Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

6 февраля 2023 г.

План

План

В первой половине лекции мы рассмотрим две важные темы: налогообложение, и понятия чистых субститутов и комплементов.

Во второй половине лекции мы поговорим о компенсирующих вариациях и Матрицах Слуцкого.

Напомним себе

Напомним себе

	КД-1	КД-2	Леонтьев	Линейная
U	$\alpha \log x + \beta \log y$	$x^{\alpha} y^{\beta}$	$\min(x/a, y/b)$	$x/a + y/b$
m_x	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{I}{p}$	...	$\frac{ap}{ap+bq} \frac{I}{p}$	$\frac{I}{p}$ или 0
V	$(\alpha + \beta) \log I -$ $-\alpha \log p - \ldots$	$\frac{I^{\alpha+\beta}}{p^{\alpha} q^{\beta}} \cdot K_1$	$\frac{I}{ap+bq}$	$\frac{I}{\min(ap,bq)}$
E	$(\frac{p^{\alpha} q^{\beta}}{K_1} log \bar{U})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$	$(\frac{p^{\alpha} q^{\beta}}{K_1} \bar{U})^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$	$(ap + bq) \cdot \bar{U}$	$\min(ap, bq) \cdot \bar{U}$
h_x	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} p^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \cdot K_2$	...	$a \cdot \bar{U}$	$a \cdot \bar{U}$ или 0

Константы K_1, K_2 вычислите сами.

Больше задач

Задача 1

Петя на завтрак ест омлет и x_1 яиц и x_2 стаканов молока, и испытывает полезность

$$U_{om}(x_1, x_2) = \log x_1 + 3 \log x_2$$

а также салат из y_1 помидоров из y_2 моцареллы

$$U_{salad}(y_1, y_2) = \min(y_1, y_2).$$

Омлет и салат являются совершенными субститутами.

$$U(\vec{x}, \vec{y}) = U_{om}(\vec{x}) + U_{salad}(\vec{y}).$$

Посчитайте в каком соотношении Петя разделит 1000 руб. между двумя блюдами, если цены товаров равны 1,2,3,4 руб.

Задача 2

Петя на завтрак ест омлет и x_1 яиц и x_2 стаканов молока, и испытывает полезность

$$U_{om}(x_1, x_2) = x_1/2 + x_2/3$$

а также салат из y_1 помидоров из y_2 моцареллы

$$U_{salad}(y_1, y_2) = \sqrt{y_1 y_2}.$$

Омлет и салат являются совершенными комплементами.

$$U(\vec{x}, \vec{y}) = \min(U_{om}(\vec{x}), U_{salad}(\vec{y})).$$

Посчитайте в каком соотношении Петя разделит 1000 руб. между двумя блюдами, если цены товаров равны 1,2,3,4 руб.

Больше задач

Задача 3

Петя ест на завтрак бутерброд из черной икры x и хлеба y:

$$U_{bb}(x, y) = \log x + 2\log y$$

Цену хлеба нормируем к 1 а цена черной икры пусть равна p. Всего у Пети есть 1000 рублей, но запрещено покупать более 1 банки черной икры (на руки).

Задача 3

- Сформулируйте задачу максимизации полезности
- Является ли она выпуклой
- Выпишите УПП
- При каких ценах решение внутреннее?
- Выпишите ответ.

Задача 4

Петя ест на завтрак бутерброд из черной икры x и хлеба y:

$$U_{bb}(x, y) = \min(x, 2y)$$

Цену хлеба нормируем к 1 а цена одной банки черной икры пусть равна p. Всего у Пети есть 1000 рублей, но запрещено покупать более 1 банки черной икры (на руки). Однако, можно (до-)купить икру на черном рынке по удвоенной цене $2p$.

Задача 4

- Сформулируйте задачу максимизации полезности
- Является ли она выпуклой
- Выпишите необходимые условия (УПП или их аналог)
- Пойдет ли Петя на черный рынок?
- Выпишите ответ.

