состоит парадокс. Объяснение парадокса состоит в том, что «ценность денег» для игрока

[5] Описание и объяснение этого парадокса приводятся в статье известного швейцарского ученого Даниила Бернулли: D. Bernoulli • Specimen theoriae novae de mensura sortis, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **5** (1738): 175–192 (рус. пер. Д. Бернулли • Опыт новой теории измерения жребия, в кн. *Теория потребительского поведения и спроса*, В. М. Гальперин (ред.), СПб.: Экономическая школа, 1993: 11–27).

не является постоянной. Она определяется некоторой возрастающей вогнутой элементарной функцией полезности.

Предположим, что исходный (безрисковый) доход игрока составляет сумму ω дукатов. В таком случае он сталкивается с лотереей, приносящей ему доход $\omega + 2^{k-1}$ с вероятностью 2^{-k} ($k = 1, 2, \ldots, \infty$). Ожидаемый доход (с учетом цены p, уплаченной за участие в игре) равен

$$\mathsf{E}\,\tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(\omega + 2^{k-1} - p) = \infty.$$

Если $u(\cdot)$ — элементарная функция полезности игрока, то ожидаемая полезность равна

$$U = \mathsf{E}\,u(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} u(\omega + 2^{k-1} - p).$$

Если x^* — безрисковый эквивалент этой лотереи, то игрок будет готов заплатить за право участвовать в игре $x^* - \omega$.

Например, если $u(x) = \ln(x)$ и $\omega = 100$, то максимальная цена, которую Павел будет готов отдать за участие в игре, определяется уравнением

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \ln(100 + 2^{k-1} - p) = \ln(100).$$

Решая численно это уравнение, получим

$$p \approx 4{,}36 < \infty.$$

▲

Задачи

6.6 Докажите, что у рискофобов безрисковый эквивалент ниже ожидаемого дохода от любой рискованной денежной лотереи, у рискофилов он выше ожидаемого дохода, а у нейтральных по отношению к риску потребителей совпадает с ожидаемым доходом.

6.7 Потребитель имеет элементарную функцию полезности $u(x) = \sqrt{x}$. Он получает доход 9 с вероятностью 2/3 и доход 25 с вероятностью 2/3. Найти плату за риск.

6.8 Индивидуум имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна. Элементарная функция полезности строго возрастает и зависит только от одного аргумента (денег). Лотерея \$3 и \$5 с вероятностями 1/2 и 1/2 и лотерея \$3 и \$9 с вероятностями 2/3 и 1/3 для него эквивалентны. Может ли быть верным, что этот индивидуум

- рискофоб, • нейтрален к риску, • рискофил?

6.9 Пусть имеется одно благо (деньги), элементарная функция полезности потребителя имеет вид $u(x) = \sqrt{x}$, а начальный запас (гарантированная сумма) денег равен \$9. Существует лотерейный билет, который может выиграть \$0 с вероятностью 0,5 (если выпадет «орел») и \$7 с вероятностью 0,5 (если выпадет «решка»). Рассмотрите три альтернативные ситуации.

(A) За какую сумму x потребитель купил бы такой билет?

(B) За какую сумму y потребитель согласился бы сам эмитировать (продать) такой лотерейный билет (можно считать, что его гарантированный запас состоит из девяти билетов по \$1, выигрывающих в состоянии мира «орел», и девяти билетов по \$1, выигрывающих в состоянии мира «решка»)?

(C) Если потребителю подарят такой билет, за какую сумму z он бы его продал?

6.10 Рискофоб с элементарной функцией полезности (функцией Бернулли) вида $u(x) = -1/x$ имеет \$900 и лотерейный билет, который дает \$900 с вероятностью 1/2 и \$0 с вероятностью 1/2. За сколько он продал бы этот билет?

6.11 Богатство потребителя равно 100. Элементарная функция полезности равна квадратному корню из дохода. Лотерейный билет дает выигрыш 0 с вероятностью π и 20 с вероятностью $(1 - \pi)$. Цена билета равна 5. При каких вероятностях потребитель

(A) купит билет;

(B) продаст билет (сам его эмитирует);

(C) продаст билет, если ему его подарят?

(Решать не обязательно, достаточно составить неравенство.)

6.12 Рассмотрим следующую игру: если игрок называет число z ($z \in [-\omega, \omega]$), то получает дополнительно к имеющейся у него сумме ω сумму z с вероятностью 1/3 и $(-z)$ с вероятностью 2/3. Какое число назовет игрок, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$?

(A) $u(x) = \sqrt{x}$; (B) $u(x) = -e^{-ax}$;

(C) $u(x) = -\frac{1}{x}$; (D) $u(x) = \ln x$;

(E) $u(x) = x - ax^2$ $(a > 0)$.

6.13 Пусть рискофоб, предпочтения которого описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, владеет суммой денег ω рублей и лотерейным билетом, выигрывающим a рублей с вероятностью $1/2$. Покажите, что при уменьшении a до нуля цена, за которую он готов продать этот лотерейный билет, стремится к величине ожидаемого выигрыша по этому билету.

6.14 Индивидуум, чьи предпочтения на лотереях описываются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(x) = \sqrt{x}$, располагает суммой денег ω рублей. Ему предлагают приобрести лотерейный билет, выигрывающий a рублей с вероятностью $1/2$. Пусть p — максимальная цена, которую он готов уплатить за лотерейный билет.

(A) Чему равна p при $\omega = 9$ и $a = 16$?

(B) Покажите, что p растет при увеличении величины выигрыша a.

(C) Покажите, что p растет при увеличении суммы денег ω.

(D) Покажите, что p не может превышать величину $a/4$ рублей.

6.15 Нейтральный к риску фермер может посеять капусту на берегу реки и получить доход \$1000, но рискует потерять весь урожай при наводнении. Он может посеять вдали от берега, где урожайность на 20% меньше, но нет риска. Фермер оценивает вероятность наводнения в 0,1. Как он поступит без дополнительной информации? Сколько бы он отдал за точную информацию о наводнении?

6.16 Золотоискатель с запасом \$900, функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна и функцией Бернулли вида $u(x) = \sqrt{x}$ решает, купить ли по цене \$300 золотоносный участок, где с равной вероятностью ожидает получить выигрыш в \$900 или ничего не получить.

За сколько он купил бы у геолога соответствующий прогноз, если положительный прогноз означает, что с вероятностью 0,75 золото есть, а отрицательный — что с вероятность 0,75 золота нет?

6.5. Задача потребителя в условиях риска

В экономике с неопределенностью естественно ожидать заключения контрактов, условных по состояниям мира. Соответственно блага следует рассматривать как условные по состояниям мира — контингентные (условно-случайные) блага. Каждое контингентное благо характеризуется парой (k, s). Контингентное благо естественно интерпретировать как актив, дающий право получить единицу блага k, если (и только если) реализуется состояние мира s. Такой актив получил название **актива Эрроу**. (Нам понадобится понятие актива Эрроу ниже, когда речь пойдет о модели Раднера. В данном контексте это только интерпретация контингентного блага.)

Если ничто не препятствует заключению контрактов, условных по состояниям мира (т. е. купле-продаже контингентных благ), то можно предположить, что любое контингентное благо можно обменять на любое другое контингентное благо. Иными словами, можно предположить, что любое благо k_1 в любом состоянии мира s_1 можно поменять (прямо или косвенно) на любое благо k_2 в любом состоянии мира s_2. Это предположение о *полноте рынков* контингентных благ.

Следует отметить, что предположение о полноте рынков контингентных благ является достаточно ограничительным и, как правило, не позволяет адекватно моделировать реальные рынки с риском. Тем не менее, модели, основанные на этом предположении, оказываются полезными для анализа реальных феноменов и для понимания причин фиаско рынка при наличии неопределенности.

Другое предположение, которое мы сделаем,— это предположение о совершенной конкуренции на рынках контингентных благ. С точки зрения задачи потребителя это, в частности, стандартное предположение о том, что потребитель считает цены данными. Через p_{ks} будем обозначать рыночную цену контингентного блага (k, s) (это цена контракта на поставку единицы блага k в ситуации, если реализуется состояние мира s, т. е. цена соответствующего актива Эрроу).

Эти предположения позволяют записать задачу потребителя.

Задача потребителя при риске

$$U_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{s \in S} \mu_s u_i(\mathbf{x}_{is}) \to \max_{\mathbf{x}_i},$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} p_{ks} \omega_{iks},$$

$$\mathbf{x}_{is} \in X_i \text{ для всех } s \in S.$$

По сути, задача потребителя имеет тот же вид, что и в классической модели, только индекс блага становится двойным, и суммирование в бюджетном ограничении идет по двум индексам — k и s.

Дифференциальная характеристика внутреннего решения задачи потребителя тоже совершенно аналогична дифференциальной характеристике выбора потребителя в отсутствие неопределенности:

$$\frac{\partial U_i/\partial x_{ik_1s_1}}{\partial U_i/\partial x_{ik_2s_2}} = \frac{p_{k_1s_1}}{p_{k_2s_2}}$$

для всех благ $k_1, k_2 \in K$ и всех состояний мира $s_1, s_2 \in S$.

С учетом того что целевая функция имеет специфический вид (Неймана—Моргенштерна), дифференциальную характеристику можно переписать в терминах элементарной функции полезности:

$$\frac{\mu_{s_1} u'_{ik_1}(\mathbf{x}_{is_1})}{\mu_{s_2} u'_{ik_2}(\mathbf{x}_{is_2})} = \frac{p_{k_1s_1}}{p_{k_2s_2}} \ \forall k_1, k_2 \in K, \ \forall s_1, s_2 \in S,$$

где $u'_{ik}(\cdot)$ — производная элементарной функции полезности по k-му благу.

Проиллюстрируем введенные понятия простым примером.

Пример 6.2 (страхование имущества)

Предположим, что потребитель имеет имущество стоимостью ω_1, которое в случае состояния мира 1 (при отсутствии пожара) сохранится, а в случае пожара — состояния мира 2 — окажется равным ω_2 ($\omega_2 < \omega_1$). На (совершенном) рынке страховых услуг этот потребитель может приобрести страховой контракт $(\gamma,\ y)$, где — $\gamma \in [0; 1]$ — цена контракта, а y — страховая сумма. То есть если потребитель застрахуется на сумму y, то он вне зависимости от состояния мира заплатит γy и получит y в случае пожара. При отсутствии пожара доход потребителя будет равен

$$x_1 = \omega_1 - \gamma y,$$

если же пожар произойдет, то доход составит

$$x_2 = \omega_2 + y - \gamma y.$$

Таким образом, мы имеем одно благо — деньги — и два состояния мира (отсутствие и наличие страхового случая).

Бюджетное ограничение того вида, что выше (в терминах контингентных потребительских наборов), можно получить, исключив y:

$$(1-\gamma)x_1 + \gamma x_2 \leqslant (1-\gamma)\omega_1 + \gamma\omega_2.$$

Покупая страховой контракт, потребитель тем самым меняет благо «деньги в состоянии 1» на благо «деньги в состоянии 2» в отношении

$$p^1/p^2 = (1-\gamma)/\gamma.$$

Предположим далее, что потребитель имеет функцию полезности типа Неймана—Моргенштерна

$$U = (1-\mu)u(x_1) + \mu u(x_2),$$

такую что производная элементарной функции полезности $u'(\cdot)$ положительна и строго убывает (т. е. потребитель характеризуется строгим неприятием риска), где μ — вероятность пожара. Дифференциальная характеристика решения задачи потребителя, как обычно, имеет вид

$$\frac{\partial U/\partial x_1}{\partial U/\partial x_2} = \frac{(1-\mu)u'(x_1)}{\mu u'(x_2)} = \frac{1-\gamma}{\gamma}.$$

Опираясь на то, что $u'(\cdot)$ — убывающая функция, можно сделать выводы об оптимальном решении потребителя в зависимости от соотношения вероятности пожара μ и цены страховки γ. При $\gamma = \mu$ (актуарно справедливая цена страховки) имеем

$$u'(x_1) = u'(x_2).$$

Таким образом, в этом случае потребитель застрахуется на такую сумму, что $x_1 = x_2$, т. е. на всю сумму потенциального ущерба:

$$y = \omega_1 - \omega_2.$$

Нетрудно проверить, что если цена будет высокой ($\gamma > \mu$), то он застрахуется так, что

$$u'(x_1) < u'(x_2),$$

откуда $x_1 > x_2$. То есть страховая сумму будет меньше величины ущерба. Наоборот, при $\gamma < \mu$ страховая сумма будет превосходить величину ущерба.

В предположении, что потребитель является рискофобом, этот результат можно обобщить на случай, когда элементарная функция полезности не является дифференцируемой. Будем рассматривать доход потребителя как случайную величину $\tilde{\mathbf{x}}$, которая принимает значение x_1 с вероятностью $(1-\mu)$ и значение x_2 с вероятностью μ.

Тогда при $\gamma = \mu$ ожидаемый доход $\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}$ равен $(1-\gamma)\omega_1 + \gamma\omega_1$, т. е. не зависит от суммы страховки y. Рискофоб предпочитает среди

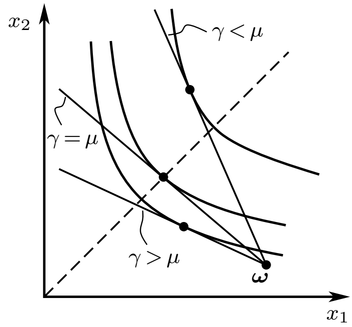


Рис. 6.5. *Различные соотношения между ценой и вероятностью страхового случая в задаче страхования имущества*

таких лотерей ту, которая не связана с риском, т. е. дает один и тот же доход вне зависимости от состояния мира. А к такой лотерее приводит страхование на полную сумму потерь.

При $\gamma > \mu$ ($\gamma < \mu$) с ростом страховой суммы y величина ожидаемого дохода $\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}$ уменьшается (увеличивается). Поэтому потребителю невыгодно выбирать y больше (меньше) величины ущерба. Действительно, если бы он застраховался в точности на сумму ущерба, то риск отсутствовал бы, а ожидаемый доход $\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}$ был бы выше. Таким образом, если $\gamma > \mu$, то $y \leqslant \omega_1 - \omega_2$, а если $\gamma < \mu$, то $y \geqslant \omega_1 - \omega_2$. Строгие неравенства можно гарантировать только при дифференцируемости функции полезности. Если она не является дифференцируемой, то при $\gamma \neq \mu$ оптимальным может быть страхование на полную сумму ущерба ($y = \omega_1 - \omega_2$) (см. задачу 6.19).

Проведенный анализ иллюстрирует Рис. 6.5. ▲

Задачи

6.17 Предпочтения судовладельца описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности от богатства x вида $u(x)$, причем $u(\cdot)$ имеет положительную убывающую производную. Он владеет богатством \$40000 и может потерять в случае аварии судна \$10000.

(А) Пусть вероятность аварии равна 0,02 и известно, что он застраховался на сумму \$9000. Возможно ли, что цена страхования на

\$1 равна \$0,02? Если нет, то больше или меньше, чем \$0,02? Объясните.

(B) Пусть цена страхования на \$1 равна \$0,02 и известно, что он застраховался на сумму \$11000. Возможно ли, что вероятность аварии равна 0,02? Если нет, то больше или меньше, чем 0,02? Объясните.

(C) Пусть вероятность аварии равна 0,01 и известно, что цена страхования на \$1 равна \$0,02. Возможно ли, что он застраховался на сумму \$10000? Если нет, то бóльшую или меньшую, чем \$10000? Объясните.

6.18 Предположим, что в ситуации задачи 6.16 на с. 406 золотоискатель не купил прогноз, а застраховался на сумму в \$300 на случай отсутствия золота и купил участок. По какой цене продавались страховые контракты?

6.19 Приведите пример, когда для рискофоба оптимальным является страхование на полную сумму ущерба, притом что цена страховки не является актуарно справедливой.

6.20 Пусть в экономике с риском имеется одно физическое благо, а предпочтения потребителя-рискофоба представимы функцией Неймана—Моргенштерна. Покажите, что предельная норма замещения блага в состоянии мира s благом в состоянии мира t убывает при росте его потребления в состоянии мира s и равна отношению вероятностей этих состояний, когда потребление одинаково.

6.21 Пусть в экономике с риском цены благ пропорциональны вероятностям состояний мира.

(A) Докажите, что рискофоб, предпочтения которого представимы функцией Неймана—Моргенштерна, выберет такой набор, что потребление каждого блага не зависит от состояние мира.

(B) Продемонстрируйте, что обратное утверждение неверно, приведя соответствующий контрпример.

(C) Продемонстрируйте, что предположение о том, что потребитель — рискофоб, существенно, приведя соответствующий контрпример.

6.22 Пусть в экономике с риском при ценах $\mathbf{p}$ потребитель с локально ненасыщаемыми предпочтениями выбрал набор $\mathbf{x}$. Рассмотрим потребительский набор, равный ожидаемому потреблению, т. е. $\bar{\mathbf{x}} = \sum_{s\in S} \mu_s \mathbf{x}_s$, и «агрегированный» вектор цен $\bar{\mathbf{p}} = \sum_{s\in S} \mathbf{p}_s$.

(A) Покажите, что $\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{x}} \geqslant \sum_{s\in S} \mathbf{p}_s \mathbf{x}_s$.

(B) Покажите, что если потребитель является рискофобом и в равновесии потребление хотя бы одного из благ различно хотя бы в двух состояниях мира, то неравенство строгое.

6.23 Предприниматель планирует завтра получить от внешнеторговых операций 1000 песо. Это будет весь его капитал на завтрашний день. Сам он заинтересован в рублях и имеет некоторую элементарную функцию полезности $u(x)$, выраженную в рублях ($u'(x) > 0$, $u'(x)$ убывает). Он предполагает, что с вероятностью $2/3$ завтрашний курс песо будет равен 15 руб., а с вероятностью $1/3$ — 24 руб. Ему предлагают сегодня продать его завтрашние песо за завтрашние рубли по курсу p руб. Пусть $z \geqslant 0$ — сумма сделки в песо. (Предполагается, что можно выбрать $z > 1000$, а завтра докупить недостающие песо.)

(A) При каком курсе p предприниматель выберет такую сумму сделки z, что полностью избавится от риска? Чему будет при этом равна z?

(B) В какую сторону изменится выбор z по сравнению с предыдущим пунктом, если $p = 16$ руб.? В каком случае предприниматель окажется в лучшем положении — при высоком или при низком курсе песо?

(C) Ответьте на тот же вопрос для $p = 20$ руб.

6.6. Модель инвестора

К выбору наиболее предпочтительной денежной лотереи сводятся многочисленные модели инвестиционного поведения. Мы проведем анализ поведения инвестора в рамках следующей простой двухпериодной модели.

Рассмотрим задачу распределения одного блага — капитала[6] — между несколькими активами $k \in K = \{1, \ldots, l\}$. Модель двухпериодная. В первом периоде инвестор вкладывает капитал в активы, а во втором получает доход от этих активов. Величину капитала будем обозначать ω ($\omega > 0$).

Каждый актив характеризуется своей доходностью (отношением дохода от единицы актива к цене). Пусть $\tilde{r}_k$ — валовая доходность k-го актива, т. е. валовой доход на рубль вложений (тильда

[6] Возможно, первоначально капитал имеется в виде безрискового актива $k = 0$ (см. далее). Может быть, начальный запас имеет более общий вид: $(\omega_0, \ldots, \omega_l) = \boldsymbol{\omega}$.

означает, что это случайная величина). Если считать пространство состояний мира дискретным, как и выше, то доходность $\tilde{r}_k$ является дискретной случайной величиной и принимает значения r_{ks} $(s \in S)$ с соответствующими вероятностями μ_s.

Инвестор должен выбрать размеры вложений z_k в каждый из доступных активов $k \in K$ при следующих ограничениях:

- можно покупать актив, но не эмитировать его, т. е.
$$z_k \geqslant 0;$$
- общая сумма вложений не должна превышать величину капитала, т. е.
$$\sum_{k \in K} z_k \leqslant \omega.$$

Последнее неравенство представляет собой аналог бюджетного ограничения.

Вектор $(z_k)_{k \in K}$ будем называть **портфелем**. Общий (валовой) доход от портфеля равен
$$\tilde{x} = \sum_{k \in K} z_k \tilde{r}_k.$$
Если пространство состояний мира дискретное, то доход от портфеля $\tilde{x}$ — дискретная случайная величина и принимает значения
$$x_s = \sum_{k \in K} z_k r_{ks}$$
с вероятностями μ_s.

Как обычно, предполагаем, что предпочтения инвестора описывается функцией типа Неймана—Моргенштерна
$$U = \mathsf{E}\, u(\tilde{x}) = \sum_{s \in S} \mu_s u(x_s).$$
В дальнейшем везде будем считать, что $u(\cdot)$ — дифференцируемая функция, причем производная $u'(\cdot)$ положительна и убывает (инвестор — рискофоб).

Поскольку капитал ω — постоянная величина (выбор между накоплением и потреблением остается за рамками модели), то полезность определяется **структурой портфеля**, и можно вместо величины вложений в k-й актив z_k рассматривать долю этого актива в портфеле
$$\alpha_k = z_k / \omega.$$

Тогда

$$\tilde{x} = \omega \sum_{k \in K} \alpha_k \tilde{r}_k.$$

Получим следующую задачу.

Задача инвестора

$$\begin{gathered} U = \mathsf{E}\, u(\tilde{x}) = \mathsf{E}\, u\biggl(\omega \sum_{k \in K} \alpha_k \tilde{r}_k\biggr) \to \max_{(\alpha_k)}, \\ \sum_{k \in K} \alpha_k \leqslant 1, \quad \alpha_k \geqslant 0 \; \forall k \in K. \end{gathered} \tag{❁}$$

Принято вводить еще безрисковый актив $k = 0$ с гарантированной доходностью $\tilde{r}_k = r_0$ (его можно интерпретировать как государственные ценные бумаги или вклад до востребования). Этот актив имеет одну и ту же доходность r_0 независимо от состояния мира. При этом $K = \{0, \ldots, l\}$.

Еще одно предположение, которое принято делать,— отсутствие ограничения на неотрицательность вложений в безрисковый актив, т. е. может быть $\alpha_k < 0$. Смысл этого предположения состоит в том, что можно взять кредит на любую сумму по той же ставке r_0.

Так как производная $u'(x)$ положительна, то целевая функция ненасыщаема и поэтому «бюджетное ограничение» в задаче инвестора выходит на равенство, т. е. $\alpha_0 = 1 - \sum_{k \neq 0} \alpha_k$. Исключив α_0, преобразуем задачу инвестора (❁) к виду

$$\mathsf{E}\, u\Biggl(\omega\biggl(r_0 + \sum_{k \neq 0} \alpha_k (\tilde{r}_k - r_0)\biggr)\Biggr) \to \max_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l \geqslant 0}.$$

При соответствующих условиях регулярности производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной[7]. Будем предполагать, что эти условия выполнены. Тогда условия первого порядка решения задачи инвестора заключаются в том, что для всех активов $k \neq 0$

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\omega(\tilde{r}_k - r_0)] \leqslant 0$$

или

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] \leqslant r_0\, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x}).$$

[7] Достаточно, чтобы пространство состояний мира было дискретным. Для непрерывных распределений условие регулярности заключается в том, что носитель распределения не зависит от параметра, по которому берется производная.

Кроме того, если $\alpha_k > 0$, то это условие выполняется как равенство:

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] = r_0 \, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x}).$$

Нетрудно проверить, что в силу свойств функции $u(\cdot)$ (инвестор — рискофоб) и линейности оператора E ожидаемая полезность портфеля как функция долéй вложений в соответствующие активы является вогнутой. Поэтому эти условия — достаточные условиями оптимальности портфеля.

Рассмотрим частный случай данной задачи. Пусть имеется два актива — безрисковый и рискованный. Задача инвестора имеет следующий вид:

$$\mathsf{E}\, u(\omega(\alpha_0 r_0 + \alpha_1 \tilde{r}_1)) \to \max_{\alpha_0, \alpha_1},$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 \leqslant 1,$$
$$\alpha_1 \geqslant 0.$$

Исключив отсюда α_0, получим следующую задачу одномерной максимизации:

$$U = \mathsf{E}\, u(\omega(r_0 + \alpha_1(\tilde{r}_1 - r_0))) \to \max_{\alpha_1 \geqslant 0}.$$

Обозначим максимизируемую функцию через $U(\alpha_1)$ и вычислим ее производную:

$$\frac{\partial U(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} = \mathsf{E}[u'(\omega(r_0 + \alpha_1(\tilde{r}_1 - r_0)))\omega(\tilde{r}_1 - r_0)] =$$
$$= \omega(\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] - r_0 \, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x})).$$

Решение задачи инвестора (если оно существует) может быть либо внутренним ($\alpha_1 > 0$), либо граничным ($\alpha_1 = 0$) (Рис. 6.6).

(1) Если в оптимальном портфеле $\alpha_1 > 0$, то $\partial U(\alpha_1)/\partial \alpha_1 = 0$, откуда

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] = r_0 \, \mathsf{E}\, u'(\tilde{x}).$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $u'(\tilde{x})$ является убывающей функцией $\tilde{r}_1$, ковариация $u'(\tilde{x})$ и $\tilde{r}_1$ отрицательна и поэтому

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_1] < \mathsf{E}\, u'(\tilde{x})\bar{r}_1,$$

где мы ввели обозначение $\bar{r}_1 = \mathsf{E}\, \tilde{r}_1$ для ожидаемой доходности рискованного актива. Таким образом, поскольку $\mathsf{E}\, u'(\tilde{x}) > 0$ (ожидание положительной случайной величины положительно), необходимое условие внутреннего решения состоит в том, что $r_0 < \bar{r}_1$

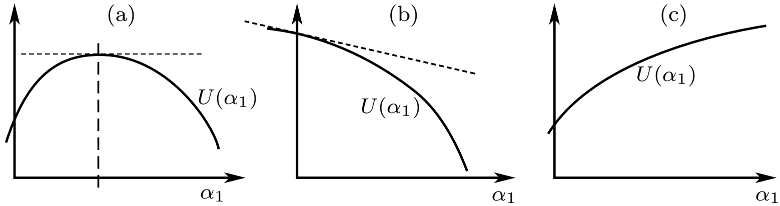


Рис. 6.6. *Возможные ситуации в случае выбора из двух активов: (a) внутреннее решение, (b) граничное решение, (c) решение отсутствует*

(2) Если в оптимальном портфеле рискованный актив отсутствует ($\alpha_1 = 0$), то $\tilde{x} = \omega r_0$ (т. е. доход портфеля не случайная величина). Значит,

$$\frac{\partial U(0)}{\partial \alpha_1} = \omega u'(\omega r_0)(\bar{r}_1 - r_0).$$

Поскольку для граничного решения $\partial U(0)/\partial \alpha_1 \leqslant 0$ и производная элементарной функции полезности положительна, получим следующее необходимое условие оптимальности граничного решения:

$$\bar{r}_1 \leqslant r_0.$$

Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием того, что первый актив войдет в портфель ($\alpha_1 > 0$) является то, что его ожидаемая доходность больше гарантированной ($\bar{r}_1 > r_0$).

Тот факт, что для случая двух активов условие $\bar{r}_1 > r_0$ является достаточным условием того, что рискованный актив войдет в портфель, является частным случаем более общего результата, который называется теоремой о диверсификации[8].

Теорема 6.8 (теорема Самуэльсона о диверсификации[9])

Пусть инвестор характеризуется целевой функцией типа Неймана—Моргенштерна с дифференцируемой элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ и пусть, кроме того,

* функция $u'(\cdot)$ положительна и убывает;
* доходности активов (статистически) независимы в совокупности[10];

[8] Неформально содержание теоремы состоит в том, что не следует класть все яйца в одну корзину.

[9] См. P. A. Samuelson • General Proof that Diversification Pays, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **2** (1967): 1–13.

[10] В модели Марковица достаточно некоррелированности (см. ниже).

* ограничение $\alpha_0 \geqslant 0$ в задаче инвестора отсутствует (возможен кредит по безрисковой ставке);
* выполнены условия регулярности, обеспечивающие, что производная математического ожидания равна математическому ожиданию производной.

Тогда любой актив $k \in K$, ожидаемая доходность которого выше доходности безрискового актива ($\bar{r}_k > r_0$, где $\bar{r}_k = \mathsf{E}\,\tilde{r}_k$) войдет в портфель, т. е. $\alpha_k > 0$. ┘

Доказательство: Как было показано выше, условия первого порядка для задачи инвестора при всех $k \neq 0$ имеют вид

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] \leqslant r_0\,\mathsf{E}\,u'(\tilde{x}).$$

Предположим, что $\alpha_k = 0$ для некоторого $k \neq 0$ (k-й актив не входит в портфель). При этом величи́ны $\tilde{r}_k$ и $\tilde{x}$ должны быть между собой независимы ($\tilde{x}$ зависит только от доходностей остальных активов). Следовательно, $\tilde{r}_k$ и $u'(\tilde{x})$ также независимы (функции от независимых случайных величин тоже независимы). Воспользовавшись тем, что математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, получим, что

$$\bar{r}_k\,\mathsf{E}\,u'(\tilde{x}) \leqslant r_0\,\mathsf{E}\,u'(\tilde{x}).$$

Так как $\mathsf{E}\,u'(\tilde{x}) > 0$ (ожидание положительной случайной величины положительно), то $\bar{r}_k \leqslant r_0$. Следовательно, если $\bar{r}_k > r_0$, то не может быть $\alpha_k = 0$, значит, такой актив войдет в портфель. ■

Если несколько преобразовать условия первого порядка, можно привести интересную интерпретацию этих условий. По определению ковариации для двух случайных величин ξ и η выполнено

$$\mathsf{E}(\xi\eta) = \mathsf{Cov}(\xi, \eta) + \mathsf{E}(\xi)\,\mathsf{E}(\eta).$$

С учетом этого соотношения условия оптимальности (если k-й актив вошел в портфель, т. е. $\alpha_k > 0$)

$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})\tilde{r}_k] = r_0\,\mathsf{E}\,u'(\tilde{x})$$

можно записать в виде

$$\bar{r}_k = r_0 - \frac{\mathsf{Cov}(u'(\tilde{x}), \tilde{r}_k)}{\mathsf{E}\,u'(\tilde{x})}.$$

Величина $\bar{r}_k - r_0$ представляет собой превышение ожидаемой доходности k-го актива над доходностью безрискового актива и носит название премии за риск.

