

Микроэкономика-I

Павел Андреянов, PhD

19 января 2023 г.

Программа курса

- Теория Потребителя
 - Модель: товары $x, y \rightarrow$ полезность $U(x, y)$
 - Максимизация полезности
 - Предпочтения, спрос, эластичность...
 - CV, EV
- Теория Производителя
 - Модель: ресурсы $x, y \rightarrow$ производство $F(x, y)$
 - Максимизация прибыли (минимизация издержек)
 - Технологии, предложение, эластичность...
- Частичное равновесие
 - налоги, потолки, DWL

Сквозная идиома: конкурентный рынок для x, y , то есть товары и ресурсы покупаются по стабильным (и экзогенным, от греч. $-γεν\epsilon\varsigma$ рожденный и $εχ\omicron$ - снаружи) рыночным ценам p, q .

Наша задача: научить вас формулировать базовые микро-экономические задачи на языке моделей, решать их и интерпретировать результаты.

Лектор: Павел Андреянов (pandreyanov@gmail.com/hse.ru)

Семинаристы: Даша, Яна

Учебники:

- Вэриан (V) и Ехил Рени (JR), есть русские версии
- Бусыгин, Желободько, Цыплаков (BZC) том I,II
- Мас Колел (MC)

Прочие ресурсы:

- телеграм: `channel_micro_2023`, `forum_micro_2023`
- офис аурз: TBD
- консультации и тестовые контрольные
- `pandreyanov.github.io/pashas_micro_one_lectures`



План на первую половину лекции (2 часа)

Модели поведения потребителя.

Мы поговорим подробно о первых двух моделях (полезность и предпочтения) и, вскользь о третьей модели (выбор). Большой упор будет сделан на понятия непрерывности и выпуклости.

Затем, мы попробуем отождествить некоторые из этих моделей между собой. В частности, будет обсуждена относительно простая прямая связь между полезностью и предпочтениями.

Вершиной этого блока будет обратная связь между предпочтениями и полезностью, так называемая, **Теорема Дебре**. После нее надо сделать перерыв.

Три модели потребителя

Три модели потребителя

Три конкурирующих модели поведения потребителя:

- полезность (классика)
- предпочтения (нео классика)
- выбор

Различия между ними скорее философские.

Полезность

В модели полезности (классика) у каждого агента в голове зашита функция полезности, которая переводит любой **портфель** потребительских товаров в вещественное число с мистической единицей измерения «**утили**».

- 3 куба, 1 круг = 8 утилей
- 12 конусов = 60 утилей
- 1 конус, 4 круга = 3 утиля

Агенты сравнивают утили и принимают экономические решения, дабы их максимизировать. Это самая старая модель, поэтому мы будем называть ее **классической**.



Полезность определена с точностью до монотонного преобразования. Это серьезная проблема, это значит, что модель невозможно толком **откалибровать**.

Действительно, все нижеперечисленные полезности неразличимы с точки зрения эконометриста.

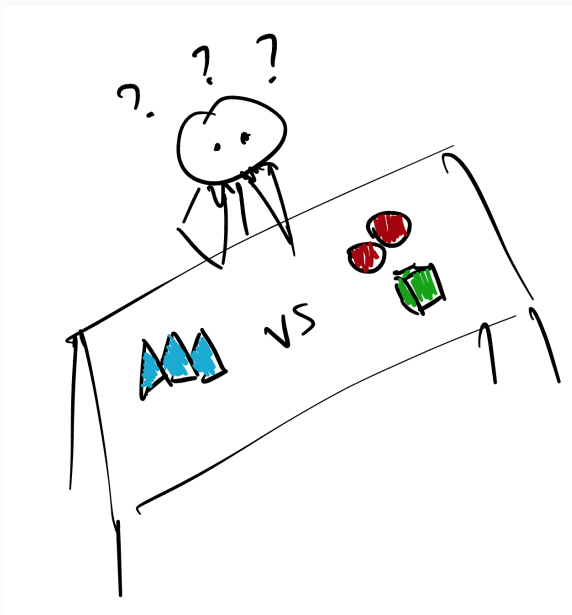
- x^2y^3
- $2 \log x + 3 \log y$
- $2 \log x + 3 \log y + 1$
- $5(2 \log x + 3 \log y) + 1$

Необходимо либо мыслить в терминах классов эквивалентности полезностей, либо придумывать что-то новое.

Предпочтения

В модели предпочтений от агентов требуется, казалось бы, меньше. Они должны в моменте сравнить два портфеля и назвать лучший. Другими словами, они должны озвучить предпочтения.

Мы будем называть эту модель **неоклассической**.



Предпочтения

Однако этот минимализм обманчив. Чтобы оставаться экономическими агентами, они должны помнить все свои выборы, это матрица $n \times n$, где n - это число возможных портфелей. Например, если альтернативы три a, b, c :

\succsim	a	b	c
a	1	0	1
b	1	1	0
c	1	0	1

Значок \succsim означает предпочтение.