Налоги

Налоги

Исторически сложилось так, что государство финансирует свою деятельность, а также производство общественных благ за счет налогообложения. Есть три вида налогов:

- подоходный фиксированный, или паушальный (от нем. "Pauschale"), налог
- подоходный пропорциональный налог
- товарный налог

В разные периоды времени разные налоги пользовались популярностью.

Паушальный налог

Простота паушального налога в том, что его можно ввести практически моментально, и его имплементация сводится к знанию своих подданных в лицо. Однако вы не можете установить паушальный налог больше, чем, грубо говоря, минимальный прожиточный минимум.

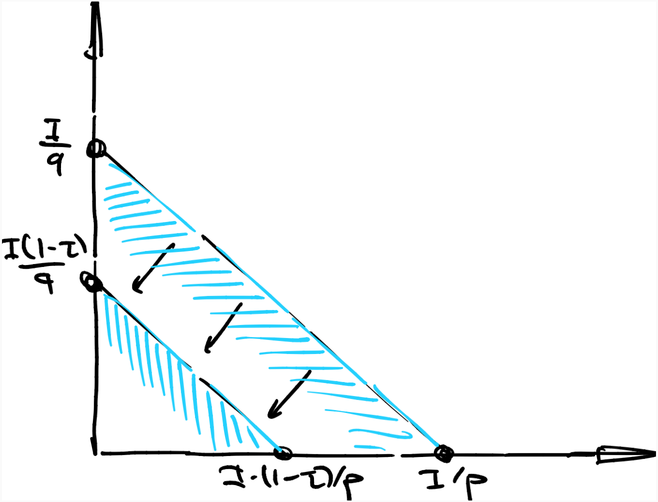
То есть, чтобы собрать большую сумму паушальным налогом, вам придется освободить какую-то часть населения от этих налогов. Как только вы начинаете дискриминировать, то есть говорить кому платить, а кому не платить налог, он становится в какой-то степени пропорциональным.

Пропорциональный налог

Обычный пропорциональный налог означает, что каждый агент платит пропорционально своему доходу. К примеру, когда король Ричард Львиное Сердце попал в плен, английской короне пришлось платить выкуп за счет временного пропорционального налогообложения размером 25%.

Таким образом, удалось в короткие сроки собрать огромную по тем временам сумму, примерно составляющую трехгодовой объем английской казны.

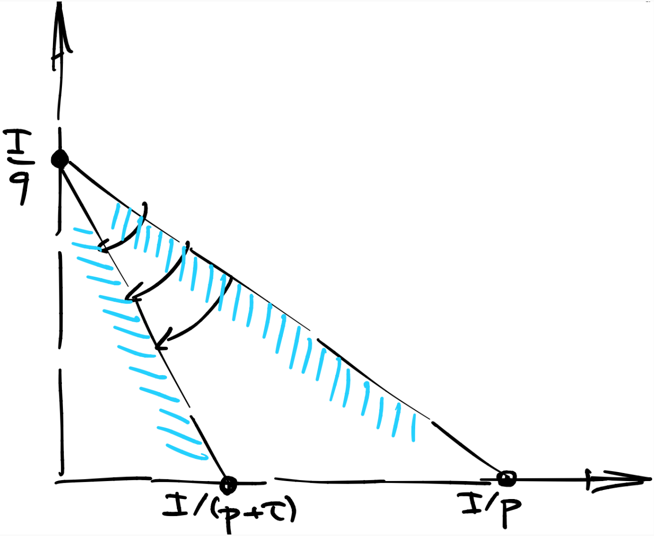
Подоходные налоги



Товарный налог

Товарный налог хорошо адаптируется под быстро меняющуюся экономику. Например, если какой-то город начинает экономически расти, растут требования к окружающей его инфраструктуре: дороги, дома для рабочих, школы и университеты и так далее. Но также растут продажи товаров и услуг и, соответственно, растут налоговые сборы, покрывающие инвестиции в инфраструктуру.