Заметим, что полученное соотношение означает, что включение актива в оптимальный портфель определяется не только его средней доходностью, но и величиной корреляции его доходности с доходностью всего портфеля. Премия за риск положительна, если доходность актива и доходность портфеля положительно коррелированы. Это объясняется тем, что если доходность актива и доходность портфеля положительно коррелированы, то доходность актива и предельная полезность отрицательно коррелированы, поскольку предельная полезность у рискофоба является убывающей функцией. Следовательно, такой актив включается в оптимальный портфель, только если он характеризуется положительной премией за риск (т. е. $\bar{r}_k - r_0 > 0$).

С другой стороны, премия за риск является отрицательной, если доходность актива и доходность портфеля отрицательно коррелированы. Такой актив может входить в оптимальный портфель, несмотря на то, что он характеризуется отрицательной премией за риск (т. е. $\bar{r}_k - r_0 < 0$). Так, например, у страховых полисов ожидаемая чистая доходность, как правило, меньше нуля, но они часто включаются в портфель рискофоба, так как их доходность отрицательно коррелирует с ожидаемым доходом от портфеля. Подобный способ защиты от риска (включение в портфель активов, доходность которых отрицательно коррелирована с доходностью других входящих в портфель активов) называется хеджированием.

Задачи

6.24 Пусть инвестор с функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна сталкивается с m активами, один из которых — гарантированный, с возможностью кредита. Какие достаточные условия гарантируют, что все рискованные активы войдут в портфель?

6.25 Пусть инвестор с элементарной функцией полезности $u(x) = \ln x$ имеет возможность вложить свое богатство ω в n рискованных активов с ожидаемыми доходностями $\bar{r}_i = 1 + 1/i$ и в гарантированный актив с доходностью $r_0 = 1{,}1$. Укажите гипотезы и условия на параметры, при которых все рискованные активы войдут в портфель.

6.26 Инвестор со строгим неприятием риска выбирает, какую долю капитала оставить в безрисковой форме с доходностью r_0, а сколько вложить в рискованные активы двух типов со средними доходностями $\bar{r}_1 > r_0$, $\bar{r}_2 > r_0$. Пусть функция полезности инвестора типа Неймана—Моргенштерна и возможен кредит в банке, а доходность рискованных активов вероятностно независима.

Какие из перечисленных ниже исходов возможны?

(A) Все три актива войдут в портфель.

(B) Войдут только один рискованный и один безрисковый.

(C) Только два рискованных войдут в портфель.

6.27 Инвестор выбирает, какую долю α своего капитала K вложить в рискованный актив, а какую — в безрисковый.

(A) Пусть его элементарная функция полезности равна $u(x) = -e^{-\gamma x}$ $(\gamma > 0)$. Докажите, что независимо от величины капитала инвестор вложит в рискованный актив одну и ту же *сумму* (αK).

(B) Пусть $u(x) = x^{\gamma}$ $(0 < \gamma < 1)$, $u(x) = -x^{-\gamma}$ $(\gamma > 0)$ или $u(x) = \ln x$. Докажите, что независимо от величины капитала инвестор вложит в рискованный актив одну и ту же *долю* капитала (α).

(C) Пусть $u(x) = x - ax^2$ $(a > 0)$. Докажите, что когда величина вложений в рискованный актив положительна, она является линейной убывающей функцией величины капитала.

6.28 Инвестор имеет элементарную функцию полезности $u(x) = -1/x$. Состояния мира A и B могут осуществиться с вероятностями $\mu_A = 1/5$ и $\mu_B = 4/5$. Инвестор может вложить свои 10 единиц капитала в два предприятия. Доходности двух предприятий в двух состояниях мира равны $r_{1A} = 1$, $r_{2A} = 2$, $r_{1B} = 4$, $r_{2B} = 3$. Найдите оптимальный портфель.

6.29 Известно, что рискованный актив дает доход, равный 2 в первом состоянии мира (с вероятностью 1/2) и β во втором состоянии мира, а безрисковый — 1 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x) = \ln x$.

6.30 Известно, что рискованный актив дает доход, равный 2 в первом состоянии мира (с вероятностью 1/2) и 10 во втором состоянии мира, а безрисковый — β (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x) = \ln x$.

6.31 Известно, что рискованный актив дает доход, равный 4 в первом состоянии мира (с вероятностью β) и 1 во втором состоянии мира, а безрисковый — 2 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий оба актива в положительных количествах. Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x) = \ln x$.

6.32 Известно, что рискованный актив дает доход, равный 4 в первом состоянии мира (с вероятностью $1/4$) и β во втором состоянии мира, а безрисковый — 1 (вне зависимости от состояния). Известно, что инвестор выбрал портфель, содержащий только безрисковый актив в положительном количестве (отрицательные количества невозможны). Определите интервал, в котором может лежать β, если предпочтения инвестора характеризуются функцией Бернулли $u(x) = \ln x$.

6.33 Инвестору доступны безрисковый актив с доходностью r_0 и рискованный актив, причем норма доходности рискованного актива изменяется следующим образом в зависимости от некоторой базовой нормы доходности $\tilde{r}$ ($\bar{r} > r_0$, где $\bar{r} = \mathsf{E}\,\tilde{r}$) и параметра $\tau \in [0; 1]$:

(A) $\tilde{r}_1 = \tilde{r} - \tau(\tilde{r} - r_0)$;

(B) $\tilde{r}_1 = \tilde{r} - \tau(\tilde{r} - \bar{r})$.

Как меняется структура оптимального портфеля инвестора-рискофоба в зависимости от параметра τ? Дайте интерпретацию полученных результатов[11].

Проиллюстрируйте анализ на диаграмме для простого случая, когда есть всего два состояния природы (в системе координат «богатство в первом состоянии» — «богатство во втором состоянии»).

6.34 ⟦Аткинсон, Стиглиц⟧ Рассмотрим ситуацию, когда инвестору доступны приносящие доход безрисковый и рискованный активы и чистый доход от инвестиций облагается налогом по ставке τ. Поскольку среднеквадратическое отклонение доходности портфеля пропорционально величине $\alpha(1 - \tau)$, где α — доля вложений в рискованный актив, то эта величина измеряет изменение рискованности портфеля

[11] Возможная интерпретация приведенного преобразования доходностей — налогообложение доходов от инвестиций по ставке τ, причем если доходность рискованных вложений оказывается ниже доходности вложений в безрисковый актив (соответственно средней доходности инвестиций), то делается соответствующий налоговый вычет (выплачивается субсидия).

для инвестора при изменении ставки налога. Соответственно величину $\alpha(1-\tau)$ можно назвать частным риском.

Докажите, что увеличение ставки подоходного налога от инвестиций увеличивает (уменьшает, оставляет постоянным) частный риск, когда эластичность по общему объему инвестиций спроса на рискованный актив положительна (отрицательна, постоянна). Проиллюстрируйте его графически для случая двух состояний природы.

6.7. Ранжирование индивидуумов по их отношению к риску

В этом параграфе мы ранжируем индивидуумов-рискофобов по их отношению к риску, введя подходящие измерители такого отношения и на их основе попытаемся ответить на следующие вопросы, относящиеся к сравнительной статике поведения в условиях риска:

- Какие условия на предпочтения инвестора гарантируют рост вложений в рискованную часть портфеля при росте величины суммарных инвестиций?
- Какие условия на предпочтения двух инвесторов гарантирую бóльшую величину вложений в рискованную часть портфеля одного из них при равных величинах суммарных инвестиций?

Ответ на первый вопрос формулируется в терминах характеристик отношения к риску, к анализу которых мы переходим.

Рассмотрим лотерейный билет, который приносит чистый выигрыш ε_1 с вероятностью μ и ε_2 с вероятностью $1-\mu$. Обозначим соответствующую случайную величину через $\tilde{\varepsilon}$. Потребитель, располагающий суммой денег ω, приобретет этот лотерейный билет, если лотерея, описываемая случайной величиной $\tilde{x} = \omega + \tilde{\varepsilon}$, предпочитается вырожденной лотерее, дающей ω с вероятностью 1, т. е.

$$\mathsf{E}(u(\omega + \tilde{\varepsilon})) \geqslant u(\omega).$$

или

$$\mu u(\omega + \varepsilon_1) + (1-\mu)u(\omega + \varepsilon_2) \geqslant u(\omega).$$

Обозначим множество всех лотерейных билетов $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, которые потребитель согласен приобрести, через $\mathcal{E}(\omega)$.

Изобразим на плоскости $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ множество $\mathcal{E}(\omega)$ (см. Рис. 6.7). Потребителю выгодно приобрести любой лотерейный билет, представленный точкой из I квадранта, и невыгодно приобретать любой

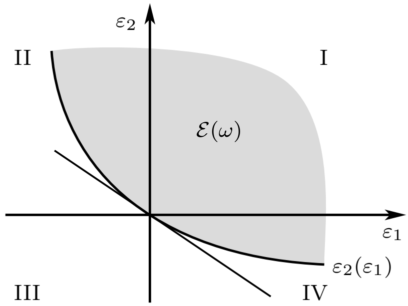


Рис. 6.7. *Лотерейные билеты, которые потребитель готов приобрести*

лотерейный билет, представленный точкой из III квадранта. Выгодность приобретения билетов, представленных точками из II и IV квадрантов, зависит, в частности, от отношения к риску рассматриваемого потребителя. Если элементарная функция полезности $u(\cdot)$ вогнута, то множество $\mathcal{E}(\omega)$ выпукло (докажите это; см. задачу 6.35).

Для любой лотереи, лежащей на границе этого множества, выполняется:

$$\mu u(\omega + \varepsilon_1) + (1 - \mu)u(\omega + \varepsilon_2) = u(\omega). \tag{$\mathcal{E}$}$$

Это уравнение задает зависимость $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ в виде неявной функции. Стандартные свойства элементарной функции полезности и условие $\mu < 1$ гарантируют существование такой функции и ее дифференцируемость. Подставим $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1)$ в ($\mathcal{E}$) и продифференцируем по ε_1 в точке 0. Используя тот факт, что $\varepsilon_2(0) = 0$, получим

$$\mu u'(\omega) + (1 - \mu)u'(\omega)\varepsilon_2'(0) = 0.$$

Это уравнение описывает касательную к $\mathcal{E}(\omega)$ в точке $(0; 0)$. Эта касательная имеет наклон $-\frac{\mu}{1-\mu}$. Поскольку выпуклое множество лежит выше своей касательной, то точки, лежащие ниже этой касательной, не принадлежат $\mathcal{E}(\omega)$. Таким образом, если ε_2 будет меньше, чем $-\frac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_1$, то потребитель заведомо не примет участия в такой лотерее (какова бы ни была вероятность μ).

Рассмотрим двух рискофобов. Пусть первый из них принимает лотереи, принадлежащие множеству $\mathcal{E}^1(\omega)$, а второй — множеству $\mathcal{E}^2(\omega)$. Если $\mathcal{E}^2(\omega) \subset \mathcal{E}^1(\omega)$, то естественно считать, что из этих двух

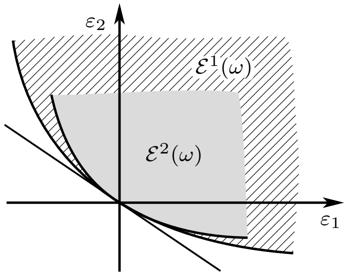


Рис. 6.8. *Сравнение отношения к риску двух потребителей*

рискофобов второй характеризуется (нестрого) бóльшим неприятием риска, чем первый (Рис. 6.8).

Если ни одно из включений $\mathcal{E}^2(\omega) \subset \mathcal{E}^1(\omega)$ и $\mathcal{E}^1(\omega) \subset \mathcal{E}^2(\omega)$ не выполнено, то мы не можем проранжировать рассматриваемых потребителей, используя данное правило (т. е. соответствующее отношение не является полным).

Заметим, что линейная аппроксимация этих множеств (полуплоскость, задаваемая касательной в нуле) одна и та же и не отражает различия в отношении к риску. Поэтому следует рассмотреть аппроксимацию второго порядка.

В предположении, что элементарная функция полезности дважды непрерывно дифференцируема, продифференцируем соотношение $(\mathcal{E})$ по ε_1 дважды в точке 0. Получим

$$\mu u''(\omega) + (1-\mu)\Big[u''(\omega)(\varepsilon_2'(0))^2 + u'(\omega)\varepsilon_2''(0)\Big] = 0.$$

С учетом того, что $\varepsilon_2'(0) = -\frac{\mu}{1-\mu}$, получим

$$\varepsilon_2''(0) = -\frac{u''(\omega)}{u'(\omega)}\frac{\mu}{(1-\mu)^2}.$$

Мы убедились, что уравнения границ множеств $\mathcal{E}^1(\omega)$ и $\mathcal{E}^2(\omega)$ в первом приближении всегда совпадают, а во втором приближении могут различаться. При этом, если $\varepsilon_2''(0)$ у первого потребителя меньше, чем у второго, то в окрестности нуля $\mathcal{E}^2(\omega)$ содержится в $\mathcal{E}^1(\omega)$. (Понятно, что глобально это может не выполняться.) Поэтому величину $-u''(\omega)/u'(\omega)$ можно рассматривать как локальную меру неприятия риска. Эти рассуждения мотивируют введение следующей характеристики предпочтений потребителя.

Определение 6.7

Мерой неприятия риска Эрроу—Пратта[12] называется величина

$$\rho(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}. \qquad \triangleleft$$

При определенных условиях эту меру неприятия риска можно рассматривать и как глобальную меру неприятия риска. В терминах меры Эрроу—Пратта можно считать, что тот из двух потребителей характеризуется бóльшим неприятием риска, у которого мера Эрроу—Пратта всегда больше.

Предложенный Эрроу и Праттом подход — это не единственный способ измерить отношение к риску. Выше мы ввели вознаграждение за риск, которое тоже можно рассматривать как меру отношения к риску. Напомним, что величина $\Delta x(\tilde{x})$ называется вознаграждением за риск для данного потребительского набора $\tilde{x}$, если $\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x(\tilde{x})$ является безрисковым эквивалентом $\tilde{x}$:

$$\mathsf{E}\,u(\tilde{x}) = u(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x(\tilde{x})).$$

Также напомним, что для любого рискофоба вознаграждение за риск — величина неотрицательная. Естественно считать, что в терминах вознаграждения за риск из двух потребителей тот характеризуется бóльшим неприятием риска, у которого вознаграждение за риск всегда больше.

Можно предложить еще один способ ранжирования рискофобов по их отношению к риску — по «степени вогнутости» элементарной функции полезности. Можно считать, что $u(\cdot)$ «более вогнута», чем $v(\cdot)$, если существует такая строго вогнутая возрастающая функция $G(\cdot)$, что $u(x) = G(v(x))$ при всех x. Тогда потребитель с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ характеризуется бóльшим неприятием риска. Соответственно нестрогое сопоставление получим, если $G(\cdot)$ здесь является вогнутой (но не обязательно строго вогнутой) возрастающей функцией.

Оказывается, что все эти способы ранжирования эквивалентны, о чем свидетельствует следующее утверждение.

Теорема 6.9 (Пратт)

Предпочтения двух потребителей характеризуются дважды

[12] См. J. W. Pratt. Risk Aversion in the Small and in the Large, *Econometrica* **32** (1964): 122–136 и K. J. Arrow. *Aspects of the Theory of Risk-Bearing*, Helsinki: Yrjö Jahnsson Foundation, 1965.

непрерывно дифференцируемыми элементарными функциями полезности $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$, такими что $u_i'(x) > 0$ и $u_i''(x) \leqslant 0$ для всех x, $i = 1, 2$. Следующие три условия эквивалентны:

{i} $\rho_1(x) \geqslant \rho_2(x)$ для всех x, где $\rho_i(\cdot)$ — мера неприятия риска Эрроу—Пратта, соответствующая $u_i(\cdot)$;

{ii} существует такая вогнутая возрастающая функция $G(\cdot)$, что $u_1(x) = G(u_2(x))$ для всех x;

{iii} для любого случайного дохода $\tilde{x}$ выполнено $\Delta x_1(\tilde{x}) \geqslant \geqslant \Delta x_2(\tilde{x})$. ┘

Доказательство: {i} $\Leftrightarrow$ {ii} Имеется функция $G(\cdot)$, такая что

$$u_1(x) = G(u_2(x)).$$

(При доказательстве утверждения в направлении {i} $\Rightarrow$ {ii} можем определить $G(\cdot)$ на области значений функции $u_2(\cdot)$ следующим образом:

$$G(x) = u_1(u_2^{-1}(x)).$$

Поскольку $u_2(\cdot)$ строго монотонна, она обратима.)

Заметим, что функция $G(\cdot)$ является дважды непрерывно дифференцируемой и возрастающей. Дважды продифференцируем последнее соотношение:

$$u_1'(x) = G'(u_2(x))u_2'(x),$$
$$u_1''(x) = G''(u_2(x))u_2'(x) + G'(u_2(x))u_2''(x).$$

Из первого равенства следует, что $G'(u_2(x)) > 0$. Поделив вторую производную на первую, получим

$$-\rho_1(x) = -\rho_2(x) + \frac{G''(u_2(x))}{G'(u_2(x))}.$$

Так как $G'(u_2(x)) > 0$, то неравенство $\rho_1(x) \geqslant \rho_2(x)$ эквивалентно неравенству $G''(y) \leqslant 0$ для $y = u_2(x)$, т. е. функция $G(\cdot)$ вогнута в своей области определения тогда и только тогда, когда $\rho_1(x) \geqslant \geqslant \rho_2(x)$ для всех x.

{ii} $\Leftrightarrow$ {iii} Если функции $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ при всех всех x связаны между собой соотношением $u_1(x) = G(u_2(x))$, то для произвольной случайной величины $\tilde{x}$ по определению вознаграждения за риск имеют место равенства

$$u_1(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_1(\tilde{x})) = \mathsf{E}\,u_1(\tilde{x}) = \mathsf{E}\,G(u_2(\tilde{x})),$$
$$u_1(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_2(\tilde{x})) = G(u_2(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_2(\tilde{x}))) = G(\mathsf{E}\,u_2(\tilde{x})).$$

Из монотонности $u_1(\cdot)$ следует, что $\Delta x_1(\tilde{x}) \geqslant \Delta x_2(\tilde{x})$ тогда и только тогда, когда $u_1(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_1(\tilde{x})) \leqslant u_1(\mathsf{E}\,\tilde{x} - \Delta x_2(\tilde{x}))$, т. е. тогда и только тогда, когда $\mathsf{E}\,G(u_2(\tilde{x})) \leqslant G(\mathsf{E}\,u_2(\tilde{x}))$.

Если функция $G(\cdot)$ вогнута, то по неравенству Йенсена

$$\mathsf{E}\,G(u_2(\tilde{x})) \leqslant G(\mathsf{E}\,u_2(\tilde{x})),$$

и поэтому $\Delta x_1(\tilde{x}) \geqslant \Delta x_2(\tilde{x})$.

Наоборот, выполнение неравенства $\Delta x_1(\tilde{x}) \geqslant \Delta x_2(\tilde{x})$ для всех $\tilde{x}$ влечет $\mathsf{E}\,G(u_2(\tilde{x})) \leqslant G(\mathsf{E}\,u_2(\tilde{x}))$ для всех $\tilde{x}$, а это свойство эквивалентно вогнутости функции $G(\cdot)$[13]. ■

Введенная мера Эрроу—Пратта называется *абсолютной мерой Эрроу—Пратта.* Часто используют также **относительную меру Эрроу—Пратта**, которая определяется по формуле

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)}.$$

Относительная мера Эрроу—Пратта является эластичностью предельной полезности по капиталу инвестора.

Меры Эрроу—Пратта являются полезными инструментами анализа поведения инвестора в условиях риска, так как в их терминах можно получать ответы на стандартные вопросы сравнительной статики: как изменяется структура инвестиционного портфеля при изменении размера инвестиций, доходностей активов и т. д. А к проблемам сравнительной статики сводятся многие проблемы прикладной экономики: характер спроса на деньги в портфельной теории формирования спроса на деньги, влияние налогообложения и т. д.

В терминах (абсолютной) меры Эрроу—Пратта можно охарактеризовать спрос на рискованный актив как функцию величины инвестиций в рассматриваемый портфель из двух активов. Как мы видели, в этом случае задача инвестора имеет вид

$$U = \mathsf{E}\,u(\omega r_0 + z(\tilde{r} - r_0)) \to \max_{\alpha \geqslant 0}.$$

Мы предполагаем, что решение $z(\omega)$ существует для любой величины капитала $\omega \geqslant 0$ и что $\mathsf{E}\,\tilde{r} > r_0$, т. е. что решение внутреннее ($z(\omega) > 0$).

[13] Проверьте, что обычное определение вогнутой функции является частным случаем неравенства Йенсена.

Теорема 6.10

Если мера Эрроу—Пратта $\rho(x)$ убывает, то рискованный актив является нормальным благом, т. е. $z'(\omega) > 0$. ┘

Доказательство: Условие оптимальности портфеля, как мы видели, имеет вид
$$\mathsf{E}[u'(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] = 0,$$
где $\tilde{x} = \omega r_0 + z(\omega)(\tilde{r} - r_0)$. Продифференцируем его по капиталу ω, рассматривая как тождество:
$$\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)(r_0 + z'(\omega)(\tilde{r} - r_0))] = 0.$$
Отсюда
$$r_0 \, \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] = -z'(\omega) \, \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)^2]$$
или
$$z'(\omega) = -r_0 \frac{\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)]}{\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)^2]}.$$
Ясно, что знаменатель здесь меньше нуля, так как в силу строгой вогнутости функции полезности $u''(x) < 0$. Покажем, что числитель больше нуля.

Рассмотрим случайную величину $\tilde{r} - r_0$: она принимает как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим случай $\tilde{r} = r > r_0$. В силу убывания функции $\rho(\cdot)$ при $z > 0$
$$\rho(\omega r_0 + z(r - r_0)) < \rho(\omega).$$
По определению меры Эрроу—Пратта
$$-\frac{u''(\omega r_0 + z(r - r_0))}{u'(\omega r_0 + z(r - r_0))} < \rho(\omega).$$
Умножив это неравенство на знаменатель и на $-(r - r_0)$, получаем:
$$u''(\omega r_0 + z(r - r_0))(r - r_0) > -\rho(\omega) u'(\omega r_0 + z(r - r_0))(r - r_0).$$
Нетрудно видеть, что при $\tilde{r} = r < r_0$ это неравенство тоже верно. Это означает, что верно соотношение
$$\mathsf{E}[u''(\omega r_0 + z(\omega)(\tilde{r} - r_0))(r - r_0)] > -\rho(\omega) \, \mathsf{E}\, u'[(\omega r_0 + z(\omega)(\tilde{r} - r_0))(r - r_0)]$$
или
$$\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] > -\rho(\omega) \, \mathsf{E}[u'(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)].$$
Правая часть здесь равна нулю, откуда и следует доказываемое неравенство. Следовательно, $z'(\omega) > 0$. Другими словами, рискованный актив является нормальным благом. ■

Отметим, однако, что данное свойство не выполняется для случая двух и более рискованных активов.

Задачи

6.35 Докажите, что множество $\mathcal{E}(\omega)$, обсуждаемое в данном параграфе выпукло, если элементарная функция полезности $u(\cdot)$ вогнута.

6.36 Покажите, что если абсолютная мера Эрроу—Пратта неприятия риска убывает, то $u''' \leqslant 0$. Покажите, что обратное неверно.

6.37 Приведите примеры элементарной функции полезности с возрастающей, убывающей и постоянной абсолютной и относительной мерой Эрроу—Пратта.

6.38 Пусть на рынке доступны лишь два актива — рискованный и безрисковый. Покажите, что при увеличении объема инвестиций доля инвестиций в рискованный актив (в сумме инвестиций в оптимальный портфель) постоянна (возрастает, убывает), если относительная мера Эрроу—Пратта убывает (возрастает, постоянна).

6.39 Опираясь на результаты предыдущей задачи, определите, как изменяется величина вложений в рискованный актив при росте суммы инвестиций, если предпочтения инвестора представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$. Решите задачу для следующих функций:

(A) $u(x) = \sqrt{x}$; (B) $u(x) = -e^{-ax}$;
(C) $u(x) = -\frac{1}{x}$; (D) $u(x) = \ln x$;
(E) $u(x) = x - ax^2$ $(a > 0)$;
(F) $u(x) = \sqrt{x} + ax$ $(a > 0)$.

6.40 Пусть в ситуации с двумя активами — рискованным и безрисковым, рассмотренной выше, $\alpha(r_0)$ — оптимальная доля вложений в рискованный актив как функция доходности безрискового актива. Покажите, что если абсолютная мера Эрроу—Пратта является возрастающей функцией и решение внутреннее $(0 < \alpha(r_0) < 1)$, то $d\alpha(r_0)/dr_0 < 0$, т. е. уменьшение доходности безрискового актива приводит к увеличению доли вложений в рискованный актив.

Указание: Покажите, продифференцировав условие первого порядка, что

$$\frac{d\alpha(r_0)}{dr_0} = \frac{\mathsf{E}\, u'(\tilde{x}) - \omega(1 - \alpha(r_0))\, \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)]}{\omega\, \mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)^2]}.$$

Отсюда следует требуемый результат, поскольку $\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)] < 0$ вследствие возрастания $\rho(\cdot)$.

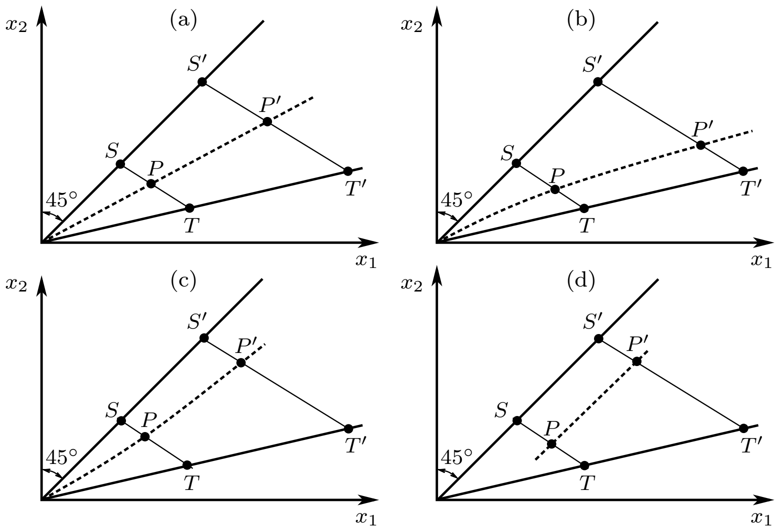


Рис. 6.9. *Рисунок к задаче 6.43*

6.41 Докажите, что эластичность спроса на рискованные активы по общей величине вложений имеет тот же знак, что и величина

$$\mathsf{E}[u''(\tilde{x})(\tilde{r} - r_0)].$$

6.42 Установите соотношение между эластичностью спроса на рискованные активы по общей величине вложений и мерой Эрроу—Пратта отношения к риску.

6.43 ⟦Аткинсон, Стиглиц⟧ Предположим, что (в мире с двумя состояниями) имеется один рискованный (с нормой доходности $\tilde{r}$) и один не приносящий дохода безрисковый актив. Охарактеризуйте в терминах относительной и абсолютной меры неприятия риска Эрроу—Пратта (эластичности по богатству спроса на рискованный актив) представленные на Рис. 6.9 возможные структуры оптимальных портфелей при разных уровнях богатства. Линия PP' представляет совокупность фактических портфелей (при разных уровнях инвестиций в портфель), линии SS' (TT') — совокупность портфелей при условии, что портфели содержат лишь безрисковые (рискованные) активы. Линии ST ($S'T'$) представляют совокупность допустимых портфелей при данном уровне инвестиций.

6.44 Докажите, что если у двух индивидуумов меры неприятия риска $\rho_1(\cdot)$ и $\rho_2(\cdot)$ таковы, что при всех x выполнено $\rho_1(x) \leqslant \rho_2(x)$, то для любого исходного уровня богатства ω выполнено $\mathcal{E}_2(\omega) \subset \mathcal{E}_1(\omega)$. (Заметим, что обратное утверждение фактически доказано в тексте параграфа.)

6.45 Пусть $\tilde{x}(t)$ — семейство случайных величин, принимающих значения $\omega + t$ и $\omega - t$ с равными вероятностями, и пусть $\Delta(t)$ — вознаграждение за риск для $\tilde{x}(t)$ для потребителя с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$, такой что $u'(x) > 0$ и $u''(x) \leqslant 0$. Покажите, что $\Delta(0) = 0$, $\Delta'(0) = 0$ и $\Delta''(0) = -u''(\omega)/u'(\omega) = \rho(\omega)$.

6.46 Пусть $\tilde{x}(t)$ — семейство случайных величин, принимающих значения $\omega + t$ и $\omega - t$ с равными вероятностями, и пусть $\pi(t)$ — вероятностное вознаграждение за риск для этих случайных величин, которое определяется по формуле

$$u(\omega) = \left(\frac{1}{2} + \pi(t)\right)u(\omega + t) + \left(\frac{1}{2} - \pi(t)\right)u(\omega - t).$$

(A) Покажите, что если элементарная функция полезности $u(\cdot)$ строго вогнута, то $\pi(t) > 0$ при $t > 0$ и $\pi(0) = 0$.

(B) Покажите, что $4\pi'(0) = -u''(\omega)/u'(\omega) = \rho(\omega)$.

6.47 Рассмотрите лотереи вида $\omega + t\varepsilon$, где $\mathsf{E}\,\varepsilon = 0$. Покажите, что в первом приближении (при малых t) вознаграждение за риск равно

$$\rho(\omega)\,\mathsf{Var}(\varepsilon)t^2/2,$$

где $\rho(\cdot)$ — абсолютная мера Эрроу—Пратта.

6.8. Стохастическое доминирование

Ранее мы рассмотрели ранжирование индивидуумов по их отношению к риску. В этом параграфе вводится ранжирование лотерей (случайных потребительских наборов) двух типов. В терминах первого ранжирования дается ответ на вопрос о том, какие свойства двух лотерей гарантируют, что одну из них всегда предпочитает любой индивидуум, предпочтения которого представляются возрастающей функцией полезности Неймана—Моргенштерна. В терминах второго ранжирования дается ответ на вопрос о том, какие свойства двух лотерей гарантируют, что одну из них всегда предпочитает любой индивидуум-рискофоб (индивидуум, предпочтения которого представляются возрастающей вогнутой функцией полезности Неймана—Моргенштерна).

Если две лотереи соотносятся между собой подобным образом, т. е. можно сказать, что одна из них предпочтительнее другой, даже не зная точного вида предпочтений и предполагая только самые общие свойства таких предпочтений, то про такие лотереи говорят, что одна **стохастически доминирует** другую[14].