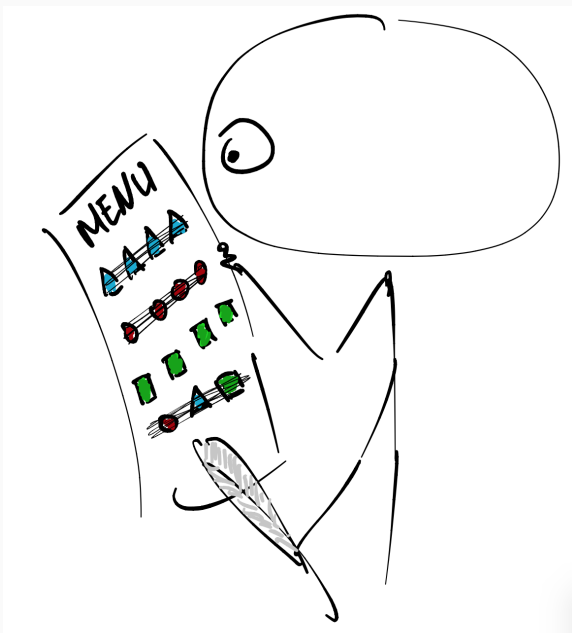
Так уж это проще чем функция? Непонятно. Однако, здесь уже отсутствует проблема представления поведения потребителя двумя разными моделями.

Выбор

В модели выбора от агентов требуется принимать решения, максимально приближенные к реальности. Вам предлагают меню из: (a, b, c) , (a, b) , (a, c) , (b, c) , (a) , (b) , (c) .

И вы просто вычеркиваете то, что вам точно не нравится. Все что вы не вычеркнули - это и есть ваш выбор (**choice**).

Эта модель требует от экономического агента знать не свою функцию полезности, и даже не n^2 готовых ответов, как в предпочтениях, а целых 2^n готовых ответов.



Можно долго спорить, какая из этих моделей более или менее реалистичная. Правильный ответ - они все нереалистичные.

- агент должен знать ответы на все вопросы
- ответ не может меняться во времени

Более того, реализм вообще не является добродетелью. Вся суть модели в том, чтобы подняться на другой уровень абстракции и рассуждения, отличающийся от жизненного.

**Потренируемся в
моделировании**

Какую модель вы бы выбрали для описания следующих жизненных задач? и почему

- купить продуктов в магазине
- выбора университета
- выбора мужа/жены/партнера
- голосования в думу
- одежду отдать в приют или оставить себе

Задачу похода в магазин можно сформулировать так:

- У вас есть максимальный бюджет, например 700 рублей
- Вам надо купить несколько предметов обязательно: зубная паста, хлеб, молоко. Вы потратите 350 рублей.
- На оставшиеся 250 рублей вы можете купить еще один батончик, чтобы побаловать себя: твикс, баунти или марс.

Чтобы описать поведения потребителя в такой постановке, достаточно знать ваши предпочтения на множестве из трех батончиков.

Задачу похода в магазин можно сформулировать по другому:

- Родители дали вам 2000 рублей сводить одноклассников на день рождения в макдональдс
- Вы имеете право потратить все
- Вы хотите купить картошки, бургеров и колы чтобы всем досталось всего по чуть чуть.

Чтобы описать поведения потребителя в такой постановке, необходимо знать полезность $U(x, y, z)$ от потребления x единиц картошки, y единиц бургеров и z единиц колы, а также действующие цены.

Классическая модель

Классическая модель

Модель полезности обладает высоким уровнем абстракции

- начнем с одного агента
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в \mathbb{R}_+^n
- категории, а также координаты обозначаются x, y, z, \dots
- соответствующие цены обозначаются p, q, y, \dots
- полезность обозначается $U(x, y, z, \dots)$
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}_+^n$

Множество альтернатив будет, как правило, зависеть от цен и бюджета. Плюсик в \mathbb{R}_+^n означает неотрицательные значения потребления, мы иногда называем это множество **первый/положительный ортант Евклидова пространства**.

Таким образом, мы можем сформулировать модель потребителя как абстрактную оптимизационную задачу, скажем, для трех товаров:

$$U(x, y, z, \dots) \rightarrow \max_{(x, y, z, \dots) \in X}$$

Формально **классическая (утилитарная) модель** это пара: множество альтернатив $X \subset \mathbb{R}_+^n$ и полезность $U : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Никаких дополнительных аксиом не требуется.

Пример 1

У Пети есть 100 рублей. Он может купить яблоки (x) по цене 20 рублей за штуку либо груши (y) по цене 50 рублей за штуку. Петя получает полезность 2 за каждое яблоко и 3 за каждую грушу, но не получает никакой полезности за оставшиеся деньги.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y) \in \mathbb{N}_+^2 : 20x + 50y \leq 100\}$
- $U(x, y) = 2x + 3y$

Здесь \mathbb{N}_+^2 это **решетка из целых значений**, потому что нельзя покупать нецелые яблоки и груши.

Пример 2

У Кати есть 24 часа в сутки, из которых она должна как минимум 8 часов поспать (x), а дальше она учится и занимается. Однако, на каждый час учебы (y) нужен один час отдыха (z), и наоборот, иначе время проходит зря.