Товарный налог



Налоги

Задача налогообложения может быть сформулирована как либо максимизация чистых налоговых сборов, либо максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах.

На выбор есть подоходный и товарный налог.

Налоги в Коббе-Дугласе

Кобб-Дуглас

Рассмотрим полезность Кобба-Дугласа

$$U(x, y) = \alpha \log x + \beta \log y$$

и введем налог размера τ. Наш анализ оптимального налогообложения будет сильно зависеть от того, с какой легкостью мы выписываем косвенную полезность.

Кобб-Дуглас

Если налог подоходный (доля τ), то налоговые сборы будут равны $T = \tau I$ а косвенная полезность:

$$V(p, q, I|\tau) = (\alpha + \beta)\log I + \log(1 - \tau) - \alpha \log(p) - \beta \log(q) + C$$

Максимизация чистых налоговых своров тут не представляет сложности - надо просто выставить $\tau = 1$, то есть отобрать все деньги.

Максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах тоже тривиальна: $\tau = T/I$.

Кобб-Дуглас

Пусть товарные налоги равны τ_x, τ_y соответственно, тогда косвенная полезность равна:

$$V(p, q, I|\tau_x, \tau_y) = (\alpha + \beta)\log I - \alpha\log(p + \tau_x) - \beta\log(q + \tau_y) + C$$

а налоговые сборы:

$$T = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{I}{p+\tau_x}\tau_x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{I}{q+\tau_y}\tau_y$$

Кобб-Дуглас

Максимизация чистых налоговых сборов – это задача безусловной оптимизации:

$$T = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} I \frac{\tau_x}{p + \tau_x} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} I \frac{\tau_y}{q + \tau_y}$$

У этой задачи смешное решение: необходимо назначить бесконечно большой налог на оба товара, тогда удастся собрать, в пределе, точно I.

Это не очень реалистично.

Кобб-Дуглас

Максимизация косвенной полезности при фиксированных налоговых сборах – это задача условной оптимизации.

Она уже более интересная:

$$-\alpha \log(p + \tau_x) - \beta \log(q + \tau_y) \to \max$$

При ограничении

$$\alpha \frac{\tau_x}{p + \tau_x} + \beta \frac{\tau_y}{q + \tau_y} \geqslant (\alpha + \beta) \frac{T}{I}$$

или

$$\alpha \frac{-p}{p + \tau_x} + \beta \frac{-q}{q + \tau_y} \geqslant (\alpha + \beta)(\frac{T}{I} - 1)$$

Является ли эта задача выпуклой?

Кобб Дуглас

$$\mathcal{L} = -\alpha \log(p + \tau_x) - \beta \log(q + \tau_y) + \lambda(\alpha \frac{-p}{p + \tau_x} + \beta \frac{-q}{q + \tau_y})$$

Условия первого порядка по τ_x, τ_y:

$$-\frac{\alpha}{p + \tau_x} + \lambda \frac{\alpha p}{(p + \tau_x)^2} = 0, \quad -\frac{\beta}{q + \tau_y} + \lambda \frac{\beta q}{(q + \tau_y)^2} = 0$$

Другими словами,

$$\frac{p + \tau_x}{p} = \lambda = \frac{q + \tau_y}{q}$$

То есть кажется, что оптимальные налоги должны быть выставлены пропорционально ценам (это же НДС!!!).

Кобб Дуглас

Нам очень повезло, и Гессиан, действительно, отрицательно определен:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial^2 \tau_x} = \frac{-\alpha}{(p+\tau_x)^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial^2 \tau_y} = \frac{-\beta}{(p+\tau_y)^2}$$

Значит наше внутреннее решение - локальный оптимум.

Кобб Дуглас

Складывается впечатление, что оптимальные налоги в Кобб-Дугласе устроены так, что они не меняют доли расходов, потраченные на каждый товар. Более того, если присмотреться, то этот налог эквивалентен подоходному налогу, ведь он тоже не меняет доли.

Другими словами, когда товарные налоги пропорциональны ценам в Кобб-Дугласе, то бюджетное множество сдвигается параллельно, в точности как у подоходного налога.