Простейший случай стохастического доминирования одного случайного потребительского набора ($\tilde{\mathbf{x}}$) над другим ($\tilde{\mathbf{y}}$) заключается в том, что в любом состоянии мира набор $\tilde{\mathbf{x}}$ обеспечивает не меньший уровень потребления благ, чем $\tilde{\mathbf{y}}$, т. е. $\mathbf{x}_s \geqslant \mathbf{y}_s$ для всех $s \in S$. Это нестрогое доминирование. Если же при этом $x_{sk} \neq y_{sk}$ хотя бы для одного состояния мира $s \in S$ (имеющего ненулевую вероятность) и хотя бы для одного блага k, то доминирование будет строгим. При этом предполагается строгая монотонность предпочтений (строгая монотонность элементарной функции полезности). В терминах теории вероятностей это означает, что $\tilde{\mathbf{x}}$ с вероятностью единица не меньше (соответственно больше) $\tilde{\mathbf{y}}$.

Это **стохастическое доминирование по состояниям мира**. Если перевести его на язык лотерей, то получим так называемое **стохастическое доминирование первого порядка**. В дальнейшем будем рассматривать только денежные лотереи, т. е. только одномерные распределения вероятностей. Сначала дадим определение в терминах лотерей общего вида, а затем перенесем его на простые лотереи. Произвольной лотерее соответствует некоторая функция распределения F, которая ставит в соответствие каждой величине $x \in \mathbb{R}$ вероятность $F(x)$ того, что выигрыш окажется ниже x.

Определение 6.8

Лотерея F нестрого стохастически доминирует по первому порядку лотерею G, если $F(x) \leqslant G(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Лотерея F строго стохастически доминирует по первому порядку лотерею G, если, кроме того, существует $x \in \mathbb{R}$, для которого $F(x) < G(x)$. $\triangleleft$

Другими словами, F доминирует G, если для любого заданного уровня x лотерея F всегда обеспечивает не меньшую вероятность выигрыша, равного или превышающего x, чем лотерея G. Часто

[14] См. J. Hadar and W. R. Russell. Rules for Ordering Uncertain Prospects, *The American Economic Review* **59** (1969): 25–34.

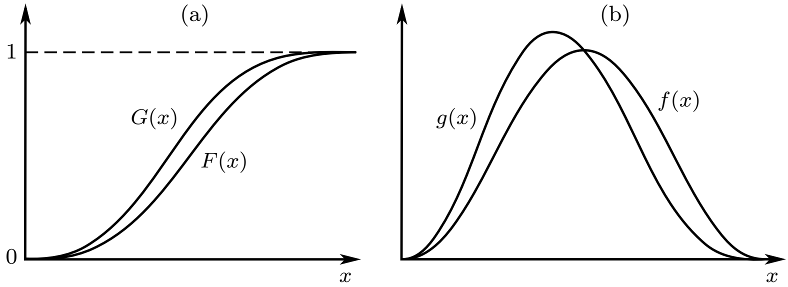


Рис. 6.10. *Стохастическое доминирование первого порядка: (a) функции распределения, (b) плотности распределения*

стохастическое доминирование первого порядка для краткости называют просто *стохастическим доминированием.*

Стохастическое доминирование первого порядка исходит из того, что потребитель всегда предпочитает больший выигрыш меньшему, т. е. из возрастания элементарной функции полезности. При этом не делается предположений относительно того, как потребитель относится к риску. Таким образом, данная концепция доминирования является довольно слабой.

Рис. 6.10 иллюстрирует понятие стохастического доминирования первого порядка для случая, когда лотереям соответствуют непрерывные функции распределения. Лотерея F стохастически доминирует лотерею G, так что функция распределения F лежит под G, а плотность распределения $f = F'$ сдвинута вправо по сравнению с плотностью $g = G'$.

Перенесем определение стохастического доминирования первого порядка на простые лотереи. Рассмотрим простые лотереи $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Пусть выигрыши $x_1, \ldots, x_n$ составляют объединение носителей этих лотерей ($\mathrm{Supp}(\mathbf{p}) \cup \mathrm{Supp}(\mathbf{q})$). Предположим, что эти выигрыши упорядочены по возрастанию, т. е. $x_1 < \cdots < x_n$. Тогда лотерея $\mathbf{p}$ нестрого доминирует по первому порядку лотерею $\mathbf{q}$, если $\sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} q_i$ для всех $k = 1, \ldots, n$, где мы ввели обозначения $p_i = p(x_i)$ и $q_i = q(x_i)$. Строгое доминирование получаем в том случае, если хотя бы одно неравенство строгое.

Следующая теорема обосновывает введенное определение стохастического доминирования первого порядка.

Теорема 6.11

Для двух простых лотерей $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ неравенство $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i)$ выполняется для всех возрастающих элементарных функций полезности $u(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} q_i$ для всех $k = 1, \ldots, n$. ┘

Доказательство: Введем следующие обозначения: $u_i = u(x_i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$. При этом $u_i = u_n - \sum_{k=i}^{n-1} \Delta u_k$. С учетом этого ожидаемую полезность от лотереи $\mathbf{p}$ можно представить следующим образом:

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) = u_n - \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{k=i}^{n-1} \Delta u_k = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k \sum_{i=1}^{k} p_i.$$

Аналогично для лотереи $\mathbf{q}$

$$U(\mathbf{q}) = u_n - \sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k \sum_{i=1}^{k} q_i.$$

Разность между двумя значениями ожидаемой полезности равна

$$U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k \left(\sum_{i=1}^{k} q_i - \sum_{i=1}^{k} p_i \right).$$

При возрастании функции $u(\cdot)$ выполнено $\Delta u_i > 0$, поэтому если выражение в скобках неотрицательно, то $U(\mathbf{p}) \geqslant U(\mathbf{q})$.

Обратное доказывается от противного. Пусть существует k^*, для которого $\sum_{i=1}^{k^*} q_i < \sum_{i=1}^{k^*} p_i$. Зафиксируем некоторые $\Delta u_i > 0$ при $i \neq k^*$. Если выбрать Δu_{k^*} достаточно большим, то будет выполнено $\sum_{k=1}^{n-1} \Delta u_k \left(\sum_{i=1}^{k} q_i - \sum_{i=1}^{k} p_i \right) < 0$. Для данных $\Delta u_i > 0$ несложно подобрать возрастающую функцию $u(\cdot)$ так, чтобы $\Delta u_i = u(x_{i+1}) - u(x_i)$. Для такой элементарной функции полезности получим, что ожидаемая полезность от лотереи $\mathbf{p}$ ниже, чем ожидаемая полезность от лотереи $\mathbf{q}$. Поэтому если $U(\mathbf{p}) \geqslant U(\mathbf{q})$ для любой элементарной полезности, то $\sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} q_i$ для всех $k = 1, \ldots, n$. ■

Аналогичное утверждение можно доказать и для распределений произвольного вида, если предположить, что элементарная функция полезности дифференцируема (см. задачу 6.55).

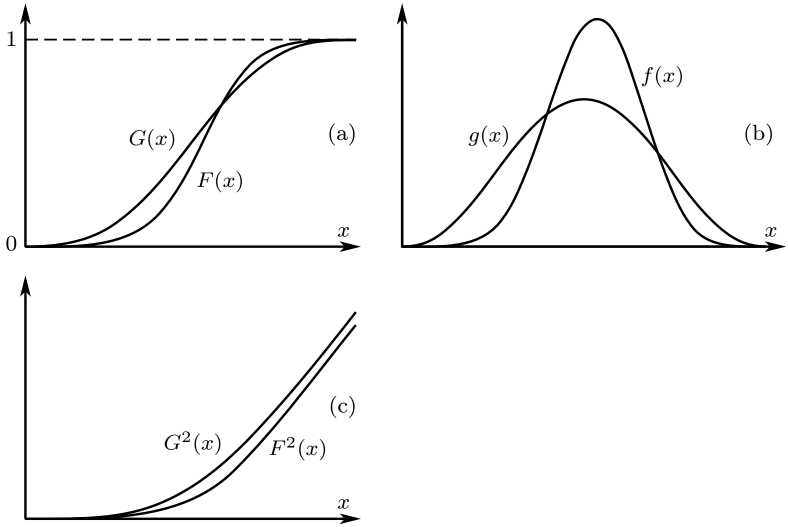


Рис. 6.11. *Стохастическое доминирование второго порядка: (a) функции распределения, (b) плотности распределения, (c) интегралы функций распределения*

Распределения на Рис. 6.11(a) несравнимы по стохастическому доминированию первого порядка, поскольку ни одна из функций распределения не лежит под другой. В то же время, если судить по плотностям распределения (Рис. 6.11(b)), то видно, что лотерея F менее рискованная, чем лотерея G, и дает более высокий ожидаемый доход. Скорее всего, любой рискофоб предпочтет лотерею F лотерее G. Можно также рассмотреть крайний случай, когда лотерея G является рискованной, а лотерея F — безрисковой, причем F дает не менее высокий ожидаемый выигрыш, чем G.

В подобных случаях концепция стохастического доминирования первого порядка оказывается слишком слабой и требуется сравнивать лотереи по второму порядку стохастического доминирования. Стохастическое доминирование второго порядка исходит из того, что, помимо монотонности предпочтений, потребитель характеризуется также неприятием риска. Оно определяется таким образом, чтобы все рискофобы с возрастающей элементарной функцией полезности предпочли одну из сравниваемых лотерей другой.

Определение 6.9

Лотерея F нестрого стохастически доминирует по второму порядку лотерею G, если

$$F^2(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)dt \leqslant G^2(x) = \int_{-\infty}^{x} G(t)dt$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Лотерея F строго стохастически доминирует по второму порядку лотерею G, если, кроме того, существует $x \in \mathbb{R}$, для которого неравенство строгое. $\lhd$

Заметим, что стохастическое доминирование первого порядка влечет стохастическое доминирование второго порядка (но не наоборот). Действительно, неравенство $F(x) \leqslant G(x)$ для функций распределения влечет соответствующее неравенство для интегралов этих функций.

Рассмотрим теперь, как определение стохастического доминирования второго порядка конкретизируется для случая простых лотерей. В тех же обозначениях и предположениях, что и ранее, лотерея $\mathbf{p}$ нестрого доминирует по второму порядку лотерею $\mathbf{q}$, если

$$\sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} q_i$$

для всех $s = 1, \ldots, n-1$. Строгое доминирование получаем в том случае, если хотя бы одно неравенство строгое.

Само по себе определение стохастического доминирования второго порядка, как оно приведено выше, не является интуитивно понятным и требует обоснования. Следующая теорема дает такое обоснование (ее доказательство оставляется читателю в качестве упражнения; см. задачу 6.56).

Теорема 6.12

Для двух простых лотерей, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, неравенство $\sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i) \geqslant$ $\geqslant \sum_{i=1}^{n} q_i u(x_i)$ выполняется для всех возрастающих вогнутых элементарных функций полезности $u(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $P_s \leqslant Q_s$ для всех $s = 1, \ldots, n-1$, где

$$P_s = \sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} p_i \quad \text{и} \quad Q_s = \sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} q_i.$$

$\lrcorner$

Аналогичное утверждение можно доказать и для распределений произвольного вида, если предположить, что элементарная функция полезности дважды дифференцируема (см. задачу 6.57).

Заметим, что рассмотренные отношения стохастического доминирования между лотереями обладают свойством транзитивности, но не обладают свойством полноты (см. задачи 6.52 и 6.53). Если F не доминирует G, то из этого не следует, что G доминирует F. Но если F стохастически доминирует G, а G доминирует H, то F доминирует H.

Зададимся теперь вопросом о том, когда один случайный потребительский набор *более рискованный*, чем другой (одна лотерея более рискованная, чем другая лотерея)[15].

Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ — случайный потребительский набор, а $\tilde{\mathbf{x}}^* = (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\mu})$ — безрисковый потребительский набор, полученный усреднением $\tilde{\mathbf{x}}$, такой что в каждом состоянии мира $s \in S$

$$\mathbf{x}_s^* = \mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}} = \sum_{t \in S} \mu_t \mathbf{x}_t.$$

В этом случае вполне естественно считать, что случайный набор $\tilde{\mathbf{x}}$ является более рискованным, чем $\tilde{\mathbf{x}}^*$. Как уже обсуждалось, из неравенства Йенсена следует, что $\tilde{\mathbf{x}}^*$ даст любому рискофобу более высокую ожидаемую полезность, чем $\tilde{\mathbf{x}}$.

Выпуклую комбинацию $\tilde{\mathbf{x}}^*$ и $\tilde{\mathbf{x}}$ естественно называть менее рискованной, чем $\tilde{\mathbf{x}}$, поскольку она ближе к безрисковому набору $\tilde{\mathbf{x}}^*$, чем к рискованному набору $\tilde{\mathbf{x}}$. Как показывает следующая теорема, любой рискофоб предпочтет такую комбинацию исходному случайному набору $\tilde{\mathbf{x}}$.

Теорема 6.13

{i} Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \in \tilde{X}$ — случайный потребительский набор и $\tilde{\mathbf{x}}^\alpha = (\mathbf{x}^\alpha, \boldsymbol{\mu})$— такой случайный потребительский набор, что в каждом состоянии мира $s \in S$

$$\mathbf{x}_s^\alpha = \alpha\,\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}} + (1-\alpha)\mathbf{x}_s,$$

где $\alpha \in [0; 1]$. Тогда для любого потребителя с вогнутой элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ верно

$$\mathsf{E}\,u(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha) \geqslant \mathsf{E}\,u(\tilde{\mathbf{x}}).$$

{ii} Если, кроме того, хотя бы в двух состояниях мира $s, t \in S$

[15] См. M. Rothschild and J. E. Stiglitz. Increasing Risk I: A Definition, *Journal of Economic Theory* **2** (1970): 225–243.

выполнено $\mathbf{x}_s \neq \mathbf{x}_t$ (случайный потребительский набор $\tilde{\mathbf{x}}$ является рискованным), а элементарная функция полезности потребителя $u(\cdot)$ является строго вогнутой, то при $\alpha \in (0; 1]$

$$\mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}}^\alpha) > \mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}}).$$ ┘

Доказательство: Доказываемое является простым следствием неравенства Йенсена и определения вогнутой функции (см. задачу 6.58).■

Другой очевидный случай возрастания риска — когда случайный потребительский набор $\tilde{\mathbf{y}}$ получается из случайного потребительского набора $\tilde{\mathbf{x}}$ добавлением шума — случайной величины $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (соответствующей размерности) с нулевым математическим ожиданием, такой что $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ независимы. При этом независимость $\tilde{\mathbf{x}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ можно заменить более слабым предположением, что математическое ожидание добавки, условное относительно $\tilde{\mathbf{x}}$, равно нулю:

$$\mathsf{E}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \mid \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}.$$

(Это свойство следует из независимости, но не наоборот.) Данное предположение эквивалентно тому, что математическое ожидание $\tilde{\mathbf{y}}$, условное относительно $\tilde{\mathbf{x}}$, равно $\tilde{\mathbf{x}}$, т. е. $\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{y}} \mid \tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}$.

Теорема 6.14

Пусть $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \in \tilde{X}$ и $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}', \boldsymbol{\mu}) \in \tilde{X}$ — два случайных потребительских набора, таких что $\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{y}} \mid \tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}$. Тогда для любого потребителя с вогнутой элементарной функцией полезности $u(\cdot)$ верно $\mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}}) \geqslant \mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{y}})$. ┘

Доказательство: Имеет место следующее условное неравенство Йенсена (неравенство Йенсена для условных распределений):

$$\mathsf{E}[u(\tilde{\mathbf{y}}) \mid \tilde{\mathbf{x}}] \leqslant u(\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{y}} \mid \tilde{\mathbf{x}}))$$

с вероятностью единица. Это можно переписать как $\mathsf{E}[u(\tilde{\mathbf{y}}) \mid \tilde{\mathbf{x}}] \leqslant u(\tilde{\mathbf{x}})$ (с вероятностью единица). Взяв от обеих частей неравенства безусловное математическое ожидание, получим требуемый результат: $\mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{y}}) \leqslant \mathsf{E}\, u(\tilde{\mathbf{x}})$ (здесь используется так называемое правило повторного ожидания: безусловное ожидание от условного ожидания есть безусловное ожидание). ■

Еще одно альтернативное определение возрастания риска можно получить, сравнивая концепции стохастического доминирования первого и второго порядка. При стохастическом доминировании первого порядка «масса» распределения сдвигается в сторону более высоких выигрышей. Стохастическое доминирование второго порядка тоже может заключаться в сдвиге «массы» распределения вправо, но, с другой стороны, может заключаться и в увеличении разброса, так сказать, в растекании массы распределения по сторонам. Этот второй эффект можно считать возрастанием риска. Изложенные идеи формализует следующее определение (графическую иллюстрацию читатель может дать самостоятельно; см. задачу 6.61).

Определение 6.10

Говорят, что лотерея F является нестрого **более рискованной**, чем лотерея G (обе с носителем $[a, b]$), если $F^2(x) \leqslant G^2(x)$ для всех $x \in [a, b]$ и $F^2(b) = G^2(b)$. Лотерея F является **строго более рискованной**, чем лотерея G, если, кроме того, хотя бы для одного x выполнено $F^2(x) < G^2(x)$. ◁

Таким образом, согласно этому определению F — более рискованная лотерея, чем G, если F доминирует G по второму порядку и выполнено $F^2(b) = G^2(b)$. Это последнее равенство эквивалентно равенству математических ожиданий двух лотерей (см. задачу 6.60). Так как более рискованная лотерея доминирует по второму порядку менее рискованную, то с учетом свойств стохастического доминирования второго порядка очевидно, что любой рискофоб с возрастающей элементарной функцией полезности предпочтет менее рискованную лотерею. Оказывается, что возрастания элементарной функции полезности здесь не требуется (в этом читатель может убедиться, проанализировав соответствующие доказательства для доминирования второго порядка, схемы которых даны в задачах 6.56 и 6.57). Таким образом, мы можем утверждать просто, что любой рискофоб предпочтет менее рискованную лотерею более рискованной (что согласуется с термином «рискофоб»).

Определение 6.10 подходит только для одномерных (денежных) лотерей. Можно доказать, что (для денежных лотерей) оно обобщает те интуитивно очевидные случаи «возрастания риска», которые мы рассмотрели ранее (для первого из рассмотренных случаев этот факт предлагается доказать в задаче 6.64).

Задачи

6.48 Пусть $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — две простые лотереи на $X = 1, 2, 3$.

(А) При каких условиях на p_1, p_2 и q_1, q_2 лотерея $\mathbf{p}$ стохастически доминирует лотерею $\mathbf{q}$ по первому порядку?

(B) При каких условиях лотерея $\mathbf{p}$ стохастически доминирует лотерею $\mathbf{q}$ по второму порядку?

6.49 Пусть $\mathbf{p}_x$ и $\mathbf{p}_y$ — две простые лотереи. Первая дает выигрыши x_1, x_2, x_3 $(x_1 < x_2 < x_3)$ с равными вероятностями, а вторая — выигрыши y_1, y_2, y_3 $(y_1 < y_2 < y_3)$ с равными вероятностями.

(A) При каких условиях на x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 лотерея $\mathbf{p}_x$ стохастически доминирует лотерею $\mathbf{p}_y$ по первому порядку?

(B) При каких условиях лотерея $\mathbf{p}_x$ стохастически доминирует лотерею $\mathbf{p}_y$ по второму порядку?

6.50 Пусть F — равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, а G — равномерное распределение на отрезке $[c, d]$.

(A) При каких параметрах a, b, c, d лотерея F будет стохастически доминировать лотерею G по первому порядку?

(B) При каких параметрах a, b, c, d лотерея F будет стохастически доминировать лотерею G по второму порядку?

6.51 (A) Объясните, почему, если одна лотерея стохастически доминирует по первому порядку другую лотерею, то первая лотерея дает не меньший ожидаемый выигрыш, чем вторая.

(B) Приведите пример, показывающий, что обратное, вообще говоря, неверно (более высокий ожидаемый выигрыш не влечет стохастическое доминирование первого порядка).

6.52 Докажите, что отношение стохастического доминирования первого порядка является транзитивным, но, вообще говоря, не является полным.

6.53 Докажите, что отношение стохастического доминирования второго порядка является транзитивным, но, вообще говоря, не является полным.

6.54 Приведите пример двух простых лотерей, показывающий, что стохастическое доминирование второго порядка, вообще говоря, не влечет стохастическое доминирование первого порядка.

6.55 Обоснуйте для функций распределения общего вида F и G с носителем $[a, b]$ определение стохастического доминирования первого порядка, доказав аналог Теоремы 6.11.

(A) Введем обозначение $U(F) = \int_a^b u(x) dF(x)$ для функции полезности Неймана—Моргенштерна с элементарной функцией полезности $u(\cdot)$, сопоставляющей функции распределения F ожидаемую полезность от нее. Предположив дифференцируемость функции $u(\cdot)$

и воспользовавшись интегрированием по частям, покажите, что

$$U(G) - U(F) = -\int_a^b u'(x)[G(x) - F(x)]dx.$$

(B) Покажите, что при возрастании элементарной функции полезности $u(\cdot)$ из того, что $F(x) \leqslant G(x)$ для всех $x \in [a, b]$, следует, что $U(F) \geqslant U(G)$.

(C) Покажите, что указанное условие не только достаточное, но и необходимое: если существует x^*, такой что $F(x^*) > G(x^*)$, то найдется дифференцируемая возрастающая элементарная функция полезности $u(\cdot)$, такая что $U(F) < U(G)$. (*Указание:* Функции распределения являются непрерывными справа.)

6.56 Докажите Теорему 6.12.

(A) Обозначьте $\delta_i = \Delta u_i/\Delta x_i - \Delta u_{i+1}/\Delta x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ и покажите, что

$$\frac{\Delta u_k}{\Delta x_k} = \sum_{s=k}^{n-2} \delta_s + \frac{\Delta u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}}.$$

(B) Покажите, что

$$u_i = u_n - \sum_{k=i}^{n-1} \Delta x_k \sum_{s=k}^{n-2} \delta_s - \frac{\Delta u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} \sum_{k=i}^{n-1} \Delta x_k.$$

(C) Изменив порядок суммирования по i, k, s на s, k, i, покажите, что

$$U(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i = u_n - \sum_{s=1}^{n-2} \delta_s P_s - \frac{\Delta u_{n-1}}{\Delta x_{n-1}} P_{n-1},$$

где $P_s = \sum_{k=1}^{s} \Delta x_k \sum_{i=1}^{k} p_i$.

(D) Пользуясь тем, что для возрастающей вогнутой функции $u(\cdot)$ выполнено $\delta_s \geqslant 0$ и $\Delta u_{n-1}/\Delta x_{n-1} > 0$, покажите, что из того, что $P_s \leqslant Q_s$ для всех $s = 1, \ldots, n-1$, следует, что $U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}) \geqslant 0$.

(E) Докажите, что указанное условие не только достаточное, но и необходимое. Для этого предположите, что одно из неравенств $P_s \leqslant Q_s$ нарушается. Сконструируйте возрастающую вогнутую элементарную функцию полезности $u(\cdot)$, такую что $U(\mathbf{p}) - U(\mathbf{q}) < 0$.

6.57 Обоснуйте для функций распределения общего вида F и G с носителем $[a, b]$ определение стохастического доминирования второго порядка, сформулировав и доказав аналог Теоремы 6.12.

Указание: Воспользовавшись два раза интегрированием по частям, покажите, что

$$U(G) - U(F) = -u'(x)[G^2(b) - F^2(b)] + \int_a^b u''(x)[G^2(x) - F^2(x)]dx,$$

где $F^2(x) = \int_a^x F(t)dt$ и $G^2(x) = \int_a^x G(t)dt$.

6.58 Докажите Теорему 6.13.

6.59 Переформулируйте Определение 6.10 для случая пары простых лотерей.

6.60 (А) Используя интегрирование по частям, докажите, что условие $F^2(b) = G^2(b)$ (см. Определение 6.10) эквивалентно равенству ожидаемых доходов от двух лотерей.

(В) Приведите и докажите аналог этого свойства для случая двух простых лотерей.

6.61 Проиллюстрируйте сравнение лотерей по рискованности в смысле Определения 6.10 при помощи графика функций распределения.

6.62 (А) Пусть простая лотерея $\mathbf{p}$ является строго более рискованной, чем простая лотерея $\mathbf{q}$. Покажите, что смесь $\mathbf{p} \diamond \alpha \diamond \mathbf{q}$ является строго менее рискованной, чем $\mathbf{p}$, при $\alpha \in [0; 1)$ и строго более рискованной, чем $\mathbf{q}$, при $\alpha \in (0; 1]$.

(В) Пусть лотерея (общего вида) F является строго более рискованной, чем лотерея G. По аналогии с простыми лотереями предложите определение смеси $F \diamond \alpha \diamond G$ и покажите, что такая смесь является строго менее рискованной, чем F, при $\alpha \in [0; 1)$ и строго более рискованной, чем G, при $\alpha \in (0; 1]$.

6.63 Пусть $\mathbf{p}(a)$ — лотерея, дающая $-(1-p)a$ с вероятностью p и pa с вероятностью $1 - p$, где $p \in (0; 1)$, a — некоторое число. Покажите, что если $b > a \geqslant 0$, то лотерея $\mathbf{p}(b)$ более рискованная, чем $\mathbf{p}(a)$. Дайте графическую иллюстрацию.

6.64 Пусть $\tilde{x}$ — некоторая нетривиальная случайная величина. Покажите, что при $\alpha \in [0; 1)$ случайной величине $\alpha\tilde{x} + (1 - \alpha) \mathsf{E}\, \tilde{x}$ соответствует строго менее рискованная лотерея (в смысле Определения 6.10), чем исходной случайной величине $\tilde{x}$.

6.65 Рассмотрите выбор инвестора, характеризующегося неприятием риска, между одним безрисковым и одним рискованным активом. Приведите пример того, что если рискованный актив становится более рискованным в смысле Определения 6.10, то его доля в портфеле может увеличиться.

Приложение 6.A. Модель Марковица и CAPM[16]

Рассмотрим интересный частный случай модели инвестора, предположив, что элементарная функция полезности $u(\cdot)$ имеет вид параболы (Рис. 6.12):

$$u(x) = a_0 + a_1 x - a_2 x^2.$$

(Можно интерпретировать это как квадратичную аппроксимацию первоначальной элементарной функции полезности получаемую разложением в ряд Тейлора вплоть до членов второго порядка в некоторой точке:

$$u(\cdot) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots).$$

Предполагается, что здесь $a_1, a_2 > 0$. Условие $a_2 > 0$ гарантирует, что инвестор является рискофобом. Условие $a_1 > 0$ гарантирует, что при достаточно малых x элементарная функция полезности имеет положительную производную. Очевидно, что квадратичная функция может быть адекватной аппроксимацией не при всех x, поскольку при $x = a_1/(2a_2)$ она достигает максимума, а далее убывает (т. е., по сути, она подразумевает насыщаемость предпочтений инвестора)[17].

---

[16] H. M. Markowitz • Portfolio Selection, *The Journal of Finance* **7** (1952): 77–91; H. M. Markowitz • *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, New York: John Wiley & Sons, 1959; J. Tobin • Liquidity Preference as Behaviour Towards Risk, *Review of Economic Studies* **25** (1958): 65–86; J. Tobin • The Theory of Portfolio Selection, in *The Theory of Interest Rates*, F. H. Hahn and F. P. R. Brechling (ed.), London: Macmillan, 1965: 3–51.

[17] У квадратичной функции есть и другие серьезные недостатки, вследствие чего модель Марковица нельзя считать вполне адекватной для описания инвестиционного поведения. Однако она вполне оправданна, если считать ее первым приближением с точки зрения моментов распределения. Очевидно, что если учитывать только первые моменты (ожидаемые доходности), то модель станет совсем неадекватной, поскольку не будет учитывать риск (см. об этом, например, в статье Г. Марковица). П. Самуэльсон показал, что при малом риске, т. е. в пределе, при стремлении распределения доходностей активов $\tilde{r}_k$ к вырожденному распределению, при котором $\tilde{r}_k$ принимает значение r_0 с вероятностью единица, приближение по двум первым моментам дает верное решение с точки зрения структуры портфеля (P. A. Samuelson • The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in terms of Means, Variances and Higher Moments, *Review of Economic Studies* **37** (1970): 537–542). Если учесть более высокие моменты, то приближение будет более точным, но анализ модели существенно усложняется.

Другой случай (помимо квадратичной функции), при котором ожидаемая полезность зависит только от ожидаемой доходности и дисперсии доходности,— это когда доходности активов $\tilde{r}_k$ имеют (многомерное) нормальное распределение. Но нормальное распределение плохо аппроксимирует поведение доходностей реальных финансовых активов.

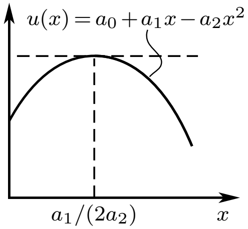


Рис. 6.12. *Квадратичная элементарная функция полезности*

При такой элементарной функции полезности ожидаемая полезность случайного дохода $\tilde{x}$ равна

$$U = \mathsf{E}\, u(\tilde{x}) = a_0 + a_1 \mathsf{E}\, \tilde{x} - a_2 \mathsf{E}(\tilde{x}^2).$$

Введем обозначения $\bar{x} = \mathsf{E}\, \tilde{x}$ (ожидаемый доход) и $\sigma_x^2 = \mathsf{Var}\, \tilde{x}$ (дисперсия дохода). По определению дисперсии

$$\mathsf{E}(\tilde{x}^2) = (\mathsf{E}\, \tilde{x})^2 + \mathsf{Var}\, \tilde{x} = \bar{x}^2 + \sigma_x^2.$$

В этих обозначениях ожидаемая полезность примет вид

$$U = a_0 + a_1 \bar{x} - a_2(\bar{x}^2 + \sigma_x^2).$$

Таким образом, при квадратичной элементарной функции полезности целевая функция инвестора зависит от двух характеристик распределения его дохода от портфеля: от математического ожидания дохода (среднего дохода) и от дисперсии дохода (которую можно считать мерой рискованности). Эта парадигма «среднее — дисперсия» Марковица не только упрощает анализ инвестиционного поведения, но и позволяет давать наглядные геометрические интерпретации различных этапов такого анализа, поскольку каждый портфель характеризуется всего двумя параметрами.