Кобб Дуглас

Мы только что доказали, хоть и в малой общности, оптимальность единого НДС.

Lemma 1 (Оптимальность НДС)

Оптимальный налог в Кобб-Дугласе это единый НДС.

Правило Рамсея

Фрэнк Рамсей

Фрэнк Рамсей (Frank Plumpton Ramsey) британский математик и экономист начала 20 века. Своей целью он ставил минимизировать ненужные потери общества при потреблении путём введения дифференцированной ставки налогообложения на различные товары.

Правило Рамсея

Это в точности максимизация косвенной полезности при зафиксированных налоговых сборах:

$$\mathcal{L} = V(p+\tau_x, q+\tau_y)$$
$$-\lambda(\tau_x m_x(p+\tau_x, q+\tau_y) + \tau_y m_y(p+\tau_x, q+\tau_y) - T)$$

Выпишем условия первого порядка (по τ_x, τ_y):

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \lambda[\tau_x \frac{\partial m_x}{\partial p} + m_x], \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \lambda[\tau_y \frac{\partial m_y}{\partial q} + m_y]$$

Вспомним тождество Роя:

$$-\frac{\partial V}{\partial I} m_x = \lambda[\tau_x \frac{\partial m_x}{\partial p} + m_x], \quad -\frac{\partial V}{\partial I} m_y = \lambda[\tau_y \frac{\partial m_y}{\partial q} + m_y]$$

Правило Рамсея

несколько хитрых операций с дробями и получим

$$\frac{m_x}{m_y} = \frac{\tau_x \frac{\partial m_x}{\partial p} + m_x}{\tau_y \frac{\partial m_y}{\partial q} + m_y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_x \frac{\partial m_y}{\partial q}}{m_y \frac{\partial m_x}{\partial p}} = \frac{\tau_x}{\tau_y}$$

Мы только что доказали (немножко игнорируя вопросы выпуклости) один из самых нетривиальных фактов в теории оптимального налогообложения, называемое Правилом Рамсея.

Правило Рамсея

То же самое правило можно получить если минимизировать функцию расходов агента вместо максимизации его полезности:

$$\mathcal{L} = E(p + \tau_x, q + \tau_y) +$$
$$+\lambda(\tau_x h_x(p + \tau_x, q + \tau_y) + \tau_y h_y(p + \tau_x, q + \tau_y))$$

Выпишем условия первого порядка (по τ_x, τ_y) вспоминая по ходу Лемму Шепарда (i.e., Теорему об Огибающей):

$$h_x = \frac{\partial E}{\partial p} = \lambda[\tau_x \frac{\partial h_x}{\partial p} + h_x], \quad h_y = \frac{\partial E}{\partial q} = \lambda[\tau_y \frac{\partial h_y}{\partial q} + h_y]$$

Правило Рамсея

Lemma 2

Оптимальные налоговые ставки (в процентах) обратно пропорциональны эластичностям (маршаллианского в основной задаче и хиксианского в двойственной) спроса:

$$\frac{\tau_x/p}{\tau_y/q} = \frac{-1/\varepsilon_{x,p}}{-1/\varepsilon_{y,q}},$$

другими словами, менее эластичные товары должны облагаться более сильным налогом, чем более эластичные.

Прямо как в задаче монополиста.

Чистые субституты и комплементы

Чистые субституты и комплементы

Напомню, что первое определение субститутов и комплементов опиралось на перекрестные производные (маршаллианских) спросов по ценам.

Несмотря на кажущуюся простоту и интуитивность этого определения, ничего не сдерживало нас от построения таких примеров, где товар был бы субститутом к y, при этом y был комплементом к x.

Сейчас мы дадим альтернативное определение субститутов и комплементов. Для экспозиции предположим два товара $, y$ с ценами p, q.