Удобно, как и выше, перейти от дохода к валовой доходности портфеля, которую обозначим через $\tilde{r}_P$:

$$\tilde{r}_P = \tilde{x}/\omega.$$

Обозначим через $\bar{r}_P$ ожидаемую доходность портфеля $\mathsf{E}\, \tilde{r}_P$, а через σ_P^2 — дисперсию доходности портфеля $\mathsf{Var}\, \tilde{r}_P$. Так как $\tilde{x} = \omega \tilde{r}_P$, то, вынося константу ω за операторы математического ожидания и дисперсии, получим

$$\bar{x} = \mathsf{E}\, \tilde{x} = \mathsf{E}(\omega \tilde{r}_P) = \omega\, \mathsf{E}\, \tilde{r}_P = \omega \bar{r}_P$$

и

$$\sigma_x^2 = \mathsf{Var}\,\tilde{x} = \mathsf{Var}(\omega\tilde{r}_P) = \omega^2\,\mathsf{Var}\,\tilde{r}_P = \omega^2\sigma_P^2.$$

Подставим эти выражения в функцию полезности:

$$U = a_0 + a_1\omega\bar{r}_P - a_2\omega^2(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2)$$

или, при введении обозначений $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1\omega$, $b_2 = a_2\omega^2$,

$$U = b_0 + b_1\bar{r}_P - b_2(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2).$$

Мы можем нормировать эту функцию, применив к ней соответствующее линейное возрастающее преобразование. Окончательно получаем следующую функцию полезности:

$$U = \bar{r}_P - \gamma(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2).$$

Функция зависит от ожидаемой доходности портфеля и дисперсии доходности портфеля. Коэффициент γ отражает степень неприятия риска.

Доходность портфеля очевидным образом связана с доходностями активов:

$$\tilde{r}_P = \sum_{k\in K}\alpha_k\tilde{r}_k$$

или

$$\tilde{r}_P = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}},$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_k$ — вектор доле́й активов (структура портфеля), $\tilde{\mathbf{r}}$ — вектор, составленный из доходностей активов. Таким образом, доходность портфеля — это взвешенное среднее доходностей активов, где в качестве весов выступают доли активов в портфеле.

Обозначим через $\bar{\mathbf{r}}$ вектор, составленный из ожидаемых доходностей активов $\bar{r}_k = \mathsf{E}\,\tilde{r}_k$, а через $\mathbf{V}$ — ковариационную матрицу доходностей активов. В этих обозначениях для ожидаемой доходности портфеля выполнено соотношение

$$\bar{r}_P = \mathsf{E}\,\tilde{r}_P = \mathsf{E}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\tilde{\mathbf{r}}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\,\mathsf{E}(\tilde{\mathbf{r}}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\bar{\mathbf{r}} = \sum_{k\in K}\alpha_k\bar{r}_k$$

(ожидаемая доходность портфеля — это взвешенное среднее ожидаемых доходностей активов), а для дисперсии доходности портфеля выполнено

$$\sigma_P^2 = \mathsf{Var}(\tilde{r}_P) = \mathsf{Var}(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}}) = \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}} - E(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}}))^2] =$$
$$= \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\tilde{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{r}})^2] = \mathsf{E}[(\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}))^2] = \mathsf{E}[\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})^\mathsf{T}\boldsymbol{\alpha}] =$$
$$= \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\,\mathsf{E}[(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})(\tilde{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}})^\mathsf{T}]\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}c_{k_1k_2}.$$

Типичным элементом ковариационной матрицы $\mathbf{V}$ является ковариация между доходностями пары активов:

$$c_{k_1k_2} = \mathsf{Cov}(\tilde{r}_{k_1}, \tilde{r}_{k_2}) = \mathsf{E}[(\tilde{r}_{k_1} - \bar{r}_{k_1})(\tilde{r}_{k_2} - \bar{r}_{k_2})].$$

Ковариационная матрица симметрична и по ее диагонали стоят дисперсии доходностей отдельных активов $\sigma_k^2 = c_{kk} = \mathsf{Var}\,\tilde{r}_k$.

[Напомним, что в дискретном случае величины $\bar{r}_k$, σ_k^2 и $c_{k_1k_2}$ вычисляются по формулам:

$$\bar{r}_k = \sum_{s\in S}\mu_s r_{ks}, \quad \sigma_k^2 = \sum_{s\in S}\mu_s(r_{ks} - \bar{r}_k)^2,$$
$$c_{k_1k_2} = \sum_{s\in S}\mu_s(r_{k_1s} - \bar{r}_{k_1})(r_{k_2s} - \bar{r}_{k_2}).]$$

Дисперсию доходности портфеля можно выразить также через корреляции доходностей активов:

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1\in K}\sum_{k_2\in K}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}\rho_{k_1k_2},$$

где σ_k — корень из дисперсии (среднеквадратическое отклонение) доходности k-го актива, $\rho_{k_1k_2}$ — коэффициент корреляции доходностей активов k_1 и k_2, определяемый как

$$\rho_{k_1k_2} = \frac{c_{k_1k_2}}{\sigma_{k_1}\sigma_{k_2}}.$$

В конечном итоге задача инвестора в модели Марковица приобретает следующий вид:

$$U = \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{r}} - \gamma\big((\boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\bar{\mathbf{r}})^2 + \boldsymbol{\alpha}^\mathsf{T}\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha}\big) \to \max_{\boldsymbol{\alpha}},$$
$$\sum_{k\in K}\alpha_k \leqslant 1, \quad \alpha_k \geqslant 0\ \forall k \in K, k \neq 0.$$

В зависимости от рассматриваемой модели безрисковый актив $k = 0$ может присутствовать либо нет в формулировке этой задачи инвестора. Данная задача представляет собой задачу квадратичного программирования, поскольку в нее входят только многочлены второго порядка от долéй α_k.

В такой упрощенной модели выбора каждый актив характеризуется для инвестора всего двумя параметрами, поэтому задачу инвестирования можно и удобно рассматривать на диаграмме с осями $\sigma, \bar{r}$ (диаграмма риск — доходность). На этой диаграмме каждый актив или портфель активов P можно изобразить точкой $(\sigma_P, \bar{r}_P)$.

Кривые безразличия (линии уровня функции полезности)

$$\bar{r}_P - \gamma(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2) = \mathrm{const}$$

представляют собой окружности с центром в точке $(\sigma_P, \bar{r}_P) = \left(0, \frac{1}{2\gamma}\right)$.

Мы будем в дальнейшем предполагать, что точка насыщения с доходностью $1/(2\gamma)$ лежит выше доходностей всех доступных инвестору активов.

Для этой модели можно доказать ряд утверждений, характеризующих структуры допустимых и оптимальных портфелей в разных ситуациях (с точки зрения доходностей доступных инвестору активов).

Рассмотрим случай, когда портфель составлен из безрискового актива ($k = 0$) и одного рискованного актива (первого). Дисперсия доходности такого портфеля равна

$$\sigma_P^2 = \mathsf{Var}(\alpha_0 r_0 + \alpha_1 \tilde{r}_1) = \mathsf{Var}(\alpha_1 \tilde{r}_1) = \alpha_1^2 \mathsf{Var}(\tilde{r}_1) = \alpha_1^2 \sigma_1^2.$$

Среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma_P = \alpha_1 \sigma_1,$$

т. е. при комбинировании безрискового и рискованного активов среднеквадратическое отклонение портфеля пропорционально среднеквадратическому отклонению рискованного актива, причем коэффициент пропорциональности равен доле вложений в рискованный актив.

Доходность же портфеля, очевидно, равна

$$r_P = \alpha_0 r_0 + \alpha_1 \bar{r}_1 = (1 - \alpha_1) r_0 + \alpha_1 \bar{r}_1 = r_0 + \alpha_1(\bar{r}_1 - r_0).$$

Таким образом, портфели $(\sigma_P, \bar{r}_P)$, соответствующие различным выпуклым комбинациям этих активов, лежат на отрезке с концами

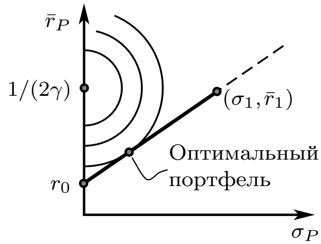


Рис. 6.13. *Оптимальный портфель в случае двух активов*

в точках $(0, r_0)$ и $(\sigma_1, \bar{r}_1)$. Это множество допустимых портфелей для случая, когда кредит невозможен (т. е. инвестор не может выбрать $\alpha_0 < 0$). Если кредит доступен, то возможные комбинации лежат на луче, выходящем из точки $(0, r_0)$ и проходящем через точку $(\sigma_1, \bar{r}_1)$. Часть луча за точкой $(\sigma_1, \bar{r}_1)$ соответствует кредиту ($\alpha_0 < 0$). Этот луч — аналог бюджетной линии для задачи инвестора.

Оптимальному портфелю на графике соответствует точка, в которой кривая безразличия касается луча (см. Рис. 6.13). Доли активов в оптимальном портфеле определяются отношением инвестора к риску (параметром γ). Для того чтобы оптимальный портфель был внутренним (в смысле $\alpha_1 > 0$), необходимо и достаточно, чтобы $\bar{r}_1 > r_0$. В случае же $\bar{r}_1 \leqslant r_0$ наклон луча будет отрицательный и оптимум будет достигаться при $\alpha_1 = 0$ (рискованный актив не войдет в портфель).

Перейдем теперь к рассмотрению портфелей, содержащих несколько рискованных активов. При различных частных предположениях о коррелированности доходностей активов выясним, какова будет структура множества возможных портфелей и каким будет оптимальный портфель.

Сначала рассмотрим случай, когда доходности всех рискованных активов жестко положительно коррелированы, т. е. когда коэффициент корреляции между любой парой активов $k_1, k_2 \neq 0$ равен единице[18]:

$$\rho_{k_1 k_2} = 1.$$

[18] Такое возможно, если доходности зависят от фазы экономического цикла или другого общего параметра.

При этом

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\sigma_{k_1}\sigma_{k_2} = \sum_{k_1}\alpha_{k_1}\sigma_{k_1}\sum_{k_2}\alpha_{k_2}\sigma_{k_2} = \left(\sum_k \alpha_k\sigma_k\right)^2,$$

откуда

$$\sigma_P = \sum_k \alpha_k\sigma_k.$$

В матричном виде

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_1 & \cdots & \sigma_l\sigma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1\sigma_l & \cdots & \sigma_l\sigma_l \end{pmatrix} = \sigma\sigma^{\mathsf{T}},$$

где $\sigma = (\sigma_k)_k$ — вектор корней из дисперсий активов. В этих обозначениях

$$\sigma_P^2 = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\mathbf{V}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\sigma\sigma^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\sigma)^2.$$

Для ожидаемой доходности вне зависимости от коррелированности выполняется

$$\bar{r}_P = \sum_k \alpha_k\bar{r}_k.$$

Отсюда следует, что множество точек $(\sigma_P, \bar{r}_P)$ при неотрицательных долях α_k есть выпуклая комбинация точек $(\sigma_k, \bar{r}_k)$, соответствующих рассматриваемым активам:

$$(\sigma_P, \bar{r}_P) = \sum_k \alpha_k(\sigma_k, \bar{r}_k)$$

(риски складываются с весами $\boldsymbol{\alpha}$, как и доходности).

Другими словами, на диаграмме риск — доходность множество возможных рискованных портфелей представляет собой выпуклый многоугольник с вершинами в точках $(\sigma_k, \bar{r}_k)$, соответствующих отдельным активам (Рис. 6.14).

Проанализируем структуру портфелей, содержащих дополнительно безрисковый актив.

Выше мы уже рассмотрели, как комбинировать рискованный *актив* с безрисковым. Нетрудно понять, что по аналогичным формулам вычисляются характеристики портфеля, полученного при комбинировании рискованного *портфеля* с безрисковым активом. Любой такой портфель на диаграмме риск — доходность будет представлять собой точку на отрезке (луче), соединяющем безрисковый

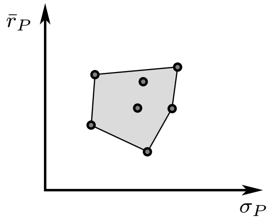


Рис. 6.14. *Возможные рискованные портфели в случае жестко положительно коррелированных активов*

актив с данным рискованным портфелем. Действительно, пусть доли активов в исходном рискованном портфеле равны ν_k, тогда этот портфель имеет следующие характеристики:

$$\bar{r}_R = \sum_{k \neq 0} \nu_k \bar{r}_k \quad \text{и} \quad \sigma_R^2 = \sum_{k_1 \neq 0} \sum_{k_2 \neq 0} \nu_{k_1} \nu_{k_2} c_{k_1 k_2}.$$

Назовем комбинированным портфелем, состоящим из безрискового актива и исходного портфеля с долями α_0 и $1 - \alpha_0$ соответственно, такой портфель, в котором доли вложений в рискованные активы равны $\alpha_k = \nu_k(1 - \alpha_0)$, а доля вложений в безрисковый актив равна α_0. Такой портфель имеет следующие характеристики:

$$\bar{r}_P = \sum_{k \in K} \alpha_k \bar{r}_k, \quad \sigma_P^2 = \sum_{k_1 \in K} \sum_{k_2 \in K} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} c_{k_1 k_2}.$$

Покажем, что выполнены следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \tilde{r}_P = \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0)\tilde{r}_R, \\ \sigma_P = (1 - \alpha_0)\sigma_R, \\ \bar{r}_P = \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0)\bar{r}_R, \end{gathered}$$

т. е. при таком комбинировании с портфелями можно обращаться так же, как с активами. (Этот результат можно обобщить на случай комбинирования любых портфелей.)

Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{r}_P = \sum_{k \in K} \alpha_k \bar{r}_k = \alpha_0 r_0 + \sum_{k \neq 0} \nu_k (1 - \alpha_0) \bar{r}_k = \\ = \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0) \sum_{k \in K} \nu_k \bar{r}_k = \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0) \bar{r}_R. \end{aligned}$$

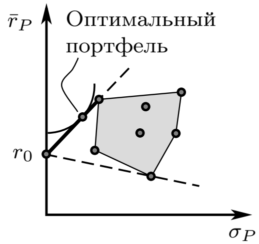


Рис. 6.15. *Оптимальный портфель в случае жестко положительно коррелированных активов*

Для дисперсии комбинированного портфеля имеем

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1 \in K} \sum_{k_2 \in K} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} c_{k_1 k_2} =$$
$$= \alpha_0^2 c_{00} + \sum_{k_1 \neq 0} \alpha_{k_1} \alpha_0 c_{k_1 0} + \sum_{k_2 \neq 0} \alpha_0 \alpha_{k_2} c_{0 k_2} + \sum_{k_1 \neq 0} \sum_{k_2 \neq 0} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} c_{k_1 k_2}.$$

Учитывая, что $c_{00} = c_{k_1 0} = c_{0 k_2} = 0$ и $\alpha_k = \nu_k (1 - \alpha_0)$, получаем

$$\sigma_P^2 = (1 - \alpha_0)^2 \sum_{k_1 \neq 0} \sum_{k_2 \neq 0} \nu_{k_1} \nu_{k_2} c_{k_1 k_2} = (1 - \alpha_0)^2 \sigma_R^2$$

или

$$\sigma_P = (1 - \alpha_0) \sigma_R.$$

Вернемся к анализу портфеля, в котором все рискованные активы жестко положительно коррелированы. Учитывая полученный только что результат, охарактеризуем все комбинированные портфели в этом случае. Каждый из них является точкой на луче, выходящем из точки $(0, r_0)$ и проходящем через одну из точек многогранника рискованных активов. Таким образом, множество комбинированных портфелей в данном случае представляет собой выпуклый конус, составленный из таких лучей. Оптимальный портфель должен лежать на верхней границе этого конуса, в точке, где ее касается кривая безразличия инвестора (см. Рис. 6.15).

В оптимальный портфель в «невырожденном» случае войдет только один рискованный актив, имеющий наилучшие характеристики.

Здесь рискованная часть портфеля определяется из задачи

$$\frac{\bar{r}_k - r_0}{\sigma_k} \to \max_{k=1,\ldots,l}.$$

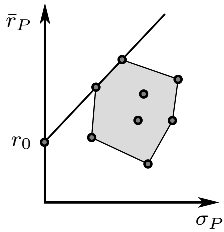


Рис. 6.16. *Жестко положительно коррелированные активы — вырожденный случай*

Выбирается актив, для которого луч будет иметь наибольший наклон. Только он и может войти в портфель с положительным весом.

В вырожденном случае (Рис. 6.16) несколько активов характеризуются максимальным наклоном и все они могут войти в оптимальный портфель. В оптимуме относительные доли вложений в такие активы не определены однозначно.

Мы рассматривали только поведение инвестора, т. е. спрос на активы, но можно рассматривать и предложение активов. Если те, кто предлагает активы, могут менять доходность, но не коэффициенты корреляции, то естественно ожидать, что в равновесии на рынке активов все предлагаемые активы лежат на оптимальном луче. Таким образом, для строго положительно коррелированных активов «вырожденный» случай в определенном смысле довольно естествен.

Второй случай коррелированности — жесткая отрицательная корреляция. Имеет смысл рассматривать только пару таких активов (для более чем двух активов все коэффициенты корреляции не могут равняться -1). Таким образом, пусть имеется два актива (1 и 2), таких что $\rho_{12} = -1$. Применяя общую формулу для расчета дисперсии, получим

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 = (\alpha_1, \alpha_2) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \\ = \alpha_1^2\sigma_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2\sigma_1\sigma_2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 = (\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2)^2, \end{aligned}$$

откуда среднеквадратическое отклонение равно

$$\sigma_P = |\alpha_1\sigma_1 - \alpha_2\sigma_2|.$$

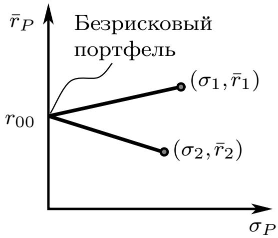


Рис. 6.17. *Возможные рискованные портфели в случае жестко отрицательно коррелированных активов*

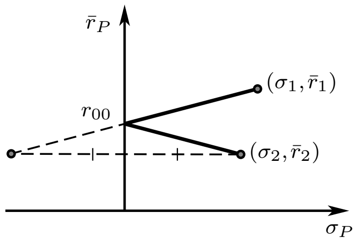


Рис. 6.18. *Построение ломаной возможных рискованных портфелей в случае жестко отрицательно коррелированных активов*

Ожидаемая доходность портфеля равна

$$\bar{r}_P = \alpha_1 \bar{r}_1 + \alpha_2 \bar{r}_2.$$

Нетрудно понять, что допустимые комбинации таких двух активов составляют ломаную. Точка излома соответствует портфелю с нулевым риском ($\sigma_P = 0$). Это означает, что из двух жестко отрицательно коррелированных активов можно составить безрисковый портфель (Рис. 6.17).

Чтобы получить такую ломаную на графике, нужно отразить одну из точек относительно вертикальной оси и соединить отрезком с другой точкой (Рис. 6.18).

Безрисковый портфель получается при следующей структуре портфеля:

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad \alpha_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

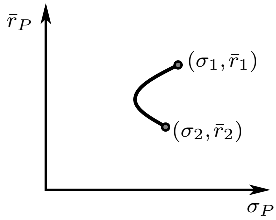


Рис. 6.19. *Возможные рискованные портфели в случае двух некоррелированных активов*

Его доходность, которую мы обозначим r_{00}, равна

$$r_{00} = \frac{\sigma_1 \bar{r}_2 + \sigma_2 \bar{r}_1}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Поскольку из двух таких активов можно составить безрисковый портфель, то рассматривать, как эти активы будут сочетаться с безрисковым активом, не имеет особого смысла. Можно сказать только, что при $r_{00} > r_0$ и возможности кредита по ставке r_0 получается парадоксальный результат — можно брать в кредит по ставке r_0 и инвестировать без риска с доходностью r_{00}. При этом можно получить сколь угодно большую доходность портфеля. (Формально в модели решение существует, так как целевая функция насыщаема.) Ясно, что этого не может происходить в рыночном равновесии. Следует учесть предложение активов. Естественно предположить, что в равновесии должно быть $r_{00} \leqslant r_0$ (отсутствие «рога изобилия»).

Третий случай, который мы рассмотрим — некоррелированные активы. В этом случае

$$V = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_l^2),$$
$$\sigma_P^2 = \boldsymbol{\alpha}^\intercal \mathbf{V} \boldsymbol{\alpha} = \sum_k \alpha_k^2 \sigma_k^2,$$
$$\sigma_P = \sqrt{\sum_k \alpha_k^2 \sigma_k^2}.$$

Ожидаемая доходность портфеля, как всегда, равна

$$\bar{r}_P = \sum_k \alpha_k \bar{r}_k.$$

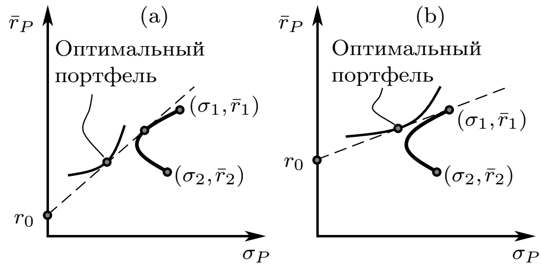


Рис. 6.20. *Оптимальные портфели в случае двух некоррелированных активов*

На графике портфели, комбинируемые из двух некоррелированных активов, образуют дугу, изогнутую влево (Рис. 6.19):

$$\bar{r}_P = \alpha_1\bar{r}_1 + \alpha_2\bar{r}_2 = \alpha_1\bar{r}_1 + (1-\alpha_1)\bar{r}_2,$$
$$\sigma_P = \sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2} = \sqrt{\alpha_1^2\sigma_1^2 + (1-\alpha_1)^2\sigma_2^2}.$$

В отличие от случая жесткой положительной коррелированности риски при некоррелированности не складываются, поэтому риск при комбинировании активов будет снижен. Тогда все активы с доходностью выше гарантированной должны войти в оптимальный портфель (эффект диверсификации). Другими словами, для случая некоррелированных доходностей в модели Марковица выполняется аналог *теоремы о диверсификации*:

> Если доходности всех рискованных активов в модели Марковица некоррелированы, то рискованный актив войдет в оптимальный портфель ($\alpha_k > 0$), если и только если его ожидаемая доходность выше гарантированной ($\bar{r}_k > r_0$).

Доказательство этого утверждения будет приведено ниже.

На Рис. 6.20(a) оба рискованных актива входят в оптимальный портфель, так как их ожидаемая доходность больше доходности безрискового актива. На Рис. 6.20(b) только один рискованный актив (первый) входит в оптимальный портфель.

При произвольном коэффициенте корреляции сочетания доходности и риска, достижимые комбинированием двух активов, окажутся

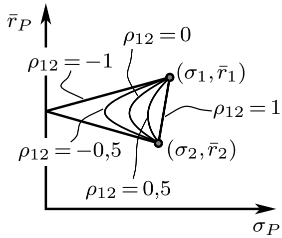


Рис. 6.21. *Возможные портфели из двух рискованных активов при разных коэффициентах корреляции*

на графике некоторой кривой соединяющей эти точки и выгибающейся, при неполной коррелированности, влево. На Рис. 6.21 показаны портфели, которые можно составить из двух активов при разных коэффициентах корреляции. Чем меньше коэффициент корреляции, тем сильнее влево выгибается кривая возможных портфелей.

В общем случае допустимое множество $\mathcal{R}$ всех доступных инвестору портфелей, состоящих из рискованных активов, на диаграмме риск — доходность будет изображаться некоторой связной фигурой, граница которой оказывается кривой, выпуклой влево (как, например, на Рис. 6.22)[19]. Очевидно, что множество $\mathcal{R}$ лежит в пределах, задаваемых наибольшей и наименьшей ожидаемой доходностью доступных активов. То есть для любого рискованного портфеля $(\sigma_M, \bar{r}_M) \in \mathcal{R}$ выполнено

$$\min \bar{r}_k \leqslant \bar{r}_M \leqslant \max \bar{r}_k.$$

Если бы инвестор выбирал портфель из множества $\mathcal{R}$, то он *не стал бы* выбирать такой портфель $(\sigma_M, \bar{r}_M)$, для которого существует другой допустимый портфель $(\sigma'_M, \bar{r}'_M) \in \mathcal{R}$ с лучшими характеристиками, т. е. такой что

$$\sigma'_M \leqslant \sigma_M \quad \text{и} \quad \bar{r}'_M \geqslant \bar{r}_M,$$

причем одно из неравенств строгое. Выбор инвестора всегда лежал бы на эффективной границе, состоящей из портфелей, для которых при заданной величине риска доходность максимальна (см. Рис. 6.22).

[19] Диаграмма изображает множество возможных портфелей, составленных из семи активов, при некоторой матрице корреляций доходностей этих активов.

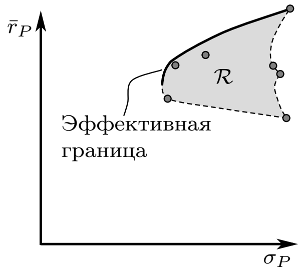


Рис. 6.22. *Множество возможных рискованных портфелей для нескольких активов*

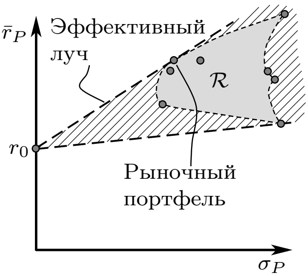


Рис. 6.23. *Множество возможных портфелей для нескольких активов*

Комбинируя рискованные портфели с безрисковым активом получим множество всех возможных портфелей, которое на диаграмме будет выглядеть как конус с вершиной в точке $(0, r_0)$ (см. Рис. 6.23). Этот конус состоит из всех таких лучей, которые выходят из точки $(0, r_0)$ и проходят через одну из точек $(\sigma_M, \bar{r}_M) \in \mathcal{R}$.

Комбинируя наилучшую (по наклону луча) точку из $\mathcal{R}$ с безрисковым активом, как и ранее, получаем наилучший портфель. Оптимальный портфель определяется наиболее крутым лучом (Рис. 6.23), т. е.

$$\frac{\bar{r}_M - r_0}{\sigma_M} \to \max_{(\sigma_M, \bar{r}_M) \in \mathcal{R}}.$$

Полезность инвестора от оптимального портфеля равна

$$U = \bar{r}_P - \gamma(\bar{r}_P^2 + \sigma_P^2),$$

где величины $\bar{r}_P$ и σ_P^2 следующим образом можно выразить через доли всех активов, кроме безрискового:

$$\bar{r}_P = r_0 + \sum_{k=1}^{l} \alpha_k (\bar{r}_k - r_0),$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{k_1=1}^{l} \sum_{k_2=1}^{l} \alpha_{k_1} \alpha_{k_2} c_{k_1 k_2}.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} = \bar{r}_k - r_0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha_k} = 2 \sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk}.$$

Будем рассматривать полезность U как функцию доле́й всех рискованных активов. Оптимальный портфель характеризуется долями, максимизирующими эту функцию (при ограничениях на их неотрицательность).

Найдем производную U по α_k:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} - \gamma \left(2\bar{r}_P \frac{\partial \bar{r}_P}{\partial \alpha_k} + \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha_k} \right) =$$

$$= \bar{r}_k - r_0 - \gamma \left(2\bar{r}_P (\bar{r}_k - r_0) + 2 \sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk} \right) =$$

$$= (1 - 2\gamma \bar{r}_P)(\bar{r}_k - r_0) - 2\gamma \sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk}.$$

Для оптимального портфеля $\partial U / \partial \alpha_k \leqslant 0$, причем для активов, входящих в портфель ($\alpha_k > 0$), по условию дополняющей нежесткости $\partial U / \partial \alpha_k = 0$.

Из условий дополняющей нежесткости

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k \frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 0,$$

т. е.

$$(1 - 2\gamma \bar{r}_P)(\bar{r}_P - r_0) - 2\gamma \sigma_P^2 = 0,$$

откуда, исключая обсуждавшийся выше вырожденный случай, когда $\sigma_P^2 = 0$, получим

$$1 - 2\gamma \bar{r}_P = \frac{2\gamma \sigma_P^2}{\bar{r}_P - r_0}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 2\gamma\left(\sigma_P^r \frac{\bar{r}_k - r_0}{\bar{r}_P - r_0} - \sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk}\right).$$

Взвешенная сумма ковариаций в этой формуле равна

$$\sum_{j=1}^{l} \alpha_j c_{jk} = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \operatorname{\mathsf{Cov}}(\tilde{r}_j, \tilde{r}_k) = \operatorname{\mathsf{Cov}}\left(\sum_{j=1}^{l} \alpha_j \tilde{r}_j, \tilde{r}_k\right) =$$

$$= \operatorname{\mathsf{Cov}}(\tilde{r}_P - \alpha_0 r_0, \tilde{r}_k) = \operatorname{\mathsf{Cov}}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_k).$$

Обозначим эту величину через c_{Pk}. Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_k} = 2\gamma\left(\sigma_P^2 \frac{\bar{r}_k - r_0}{\bar{r}_P - r_0} - c_{Pk}\right).$$

Следовательно, условия первого порядка $\partial U/\partial \alpha_k \leqslant 0$, характеризующие оптимальный портфель, можно записать следующим образом:

$$\sigma_P^2 \frac{\bar{r}_k - r_0}{\bar{r}_P - r_0} \leqslant c_{Pk},$$

причем если k-й актив входит в оптимальный портфель ($\alpha_k > 0$), то здесь достигается равенство. То есть для активов, входящих в портфель, выполнено следующее условие оптимальности:

$$\bar{r}_k - r_0 = \frac{c_{Pk}}{\sigma_P^2}(\bar{r}_P - r_0).$$

Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_l)$ — структура рискованной части портфеля. Величина ν_k представляет собой долю вложений в k-й актив в общих вложениях в рискованные активы. Другими словами, если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ — оптимальный для инвестора портфель, то

$$\nu_k = \frac{\alpha_k}{\sum_{j \neq 0} \alpha_j}, k \neq 0.$$

В знаменателе стоит $\sum_{j \neq 0} \alpha_j = 1 - \alpha_0$ — доля рискованной части портфеля. Можно записать это соотношение и в другом виде:

$$\alpha_k = \nu_k (1 - \alpha_0), k \neq 0.$$

Рассмотрим портфель, составленный только из рискованных активов, с долями ν_k. Его доходность обозначим через $\tilde{r}_M$. Она связана с доходностью полного оптимального портфеля как

$$\tilde{r}_P = \alpha_0 r_0 + (1 - \alpha_0)\tilde{r}_M.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}\bar{r}_P = \alpha_0 r_0 + (1-\alpha_0)\bar{r}_M,\\ \sigma_P = (1-\alpha_0)\sigma_M,\\ c_{Pk} = \mathsf{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_k) = \mathsf{Cov}((1-\alpha_0)\tilde{r}_M, \tilde{r}_k) = \\ = (1-\alpha_0)\,\mathsf{Cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_k) = (1-\alpha_0)c_{Mk}.\end{gathered}$$

Используя эти обозначения, условия первого порядка для актива, входящего в оптимальный портфель, можно записать как

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0),$$

где

$$\beta_k = \frac{\mathsf{Cov}(\tilde{r}_M, \tilde{r}_k)}{\mathsf{Var}(\tilde{r}_M)} = \frac{c_{Mk}}{\sigma_M^2}.$$

Это *основная формула модели CAPM*[20]. В соответствии с этим соотношением ожидаемую доходность актива, вошедшего в портфель, можно разбить на две части:

- доходность безрискового актива r_0 (это компенсация за отложенное потребление);
- компенсацию за подверженность риску, $\bar{r}_k - r_0$ (премия за риск).

Коэффициент β_k — это ковариация между доходностью k-го актива и доходностью рискованной части оптимального портфеля, нормированная на дисперсию доходности рискованной части оптимального портфеля. Такой нормированный показатель называется величиной бета этого актива.

Для активов, не входящих в оптимальный портфель, выполнено

$$\bar{r}_k - r_0 \leqslant \beta_k(\bar{r}_M - r_0).$$

В частном случае, когда доходности рискованных активов некоррелированы между собой, очевидно, что беты всех активов, не вошедших в оптимальный портфель, будут равны нулю. Следовательно, для актива, не вошедшего в портфель, выполнено

$$\bar{r}_k - r_0 \leqslant \beta_k(\bar{r}_M - r_0) = 0.$$

[20] См., напр., статью Уильяма Шарпа W. F. Sharpe · Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk, *Journal of Finance* **19** (1964): 425–442.

С другой стороны, если актив вошел в портфель, то его бета должна быть положительной. Следовательно, для такого актива

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0) > 0$$

(где мы предполагаем, что $\bar{r}_M > r_0$). Тем самым мы доказали теорему о диверсификации, сформулированную выше.

Интерпретируем теперь полученные результаты в контексте ситуации, когда всем инвесторам на рынке доступны одни и те же активы.

◆ Множество $\mathcal{R}$ допустимых комбинаций рискованных активов у всех будет одним и тем же.

◆ Поскольку оптимальный портфель у каждого инвестора лежит на луче с наибольшим наклоном, выходящем из точки $(0, r_0)$ и проходящем через точку множества $\mathcal{R}$, то у всех инвесторов рискованная часть портфеля будет иметь одно и то же отношение $(\bar{r}_M - r_0)/\sigma_M$. Рискованный портфель, характеризующийся этим оптимальным отношением, называется рыночным портфелем. Это точка касания эффективного луча и множества $\mathcal{R}$ (Рис. 6.24). Всякая точка $(\sigma_P, \bar{r}_P)$, лежащая на эффективном луче, удовлетворяет уравнению

$$\bar{r}_P = r_0 + \frac{\sigma_P}{\sigma_M}(\bar{r}_M - r_0)$$

или

$$\frac{\bar{r}_P - r_0}{\sigma_P} = \frac{\bar{r}_M - r_0}{\sigma_M},$$

где $(\sigma_M, \bar{r}_M)$ — характеристики рыночного портфеля.

> Теорема о разделении (*Separation Theorem*):
>
> Для всякого инвестора (независимо от γ) рискованная часть оптимального портфеля является рыночным портфелем.

Соответственно процесс поиска оптимального портфеля можно разделить на два этапа: сначала определяется оптимальный рискованный портфель $(\sigma_M, \bar{r}_M)$, а затем в зависимости от склонности к риску выбирается его оптимальное сочетание с безрисковым активом. При отождествлении оптимального рискованного портфеля с рыночным задачу первого этапа «решает» рынок и инвестору достаточно выбрать соотношение между безрисковым активом и этим

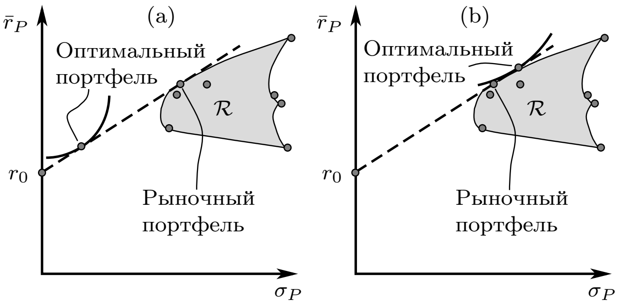


Рис. 6.24. *Оптимальные портфели двух разных инвесторов: (a) доля безрискового актива положительна, (b) доля безрискового актива отрицательна — инвестор берет кредит*

портфелем. Тем самым вместо того, чтобы рассматривать все активы, *инвестору достаточно выбрать соотношение между безрисковым активом и рыночным портфелем.* (Выше мы уже анализировали подобную задачу.)

Это утверждение называют также «теоремой о взаимных фондах» (*"Mutual Fund Theorem"*). Название отражает тот факт, что в «мире Марковица» инвесторы могут доверить составление оптимального портфеля рискованных активов инвестиционным организациям («взаимным фондам»), а сами должны будут лишь комбинировать этот готовый портфель с безрисковым активом в соответствии со своими предпочтениями.

Как мы видели, точка касания $(\sigma_M, \bar{r}_M)$, вообще говоря, может быть не единственной. Кроме того, в общем случае данной паре $(\sigma_M, \bar{r}_M)$ не всегда соответствует единственная структура активов, поэтому рыночный портфель может быть не единственным.

Если мы имеем дело с невырожденным случаем (например, когда матрица корреляций доходностей рискованных активов невырождена), то рыночный портфель $(\nu_1, \ldots, \nu_l)$ единственный и вектор $(\nu_1, \ldots, \nu_l)$ *для любого инвестора* характеризует структуру рискованной части портфеля. Таким образом, этот же вектор характеризует структуру продаж активов на рынке в целом (отсюда и термин «рыночный портфель»).

Показатель бета отдельного актива $\beta_k = c_{Mk}/\sigma_M^2$ представляет собой характеристику актива, общую для всех инвесторов. Бета

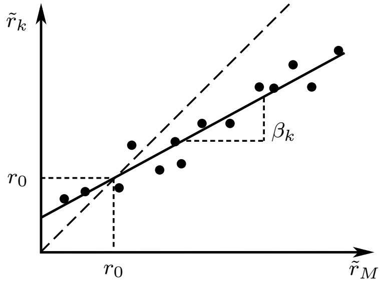


Рис. 6.25. *Интерпретация беты актива как наклона линии регрессии*

актива измеряет степень взаимосвязанности доходности актива и доходности рыночного портфеля. Соотношения

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0)$$

показывают, что премия за риск $\bar{r}_k - r_0$ пропорциональна коэффициенту β_k. Коэффициент пропорциональности здесь — премия за риск для рыночного портфеля, $\bar{r}_M - r_0$.

Бета актива фактически представляет собой наклон теоретической линии регрессии доходности актива по доходности рыночного портфеля (отсюда и название). Действительно, можно ввести обозначение $\tilde{\varepsilon}_k = \tilde{r}_k - r_0 - \beta_k(\tilde{r}_M - r_0)$ для ошибки регрессии. Тогда уравнение регрессии будет иметь вид

$$\tilde{r}_k = (1 - \beta_k)r_0 + \beta_k\tilde{r}_M + \tilde{\varepsilon}_k,$$

где ошибка имеет нулевое математическое ожидание $\mathsf{E}\,\tilde{\varepsilon}_k = \bar{r}_k - r_0 - \beta_k(\bar{r}_M - r_0) = 0$ и некоррелирована с регрессором:

$$\begin{aligned}\mathsf{Cov}(\tilde{\varepsilon}_k, \tilde{r}_M) &= \mathsf{E}(\tilde{\varepsilon}_k\tilde{r}_M) = \mathsf{E}(\tilde{r}_k\tilde{r}_M) - r_0\bar{r}_M - \beta_k(\mathsf{E}(\tilde{r}_M^2) - \bar{r}_0\bar{r}_M) = \\ &= \mathsf{E}(\tilde{r}_k\tilde{r}_M) - \bar{r}_k\bar{r}_M - \beta_k(\mathsf{E}(\tilde{r}_M^2) - \bar{r}_M^2) = c_{Mk} - \beta_k\sigma_M^2 = 0\end{aligned}$$

(Рис. 6.25).

Отметим несколько свойств приведенных равновесных соотношений и коэффициентов бета.

Ожидаемая доходность актива с нулевой бетой (т. е. актива, доходность которого некоррелирована с рыночной доходностью) равна безрисковой ставке r_0. Поскольку такой актив не изменяет риск рыночного портфеля, то он, по сути дела, является безрисковым (несмотря на то, что дисперсия доходности может быть положительной).

Актив с бетой, равной единице, эквивалентен рыночному портфелю и обладает той же ожидаемой доходностью, что и рыночный портфель.

Задачи

6.66 Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(\bar{r}_0, \sigma_0) = (1; 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}2; 0{,}3)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}15; 0{,}2)$, $(\bar{r}_3, \sigma_3) = (1{,}3; 0{,}4)$. Рискованные активы жестко положительно коррелированы (с коэффициентом 1). Что можно сказать о структуре рискованной части оптимального портфеля? Поясните словами и графически.

6.67 Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(r_0, \sigma_0) = (?, 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (1{,}1; 0{,}2)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}2; 0{,}2)$. Рискованные активы некоррелированы. При какой величине r_0 рискованная часть оптимального портфеля может иметь характеристики $(\bar{r}_M, \sigma_M) = (1{,}15, \sqrt{0{,}2})$? Поясните словами и графически.

6.68 Предпочтения инвестора описываются функцией полезности типа Неймана—Моргенштерна с квадратичной элементарной функцией полезности. Он обладает некоторым богатством ω и может формировать портфель из активов со следующими характеристиками (ожидаемая доходность, среднеквадратическое отклонение доходности): $(r_0, \sigma_0) = (1; 0)$ (безрисковый актив с возможностью кредита), $(\bar{r}_1, \sigma_1) = (0{,}9; 0{,}1)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2) = (1{,}1; 0{,}2)$. Рискованные активы жестко отрицательно коррелированы (с коэффициентом -1). Что можно сказать о структуре рискованной части оптимального портфеля? Поясните словами и графически.

6.69 В модели Марковица инвестор выбирает, какую долю капитала оставить в безрисковой форме с доходностью r_0, а сколько вложить в рискованные активы (акции) двух типов со средними доходностями $\bar{r}_1 > r_0$, $\bar{r}_2 > r_0$. Укажите, могут ли какие-либо условия на коэффициент корреляции ρ и (или) доходности гарантировать, что

(A) все три актива войдут в портфель;

(B) только первый из рискованных активов войдет в портфель;

(C) только два рискованных актива войдут в портфель.

6.70 Пусть в модели Марковица инвестор, обладающий капиталом 100 млн руб. делает выбор между тремя активами: один безрисковый с доходностью $r_0 = 1{,}1$, а другие два — с доходностями $\bar{r}_1 = 1{,}2$ и $\bar{r}_2 = 1{,}5$ соответственно и дисперсиями доходностей $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$. Известно, что инвестор выбрал портфель, характеризующейся доходностью $r_P = 1{,}27$ и дисперсией доходности $\sigma_P^2 = 0{,}17$. Доходность рискованной части его портфеля равна $r_M = 1{,}44$.

(A) Найдите суммы, вложенные инвестором в каждый из активов.

(B) Найдите дисперсию доходности рискованной части портфеля этого инвестора.

(C) Найдите коэффициент корреляции доходностей двух рискованных активов.

6.71 В модели Марковица инвестор сталкивается с двумя рискованными активами с характеристиками $\sigma_1^2 = 4$, $\bar{r}_1 = 2$, $\sigma_2^2 = 1$, $\bar{r}_2 = 11/2$, где σ_k^2 — дисперсия доходности k-го актива, а $\bar{r}_k$ — ожидаемая доходность, и с одним безрисковым активом с доходностью $r_0 = 1$. Известно, что инвестор выбрал такой портфель, что его рискованная часть имеет характеристики $\sigma_M^2 = 8/3$, $\bar{r}_R = 12/3$, а сам оптимальный портфель имеет ожидаемую доходность $\bar{r}_P = 12/3$.

(A) Найдите дисперсию доходности оптимального портфеля.

(B) Найдите доли активов в оптимальном портфеле.

(C) Найдите величину корреляции между доходностями двух рискованных активов.

6.72 В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности 1,6. Имеется два вида активов: акции с параметрами риск — доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (2; 1{,}2)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1; 1{,}4)$, причем они некоррелированы. Будет ли строго возрастать или убывать доля облигаций в рискованной (рыночной) части портфеля инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(A) Нарисуйте ее приблизительный график и объясните ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(в) Выведите функциональную зависимость.

6.73 В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности 1,7. Имеется два вида активов: акции с параметрами риск — доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (1; 0{,}8)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1; 1{,}4)$, причем они отрицательно коррелированы с коэффициентом -1. Будет ли строго возрастать или убывать доля облигаций в портфеле инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

(а) Нарисуйте ее приблизительный график и объясните ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(в) Выведите функциональную зависимость.

6.74 В модели Марковица—Тобина полезность инвестора насыщается при доходности 1,8. Имеется два вида активов: акции с параметрами риск — доходность $(\sigma_1, \bar{r}_1) = (2; 1{,}4)$ и облигации с параметрами $(\sigma_2, \bar{r}_2) = (1; 1{,}3)$, причем они положительно коррелированы с коэффициентом 1. Будет ли строго возрастать или убывать доля акций в портфеле инвестора по мере роста доходности безрискового актива от $r_0 = 1$ до $r_0 = 2$?

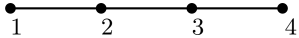
(а) Нарисуйте ее приблизительный график и объясните ход рассуждений, можно с помощью графиков.

(в) Выведите функциональную зависимость.

6.75 Некий очень осторожный инвестор всегда предпочитает активы с меньшим риском (дисперсией) вне зависимости от ожидаемой доходности. Пусть он составляет портфель из двух активов с ожидаемыми полезностями $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ и дисперсиями доходности σ_1^2 и σ_2^2. Определите, в какой пропорции войдут в портфель эти активы, если они…

(а) жестко положительно коррелированы (коэффициент корреляции равен $\rho_{12} = 1$);
(в) некоррелированы ($\rho_{12} = 0$);
(с) строго отрицательно коррелированы ($\rho_{12} = -1$).

6.76 На отрезке в ряд расположены четыре предприятия:



Время от времени происходит стихийное бедствие, которое сокращает прибыли на двух соседних предприятиях наполовину. Без учета этого прибыль на всех предприятиях одинакова. Вероятность стихийного бедствия для каждой пары предприятий $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$

одинакова. В какой пропорции распределит свой капитал между акциями этих предприятий инвестор с квадратичной элементарной функцией полезности?

6.77 Покажите, что если инвестору доступны два рискованных актива $(\bar{r}_1, \sigma_1)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2)$, доходности которых некоррелированы, и выполнено $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$, то оптимальный портфель обязательно содержит второй актив. Покажите, что условие некоррелированности активов существенно для справедливости этого утверждения, приведя соответствующий контрпример.

6.78 Покажите в явном виде, что если инвестору доступны два рискованных актива $(\bar{r}_1, \sigma_1)$, $(\bar{r}_2, \sigma_2)$, доходности которых некоррелированы, и безрисковый актив, причем выполнено $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$, то оптимальный портфель содержит первый актив тогда и только тогда, когда $r_0 < \bar{r}_1$. Покажите, что условие некоррелированности активов существенно для справедливости этого утверждения, приведя соответствующий контрпример.

6.79 Определим показатель *бета* для произвольного *портфеля* следующим образом:

$$\beta_P = \frac{\mathsf{Cov}(\tilde{r}_P, \tilde{r}_M)}{\mathsf{Var}(\tilde{r}_M)} = \frac{c_{MP}}{\sigma_M^2}.$$

(A) Покажите, что бета портфеля — это взвешенное среднее бет активов, составляющих портфель.

(B) Выразите бету произвольного портфеля, лежащего на эффективном луче, через показатели риска этого портфеля и рыночного портфеля. Чему равна бета рыночного портфеля?

(C) Как мы видели, для активов, входящих в оптимальный портфель, выполняется

$$\bar{r}_k - r_0 = \beta_k(\bar{r}_M - r_0).$$

Покажите, что аналогичная формула верна и для оптимальных портфелей.

Задачи к главе

6.80 Имеется два вида активов — облигации и акции. Их доходности, зависящие от предполагаемого состояния экономики, приведены в Таблице 6.1. Кредит невозможен. Элементарная функция полезности инвестора равна $u(x) = 4x - x^2$.

Таблица 6.1. *Данные к задаче 6.80*

Состояние экономики	Вероятность события	Доходность облигаций	Доходность акций
Спад	1/3	1,1	1,0
Норма	1/3	1,4	1,6
Подъем	1/3	1,7	2,2

(A) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом максимизации функции полезности Неймана—Моргенштерна.

(B) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом модели Марковица—Тобина.

(C) Найдите оптимальную структуру инвестиционного портфеля методом модели Марковица—Тобина, если дополнительно существует безрисковый актив с доходностью 1,3.

Эта страница должна быть пустой!

Глава

Рынки в условиях неопределенности

7

7.1. Введение

В этой главе мы введем неопределенность (риск) в модели общего равновесия способом, предложенным Эрроу и Дебре. Сначала речь пойдет о классической модели Эрроу—Дебре, являющейся естественным расширением модели совершенного рынка из гл. 4. Место обычных благ в этой модели занимают так называемые *контингентные блага* (см. гл. 6). Свойства равновесия в этой модели в целом такие же, однако если предпочтения потребителей представимы функцией полезности Неймана—Моргенштерна, то Парето-оптимальные состояния и равновесия обладают некоторыми особыми свойствами, которые мы ниже опишем. При этом рассмотрим только экономику без производства.

Определенные тонкости связаны с понятием Парето-оптимальности в экономике с риском. Мы рассмотрим два различных толкования этого понятия.

Моделировать возможности обмена в экономике с риском можно с помощью введения ценных бумаг вместо контингентных благ. Один из параграфов этой главы вводит подобную модель — модель Раднера. Мы установим некоторые свойства равновесия в модели Раднера и проведем параллели с равновесием Эрроу—Дебре. Модель Раднера позволяет в явном виде моделировать неполноту рынков, однако мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе.

7.2. Модель Эрроу—Дебре экономики с риском

Рассмотрим модель общего равновесия с контингентными благами в предположении, что существует конечное множество таких благ, а следовательно, и состояний мира. Как и прежде, будем предполагать, что имеется m потребителей ($i \in I = \{1, \dots, m\}$) и l товаров ($k \in K = \{1, \dots, l\}$). $S = \{1, \dots, \hat{s}\}$ — множество всех возможных состояний мира. Условно можно представить, что рассматриваются два момента времени — «сегодня» и «завтра». Предполагается, что *сегодня* заключаются условные сделки посредством продажи и покупки контингентных благ и уравновешиваются рынки, а выполняться сделки будут уже *завтра*, когда выяснится, какое из состояний мира реализуется. Напомним, что контингентным благом (k, s) является контракт, заключаемый сегодня и гарантирующий поставку единицы товара $k \in K$ завтра в том случае, если реализуется состояние $s \in S$.

Будем рассматривать здесь только экономику без производства (экономику обмена). Как и прежде, будем предполагать, что у каждого потребителя есть распределение вероятностей на состояниях мира. (Эти вероятности могут, вообще говоря, быть субъективными, зависеть от потребителя.) Далее, в каждом из состояний мира $s \in S$ потребитель i обладает начальными запасами $\omega_{is} \in \mathbb{R}^l$. Таким образом, начальные запасы $\boldsymbol{\omega}_i = (\omega_{iks})_{k,s}$ потребителя i состоят из наборов контингентных благ. Потребительский набор в данной модели характеризуется вектором $\mathbf{x}_i = (x_{iks})_{k,s} \in \mathbb{R}^{l\hat{s}}$, где x_{iks} — количество контингентного блага (k, s), приобретаемое потребителем i.

Для потребителя i на случайных потребительских наборах (соответствующих стратегии потребления этого потребителя) определены его предпочтения. Будем предполагать, что эти предпочтения представимы функцией полезности $U_i(\mathbf{x}_i)$.

Допустимым будет такой потребительский набор, что $\mathbf{x}_{is} \in X_i$ для всех $s \in S$. Соответствующую экономику назовем **экономикой с риском** (**экономикой Эрроу—Дебре**)[1]. Выполнение балансов в такой экономике требуется для каждого из состояний мира $s \in S$ отдельно. То есть состояние экономики с риском допустимо, если для каждого блага $k \in K$ и каждого состояния мира $s \in S$ выполнен баланс:

$$\sum_{i \in I} x_{iks} = \sum_{i \in I} \omega_{iks}.$$

Кроме того, как и ранее, для допустимости состояния экономики требуется допустимость наборов всех потребителей $i \in I$, т. е. $\mathbf{x}_i \in X_i \times \dots \times X_i$ для всех $i \in I$.

[1] См., напр., G. Debreu. *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, John Wiley & Sons, 1959 (Cowles Foundation Monograph No. 17), ch. 7, "Uncertainty", а также статью К. Эрроу, упомянутую в сноске 8 на с. 487.

Потребители обмениваются между собой только имеющимися у них контингентными благами и заключают сделки в рамках бюджетного ограничения. Каждый из потребителей максимизирует в рамках бюджетного ограничения свою функцию полезности. Цену контингентного блага (k, s) обозначим p_{ks}. Заметим, что контингентное благо покупается и оплачивается (или продается) *сегодня*, когда неизвестно, какое состояние мира реализуется. При рассмотрении выбора потребителя будем неявно предполагать, что вектор цен контингентных благ не влияет на оценку каждым потребителем вероятностей состояния мира[2].

Напомним, что задача потребителя имеет вид

$$\begin{gathered} U_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i}, \\ \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} p_{ks}x_{iks} \leqslant \sum_{s\in S}\sum_{k\in K} p_{ks}\omega_{iks}, \\ \mathbf{x}_{is} \in X_i \ \text{ для всех } s \in S. \end{gathered} \tag{$\mathcal{C}_{AD}$}$$

Определение общего равновесия остается фактически прежним.

Определение 7.1

Назовем $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ равновесием Эрроу—Дебре экономики с риском, если

* $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя $(\mathcal{C}_{AD})$ при ценах $\mathbf{p}$.
* $\bar{\mathbf{x}}$ — допустимое состояние, т. е. для всех благ $k \in K$ и всех состояний мира $s \in S$ выполнено

$$\sum_{i\in I} \bar{x}_{iks} = \sum_{i\in I} \omega_{iks}.$$

◁

Участники обмена в этой модели имеют собственные (возможно, несовпадающие) представления о вероятностях возможных состояний мира. Частным случаем этой ситуации является рынок, где представления всех участников о вероятностях совпадают. Заметим, что многие свойства данной модели не зависят от того, являются ли эти представления верными или ошибочными. Нетрудно понять, что такая модель рынка ничем не отличается от классической, с точностью

[2] Если потребители обладают достаточным знанием структуры экономики и интеллектом, то, вообще говоря, они могут по наблюдаемым ценам делать заключения о том, какие состояния мира совместимы с этими ценами. В этой логике можно толковать, например, модель Акерлофа, которая рассматривается в гл. 11.

до способа спецификации благ (k, s). Этот факт можно использовать при доказательстве теорем благосостояния для равновесия Эрроу—Дебре.

7.3. Теоремы благосостояния для экономики Эрроу—Дебре

В этом параграфе мы дадим определение оптимальных состояний экономики с риском и сформулируем аналоги двух теорем благосостояния, характеризующих свойства равновесия в терминах оптимальности по Парето. При определении Парето-эффективности в данной экономике мы сталкиваемся с проблемами, связанными с возможными ошибками при оценке вероятностей состояний мира.

Здесь возможны два базовых подхода. Первый исходит из определения Парето-оптимальности для экономики без риска и использует непосредственно те предпочтения, которыми обладают потребители и в соответствии с которыми они осуществляют свой выбор, т. е. предпочтения, основанные на субъективных оценках вероятностей состояний мира, приписываемых потребителями этим состояниям. Второй подход основывается на предпочтениях, которые являются модификациями исходных и которые в соответствии с некими «истинными» значениями вероятностей состояний мира.

Вспомним, что предпочтения потребителей заданы исходно не на наборах контингентных благ $\mathbf{x}_i$, а на случайных потребительских наборах $\tilde{\mathbf{x}}_i$ (см. параграф 6.4). Случайный потребительский набор отличается от соответствующего набора контингентных благ тем, что включает дополнительно информацию о вероятностях состояний мира μ_{is}. Таким образом, случайный потребительский набор $\tilde{\mathbf{x}}_i$ состоит из $\mathbf{x}_i$ и $\boldsymbol{\mu}_i = (\mu_{i1}, \ldots, \mu_{i\hat{s}})$. Для того чтобы четко разграничить два определения Парето-оптимальности, уместно использовать для функции полезности обозначение $U_i = U_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\mu}_i)$.

Определение 7.2

Допустимое состояние экономики с риском $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m)$ будем называть (субъективно) Парето-оптимальным при данных вероятностях $\boldsymbol{\mu}_1, \ldots, \boldsymbol{\mu}_m$, если не существует другого допустимого состояния $\check{\mathbf{x}} = (\check{\mathbf{x}}_1, \ldots, \check{\mathbf{x}}_m)$, такого что $U_i(\hat{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\mu}_i) \leqslant U_i(\check{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\mu}_i)$, причем хотя бы для одного потребителя неравенство строгое. $\triangleleft$

Определение 7.3

Пусть функции полезности потребителей в экономике с риском имеют вид $U_i = U_i(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\mu}_i)$, где $\boldsymbol{\mu}_i$ — субъективные вероятности состояний мира, и пусть $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_{\hat{s}})$ — объективные вероятности состояний мира.

Допустимое состояние экономики с риском $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{\mathbf{x}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{x}}_m)$ будем называть (объективно) Парето-оптимальным, если не существует другого допустимого состояния $\check{\mathbf{x}} = (\check{\mathbf{x}}_1, \ldots, \check{\mathbf{x}}_m)$, такого что $U_i(\hat{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\mu}) \leqslant U_i(\check{\mathbf{x}}_i, \boldsymbol{\mu})$ причем хотя бы для одного потребителя неравенство строгое. $\lhd$

Различие двух определений связано только с корректировкой возможных ошибок в оценке вероятностей состояний мира потребителями. Второе из приведенных определений является в микроэкономике стандартным при оценке ситуаций с неопределенностью[3].

Здесь следует пояснить, что собой представляют «истинные» или «объективные» вероятности. Одно из возможных определений состоит в следующем. Пусть I_i — информация, которой обладает i-й потребитель (сигнал, который он получает). Тогда μ_{is} равны вероятностям состояний мира, условным относительно этого сигнала, т. е. $\mu_{is} = \Pr\{s \mid I_i\}$. Объективные вероятности можно определить как вероятности, условные относительно всей информации, имеющейся в экономике, т. е. $\mu_s = \Pr\{s \mid I_1, \ldots, I_m\}$.

Пусть, к примеру, в случае трех состояний мира и двух потребителей первый потребитель обладает информацией, что первое состояние мира не может реализоваться, а второй потребитель — что второе состояние не может реализоваться. Тогда объективные вероятности равны $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 1$.

При использовании «субъективного» определения оптимальности для экономики с риском выполнены аналоги теорем благосостояния при стандартных предположениях. В то же время очевидно, что при использовании «объективного» определения аналоги теорем благосостояния при тех же предположениях в общем случае не выполнены. Они верны, только если предпочтения потребителей имеют в основе объективные вероятности (когда все потребители обладают одной и той же информацией или, другими словами, симметрично информированы).

[3] Это относится в первую очередь к различным моделям с асимметричной информацией (см. гл. 11). Характерный пример — модель Акерлофа.

Таблица 7.1. *Пример нумерации контингентных благ*

$k \backslash s$	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1	4	7	10
2	2	5	8	11
3	3	6	9	12

Теорема 7.1

{i} Пусть $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре экономики с риском, причем предпочтения потребителей локально ненасыщаемы. Тогда $\bar{\mathbf{x}}$ — (субъективно) Парето-оптимальное состояние.

{ii} Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ — внутреннее (субъективно) Парето-оптимальное состояние экономики с риском и пусть предпочтения потребителей выпуклы, непрерывны и локально ненасыщаемы[4]. Тогда существуют цены $\mathbf{p}$, такие что $(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{x}})$ является равновесием Эрроу—Дебре при некотором распределении собственности $\boldsymbol{\omega}_i$. ⌟

Доказательство: Перенумеруем контингентные блага: $(k, s) \to k'$ (один из возможных способов нумерации контингентных благ иллюстрирует Таблица 7.1). После такой операции получаем классическую модель Вальраса с $l \times \hat{s}$ «обычными» благами, в которой выполнены предположения первой и второй теорем благосостояния. ■

7.4. Экономика с функциями полезности Неймана—Моргенштерна

В данном параграфе мы рассмотрим, какие дополнительные свойства равновесия и Парето-оптимальных состояний определяет специфический вид функции полезности Неймана—Моргенштерна (а именно линейность по вероятностям и постоянство элементарных функций полезности по состояниям мира).

Пример 7.1

Рассмотрим экономику с одним благом (деньгами), двумя потребителями и двумя состояниями мира: R (дождь) и S (солнечная погода).

[4] Заметим, что в случае, когда предпочтения потребителей представимы функцией полезности Неймана—Моргенштерна, ненасыщаемость предпочтений гарантируется строгой монотонностью элементарной функции полезности, непрерывность — непрерывностью элементарной функции полезности, выпуклость — ее вогнутостью.

Потребители обладают начальными запасами контингентных благ $\boldsymbol{\omega}_1 = (1;3)$, $\boldsymbol{\omega}_2 = (3;1)$. То есть первый потребитель, если обмен не происходит, может рассчитывать на 1 при дожде и на 3 при солнце, а второй — наоборот. Пусть оба считают, что вероятности состояний R и S равны $\mu_R = 0{,}25$ и $\mu_S = 0{,}75$ соответственно, и имеют одинаковые элементарные функции полезности $u_i(x) = \ln(x)$. При этом функции полезности потребителей имеют следующий вид:

$$U_i = 0{,}25\ln(x_{iR}) + 0{,}75\ln(x_{iS}),\ i = 1, 2.$$

Описанная экономика представляет собой типичный пример «ящика Эджворта», только интерпретация переменных в ней специфическая. Здесь речь идет не об обмене обычными («физическими») благами, а об *обмене рисками*.