Чистые субституты и комплементы

Definition 3

Чистыми субститутами называются пары товаров:

$$\frac{\partial h_x}{\partial q} > 0, \quad \frac{\partial h_y}{\partial p} > 0.$$

Чистыми комплементами называются пары товаров:

$$\frac{\partial h_x}{\partial q} \leqslant 0, \quad \frac{\partial h_y}{\partial p} \leqslant 0.$$

Чистые субституты и комплементы

На первый взгляд, не совсем понятно, чем помогает замена Маршалианского спроса на Хиксианский в определении. Однако, поскольку Хиксианский спрос – это градиент функции расходов, градиент Хиксианского спроса – это Гессиан функции расходов.

А Гессиан, он же матрица Гесса - симметричная матрица.

Чистые субституты и комплементы

Lemma 4

Пусть h - весь вектор Хиксианского спроса, тогда

$$\nabla \vec{h} = \nabla^2 E \quad \Rightarrow \quad \nabla \vec{h} = (\nabla \vec{h})^T.$$

Другими словами, перекрестные производные Хиксианского спроса по ценам - симметричны и нет больше никакого противоречия. Чистая субститутабильность и комплементарность – это свойство пары товаров, неважно как эта пара упорядочена.

Попробуем ответить на вопрос (на доске) являются ли товары попарно чистыми субститутами в моделях Кобб-Дугласа, Леонтьева и линейной полезности.

Перерыв

Компенсирующие и эквивалентные вариации

Вариации

Мы освоили технику оптимального налогообложения. Это очень удобно, но иногда все равно приходится идти на попятную и точечно корректировать доход отдельным людям, возможно, из социально незащищенных слоев населения.

Поставим задачу вычисления денежной компенсации, которая сбалансирует экзогенное повышение цен, связанное с санкциями или еще чем-то. Сделать это можно двумя способами: при помощи компенсирующей и эквивалентной вариации.

Компенсирующая вариация

Предположим, что полезность агентов была изначально на уровне $\bar{U}_0$ и произошло смещение цен $p \to p'$. Как правило, нас интересует именно повышение цен.

Например, из за санкций повысились цены на кофейные картриджи nespresso, потому что их возят через Казахстан.

Также выросли цены на gps-чипы, которые используются в высокотехнологичных изделиях: дронах, смартфонах итп.

Полезность агентов, конечно же, упала на новый уровень $\bar{U}_1$.

Компенсирующая вариация

Определим компенсирующую вариацию как надбавку к доходу, которая вернет полезность на старый уровень $\bar{U}_0$, подразумевая что цены так и останутся на завышенном уровне.

Definition 5

Компенсирующая вариация определяется как изменение в расходах, ассоциированных со старым уровнем полезности

$$CV = E(p', \bar{U}_0) - E(p, \bar{U}_0), \quad \bar{U}_0 = U(x^*(p), y^*(p))$$

Другими словами, государство как бы говорит: "извините, мы вам все возместим, мы вам все компенсируем".

Эквивалентная вариация

Предположим, что опять смещение цен $p \to p'$ и что полезность агентов упала до уровня $\bar{U}_1$. Однако, в этот раз пусть это будет обратимое действие.

Например, в Думу было предложено равномерно увеличить налог НДС. Союз пенсионеров рассчитывает дать взятку лидеру партии, чтобы заблокировать этот проект.

Чему равен максимальный размер такой взятки?

Эквивалентная вариация

Определим эквивалентную вариацию как уменьшение дохода, которая оставит полезность на новом измененном уровне $\bar{U}_1$, подразумевая что цены откатятся назад.

Definition 6

Эквивалентная вариация определяется как изменение в расходах, ассоциированных с новым уровнем полезности

$$EV = E(p', \bar{U}_1) - E(p, \bar{U}_1), \quad \bar{U}_1 = U(x^*(p'), y^*(p'))$$

Другими словами, государство как бы говорит: "заплати мне столько то и я верну все назад, однако для тебя это эквивалентно тому что уже есть".