Дифференциальная характеристика Парето-оптимума имеет вид

$$\frac{\partial U_1/\partial x_{1R}}{\partial U_1/\partial x_{1S}} = \frac{0{,}25x_{1S}}{0{,}75x_{1R}} = \frac{\partial U_2/\partial x_{2R}}{\partial U_2/\partial x_{2S}} = \frac{0{,}25x_{2S}}{0{,}75x_{2R}},$$

откуда

$$x_{1S}x_{2R} = x_{1R}x_{2S}.$$

В Парето-оптимуме также должны выполняться балансы:

$$x_{1R} + x_{1S} = 4, \quad x_{2R} + x_{2S} = 4.$$

Отсюда получаем следующее уравнение границы Парето в координатах (x_{1R}, x_{1S}):

$$x_{1S}(4 - x_{1R}) = x_{1R}(4 - x_{1S})$$

или

$$x_{1S} = x_{1R}.$$

Следовательно, граница Парето совпадает с диагональю ящика Эджворта. Для каждого из потребителей это биссектриса положительного ортанта в его системе координат.

Найдем теперь равновесие. Его дифференциальная характеристика имеет вид

$$\frac{\partial U_1/\partial x_{1R}}{\partial U_1/\partial x_{1S}} = \frac{0{,}25x_{1S}}{0{,}75x_{1R}} = \frac{p_R}{p_S}, \quad \frac{\partial U_2/\partial x_{2R}}{\partial U_2/\partial x_{2S}} = \frac{0{,}25x_{2S}}{0{,}75x_{2R}} = \frac{p_R}{p_S}.$$

Равновесие удовлетворяет соотношениям для Парето-оптимальных состояний, т. е., как и предсказывает Теорема 7.1, равновесие лежит

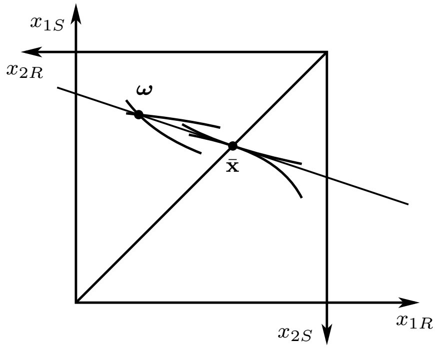


Рис. 7.1. *Иллюстрация к Примеру 7.1*

на границе Парето. Таким образом, в равновесии индивидуальный риск отсутствует: $x_{1S} = x_{1R}$, $x_{2S} = x_{2R}$.

Учитывая это, получим из дифференциальной характеристики равновесия, что отношение цен в двух состояниях мира равно

$$\frac{p_R}{p_S} = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}.$$

Таким образом, можно выбрать $p_R = 1$, $p_S = 3$.

Поскольку предпочтения потребителей ненасыщаемы, бюджетные ограничения в равновесии выходят на равенство. Для первого потребителя

$$p_R x_{1R} + p_S x_{1S} = p_R + p_S \cdot 3,$$

т. е.

$$x_{1R} + 3x_{1S} = 1 + 3 \cdot 3 = 10.$$

Так как $x_{1S} = x_{1R}$, то $\bar{x}_{1S} = \bar{x}_{1R} = 2{,}5$. С учетом балансов, $\bar{x}_{2S} = \bar{x}_{2R} = 1{,}5$. (См. Рис. 7.1.) ▲

В приведенном примере в любом Парето-оптимальном состоянии (а значит, и в равновесии) потребление обоих потребителей не зависит от состояния мира. Другая его примечательная особенность состоит в том, что отношение цен для двух состояний мира совпадает с отношением вероятностей этих состояний. Оказывается, эти свойства равновесия верны и в более общих случаях, когда, как и в данном примере, суммарные запасы не зависят от состояний мира. Покажем это.

Установим сначала свойства Парето-оптимальных состояний в экономике, где отсутствует системный риск.

Определение 7.4

Будем говорить, что в экономике с риском отсутствует системный риск, если для любого блага $k \in K$ и любой пары состояний $s, t \in S$ выполнено

$$\sum_{i \in I} \omega_{iks} = \sum_{i \in I} \omega_{ikt}.$$

◁

Теорема 7.2

Пусть в экономике с риском системный риск отсутствует, предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми положительными оценками вероятностей состояний мира и вогнутыми элементарными функциями полезности, заданными на выпуклых множествах допустимых наборов X_i.

Тогда в любом Парето-оптимальном состоянии данной экономики $\hat{\mathbf{x}}$ потребление каждого потребителя $i \in I$ со строго вогнутой элементарной функцией полезности не зависит от состояния мира (другими словами, отсутствует индивидуальный риск), т. е. для любой пары состояний мира $s, t \in S$ выполнено

$$\hat{\mathbf{x}}_{is} = \hat{\mathbf{x}}_{it}.$$

Обратно, если в экономике имеется лишь одно физическое благо и состояние $\hat{\mathbf{x}}$ экономики таково, что потребление каждого потребителя не зависит от состояния мира и элементарные функции полезности являются возрастающими, то данное состояние является Парето-оптимальным. ┘

Доказательство: ($\Rightarrow$) Пусть в в некотором состоянии экономики $\mathbf{x}$ для потребителя j со строго вогнутой элементарной функцией полезности данное свойство не выполнено, например $\mathbf{x}_{js} \neq \mathbf{x}_{jt}$. Найдем для этого состояния Парето-улучшение и тем самым покажем, что такого не может быть в Парето-оптимуме.

Такое Парето-улучшение получим, усреднив потребление по состояниям мира, т. е. взяв для каждого потребителя в каждом состоянии мира набор, равный ожидаемому потреблению:

$$\mathbf{x}^*_{is} = \sum_{t \in S} \mu_t \mathbf{x}_{it} = \mathsf{E}\, \tilde{\mathbf{x}}_i,$$

где $\tilde{\mathbf{x}}_i$ — случайный потребительский набор, соответствующий $\mathbf{x}_i$.

Проверим, что состояние $\mathbf{x}^*$ является допустимым:

$$\sum_{i\in I}\mathbf{x}^*_{is} = \sum_{i\in I}\sum_{t\in S}\mu_t\mathbf{x}_{it} = \sum_{t\in S}\mu_t\sum_{i\in I}\mathbf{x}_{it} = \sum_{t\in S}\mu_t\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_{it} = \sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_{is}.$$

Здесь в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $\sum_{i\in I}\boldsymbol{\omega}_{it}$ не зависит от состояния мира и сумма вероятностей состояний мира равна единице.

Проверим теперь, что $\mathbf{x}^*$ является Парето-улучшением. Заметим, что для любого потребителя $\mathbf{x}^*_i$ является безрисковым набором, поэтому $U_i(\mathbf{x}^*_i) = u_i(\mathbf{x}^*_{is})$. В силу неравенства Йенсена полезность усредненного потребительского набора не ниже ожидаемой полезности случайного потребительского набора:

$$U_i(\mathbf{x}^*_i) = u_i(\mathbf{x}^*_{is}) = u_i(\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}_i) \geqslant \mathsf{E}\,u_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) = \sum_{s\in S}\mu_s u_i(\mathbf{x}_{is}) = U_i(\mathbf{x}_i).$$

Для потребителя j неравенство здесь строгое: $u_j(\mathsf{E}\,\tilde{\mathbf{x}}_j) > \mathsf{E}\,u_i(\tilde{\mathbf{x}}_j)$.

($\Leftarrow$) Пусть $\hat{\mathbf{x}}$ — состояние экономики в котором отсутствует индивидуальный риск. Покажем, что оно неулучшаемо по Парето.

Заметим, что, во-первых, Парето-улучшение Парето-улучшения тоже является Парето-улучшением, а во-вторых, усреднение потребительских планов данного потребителя (по состояниям мира) не ухудшает его положения в ситуации, когда его элементарная функция полезности вогнута (доказывается так же, как в предыдущем пункте). Таким образом, Парето-улучшение достаточно искать среди состояний, в которых отсутствует индивидуальный риск. Если $\check{\mathbf{x}}$ — одно из таких состояний, не совпадающее с $\hat{\mathbf{x}}$, то (как следует из материальных балансов) найдется потребитель i, для которого $\check{\mathbf{x}}_i < \hat{\mathbf{x}}_i$, и, следовательно, в силу возрастания элементарной функции полезности $U_i(\check{\mathbf{x}}_i) < U_i(\hat{\mathbf{x}}_i)$. Значит, такое состояние не может являться Парето-улучшением для $\hat{\mathbf{x}}$. ■

Понять смысл доказанной теоремы помогает Рис. 7.1. На нем в точке начальных запасов потребители сталкиваются с риском (эта точка не лежит на диагонали). Если через эту точку провести прямую, наклон которой соответствует отношению вероятностей, то точка пересечения этой прямой с диагональю даст «усредненный» потребительский набор (точку $\bar{\mathbf{x}}$). Этот набор будет Парето-улучшением для первоначального. На графике он лежит между кривыми безразличия, проходящими через точку начальных запасов.

Установим теперь свойства *равновесия* (равновесных цен) в экономиках, где отсутствует системный риск.

Теорема 7.3

Пусть в экономике с риском системный риск отсутствует и предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми положительными оценками вероятностей состояний мира и вогнутыми элементарными функциями полезности.

{i} В равновесии Эрроу—Дебре $(\mathbf{p}, \bar{\mathbf{x}})$ потребление каждого потребителя $i \in I$ со строго вогнутой элементарной функцией полезности не зависит от состояния мира, т. е. для любой пары состояний мира $s, t \in S$ выполнено

$$\bar{x}_{is} = \bar{x}_{it}.$$

{ii} Если хотя бы у одного потребителя i элементарная функция полезности u_i является дифференцируемой, возрастающей и строго вогнутой, причем в равновесии потребительский набор этого потребителя является внутренним, то отношение цен на одно и то же «физическое» благо $k \in K$ в любых двух состояниях мира $s, t \in S$ равно отношению вероятностей этих состояний[5]:

$$\frac{p_{ks}}{p_{kt}} = \frac{\mu_s}{\mu_t}. \qquad \lrcorner$$

Доказательство: {i} Отсутствие индивидуального риска ($\bar{\mathbf{x}}_{is} = \bar{\mathbf{x}}_{it}$ для всех $s, t \in S$) следует из первой теоремы благосостояния и Теоремы 7.2. Локальная ненасыщаемость предпочтений, которая требуется для справедливости первой теоремы благосостояния, следует из возрастания элементарных функций полезности.

{ii} Из того, что дифференцируемая функция является возрастающей и вогнутой следует, что ее градиент положителен[6]. Для

[5] Когда потребительский набор потребителя не является внутренним, это условие выполнено для тех благ, которые потребляются данным потребителем в положительном количестве (в случае, если множество допустимых потребительских наборов состоит из неотрицательных векторов).

[6] Если $f(\cdot)$ является такой функцией, то для нее выполнено

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \nabla f(\mathbf{x})\mathbf{e}^i \geqslant f(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{e}^i) - f(\mathbf{x}) > 0,$$

где $\mathbf{e}^i$ — i-й орт.

потребителя i, набор которого является внутренним, выполнена дифференциальная характеристика

$$\frac{\mu_s u'_{ik}(\bar{\mathbf{x}}_{is})}{\mu_t u'_{ik}(\bar{\mathbf{x}}_{it})} = \frac{p_{ks}}{p_{kt}} \ \forall k \in K, \ \forall s, t \in S.$$

Как только что доказано, в равновесии $\bar{\mathbf{x}}_{is} = \bar{\mathbf{x}}_{it}$, откуда и следует требуемое соотношение. ■

В экономике с системным риском, то Парето-оптимальные состояния и равновесия указанными свойствами не обладают. Тем не менее в рассматриваемых в данном параграфе ситуациях — моделях обмена, где предпочтения потребителей допускают представление функциями полезности Неймана—Моргенштерна, равновесия характеризуются некоторыми общими свойствами. В частности, когда в экономике только одно (физическое) благо, два состояния мира и два потребителя, то граница Парето проходит в промежутке между двумя биссектрисами соответствующего ящика Эджворта (который в этом случае не будет квадратом), т. е. потребление каждого потребителя в относительно «скудном» состоянии мира должно быть относительно низким. Тот же факт верен и для равновесия, которое по первой теореме благосостояния должно лежать на границе Парето. Кроме того, цена блага в более «скудном» состоянии мира относительно выше. Действительно, в равновесии выполняется

$$\frac{\mu_R u'_i(\bar{x}_{iR})}{\mu_S u'_i(\bar{x}_{iS})} = \frac{p_R}{p_S}, \ i = 1, 2.$$

Если приравнять друг к другу предельные нормы замещения для двух потребителей, то вероятности сократятся, откуда, учитывая балансы, получим

$$\frac{u'_1(\bar{x}_{1R})}{u'_1(\bar{x}_{1S})} = \frac{u'_2(\omega_{\Sigma R} - \bar{x}_{1R})}{u'_2(\omega_{\Sigma S} - \bar{x}_{1S})}.$$

Пусть $\omega_{\Sigma R} < \omega_{\Sigma S}$. Докажем, что $\bar{x}_{1R} < \bar{x}_{1S}$. Если бы было выполнено $\bar{x}_{1R} \geqslant \bar{x}_{1S}$, то $u'_1(\bar{x}_{1R}) \leqslant u'_1(\bar{x}_{1S})$, поскольку предельная полезность для рискофоба — убывающая функция. Отсюда следует, что

$$u'_2(\omega_{\Sigma R} - \bar{x}_{1R}) \leqslant u'_2(\omega_{\Sigma S} - \bar{x}_{1S})$$

и что $\omega_{\Sigma R} - \bar{x}_{1R} \geqslant \omega_{\Sigma S} - \bar{x}_{1S}$. Получили противоречие. Таким образом, $\bar{x}_{1R} < \bar{x}_{1S}$. Аналогично доказывается, что $\bar{x}_{2R} < \bar{x}_{2S}$.

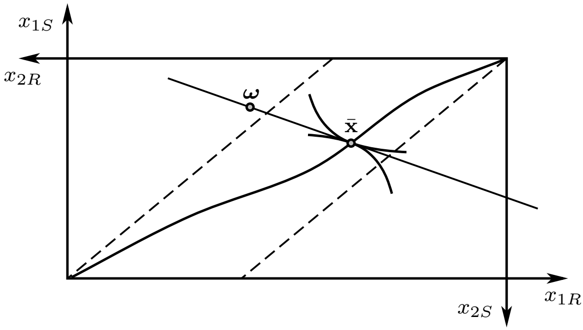


Рис. 7.2. *Парето-граница и равновесие в условиях системного риска*

Доказанное верно и для границы Парето, поскольку дифференциальные характеристики равновесий и Парето-оптимальных состояний совпадают.

Кроме того, из $\bar{x}_{iR} < \bar{x}_{iS}$ и дифференциальной характеристики решения задачи потребителя следует, что

$$\frac{\mu_R}{\mu_S} < \frac{\mu_R u_i'(\bar{x}_{iR})}{\mu_S u_i'(\bar{x}_{iS})} = \frac{p_R}{p_S}.$$

Данный случай иллюстрируется на Рис. 7.2.

Охарактеризуем теперь свойства равновесия в случае, когда один из потребителей нейтрален к риску: нейтральный к риску потребитель берет на себя весь риск, если он это может сделать.

Проиллюстрируем это свойство сначала на примере.

Пример 7.2

Пусть функции полезности потребителей имеют следующий вид:

$$U_1(\mathbf{x}_1) = \mu_R x_{1R} + \mu_S x_{1S},$$
$$U_2(\mathbf{x}_2) = \mu_R \ln(x_{2R}) + \mu_S \ln(x_{2S}).$$

Первый из потребителей здесь нейтрален к риску, а второй — рискофоб.

Дифференциальная характеристика границы Парето имеет следующий вид:

$$\frac{\mu_R}{\mu_S} = \frac{\mu_R x_{2S}}{\mu_S x_{2R}},$$

откуда $x_{2S} = x_{2R}$. Это соотношение выполнено только на внутренней части границы Парето. Оно означает, что соответствующая часть

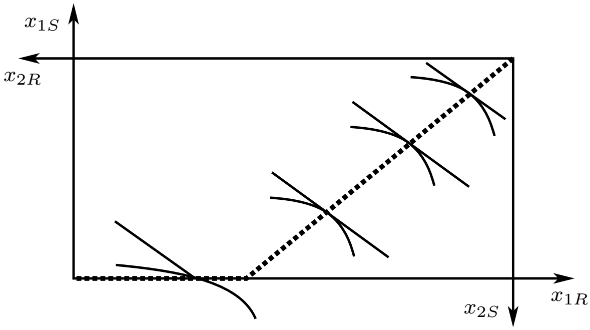


Рис. 7.3. *Парето-граница в случае, когда первый потребитель нейтрален к риску, иллюстрация к Примеру 7.2*

границы является биссектрисой положительного ортанта системы координат второго потребителя. Это же свойство должно выполняться и для любого внутреннего равновесия. Содержательно это означает, что нейтральный к риску первый потребитель полностью застрахует второго потребителя-рискофоба. Заметим, что второй потребитель сталкивается с риском только в тех ситуациях, когда у первого отсутствует первое благо для осуществления обмена этого блага на второе, т. е. в ситуациях, когда потребительский набор первого потребителя содержит не все блага.

В предположении о допустимости неотрицательных (для второго потребителя — положительных) количеств благ граница Парето изгибается в месте пересечения с одной из осей координат первого потребителя (Рис. 7.3). ▲

Нетрудно видеть, что указанное свойство Парето-оптимальных состояний и равновесий выполняется и в более общих ситуациях. Так, справедлива следующая теорема

Теорема 7.4

Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми положительными оценками вероятностей состояний мира. Предположим, что по крайней мере один из потребителей (j) нейтрален к риску. Тогда имеют место следующие утверждения.

{i} Если $\hat{\mathbf{x}}$ — Парето-оптимальное состояние и $\hat{\mathbf{x}}_j \in \operatorname{int} X_j$ (потребительский набор нейтрального к риску потребителя является внутреннним), то потребление каждого потребителя-рискофоба i не зависит от состояния мира.

{ii} Если $\bar{\mathbf{x}}$ является равновесным распределением, $\bar{\mathbf{x}}_j \in \operatorname{int} X_j$, то потребление каждого потребителя-рискофоба i не зависит от состояния мира.

{iii} Если $\bar{\mathbf{x}}$ является равновесным распределением, $\bar{\mathbf{x}}_j \in \operatorname{int} X_j$, и существует потребитель-рискофоб i с дифференцируемой и возрастающей элементарной функцией полезности, причем его потребительский набор является внутренним, то отношение цен на одно и то же «физическое» благо $k \in K$ в любых двух состояниях мира $s, t \in S$ равно отношению вероятностей этих состояний. ⌟

Доказательство: {i} Пусть в состоянии $\hat{\mathbf{x}}$ потребитель-рискофоб i сталкивается с индивидуальным риском. Пусть $\mathbf{x}_i^*$ — усредненный потребительский набор, полученный на основе $\hat{\mathbf{x}}_i$, т. е. такой набор, что

$$\mathbf{x}_{is}^* = \sum_{t \in S} \mu_t \hat{\mathbf{x}}_{it}.$$

Рассмотрим потребительские наборы следующего вида ($\alpha \in (0; 1]$):

$$\mathbf{x}_i^\alpha = (1 - \alpha)\mathbf{x}_i^* + \alpha \hat{\mathbf{x}}_i, \quad \mathbf{x}_j^\alpha = \hat{\mathbf{x}}_j - \alpha(\hat{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i^*).$$

Поскольку $\hat{\mathbf{x}}_j$ — внутренний потребительский набор, то существует достаточно малое число α, такое что набор $\mathbf{x}_j^\alpha$ является допустимым для потребителя j. При таком α мы получим допустимое состояние экономики следующего вида: $\mathbf{x}_i^\alpha$ — набор потребителя i, $\mathbf{x}_j^\alpha$ — набор потребителя j, а потребление остальных потребителей остается без изменений.

Это состояние будет Парето-улучшением. Действительно, такое изменение затрагивает только потребителей i и j, не изменяет благосостояние нейтрального к риску потребителя j (поскольку математическое ожидание случайного потребительского набора нейтрального к риску потребителя j не меняется) и улучшает благосостояние потребителя-рискофоба i (поскольку он получает менее рискованный случайный потребительский набор).

Доказательство пунктов {ii} и {iii} оставляется читателю в качестве упражнения (см. задачу 7.3). ■

До сих пор мы рассматривали ситуации, когда потребители одинаково оценивали вероятности состояний мира. Но гипотезы μ_{is} разных участников обмена о вероятностях состояний мира $s \in S$ не обязательно должны совпадать. И это не мешает торговле, а иногда и создает условия для нее. Пример этого получим, изменив параметры экономики, рассмотренной в Примере 7.1.

Пример 7.3 (пари)

Пусть функции полезности потребителей имеют следующий вид:

$$U_1(\mathbf{x}_1) = 0{,}25\ln(x_{1R}) + 0{,}75\ln(x_{1S}),$$
$$U_2(\mathbf{x}_2) = 0{,}75\ln(x_{2R}) + 0{,}25\ln(x_{2S}).$$

Первый потребитель считает второе событие в три раза вероятнее первого, второй — наоборот. Начальные запасы одинаковы у обоих: $\boldsymbol{\omega}_i = (2l2)$. Равновесие в этой модели единственно, равновесные цены, соответствующие разным состояниям природы, совпадают между собой: $p_R = p_S$. Равновесные распределения: $\bar{x}_{1R} = \bar{x}_{2S} = 1$; $\bar{x}_{1S} = \bar{x}_{2R} = 3$. Данный пример можно интерпретировать в том смысле, что потребители, имея разные представления о вероятностях состояний мира, заключают между собой пари. Несмотря на то, что отсутствует риск с точки зрения начальных запасов, обмен будет происходить (равновесие не совпадает с точкой начальных запасов), в результате чего в равновесии потребители сталкиваются с индивидуальным риском.

Отношение цен блага в двух состояниях мира будет лежать в промежутке между отношениями вероятностей:

$$\frac{0{,}25}{0{,}75} < \frac{1}{1} < \frac{0{,}75}{0{,}25},$$

т. е.

$$\frac{\mu_{1R}}{\mu_{1S}} < \frac{p_R}{p_S} < \frac{\mu_{2R}}{\mu_{2S}}.$$

Уравнение субъективной границы Парето здесь будет иметь вид

$$x_{1S} = \frac{9x_{1R}}{1 + 2x_{1R}}.$$

Таким образом, субъективная Парето-граница (ее внутренняя часть) проходит выше диагонали-биссектрисы (см. Рис. 7.4).

В этой модели условием (субъективно) взаимовыгодной торговой сделки является различие в оценках вероятностей реализации различных состояний мира. Так как в рассматриваемой экономике нет системного риска, то вне зависимости от истинных вероятностей состояний мира множество (объективно) Парето-оптимальных состояний совпадает с диагональю ящика Эджворта, что соответствует

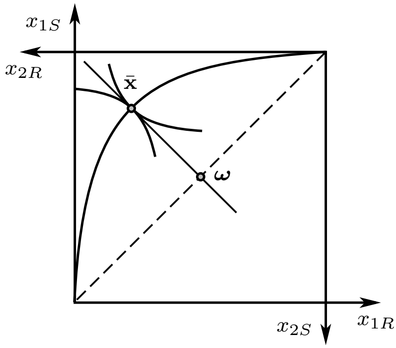


Рис. 7.4. *Иллюстрация к Примеру 7.3*

отсутствию индивидуального риска. Начальные запасы лежат на диагонали, значит, первоначальное состояние (объективно) Парето-оптимально, а рассмотренный обмен ведет к ухудшению реального благосостояния по крайней мере одного потребителя. Таким образом, на этом примере очевидно различие между «субъективным» и «объективным» определениями границы Парето. ▲

Задачи

7.1 Докажите следующее обобщение пункта {i} Теоремы 7.2: «Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей характеризуются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с одинаковыми положительными оценками вероятностей состояний мира и вогнутыми элементарными функциями полезности, заданными на выпуклых множествах допустимых наборов X_i. Тогда в любом Парето-оптимальном состоянии данной экономики $\hat{\mathbf{x}}$ потребление каждого потребителя $i \in I$ со строго вогнутой элементарной функцией полезности одинаково в любой паре состояний мира $s, t \in S$, где совокупные начальные запасы одинаковы».

7.2 Обобщите обратное утверждение Теоремы 7.2 на случай экономики с несколькими физическими благами. Укажите дополнительные условия, которые гарантируют его справедливость. (*Указание:* Таким условием является Парето-оптимальность в каждом состоянии мира, т. е. отсутствие в данном состоянии мира обменов, которые приводят к Парето-улучшениям.)

7.3 Докажите пункты {ii} и {iii} Теоремы 7.4.

7.4 В экономике распределения[7] с риском имеется два потребителя с функциями полезности Неймана—Моргенштерна, один товар и два состояния мира — A и B, случающиеся с равными вероятностями. Элементарные функции полезности равны $u_1 = -\exp(-x_1)$ и $u_2 = -\exp(-2x_2)$ соответственно. Общие начальные запасы в экономике равны $(4; 7)$. Найти Парето-оптимум и равновесие, если доходы обоих равны 10.

7.5 В экономике имеется два потребителя, одно физическое благо и N состояний мира. Элементарные функции полезности потребителей одинаковы и имеют вид $u_i(x) = \sqrt{x}$, $i = 1, 2$. Начальные запасы первого потребителя равны $\omega_{1s} = s$, а второго — $\omega_{2s} = N + 1 - s$. Вероятности состояний мира

(A) одинаковы, т. е. $\mu_s = 1/N$;

(B) пропорциональны номеру состояний, т. е. $\mu_s = \lambda s$, где

$$\lambda = \frac{2}{N(N+1)}.$$

Найдите равновесие Эрроу—Дебре случаях (A) и (B). Напомним, что

$$\sum_{s=1}^{N} s = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \sum_{s=1}^{N} s^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

7.6 В ситуации предыдущей задачи элементарные функции полезности потребителей имеют вид $u_1(x) = x$, $u_2(x) = \sqrt{x}$. Начальные запасы первого потребителя равны $\omega_{1s} = N$, а второго — $\omega_{2s} = s$. Найдите равновесие Эрроу—Дебре в тех же случаях (A) и (B).

7.7 Рассмотрите экономику с риском, в которой одно физическое благо, два состояния мира и два потребителя, полезности которой представлены функциями Неймана—Моргенштерна. Первый потребитель имеет элементарную функцию полезности вида $u_1(x) = Ax^B$ $(x \geqslant 0)$, начальные запасы $(C, 4 - C)$ и считает вероятность первого состояния мира равной λ. Второй потребитель имеет элементарную функцию полезности $u_2(x)$ $(x \geqslant 0)$ с положительной убывающей производной, начальные запасы $(D, 6 - D)$ и считает вероятность первого состояния мира равной μ.

(A) При каких параметрах A, B, C, D, λ, μ можно с уверенностью утверждать, что в этой экономике не может существовать внутреннее равновесие Эрроу—Дебре?

(B) При каких параметрах A, B, C, D, λ, μ можно с уверенностью

[7] См. Определение 4.5 на с. 270.

утверждать, что во внутреннем равновесии Эрроу—Дебре (если такое существует) хотя бы один потребитель будет полностью застрахован от риска?

(Попытайтесь перечислить все случаи, которые подпадают под известную вам теорию. Обоснуйте свои утверждения.)

7.5. Равновесие Раднера экономики с риском

То, что для равновесия Эрроу—Дебре в экономике с риском верны аналоги теорем благосостояния, противоречит интуиции. Известно, что неполнота информации все же представляет проблемы для рынков в реальной жизни. Что-то в сформулированной модели должно быть не так. Одним из объяснений может служить различие в субъективных оценках вероятности (неравномерность распределения информации между экономическими субъектами). Однако это объяснение недостаточно.

Очевидно, что модель нереалистична. Нереалистична она не потому, что в ней фигурируют понятия «сегодня», «завтра» и «контингентные блага». Ту же самую модель можно интерпретировать достаточно широко, в зависимости от конкретной ситуации. Основное нереалистичное предположение данной модели — это *наличие полной системы рынков*. Оно заранее заложено в формулировке модели в виде *единого бюджетного ограничения*. Содержательно полнота рынков означает, что каждый потребитель может обменять любой товар при любом состоянии мира на любой другой товар в любом другом состоянии мира, неважно, непосредственно или с помощью цепочки обменов. Рынок с риском может стать несовершенным, если невозможно обменять ни одно благо в каком-либо состоянии s_1 ни на одно благо в другом состоянии s_2. Такое может быть, если по каким-либо причинам не заключаются соответствующие контракты, *условные по состояниям мира*. При этом бюджеты потребителей уже не будут едиными. Потребители тогда имеют отдельные бюджеты в зависимости от состояния мира.

К. Эрроу предложил моделировать возможности обмена в явном виде, введя в модель экономики с риском активы[8]. Пусть

[8] См. K. J. Arrow • Le rôle des valeurs boursiérespour la répartition la meilleure des risques, in *Econométrie Colloques Internationaux*, Paris: CNRS, 1953: 41–48 (англ. пер. K. J. Arrow • The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing, *Review of Economic Studies* **31** (1964): 91–96), а также R. Radner • Competitive Equilibrium under Uncertainty, *Econometrica* **36** (1968): 31–58.

$C = \{1, \ldots, \hat{c}\}$ — активы, имеющие хождение в рассматриваемой экономике (в равной степени доступные всем потребителям). Каждый актив $c \in C$ характеризуется матрицей доходностей[9] $\mathbf{a}_c = (a_{ksc})_{k,s}$, где a_{ksc} — количество k-го блага, которое дает этот актив в случае, если во втором периоде реализуется состояние мира s. Будем предполагать, что доходность актива не зависит от того, кто им владеет, т. е. коэффициенты a_{ksc} одинаковы для всех потребителей. Цену этого актива обозначим q_c, а его количество, приобретаемое i-м потребителем, z_{ic}. Ограничений на знак величин z_{ic} не накладывается. Случай $z_{ic} < 0$ можно интерпретировать в том смысле, что потребитель эмитирует соответствующий актив в количестве $|z_{ic}|$ (либо берет соответствующий кредит). В предположении, что

- потребитель принимает цены как данные,
- в первом периоде происходит только обмен активами (обмен физическими благами и потребление происходят во втором периоде),
- начальные запасы активов любого типа у любого потребителя равны нулю[10],

бюджетное ограничение первого периода имеет вид

$$\sum_{c \in C} q_c z_{ic} \leqslant 0.$$

Во втором периоде, после осуществления некоторого состояния мира $s \in S$, происходит обмен благами на так называемых **рынках «спот»**[11] с учетом обязательств по активам, приобретенным в первом периоде. Соответствующее бюджетное ограничение второго периода для состояния мира $s \in S$ имеет вид

$$\sum_{k \in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k \in K} p_{ks} \omega_{iks} + \sum_{c \in C} \sum_{k \in K} p_{ks} a_{ksc} z_{ic},$$

[9] Это доходности в натуральном выражении (в физических количествах благ). Соответствующие денежные доходности рассчитываются по формуле

$$r_{sc} = \frac{\sum_{k \in K} p_{ks} a_{ksc}}{q_c} = \frac{\mathbf{p}_s \mathbf{a}_{sc}}{q_c}.$$

При интерпретации доходностей r_{sc} следует учитывать, что в модели Раднера денежные единицы первого периода несопоставимы с денежными единицами второго периода. Более того, они несопоставимы между разными состояниями мира s второго периода.