Медленный подсчет вариаций через E

К примеру, в Леонтьевской полезности функция расходов выписывается быстро, если вспомнить, что левый и правый аргумент функции минимума обязаны давать одно и то же значение в оптимуме:

$$h_x = a\bar{U}, \quad h_y = b\bar{U}, \quad E = (pa + qb)\bar{U}$$

Медленный подсчет вариаций через E

Далее, если цены перешли $(p, q) \to (p', q')$, то полезность перешла

$$\bar{U}_0 = \frac{I}{pa + qb} \quad \to \quad \bar{U}_1 = \frac{I}{p'a + q'b}$$

Получается, что

$$CV = (p'a + q'b - pa - qb)\frac{I}{pa + qb}$$
$$EV = (p'a + q'b - pa - qb)\frac{I}{p'a + q'b}.$$

Вот и все.

Быстрый подсчет вариаций через V

CV и EV – это решения достаточно простых нелинейных уравнений:

$$V(p,q,I) = \bar{U}_0 = V(p',q',I+CV)$$
$$V(p,q,I-EV) = \bar{U}_1 = V(p',q',I)$$

Преимущество этого подхода в том, что сами уровни полезности вам считать не надо, можно сэкономить на выкладках. К тому же, аддитивные и мультипликативные константы (не зависящие от цен) быстро сокращаются.

Быстрый подсчет вариаций через V

Компенсирующая вариация в КД:

$$(\alpha + \beta) \log I - \alpha \log p - \beta \log q =$$
$$= (\alpha + \beta) \log(I + CV) - \alpha \log p' - \beta \log q'$$

Получается

$$(\alpha + \beta) \log(\frac{I + CV}{I}) = \alpha \log(\frac{p'}{p}) + \beta \log(\frac{q'}{q})$$

Такое уже совсем просто решить.

Быстрый подсчет вариаций через V

Эквивалентная вариация в КД:

$$(\alpha+\beta)\log(I-EV)-\alpha\log p-\beta\log q=$$
$$=(\alpha+\beta)\log I-\alpha\log p'-\beta\log q'$$

Получается

$$-(\alpha+\beta)\log(\frac{I-EV}{I})=\alpha\log(\frac{p'}{p})+\beta\log(\frac{q'}{q})$$

Такое уже совсем просто решить.

Первое приближение

Первое приближение

Посмотрим внимательно на компенсирующую вариацию:

$$\log(1+\frac{CV}{I}) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\log(1+\frac{\delta p}{p}) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\log(1+\frac{\delta q}{q})$$

Разлагая в ряд Тейлора получаем

$$\frac{CV}{I} \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\delta p}{p} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{\delta q}{q}$$

Это читается так: если цена p выросла на $X\%$ а цена q выросла на $Y\%$ то компенсирующая вариация должна увеличить бюджет на $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}X + \frac{\beta}{\alpha+\beta}Y$ процентов, в первом приближении.

Первое приближение

Посмотрим еще раз

$$\frac{CV}{I} \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\delta p}{p} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{\delta q}{q}$$

Заметим, что

$$CV \approx m_x(p,q)\delta p + m_y(p,q)\delta q.$$

То есть, чтобы сосчитать компенсирующую вариацию в первом приближении, мы просто берем старый уровень потребления и смотрим на приращение расходов.

Первое приближение

Это не случайность. Дело в том, что мы могли бы разложить в ряд Тейлора CV сразу по определению...

$$CV = E(\vec{p} + \delta\vec{p}, \bar{U}) - E(\vec{p}, \bar{U})$$

... и в матричной форме, тогда

$$CV \approx \nabla E \cdot \delta\vec{p}$$

а что такое ∇E???

Первое приближение

Это не случайность. Дело в том, что мы могли бы разложить в ряд Тейлора CV сразу по определению...

$$CV = E(\vec{p} + \delta\vec{p}, \bar{U}) - E(\vec{p}, \bar{U})$$

... и в матричной форме, тогда

$$CV \approx \nabla E \cdot \delta\vec{p} = \vec{h} \cdot \delta\vec{p}, \quad \frac{CV}{I} \approx \vec{s} \cdot \frac{\delta\vec{p}}{p}$$

а что такое ∇E??? Это же Хиксианский спрос!