[10] Это предположение не влияет на анализ модели, но несколько упрощает описание модели и соответствующие выкладки.

[11] От англ. *spot market* — «рынок наличного товара».

где p_{ks} — цена спот блага k в состоянии мира s. Это бюджетное ограничение можно записать также в следующем виде:

$$\sum_{k \in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k \in K} p_{ks} \breve{\omega}_{iks},$$

где $\breve{\omega}_{iks}$ — новые начальные запасы, учитывающие изменения, связанные с выполнением обязательств первого периода. Эти модифицированные начальные запасы рассчитываются по формуле

$$\breve{\omega}_{iks} = \omega_{iks} + \sum_{c \in C} a_{ksc} z_{ic}.$$

Будем предполагать, что активы служат только для передачи покупательной способности между различными состояниями мира (мы обсудим ниже эту их функцию) и не влияют на уровень благосостояния потребителя, поэтому, как и ранее, будем считать, что предпочтения описываются функцией полезности, зависящей лишь от объемов потребления в различных состояниях мира $U_i(\mathbf{x}_i)$ (и от вероятностей состояний мира, хотя мы не будем указывать это в явном виде).

Если бы потребитель в первом периоде, планируя свой портфель активов, знал, в дополнение к ценам активов $\mathbf{q}$, цены благ $\mathbf{p}_s$ в различных состояниях мира $s \in S$ (цены спот), то, в соответствии с предположением о его предпочтениях, он выбрал бы портфель активов и планы потребления в различных состояниях мира, которые были бы решением следующей задачи:

$$\begin{gathered} U_i(\mathbf{x}_i) \to \max_{\mathbf{x}_i \in X_i, \mathbf{z}_i}, \\ \sum_{c \in C} q_c z_{ic} \leqslant 0, \\ \sum_{k \in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k \in K} p_{ks} \omega_{iks} + \sum_{c \in C} \sum_{k \in K} p_{ks} a_{ksc} z_{ic} \ \forall s \in S. \end{gathered} \qquad (\mathcal{C}_R)$$

Однако в первом периоде цены $\mathbf{p}$ второго периода ему неизвестны. Поэтому, чтобы выбрать портфель активов в первом периоде, потребитель должен сформировать некоторые ожидания $\mathbf{p}_i^e$ по поводу цен второго периода во всех состояниях мира, поскольку ценность его портфеля зависит от будущей конъюнктуры. В модели Раднера предполагается, что эти ожидания оправдываются, т. е. во втором периоде на рынках благ обмен фактически происходит по ценам, которые ожидались в первом периоде при формировании портфеля.

Сказанное мотивирует следующее определение равновесия.

Определение 7.5

Назовем $\langle \bar{\mathbf{p}}, (\bar{\mathbf{p}}_i^e)_{i \in I}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}} \rangle$ равновесием Раднера экономики с риском, если

* $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{z}}_i)$ — решение задачи потребителя $(\mathcal{C}_R)$ при ценах $\bar{\mathbf{p}}_i^e$ и $\bar{\mathbf{q}}$;
* выполнены балансы по всем активам $c \in C$, т. е.

$$\sum_{i \in I} \bar{z}_{ic} = 0;$$

* ожидания потребителей $i \in I$ оправдываются: $\bar{\mathbf{p}}_i^e = \bar{\mathbf{p}}$;
* $\bar{\mathbf{x}}$ — допустимое состояние экономики, т. е. для всех состояний мира $s \in S$ выполнено

$$\sum_{i \in I} \bar{\mathbf{x}}_{is} = \sum_{i \in I} \boldsymbol{\omega}_{is}.$$

◁

Поскольку в равновесии ожидания оправдываются, определение можно упростить, если считать равновесием Раднера набор $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ и заменить ожидаемые цены на фактические. В дальнейшем мы всегда будем пользоваться этим сокращенным обозначением.

Таким образом, в модели Раднера мы отказываемся от одного очень сильного предположения модели Эрроу—Дебре — полноты рынков контингентных благ, чтобы заменить его другим (очень ограничительным) предположением — что потребители способны предвидеть будущие равновесные цены в любом возможном состоянии мира.

Как будет показано в дальнейшем, если это предположение дополнить предположением, что множество доступных потребителям активов достаточно «богатое» (условие полноты рынков), то любое равновесие в этой модели будет Парето-оптимальным и любое Парето-оптимальное состояние можно реализовать как такое равновесие. В то же время подход Раднера позволяет моделировать и приводящие к фиаско рынка ситуации, возникающие, когда множество доступных потребителям активов является довольно «бедным» и, следовательно, Парето-оптимум может быть недостижим.

Для анализа равновесия Раднера можно воспользоваться понятием арбитража. Под арбитражем здесь понимаются изменения в портфеле активов с целью увеличить его доходность (по крайней мере, в одном состоянии мира). Всюду в этой главе мы будем использовать термин «арбитраж» в этом несколько специфическом смысле, принятом в микроэкономике.

Под **планом арбитража** (его также называют **арбитражным портфелем**) будем понимать вектор $\Delta\mathbf{z} = (\Delta z_c)_{c\in C}$, характеризующий изменения в портфеле активов типичного потребителя $(\mathbf{z}_i)$. При таком изменении левая часть бюджета первого периода (чистые расходы на покупку активов) у рассматриваемого потребителя изменится на величину $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z}$. Очевидно, что если $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0$ при данном векторе цен активов $\mathbf{q}$, то такой план арбитража не выводит за границы бюджетного множества первого периода. Изменение дохода рассматриваемого потребителя в s-м состоянии мира, вызываемое данным планом арбитража $\Delta\mathbf{z}$, равно

$$\sum_{c\in C}\sum_{k\in K} p_{ks}a_{ksc}\Delta z_c = \mathbf{p}_s\mathbf{A}_s\Delta\mathbf{z},$$

где $\mathbf{A}_s$ — матрица доходностей активов в состоянии мира s. Такой арбитраж имеет целью получить во втором периоде, по крайней мере в одном состоянии мира, прирост дохода потребителя (притом что в остальных состояниях мира доход не уменьшится).

Определение 7.6

Будем говорить, что в модели Раднера при ценах активов $\mathbf{q}$, ценах благ $\mathbf{p}$ и доходностях активов (a_{ksc}) **арбитраж невозможен** (или, другими словами, цены $\mathbf{p}$ являются **безарбитражными**), если не существует такого плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$, что $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0$, и для любого состояния мира $s \in S$ выполнено

$$\sum_{c\in C}\sum_{k\in K} p_{ks}a_{ksc}\Delta z_c \geqslant 0,$$

причем хотя бы для одного состояния мира соответствующее неравенство строгое[12]. ◁

Если цены в модели Раднера не являются безарбитражными, то такая ситуация не может быть равновесием. Сформулируем соответствующую теорему.

[12] Заметьте связь со стохастическим доминированием по состояниям мира, введенным в параграфе 6.8 на с. 431.

Теорема 7.5

Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира и пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с некоторой системой активов. Тогда при ценах $\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}$ и данной системе активов арбитраж невозможен. ⌟

Доказательство: Действительно, арбитраж означает, что возможно получить прирост дохода в одном из состояний мира, что противоречит локальной ненасыщаемости (потребителю доступен строго лучший набор). ■

Очевидно, что аналогом контингентных благ из модели Эрроу—Дебре в модели Раднера является актив Эрроу, который дает право получить единицу k-го блага, если реализуется состояние мира s. Формально актив c является **активом Эрроу** для (k_0, s_0), если $a_{ksc} = 1$ при $k = k_0$, $s = s_0$ и $a_{ksc} = 0$ при остальных k и s. Для таких активов удобно использовать обозначение (k, s).

Прежде чем обратиться к более общему случаю, рассмотрим подробнее частный случай, когда все активы в экономике являются активами Эрроу. Перепишем ключевые соотношения с учетом структуры активов. В задаче потребителя бюджетное ограничение первого периода примет вид

$$\sum_{(k,s)\in C} q_{ks} z_{iks} \leqslant 0.$$

Для каждого из активов Эрроу $(k, s) \in C$ выполнен баланс активов:

$$\sum_{i\in I} z_{iks} = 0.$$

Бюджетное ограничение второго периода будет иметь вид

$$\sum_{k\in K} p_{ks} x_{iks} \leqslant \sum_{k\in K} p_{ks}\omega_{iks} + \sum_{(k,s)\in C} p_{ks} z_{iks}.$$

Заметим, что модель Эрроу—Дебре можно рассматривать как частный случай модели Раднера. Если в экономике есть все возможные активы Эрроу, т. е.

$$C = \left\{ (k, s) \mid k \in K,\ s \in S \right\},$$

то модель Раднера — это фактически другая формулировка модели Эрроу—Дебре.

Таблица 7.2. *Пример множества C в экономике с активами Эрроу, $l = 2, \hat{s} = 3$.*

$k \backslash s$	*1*	*2*	*3*
1	$\otimes$		$\otimes$
2		$\otimes$	$\otimes$

Действительно, из равновесия Эрроу—Дебре $(\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{x}})$ легко сконструировать равновесие Раднера $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$. Для этого достаточно взять

$$\bar{p}_{ks} = \check{p}_{ks},\ \bar{q}_{ks} = \check{p}_{ks},\ \bar{x}_{iks} = \check{x}_{iks},\ \bar{z}_{iks} = \check{x}_{iks} - \omega_{iks}.$$

Тогда обмены в первом периоде при заключении контрактов исчерпывают все возможные выгоды обмена и во втором периоде обменов не будет, поскольку $\breve{\omega}_{iks} = \omega_{iks} - \bar{z}_{iks} = \check{x}_{iks}$. Проверка этого факта предлагается в качестве упражнения.

Для доказательства обратного утверждения — что если в экономике есть все возможные активы Эрроу, то на основе равновесия Раднера можно сконструировать равновесие Эрроу—Дебре — требуется воспользоваться свойствами равновесия Раднера. Если в экономике есть все возможные активы Эрроу, то в равновесии цены активов Эрроу пропорциональны ценам спот. Действительно, предположим, что в равновесии Раднера все цены положительны, и пусть k_1, k_2 — два блага, а s — состояние мира, такие что в равновесии цены активов Эрроу и цены благ не пропорциональны, например:

$$\bar{p}_{k_1 s}/\bar{q}_{k_1 s} > \bar{p}_{k_2 s}/\bar{q}_{k_2 s}.$$

Здесь k_1 — относительно более дорогое благо, что позволяет осуществить арбитраж и получить дополнительный доход в состоянии мира s, включив в портфель несколько большее количество актива (k_1, s) и несколько меньшее — актива (k_2, s), т. е. $\Delta z_{k_1 s} > 0$ и $\Delta z_{k_2 s} < 0$, и не нарушить при этом бюджетное ограничение первого периода. Действительно, если $q_{k_1 s}\Delta z_{k_1 s} + q_{k_2 s}\Delta z_{k_2 s} = 0$, то

$$p_{k_1 s}\Delta z_{k_1 s} + p_{k_2 s}\Delta z_{k_2 s} > \frac{p_{k_2 s}}{q_{k_2 s}}(q_{k_1 s}\Delta z_{k_1 s} + q_{k_2 s}\Delta z_{k_2 s}) = 0.$$

Таким образом, чтобы арбитраж был невозможен, равновесные цены должны быть такими, чтобы для любого s векторы $\bar{\mathbf{p}}_s$ и $\bar{\mathbf{q}}_s$ были пропорциональны друг другу, где $\bar{\mathbf{p}}_s$ и $\bar{\mathbf{q}}_s$ — части векторов $\bar{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{q}}$, соответствующие состоянию мира s.

Докажем это свойство в общем виде, не предполагая положительность цен в равновесии Раднера, но при этом используя в доказательстве менее интуитивно очевидный план арбитража, чем только что предложенный.

Теорема 7.6

Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира и пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C = \{ (k, s) \mid k \in K,\ s \in S \}$. Тогда для любого состояния мира $s \in S$ можно найти коэффициент пропорциональности $\lambda_s > 0$, такой что $\bar{\mathbf{p}}_s = \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s$. ⌟

Доказательство: Рассмотрим одно из состояний мира $s \in S$. Из локальной ненасыщаемости предпочтений следует, что $\bar{\mathbf{p}}_s \neq 0$ и $\bar{\mathbf{q}}_s \neq 0$, откуда $|\bar{\mathbf{q}}_s|^2 \neq 0$. Рассмотрим следующий план арбитража:

$$\Delta \mathbf{z}_t = 0, t \neq s \quad \text{и} \quad \Delta \mathbf{z}_s = \bar{\mathbf{p}}_s - \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s,$$

где

$$\lambda_s = \frac{\bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{q}}_s}{|\bar{\mathbf{q}}_s|^2}.$$

Для этого плана выполнено $\bar{\mathbf{q}} \Delta \mathbf{z} = \bar{\mathbf{q}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0$. Поскольку в равновесии Раднера арбитраж невозможен, отсюда следует, что $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0$. Действительно, при $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s > 0$ этот план арбитража позволяет потребителям получить прирост дохода в состоянии мира s. Случай $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s < 0$ сводится к случаю $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s > 0$ изменением знака $\Delta \mathbf{z}_s$ на противоположный.

Но если $\bar{\mathbf{q}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0$ и $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0$, то

$$|\bar{\mathbf{p}}_s - \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s|^2 = (\bar{\mathbf{p}}_s - \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s) \Delta \mathbf{z}_s = \bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s - \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s \Delta \mathbf{z}_s = 0,$$

т. е. $\bar{\mathbf{p}}_s = \lambda_s \bar{\mathbf{q}}_s$.

Докажем, что $\lambda_s > 0$. Если это не так и $\lambda_s \leqslant 0$, то $\bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{q}}_s \leqslant 0$ и план арбитража

$$\Delta \mathbf{z}_t = 0 \text{ при } t \neq s \quad \text{и} \quad \Delta \mathbf{z}_s = \bar{\mathbf{p}}_s$$

удовлетворяет условиям $\bar{\mathbf{q}} \Delta \mathbf{z} = \bar{\mathbf{q}}_s \Delta \mathbf{z}_s \leqslant 0$ и $\bar{\mathbf{p}}_s \Delta \mathbf{z}_s = |\bar{\mathbf{p}}_s|^2 > 0$. Это противоречит безарбитражности равновесных цен. ■

Заметим, что ключевое предположение модели Раднера — потребители при расчете цен активов предвидят цены всех благ во всех состояниях мира — не является при этом существенным, так как *структура наблюдаемых ими в первом периоде цен активов совпадает со* *структурой цен благ второго периода.* (Данное предположение становится существенным в ситуациях, когда какие-то активы Эрроу отсутствуют.) Заметим также, что в этой ситуации, когда доступны все активы Эрроу, даже в том случае, когда равновесие Эрроу—Дебре единственно, существует бесконечно много равновесий Раднера с нетривиальными обменами во втором периоде в дополнение к рассмотренному выше равновесию, когда обмены во втором периоде отсутствуют.

Используя только что доказанное свойство равновесия Раднера с полным набором активов Эрроу, продемонстрируем, что на основе такого равновесия можно сконструировать равновесие Эрроу—Дебре.

Теорема 7.7

Пусть в экономике с риском предпочтения потребителей локально ненасыщаемы по потреблению в каждом из состояний мира и пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C = \{\,(k,s) \mid k \in K,\ s \in S\,\}$. Тогда $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре. ┘

Доказательство: Из предыдущей теоремы следует, что $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — тоже равновесие Раднера в рассматриваемой экономике. Складывая все бюджетные ограничения задачи i-го потребителя, убеждаемся, что при этом получится бюджетное ограничение задачи i-го потребителя в модели Эрроу—Дебре. Следовательно, эти две задачи эквивалентны[13]. То есть $\bar{\mathbf{x}}_i$ — решение задачи потребителя в модели Эрроу—Дебре при ценах $\bar{\mathbf{q}}$. Несложно проверить, что остальные условия равновесия Эрроу—Дебре также выполнены. ■

Основное условие, гарантирующее эквивалентность моделей Эрроу—Дебре и Раднера, — наличие возможности переносить покупательную способность из одного состояния мира в другое. При этом вовсе не обязательно требовать, чтобы имелись *все* активы Эрроу. Для того чтобы эта возможность существовала, достаточно, в частности, чтобы имелись все активы Эрроу, выраженные в первом благе, и только они (благо 1 — счетная единица, *numeraire*):

$$C = \left\{\,(1,s) \;\middle|\; s \in S\,\right\}.$$

[13] Мы опустили здесь часть рассуждений (строгое доказательство эквивалентности), но их легко восстановить, пользуясь как образцом доказательствами теорем, приведенных далее в этом параграфе.

Проанализируем равновесие Раднера с таким набором активов. При анализе удобно использовать следующие обозначения: $q_{1s} = q_s$, $z_{i1s} = z_{is}$.

Заметим, что арбитраж в этой экономике возможен тогда и только тогда, когда q_s и p_{1s} имеют разные знаки или же $q_s = 0$ хотя бы для одного состояния мира s. Мы будем далее предполагать, что первое благо нужно всем потребителям во всех состояниях мира, т. е. функции полезности строго возрастают по потреблению первого блага в каждом состоянии мира. Тогда в равновесии Раднера $p_{1s} > 0$ для всех $s \in S$. При этом арбитраж возможен тогда и только тогда, когда $q_s \leqslant 0$ хотя бы для одного состояния мира s. Соответствующий план арбитража построить достаточно просто — он должен сводиться к покупке актива Эрроу, соответствующего состоянию s. *Невозможность арбитража эквивалентна условию* $\mathbf{q} > \mathbf{0}$.

Торговля в первом периоде в подобной экономике фактически означает, что продаются или покупаются начальные запасы первого блага таким образом, чтобы во втором периоде, торгуя скорректированными запасами, получить доход, достаточный для покрытия расходов, связанных с приобретением равновесного потребительского набора $\check{\mathbf{x}}$, соответствующего равновесию Эрроу—Дебре. То есть торговля в первом периоде представляет собой «перераспределение покупательной способности» потребителя между состояниями мира с избыточной и недостаточной покупательной способностью.

Доказательства следующих двух теорем, проводящих параллели между равновесием Раднера и равновесием Эрроу—Дебре, демонстрируют правильность такой интерпретации равновесия Раднера при $C = \{\,(1, s) \mid s \in S\,\}$.

Теорема 7.8

Пусть в экономике с риском функции полезности строго возрастают по потреблению первого блага в каждом состоянии мира, и пусть $(\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре в этой экономике. Тогда существует портфель $\bar{\mathbf{z}}$ активов Эрроу, выраженных в первом благе, а также цены активов $\bar{\mathbf{q}}$ такие, что $(\check{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \check{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера с $C = \{\,(1, s) \mid s \in S\,\}$. ┘

Доказательство: Возрастание функции полезности по первому благу гарантирует положительность цен этого блага в равновесии Эрроу—Дебре в каждом состоянии мира ($\check{p}_{1s} > 0$ для всех $s \in S$).

Дефицит, связанный с потреблением в состоянии мира s потребительского набора $\check{\mathbf{x}}_{is}$, в ценах $\check{\mathbf{p}}$ равен

$$d_{is} = \check{\mathbf{p}}_s(\check{\mathbf{x}}_{is} - \omega_{is}).$$

Потребитель i может покрыть дефицит d_{is}, выбирая величину $\bar{z}_{is}$ равной $d_{is}/\check{p}_{1s}$. Такой выбор $\bar{z}_{is}$ гарантирует, что выполнены бюджетные ограничения второго периода задачи потребителя i в модели Раднера:

$$\check{\mathbf{p}}_s\check{\mathbf{x}}_{is} = \check{\mathbf{p}}_s\omega_{is} + \check{p}_{1s}\bar{z}_{is}.$$

Заметим, что выполняется соотношение $\sum_{s\in S} d_{is} = 0$ (так как фактически это бюджетное ограничение потребителя i в модели Эрроу—Дебре в равновесных ценах). Выберем в качестве цены актива $(1, s)$ цену спот первого блага в состоянии мира s, т. е. $\bar{q}_s = \check{p}_{1s}$. Тогда соотношение $\sum_{s\in S} d_{is} = 0$ гарантирует выполнение бюджетного ограничения первого периода задачи потребителя i в модели Раднера.

Таким образом, $(\check{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{z}}_i)$ — допустимое решение в задаче $(\mathcal{C}_R)$ при ценах $\check{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{q}}$. Покажем, что оно также является оптимальным решением. Предположим, что есть другое допустимое решение задачи $(\mathcal{C}_R)$ $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{z}'_i)$, которое дает i-му потребителю более высокую полезность. Так как $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{z}'_i)$ допустимо, то

$$\sum_{s\in S} \check{p}_{1s} z'_{is} \leqslant 0,$$

$$\check{\mathbf{p}}_s\mathbf{x}'_{is} \leqslant \check{\mathbf{p}}_s\omega_{is} + \check{p}_{1s}\check{z}_{is}.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\sum_{s\in S} \check{\mathbf{p}}_s\mathbf{x}'_{is} \leqslant \sum_{s\in S} \check{\mathbf{p}}_s\omega_{is}.$$

Это означает, что $\mathbf{x}'_i$ — допустимое решение задачи $(\mathcal{C}_{AD})$, которое более предпочтительно для потребителя, чем $\check{\mathbf{x}}_i$. Противоречие.

Проверим, что для всех $s \in S$ выполнены балансы активов:

$$\sum_{i\in I} \bar{z}_{is} = \sum_{i\in I} \frac{d_{is}}{\check{p}_{1s}} = \sum_{i\in I} \frac{\check{\mathbf{p}}_s(\check{\mathbf{x}}_{is} - \omega_{is})}{\check{p}_{1s}} = \frac{\check{\mathbf{p}}_s}{\check{p}_{1s}} \sum_{i\in I} (\check{\mathbf{x}}_{is} - \omega_{is}) = 0.$$

Последнее равенство следует из балансов для физических благ. ■

Для обратного утверждения нельзя в общем случае взять $\bar{\mathbf{p}} = \check{\mathbf{p}}$, поскольку в равновесии Раднера цены $\bar{\mathbf{p}}_s$ в каждом состоянии мира s можно умножить на произвольный положительный множитель и при этом рассматриваемое состояние останется равновесием. Таким образом, требуется взять $\check{\mathbf{p}}_s = \lambda_s \bar{\mathbf{p}}_s$, где λ_s — некоторый положительный множитель.

Теорема 7.9

Пусть в экономике с риском функции полезности строго возрастают по потреблению первого блага в каждом состоянии мира, и пусть $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике с $C = \{\,(1, s) \mid s \in S\,\}$. Тогда существует вектор цен $\check{\mathbf{p}}$, такой что $(\check{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре. ┘

Доказательство: Возрастание функции полезности по первому благу гарантирует положительность цен этого блага в равновесии Раднера в каждом состоянии мира. Кроме того, для каждого потребителя i выполнены как равенства бюджетные ограничения первого и второго периодов:

$$\sum_{s \in S} \bar{q}_s \bar{z}_{is} = 0 \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{x}}_{is} = \bar{\mathbf{p}}_s \omega_{is} + p_{1s} \bar{z}_{is}.$$

Выберем $\bar{\mathbf{p}}_s$ следующим образом:

$$\check{\mathbf{p}}_s = \frac{\bar{q}_s}{\bar{p}_{1s}} \bar{\mathbf{p}}_s.$$

Тогда

$$\check{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{x}}_{is} = \check{\mathbf{p}}_s \omega_{is} + q_s \bar{z}_{is}.$$

Складывая эти соотношения для всех состояний мира с бюджетным ограничением первого периода, убеждаемся, что при ценах $\check{\mathbf{p}}$ выполняется бюджетное ограничение в модели Эрроу—Дебре:

$$\sum_{s \in S} \check{\mathbf{p}}_s \bar{\mathbf{x}}_{is} = \sum_{s \in S} \check{\mathbf{p}}_s \omega_{is}.$$

Таким образом, $\bar{\mathbf{x}}_i$ — допустимое решение задачи потребителя $(\mathcal{C}_{AD})$. Покажем, что оно является оптимальным.

Пусть это не так и $\mathbf{x}'_i$ — другое допустимое решение задачи $(\mathcal{C}_{AD})$ при ценах $\check{\mathbf{p}}$, с более высоким значением полезности. Так как $\mathbf{x}'_i$ допустимо, то

$$\sum_{s \in S} \check{\mathbf{p}}_s \mathbf{x}'_i \leqslant \sum_{s \in S} \check{\mathbf{p}}_s \omega_{is}.$$

Тогда можно подобрать портфель активов $\mathbf{z}'_i$, такой что $(\mathbf{x}'_i, \mathbf{z}'_i)$ — допустимое решение задачи потребителя $(\mathcal{C}_R)$ в модели Раднера при

Таблица 7.3. *Активы Эрроу в Примере 7.4*

	$s = R$	$s = S$
$k = A$	$\otimes$	$\otimes$
$k = B$		

ценах $\bar{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{q}}$. Для этого, как и в доказательстве предыдущей теоремы, можно выбрать z'_{is} так, чтобы покрыть бюджетный дефицит в соответствующем состоянии мира, равный $d_{is} = \bar{\mathbf{p}}_s(\mathbf{x}'_{is} - \omega_{is})$, т. е. $z'_{is} = d_{is}/\bar{p}_{1s}$. При этом

$$\sum_{s\in S} \bar{q}_s z'_{is} = \sum_{s\in S} \frac{\bar{q}_s}{\bar{p}_{1s}} \bar{\mathbf{p}}_s(\mathbf{x}'_{is} - \omega_{is}) = \sum_{s\in S} \check{\mathbf{p}}_s(\mathbf{x}'_{is} - \omega_{is}),$$

т. е. выполнено бюджетное ограничение первого периода:

$$\sum_{s\in S} \bar{q}_s z'_{is} \leqslant 0.$$

Бюджетные ограничения второго периода выполнены в силу определения z'_{is}. Получили противоречие. ■

Пример 7.4

Рассмотрим модель Раднера с двумя состояниями мира $s = R, S$, двумя благами $k = A, B$, двумя потребителями и двумя активами Эрроу, отмеченными в Таблице 7.3. Они выражены в благе A. Ожидания потребителей по поводу вероятностей состояний мира совпадают и равны $\mu_R = \mu_S = 0{,}5$. Предпочтения потребителей также одинаковы; элементарные функции полезности равны

$$u_i(x_A, x_B) = \ln(x_A) + \ln(x_B),\ i = 1, 2.$$

Начальные запасы указаны в Таблице 7.4. С точки зрения начальных запасов в этом примере нет системного риска, поскольку совокупные начальные запасы в обоих состояниях мира равны $(2; 2)$, т. е. одинаковы.

Задача потребителя $i = 1, 2$ равновесия Раднера этой экономики имеет следующий вид:

$$U_i = 0{,}5\big[\ln(x_{iAR}) + \ln(x_{iBR})\big] + 0{,}5\big[\ln(x_{iAS}) + \ln(x_{iBS})\big] \to \max_{\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i},$$

$$q_R z_{iR} + q_S z_{iS} \leqslant 0,$$

$$p_{AR}x_{iAR} + p_{BR}x_{iBR} \leqslant p_{AR}\omega_{iAR} + p_{BR}\omega_{iBR} + p_{AR}z_{iR},$$

$$p_{AS}x_{iAS} + p_{BS}x_{iBS} \leqslant p_{AS}\omega_{iAS} + p_{BS}\omega_{iBS} + p_{AS}z_{iS}.$$

Таблица 7.4. *Начальные запасы в Примере 7.4*

	$\boldsymbol{\omega}_1$		$\boldsymbol{\omega}_2$		$\boldsymbol{\omega}_\Sigma$	
	A	B	A	B	A	B
$s = R$	2	0	0	2	2	2
$s = S$	2	2	0	0	2	2

Найдем равновесие Раднера в этом примере, пользуясь его взаимосвязью с равновесием Эрроу—Дебре. Так как нет системного риска, то в равновесии потребление обоих потребителей не зависит от состояния мира:

$$x_{iAR} = x_{iAS}, \quad x_{iBR} = x_{iBS}.$$

Отношение цен одного и того же блага в двух состояниях должно быть равно отношению вероятностей:

$$\frac{p_{AR}}{p_{AS}} = \frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{0{,}5}{0{,}5} = 1 = \frac{p_{BR}}{p_{BS}}.$$

Можно проверить, что в равновесии Эрроу—Дебре

$$x_{1AR} = x_{1AS} = x_{1BR} = x_{1BS} = 3/2,$$
$$x_{2AR} = x_{2AS} = x_{2BR} = x_{2BS} = 1/2,$$
$$p_{AR} = p_{AS} = p_{BR} = p_{BS} \text{ (выберем } = 1).$$

Положим $q_R = p_{AR} = 1$, $q_S = p_{AS} = 1$. Чтобы получить равновесие Раднера, нужно еще вычислить z_{is}:

$$d_{1R} = \mathbf{p}_R(\mathbf{x}_{iR} - \omega_{iR}) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1,$$
$$z_{1R} = \frac{d_{1R}}{p_{AR}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Аналогично $d_{1S} = -1$,

$$z_{1S} = \frac{d_{1S}}{p_{AS}} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Для второго потребителя характеристика его портфеля активов определяется из баланса активов:

$$z_{2R} = -1, \quad z_{2S} = 1.$$

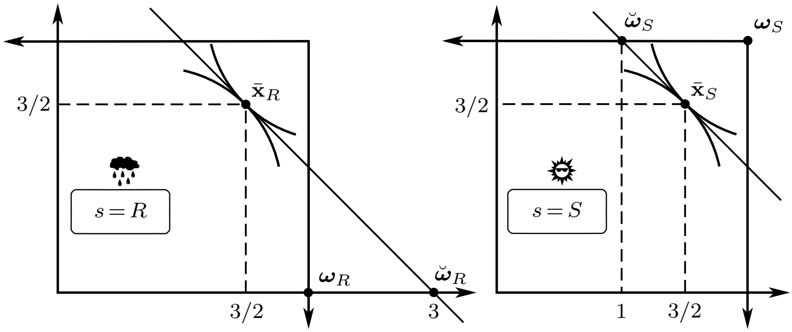


Рис. 7.5. *Иллюстрация к Примеру 7.4*

Найденное равновесие иллюстрируется на Рис. 7.5. Каждый из двух ящиков Эджворта соответствует спот-рынку одного из состояний мира. Торговля активами приводит к тому, что точка начальных запасов сдвигается. ▲

Рассмотрим теперь модель Раднера, в которой активы не обязательно являются активами Эрроу. Для упрощения анализа будем предполагать, что все активы выражены только в первом благе. Поскольку доходности по остальным благам при этом равны нулю, соответствующие коэффициенты можно не рассматривать. При этом будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{a}_s = (a_{sc})_c$ — вектор, составленный из доходностей всех активов в состоянии мира s, $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_s)_s$ — матрица, составленная из доходностей всех активов во всех состояниях мира.