То есть, процентное увеличение цен надо взвесить пропорционально долям ($\vec{s}$ - share) товаров в расходах, и это будет приближенно CV, в процентах.

Второе приближение

Второе приближение

Зафиксируем q, и пусть меняется только цена p.

Определим $\delta p = p' - p$ как приращение цены. Мы хотим приблизить нелинейное уравнение

$$\log(1 + \frac{CV}{I}) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \log(1 + \frac{\delta p}{p})$$

подставим все в экспоненту

$$1 + \frac{CV}{I} = (1 + \frac{\delta p}{p})^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

Второе приближение

разложим в ряд Тейлора до второго члена

$$1 + \frac{CV}{I} = 1 + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{\delta p}{p} - \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(\frac{\delta p}{p})^2 + \dots$$

То есть, CV во втором приближении чуть меньше чем в первом

$$\frac{CV}{I} = s_x(\frac{\delta p}{p}) - \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(\frac{\delta p}{p})^2.$$

Это происходит из за того, что люди не стоят как вкопанные со своими спросами, а замещают подорожавшие товары на другие, похожие.

А что если несколько цен меняются одновременно?

Второе приближение

Почему бы не разложить в ряд Тейлора CV до 2 порядка?

$$CV = E(\vec{p} + \delta\vec{p}, \bar{U}) - E(\vec{p}, \bar{U})$$

... и в матричной форме, тогда

$$CV \approx \nabla E \cdot \delta\vec{p} + \frac{(\delta\vec{p})^T \nabla^2 E \delta\vec{p}}{2}$$

а что такое $\nabla^2 E$???

Второе приближение

Почему бы не разложить в ряд Тейлора CV до 2 порядка?

$$CV = E(\vec{p} + \delta\vec{p}, \bar{U}) - E(\vec{p}, \bar{U})$$

... и в матричной форме, тогда

$$CV \approx \nabla E \cdot \delta\vec{p} + \frac{(\delta\vec{p})^T \nabla^2 E (\delta\vec{p})}{2}$$

а что такое $\nabla^2 E$??? Это же просто матрица вторых производных для функции расходов. Кстати, E вогнута, так что второй член в разложении обязательно отрицательный.

Второе приближение

Давайте посмотрим, что ли, на эту матрицу.

Пусть $E(p, q, I) = p^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} K_3$, как в КД.

$$\nabla^2 E = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{-\beta}{\alpha+\beta} \frac{1}{p^2} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{1}{pq} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{1}{pq} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{-\alpha}{\alpha+\beta} \frac{1}{q^2} \end{pmatrix} p^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} q^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} K_3$$

или

$$\nabla^2 E = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{p^2} & \frac{1}{pq} \\ \frac{1}{pq} & -\frac{1}{q^2} \end{pmatrix} E$$

Обратите внимание, что левый верхний элемент в точности совпал с тем что было во втором приближении, если учесть что $E = I$. Матрица $\nabla^2 E$ называется матрица замещения или матрица Слуцкого S (substitution, Slutsky).

Евгений Слуцкий

Евгений Евгеньевич Слуцкий советский математик и экономист начала 20 века. Из за него студенты экономики во всех университетах мира льют крокодиловы слезы, пытаясь понять его матрицы и уравнения.

Второе приближение

Например, если у вас Кобб Дуглас с одинаковыми весами

$$\frac{CV}{I} \approx \frac{\frac{\delta p}{p} + \frac{\delta q}{q}}{2} - \frac{(\frac{\delta p}{p} - \frac{\delta q}{q})^2}{8}$$

Например, если товар x подорожал на 5 процента (1/20), а товар y на 25 процентов (1/4), то в первом приближении CV равно 15 процентов от дохода (среднее арифметическое). Однако, во втором приближении CV меньше на $\frac{(1/5)^2}{8} = \frac{1}{200}$ то есть, на целых пол процента!!!

Конец лекции