Хотя в такой экономике могут быть довольно сложные активы, но они фактически сводятся к набору элементарных активов (активов Эрроу). Соответственно цену любого (сколь угодно сложного) актива можно вычислить через цены активов Эрроу, даже если таких активов в экономике нет. Для доказательства этого факта мы опять воспользуемся тем, что в равновесии Раднера арбитраж невозможен.

Рассмотрим, что означает в такой экономике невозможность арбитража. Переформулируя определение, арбитраж невозможен, если не существует такого плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$, что $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0$, и для любого состояния мира $s \in S$ выполнено $p_{1s}\mathbf{a}_s\Delta\mathbf{z} \geqslant 0$, причем хотя бы для одного состояния мира неравенство строгое. Если $p_{1s} > 0$ в любом состоянии мира, то последнее неравенство эквивалентно $\mathbf{a}_s\Delta\mathbf{z} \geqslant 0$. Такая переформулировка означает невозможность составить допустимый план арбитража (не требующий увеличения чистых расходов на покупку активов), такой что он приводит к приросту доступного потребителю количества первого блага по крайней мере в одном состоянии мира и не уменьшает эту величину в других состояниях мира. Формально *возможность арбитража* при ценах активов $\mathbf{q}$ записывается следующим образом:

$$\text{существует } \Delta\mathbf{z}, \text{ такой что } \mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0 \text{ и } \mathbf{A}\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}.$$

Цены активов $\mathbf{q}$, при которых такого плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$ не существует, называют **безарбитражными**.

Для доказательства того факта, что цены активов можно разложить по ценам активов Эрроу, требуется также дополнительное предположение о том, что матрица доходностей активов обладает следующим свойством:

$$\text{существует } \Delta\mathbf{z}, \text{ такой что } \mathbf{A}\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}. \qquad (☼)$$

Это свойство означает, что арбитраж в принципе возможен, если не учитывать бюджетное ограничение первого периода, т. е. можно подобрать такой план арбитража, что в любом состоянии мира $\mathbf{a}_s\Delta\mathbf{z} \geqslant 0$ и хотя бы для одного состояния неравенство строгое. Из определения безарбитражности следует, что если цены активов безарбитражные (например, это равновесные цены активов), то подобный план арбитража должен потребовать увеличения чистых расходов на приобретение активов: $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} > 0$.

Предположение (☼) нужно для того, чтобы первый период можно было рассматривать по аналогии с состояниями мира s второго периода. Дело в том, что в рассматриваемой нами модели в первом периоде потребление отсутствует и излишек денег в этом периоде без предположения (☼) не означает, что потребитель выбрал неоптимальный портфель. Если цены активов безарбитражные и выполнено условие (☼), то потребитель может передать покупательную способность из первого периода во второй, поэтому излишек денег в первом периоде несовместим с безарбитражностью.

Условие (☼) верно при многих достаточно естественных предположениях о матрице $\mathbf{A}$. В частности, достаточно, чтобы матрица $\mathbf{A}$ имела ранг, равный количеству состояний мира, другими словами, чтобы векторы $\mathbf{a}_s$ были линейно независимы. Другой случай, когда можно передать покупательную способность из первого периода во второй,— когда хотя бы один из активов не приносит отрицательного дохода ни в одном состоянии мира, а по крайней мере в одном приносит положительный доход (например, актив Эрроу). Тогда передача покупательной способности может заключаться в том, чтобы приобрести единицу такого актива.

Приняв предположение (☼), мы можем расширить множество состояний, включив в него первый период с индексом 0, т. е. рассматривать $S^* = \{0, 1, \ldots, \hat{s}\}$, и модифицировать соответствующим образом определение безарбитражности цен активов. Введем обозначение

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\mathbf{q} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

В столбцах матрицы $\mathbf{A}^*$ содержится информация о том, что приносит актив в каждом из состояний: единица актива c дает $-q_c$ в состоянии 0 и a_{sc} в остальных состояниях.

В этих обозначениях цены активов $\mathbf{q}$ являются безарбитражными, если не существует плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$, такого что $\mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$, т. е. такого что он дает дополнительный доход в одном из состояний $0, 1, \ldots, \hat{s}$, не уменьшая доход в других состояниях.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, связывающей цены активов $\mathbf{q}$ и соответствующие им «цены активов Эрроу», которые мы обозначим через $\boldsymbol{\pi}$.

Теорема 7.10

{i} Пусть $\mathbf{A}$ — матрица доходностей активов, удовлетворяющая предположению (☼), а $\mathbf{q}$ — безарбитражные цены активов. Тогда существует вектор $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$, такой что $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$.

{ii} Пусть цены активов можно представить в виде $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$, где $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$. Тогда цены активов $\mathbf{q}$ являются безарбитражными. ⌟

Доказательство: {i} Как было показано выше, при выполнении (☼) безарбитражность $\mathbf{q}$ эквивалентна отсутствию плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$, такого что $\mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Рассмотрим следующее множество:

$$W = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\hat{s}+1} \;\middle|\; \mathbf{w} = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z},\ \Delta\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\hat{c}} \right\}.$$

Элемент $\mathbf{w} = \mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z}$ этого множества интерпретируется как вектор, составленный из чистых приростов дохода w_s, полученных в каждом из состояний $0, 1, \ldots, \hat{s}$ за счет использования плана арбитража $\Delta\mathbf{z}$.

Безарбитражность $\mathbf{q}$ означает отсутствие в W векторов $\mathbf{w}$, таких что $\mathbf{w} \geqslant\neq \mathbf{0}$, поэтому предположение о безарбитражности можно записать в виде

$$W \cup (\mathbb{R}_+^{\hat{s}+1} \setminus \{\mathbf{0}\}) = \varnothing.$$

Вместо $\mathbb{R}_+^{\hat{s}+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ (положительного ортанта с «выколотым» нулем) достаточно рассмотреть симплекс

$$\Sigma = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^{\hat{s}+1} \,\middle|\, \sum_{s \in S^*} w_s = 1 \right\}.$$

Предположение о безарбитражности принимает вид

$$W \cup \Sigma = \varnothing.$$

Множества W и Σ выпуклы, непусты, Σ компактно, а W замкнуто. По теореме отделимости для замкнутых множеств[14] существуют вектор коэффициентов $\tilde{\boldsymbol{\pi}} \in \mathbb{R}^{\hat{s}+1}$ и число b, такие что $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{w} < b$ при $\mathbf{w} \in W$ и $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{w} \geqslant b$ при $\mathbf{w} \in \Sigma$.

Покажем, что $\tilde{\boldsymbol{\pi}} > \mathbf{0}$. Пусть это не так и $\tilde{\pi}_s \leqslant 0$ для некоторого состояния $s \in S^*$. Пусть $\mathbf{e}^s$ — орт, соответствующий состоянию s. Так как $\mathbf{e}^s \in \Sigma$, то $\tilde{\pi}_s = \tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{e}^s \geqslant b$, откуда $b \leqslant 0$. Следовательно, для всех $\mathbf{w} \in W$ должно выполняться $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{w} < 0$. Но для вектора $\mathbf{0} \in W$ это неравенство не выполнено. Пришли к противоречию.

Покажем теперь, что $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$. Если бы это было не так, то мы могли для любого наперед заданного числа подобрать $\mathbf{w} \in W$ (поскольку все $\mathbf{w} \in W$ имеют вид $\mathbf{A}^*\Delta\mathbf{z}$, то это делается за счет подбора $\Delta\mathbf{z}$) так, чтобы $\tilde{\boldsymbol{\pi}}\mathbf{w}$ было больше этого числа. Но тогда мы бы могли превысить b, что невозможно.

На основе вектора $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ построим искомый вектор $\boldsymbol{\pi}$: $\pi_s = \tilde{\pi}_s/\tilde{\pi}_0$, $s \in S$. Очевидно, что $\boldsymbol{\pi}$ обладает требуемыми свойствами: $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$ и $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$.

{ii} Пусть $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$, где $\boldsymbol{\pi} > \mathbf{0}$, и пусть $\Delta\mathbf{z}$ — план арбитража, такой что $\mathbf{A}\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$. Тогда $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}\Delta\mathbf{z} > 0$. Таким образом, одновременное выполнение условий $\mathbf{q}\Delta\mathbf{z} \leqslant 0$ и $\mathbf{A}\Delta\mathbf{z} \geqslant\neq \mathbf{0}$ невозможно.■

Так как при равновесных ценах $\mathbf{q}$ арбитраж невозможен, то из доказанной теоремы следует, что можно представить цены активов в равновесии Раднера в виде $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$. Отдельный элемент вектора $\boldsymbol{\pi}$, π_s, можно интерпретировать как цену актива Эрроу $(1, s)$.

[14] См. Теорему B.42 на с. II-644 в Приложении B.

Если матрица $\mathbf{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира $\hat{s}$, то такой вектор $\boldsymbol{\pi}$ определяется однозначно. Можно выбрать $\hat{s}$ активов с линейно независимыми векторами доходностей и сформировать из них матрицу $\hat{\mathbf{A}}$, при этом $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{q}\hat{\mathbf{A}}^{-1}$. В противном случае удовлетворяющих этому соотношению векторов $\boldsymbol{\pi}$ может быть бесконечно много. Например, если в экономике имеются только активы Эрроу, выраженные в первом благе, но не для всех состояний мира, то цены активов Эрроу для отсутствующих активов $(1, s)$ можно выбрать произвольно.

Для каждой матрицы доходностей активов $\mathbf{A}$ можно задать **подпространство активов** как подпространство, натянутое на векторы, соответствующие доходностям активов в разных состояниях мира:

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \left\{ \mathbf{w} \;\middle|\; \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{z},\ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{\hat{c}} \right\}.$$

Вектор $\mathbf{z}$ здесь можно интерпретировать как портфель активов (так как речь идет об объективной характеристике системы активов, то индекс потребителя не пишется), а отдельный элемент вектора $\mathbf{w}$, w_s, — как доход от этого портфеля в состоянии мира s (выраженный в количестве первого блага). Таким образом, $\mathcal{L}(\mathbf{A})$ — это множество тех доходов, которые можно получить при некотором выборе портфеля $\mathbf{z}$.

Для равновесий Раднера существенным является именно это подпространство активов, а не матрица $\mathbf{A}$, по которой оно строится. Покажем это, доказав, что если $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}')$, то из равновесия Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{A}$ можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{A}'$. В доказательстве мы воспользуемся полученным выше представлением вектора цен активов в виде $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$.

Теорема 7.11

Пусть в экономике Эрроу функции полезности строго возрастают по потреблению первого блага в каждом состоянии мира и пусть $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{x}, \mathbf{z})$ — равновесие Раднера в этой экономике, где все активы выражены в первом благе и $\mathbf{A}$ — матрица их доходностей, удовлетворяющая предположению (☼). Тогда если $\mathbf{A}'$ — другая матрица доходностей, такая что $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}')$, то существуют портфель активов $\mathbf{z}'$ и цены активов $\mathbf{q}'$ такие, что $(\mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{x}, \mathbf{z}')$ — равновесие Раднера с матрицей доходностей $\mathbf{A}'$. ┘

Доказательство: Поскольку цены $\mathbf{q}$ соответствуют равновесию Раднера и предпочтения локально ненасыщаемы, то при этих ценах арбитраж невозможен. Предположение (☼) гарантирует при этом, что существует вектор $\boldsymbol{\pi} = (\pi_s)_s$, такой что $\mathbf{q} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}$.

В качестве цен активов $\mathbf{q}'$ в конструируемом равновесии возьмем $\boldsymbol{\pi}\mathbf{A}'$.

Построим теперь $\mathbf{z}'$. Так как $\mathbf{A}\mathbf{z}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{A})$ и $\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{A}')$, то $\mathbf{A}\mathbf{z}_i \in \mathcal{L}(\mathbf{A}')$. Другими словами, для любого $\mathbf{z}_i$ существует вектор $\mathbf{z}'_i$, такой что $\mathbf{A}'\mathbf{z}'_i = \mathbf{A}\mathbf{z}_i$. Для каждого набора $\mathbf{z}_i$, $i = 1, \ldots, m-1$ возьмем такой $\mathbf{z}'_i$. Кроме того, выберем $\mathbf{z}'_m$ так, чтобы выполнялся баланс активов:

$$\mathbf{z}'_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{z}'_i.$$

Так как $\sum_{i \in I} \mathbf{z}_i = 0$, то $\mathbf{A}'\mathbf{z}'_m = \mathbf{A}\mathbf{z}_m$.

Покажем теперь, что $(\mathbf{p}, \mathbf{q}', \mathbf{x}, \mathbf{z}')$ — равновесие Раднера с матрицей доходностей $\mathbf{A}'$. Набор $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}'_i)$ допусти́м в задаче i-го потребителя при ценах $\mathbf{p}, \mathbf{q}'$ и матрице доходностей $\mathbf{A}'$, поскольку

$$\mathbf{q}'\mathbf{z}'_i = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}'\mathbf{z}'_i = \boldsymbol{\pi}\mathbf{A}\mathbf{z}_i = \mathbf{q}\mathbf{z}_i \leqslant 0$$

и

$$\mathbf{p}\mathbf{x}_i \leqslant \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i - p_{1s}\mathbf{a}_s\mathbf{z}_i = \mathbf{p}\boldsymbol{\omega}_i - p_{1s}\mathbf{a}'_s\mathbf{z}'_i.$$

Покажем, что $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}'_i)$ является оптимальным решением. Пусть это не так и $(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{z}}'_i)$ — другое допустимое решение задачи i-го потребителя при ценах $\mathbf{p}, \mathbf{q}'$ и матрице доходностей $\mathbf{A}'$, с более высоким значением полезности. Тогда, следуя рассмотренной выше схеме, можно подобрать портфель активов $\check{\mathbf{z}}_i$, такой что $(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{z}}_i)$ — допустимое решение задачи потребителя при ценах $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и матрице доходностей $\mathbf{A}$. Поскольку $\check{\mathbf{x}}_i$ дает потребителю более высокую полезность, чем $\mathbf{x}_i$, то это противоречит оптимальности $(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_i)$ при ценах $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и матрице доходностей $\mathbf{A}$. ■

Замечание: Таким образом, каждому равновесию Раднера в экономике с множеством активов с матрицей доходностей $\mathbf{A}$ соответствует равновесие Раднера в экономике с множеством активов с матрицей доходностей $\mathbf{A}'$ с теми же планами потребления и ценами благ. Верно и обратное, если матрица $\mathbf{A}'$ удовлетворяет предположению (☼).

Если матрица доходностей $\mathbf{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира $\hat{s}$ (т. е. если структура доступных активов является достаточно «богатой»), то

$$\mathcal{L}(\mathbf{A}) = \mathcal{L}(\mathbf{I}),$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности $\hat{s} \times \hat{s}$. Матрица доходностей $\mathbf{I}$ соответствует случаю, когда $C = \{ (1, s) \mid s \in S \}$, т. е. когда все активы в экономике являются активами Эрроу, выраженными в первом благе. Поэтому при выполнении этого условия — полного ранга матрицы $\mathbf{A}$ — верны аналоги доказанных ранее для случая $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ теорем об эквивалентности равновесий Эрроу—Дебре и Раднера.

Теорема 7.12

Предположим, что в экономике с риском функции полезности строго возрастают по потреблению блага 1 в каждом состоянии мира. Кроме того, пусть все доступные потребителям в равновесиях Раднера активы выражены в благе 1 и матрица их доходностей $\mathbf{A}$ имеет ранг, равный количеству состояний мира.

{i} Если $(\check{\mathbf{p}}, \check{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре в этой экономике, то существует портфель активов $\bar{\mathbf{z}}$ и цены активов $\bar{\mathbf{q}}$ такие, что $(\check{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \check{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера.

{ii} Наоборот, если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера в этой экономике, то существует вектор цен $\check{\mathbf{p}}$, такой что $(\check{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{x}})$ — равновесие Эрроу—Дебре. ┘

Доказательство: Данное утверждение — следствие Теорем 7.8, 7.9 и 7.11.

На основе равновесия Эрроу—Дебре можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{I}$, а на основе последнего — равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{A}$. Наоборот, на основе равновесия Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{A}$ можно сконструировать равновесие Раднера с матрицей доходностей активов $\mathbf{I}$, а на основе последнего — равновесие Эрроу—Дебре. ■

Пользуясь свойствами равновесия Эрроу—Дебре, получим важное следствие из данной теоремы: если матрица активов в модели Раднера имеет полный ранг, то каждое равновесие в такой модели Парето-оптимально.

Теорема 7.13

Пусть выполнены условия Теоремы 7.12. Тогда если $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{q}}, \bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}})$ — равновесие Раднера, то $\bar{\mathbf{x}}$ — Парето-оптимальное состояние. ┘

С другой стороны, если матрица активов неполного ранга, то возникает проблема неполноты рынков и в общем случае равновесие Раднера не оптимально. Приведем пример такой экономики.

Пример 7.5

Пусть существуют два физических блага (A и B), два состояния мира (R и S) и два потребителя-рискофоба (1 и 2). Начальные запасы в состоянии мира R целиком принадлежат потребителю 1, а начальные запасы в состоянии мира S целиком принадлежат потребителю 2, причем системный риск отсутствует ($\boldsymbol{\omega}_{1R} = \boldsymbol{\omega}_{2S} > \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\omega}_{1S} = \boldsymbol{\omega}_{2R} = \mathbf{0}$). Предположим, что в экономике активы отсутствуют (частный случай неполноты ранга матрицы активов).

Потребление в равновесии Раднера в каждом состоянии мира будет совпадать с начальными запасами, поскольку потребителям нечем обмениваться. В то же время, как мы знаем, в Парето-оптимуме (и в равновесии Эрроу—Дебре) у каждого потребителя потребление во всех состояниях мира должно быть одинаковым (не должно быть индивидуального риска). Таким образом, равновесие Раднера не будет в этой экономике оптимальным.

Если в данной экономике есть только один актив Эрроу, то выводы не изменятся, поскольку с его помощью нельзя обменивать риски. ▲

Равновесие Раднера может оказаться не оптимальным, даже когда отсутствует индивидуальный риск в исходном состоянии (у каждого потребителя начальные запасы не зависят от состояния мира). Такой случай может иметь место, если в (одинаковых) элементарных экономиках, соответствующих разным состояниям мира, существует более, чем одно равновесие Вальраса. Тогда будут существовать равновесия Раднера[15], такие что в одних состояниях мира потребление соответствует одному из равновесий Вальраса элементарной экономики, а в других — другому равновесию Вальраса. Но такие равновесия не будут Парето-оптимальными по указанной выше причине.

Задачи

7.8 В экономике обмена с единственным физическим благом и двумя состояниями мира Q и R, имеющими вероятности $3/4$ и $1/4$, есть два потребителя с элементарными функциями полезности $u_1(x_1) = -1/x_1$ и $u_2(x_2) = \ln(x_2 + 1)$ и начальными запасами $(6; 2)$ и $(3; 7)$ соответственно.

---

[15] Такие равновесия получили название **равновесий солнечных пятен** (англ. *sunspot equilibrium*). См. D. Cass and K. Shell • Do Sunspots Matter?, *Journal of Political Economy* **91** (1983): 193–227.

(A) Найдите равновесие Эрроу—Дебре.

(B) Найдите равновесие Раднера, если в экономике имеется только два актива Эрроу.

(C) Найдите равновесие Раднера, если в экономике имеется два актива: один имеет доходность 1 в состоянии мира Q и 2 в состоянии мира R, а другой — доходность 1 в состоянии мира Q и 3 в состоянии мира R.

7.9 В экономике обмена с единственным физическим благом и двумя состояниями мира M и N, имеющими равные вероятности, есть два потребителя с элементарными функциями полезности $u_1(x_1) = x_1$ и $u_2(x_2) = \sqrt[3]{x_2}$ и начальными запасами $(4; 1)$ и $(1; 3)$ соответственно.

(A) Найдите равновесие Эрроу—Дебре.

(B) Найдите равновесие Раднера, если в экономике имеется только два актива Эрроу.

(C) Найдите равновесие Раднера, если в экономике имеется два актива: один имеет доходность 2 в состоянии мира M и 3 в состоянии мира N, а другой — (-1) в состоянии мира M и 3 в состоянии мира N.

7.10 Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i = 1, 2$), двумя состояниями мира (Rain, Sun) и двумя физическими благами (apples, bananas) запасы которых в состоянии мира R у первого потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{1R} = (0; 0)$, у второго потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{2R} = (3; 6)$, а в состоянии мира S у первого потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{1S} = (5; 1)$, у второго потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{2S} = (1; 2)$. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности

$$u_1 = -1/x_{1a} - 1/x_{1b}, \quad u_2 = x_{2a} + 4x_{2b}.$$

Предположим, что вероятность состояния мира R равна $1/3$, а вероятность состояния мира S — $2/3$.

(A) Покажите формально, что состояние $\mathbf{x}_{1R} = (2; 1)$, $\mathbf{x}_{1S} = (2; 1)$, $\mathbf{x}_{2R} = (1; 5)$, $\mathbf{x}_{2S} = (4; 2)$, $\mathbf{p}_a = (1; 2)$, $\mathbf{p}_b = (4; 8)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(B) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера, для случая, когда в экономике имеется два актива Эрроу, выраженных в первом благе?

7.11 Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i = 1, 2$), двумя состояниями мира (Good, Bad) и двумя физическими благами (apples, cucumbers), запасы которых в состоянии мира G у первого потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{1G} = (4; 4)$, у второго потребителя — $\boldsymbol{\omega}_{2G} = (2; 2)$, а в состоянии мира B — $\boldsymbol{\omega}_{1B} = (1; 1)$ и $\boldsymbol{\omega}_{2B} = (5; 5)$ соответственно. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности вида

$$u_i = \ln x_{ia} + \ln x_{ic}.$$

Предположим, что вероятность состояния мира G равна $2/3$, а вероятность состояния B — $1/3$.

(A) Покажите формально, что состояние $\mathbf{x}_1 = (3; 3; 3; 3)$, $\mathbf{x}_2 = (3; 3; 3; 3)$, $\mathbf{p}_G = (2; 2)$, $\mathbf{p}_B = (1; 1)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(B) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера, для случая, когда в экономике имеется два актива, выраженных в первом благе, один имеет доходности 1 и 2, а другой — −2 и 1?

7.12 Рассмотрим экономику с двумя потребителями ($i = 1, 2$), двумя состояниями мира (Rain, Sun) и двумя физическими благами (apples, bananas) запасы которых у каждого из потребителей в каждом из состояний мира $s = R, S$ равны $\boldsymbol{\omega}_{is} = (3; 3/2)$. Предположим, что предпочтения потребителей описываются функциями полезности Неймана—Моргенштерна с элементарными функциями полезности

$$u_i = \ln x_{ia} + \ln x_{ib}.$$

Предположим, что субъективная вероятность состояния мира R для первого потребителя равна $1/3$, а вероятность состояния мира S — $2/3$. Субъективная вероятность состояния мира R для второго потребителя равна $2/3$, а вероятность состояния мира S — $1/3$.

(A) Покажите формально, что состояние $\mathbf{x}_{1R} = (2; 1)$, $\mathbf{x}_{1S} = (4; 2)$, $\mathbf{x}_{2R} = (4; 2)$, $\mathbf{x}_{2S} = (2; 1)$, $\mathbf{p}_a = (1; 1)$, $\mathbf{p}_b = (2; 2)$ является равновесием Эрроу—Дебре.

(B) Как на основе равновесия Эрроу—Дебре сконструировать равновесие Раднера, для случая, когда в экономике имеется два актива, выраженных в первом благе, один имеет доходности 3 и −2, а другой — 1 и 2?

7.13 Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), двумя благами (a и b) и системой активов, состоящей из всех возможных активов Эрроу. Пусть цены активов равны $(q_{aR}, q_{aS}, q_{bR}, q_{bS}) = (1; 2; 3; 4)$, а цены благ равны $(2; 6)$ в состоянии R и $(1; 3)$ в состоянии S. Возможен ли при таких ценах арбитраж? Если возможен, то предложите план арбитража. Если невозможен, то объясните почему.

7.14 Рассмотрите модель Раднера двумя состояниями мира (R и S), с двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов Эрроу, выраженных в благе A. Пусть цены активов равны $(q_{aR}, q_{aS}) = (1; 4)$. Возможен ли при таких ценах арбитраж? Если возможен, то предложите план арбитража. Если невозможен, то объясните почему.

7.15 Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов, выраженных в благе A. Один актив дает 1 в состоянии R и 1 в состоянии S, а другой — 0 в состоянии R и 1 в состоянии S. Выгоден ли план арбитража $\Delta z = (1; -1)$? Предложите цены активов, при которых этот план арбитража не приводит к увеличению чистых расходов на покупку активов.

7.16 Рассмотрите модель Раднера с двумя состояниями мира (R и S), двумя благами (A и B) и системой активов, состоящей из двух активов, выраженных в благе A. Один актив дает 1 в состоянии R и 1 в состоянии S, а другой — 0 в состоянии R и 1 в состоянии S. Пусть цены этих активов равны 4 и 1 соответственно. Найдите соответствующие «цены активов Эрроу» π_R и π_S. Что можно сказать по этим ценам о возможности арбитража?

7.17 Покажите, что равновесию Раднера могут соответствовать планы потребления, которые являются недопустимыми в задачах потребителя в модели Эрроу—Дебре при любых равновесных ценах.

Задачи к главе

7.18 Известно, что потребитель в экономике с риском с полной системой рынков имеет строго вогнутую элементарную функцию полезности, зависящую от одного (физического) блага и заданную на неотрицательных количествах потребления. Что можно сказать об объемах потребления в разных состояниях мира, если цены блага в разных состояниях мира пропорциональны вероятностям? Рассмотрите либо общий случай, либо (для упрощения) дифференцируемую функцию полезности и два состояния мира.

7.19 Рассмотрите модель Эрроу—Дебре (с условно-случайными благами) в которой есть единственное физическое благо. Пусть количество состояний природы равно количеству потребителей, причем каждому потребителю соответствует одно состояние природы, в котором он владеет всем начальным запасом. Пусть, кроме того, совокупные начальные запасы не зависят от состояний природы и оценки вероятностей состояний природы у потребителей совпадают. Предположите, что элементарные функции полезности потребителей $u_i(\cdot)$ строго вогнутые и возрастающие.

(A) Покажите, что в Парето-оптимальных состояниях потребление не зависит от состояния природы.

(B) Покажите, что равновесия Эрроу—Дебре и Раднера единственны. Охарактеризуйте эти равновесия.

7.20 Рассмотрите следующую ситуацию (близкую по духу концепции справедливости Джона Роулза). Два индивидуума в первом периоде должны выбрать, как они будут жить во втором периоде. Во втором периоде каждый из них может быть либо бедным, либо богатым в зависимости от состояния мира. В состоянии мира 1 богатым будет первый индивидуум, а в состоянии мира 2 — второй. В первом периоде они не знают, кто кем будет («покров неведения»), и могут заключать между собой соглашения относительно перераспределения богатства во втором периоде. Дайте интерпретацию этой ситуации с точки зрения модели Эрроу—Дебре (или Раднера). При каких предположениях можно ожидать исхода, характеризующегося социальным равенством?

7.21 Вчера Анатолий вложил в банк «Чара» \$100 из своих сбережений в \$1000, ожидая получить через день +30% с вероятностью 0,8 или потерять вложение с вероятностью 0,2. Аналогично Борис вложил в компанию МММ \$100 из своих сбережений в \$1000, ожидая получить через день +30% с вероятностью 0,8 или потерять вложение с вероятностью 0,2. Предпочтения обоих представляются функцией полезности Неймана—Моргенштерна.

(A) Сделайте, если можно (или укажите, что нельзя), по этим данным выводы

- о склонности Анатолия и Бориса к риску;
- о совпадении их субъективных оценок вероятностей (оба актива доступны обоим);
- о статистической зависимости (независимости) выигрыша банка «Чара» и МММ.

(B) Предположим, что на следующий день А и Б обменялись информацией и имеют уже одинаковые субъективные вероятности выигрыша банка «Чара» и МММ — 0,5 и = 0,5 соответственно, считая их жестко отрицательно коррелированными, и могут заключать друг с другом любые условные контракты. Можно ли утверждать, что ненулевой обмен акций банка «Чара» на акции МММ произойдет, или нужны дополнительные предположения относительно функций $u_a(\cdot)$, $u_b(\cdot)$? Можно ли предсказать, что 50 акций банка «Чара» обменяют на 50 акций МММ, или для этого нужны дополнительные условия на функции $u_a(\cdot)$, $u_b(\cdot)$? Можно ли предсказать Парето-эффективность результата обмена?

(C) Как изменятся ответы на указанные вопросы, если считать акции жестко положительно коррелированными?

(D) Та же ситуация, что в пункте (B), но возможные контракты ограничены двумя типами: или за \$1 сегодня и одну акцию МММ две акции банка «Чара», или за \$1 сегодня и m акций Чары две акции МММ. Записать задачу Анатолия в форме модели Раднера. Гарантирован ли Парето-эффективный результат обмена?

Эта страница должна быть пустой!

Именной указатель

Предметный указатель

Г

Д

З

М

Н

О

Р

С

Т

У

Учебное издание

Владимир Петрович Бусыгин
Евгений Владимирович Желободько
Александр Анатольевич Цыплаков

Микроэкономика
третий уровень
в 2 томах
Том I

Редактор *И. Г. Зыкова*
Подготовка оригинал-макета *А. А. Цыплаков*

Подписано в печать 14.01.08. Формат 60×90/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 32,8. Уч.-изд. л. 26,8. Тираж 500 экз. Заказ № 6.

Издательство Сибирского отделения РАН
630090 Новосибирск, Морской проспект, 2
E-mail: psb@ad-sbras.nsc.ru
Тел.: (383) 330-80-50
Интернет-магазин Издательства СО РАН
http://sibran.ru