Попробуем записать это формально:

- $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x + y + z \leq 24\}$
- $U(x, y, z) = \mathbb{I}(x \geq 8) \cdot \min(x, y)$

Здесь $\mathbb{I}(x \geq 8)$ это **индикатор-функция**, принимающее значение 1 когда выражение в скобках выполнено, иначе 0.

Свойства полезности

Мы начнем с двух эквивалентных определений непрерывности.

Definition 1

Полезность U **непрерывна** в X , если для любого $x \in X$ множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ замкнуты, где

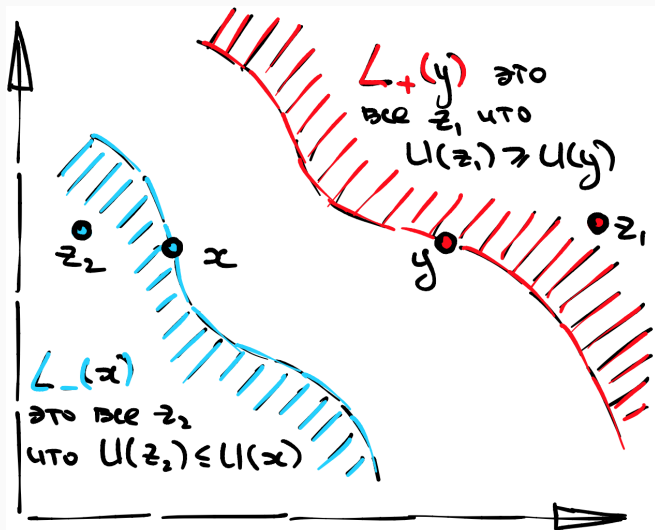
$$L_+(x) = \{y \in X : U(y) \geq U(x)\}$$

$$L_-(x) = \{y \in X : U(y) \leq U(x)\}$$

Описанные выше множества $L_+(x)$ (или $L_-(x)$) - это подмножества допустимых альтернатив, которые не хуже (или не лучше), чем сам $x \in X$.

Их часто называют **Лебеговыми множествами** относительно точки x , $L_+(x)$ - верхним а $L_-(x)$ - нижним.

Непрерывность



Эквивалентное (но только в Евклидовых пространствах) определение непрерывности можно дать на более знакомом вам с курса мат. анализа языке эпсилон-дельта.

Definition 2

Полезность U **непрерывна** в X , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такой что для любых $x, y \in X$:

$$\|x - y\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|U(x) - U(y)\| < \varepsilon.$$

Но оно практически бесполезно.

Следующее важное определение - это вогнутость.

Definition 3

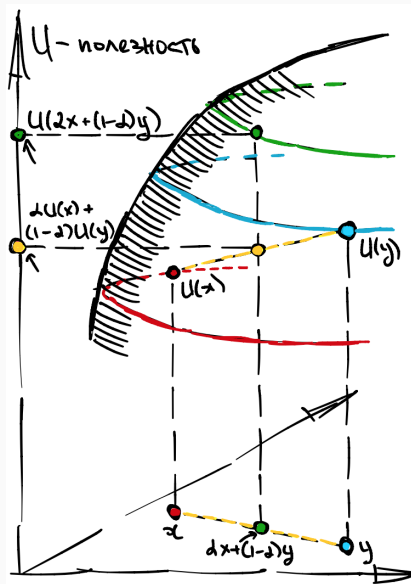
Полезность U **вогнута**, если для любых $x, y \in X$:

$$\forall \alpha \in (0, 1) : U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y)$$

Многие полезности уже вогнуты сами по себе, например: $ax + by$, $\min(x, y)$, \sqrt{xy} , $x + \log y$, но некоторые такими не являются, например $\max(x, y)$, x^2y^2 .

Вогнутость

Пусть пространство товаров \mathbb{R}_+^2 , для простоты. Тогда график функции это такая поверхность. Можно сказать, что **вогнутая функция** это когда **подграфик** **выпуклый**, либо, **график вогнутой функции** **выглядит как колпак**. Еще одно правило - это **график вогнутой функции** **находится под касательной плоскостью**.



В этом курсе я буду чаще всего пользоваться 2-мерным (1-мерным) пространством товаров, но когда мне надо будет посмотреть на функцию от этих товаров, будет получаться график в соответственно 3-мерном (2-мерном) пространстве.

Постарайтесь не путать ситуацию когда вы смотрите только на область определения функции (\mathbb{R}^n) где живут верхние и нижние Лебеговы множества, с ситуацией когда вы смотрите на область определения с приклеенной к ней осью значений (\mathbb{R}^{n+1}) где живут график и подграфик функции.

Вогнутость

К сожалению, не все могут быстро в уме нарисовать график функции от двух переменных, а тем более от трех переменных, и сказать выглядит он как колпак или нет.

В таких случаях мы применяем **критерий Сильвестра** (какого покажу на следующем слайде) для установления выпуклости/вогнутости дважды дифференцируемой функции.

Если же функция вовсе не дифференцируема, как, например, $\min(x, y)$, нужно проявить смекалку: **минимум вогнутых функций вогнут**, поскольку подграфик минимума это пересечение соответствующих подграфиков, а **пересечение двух выпуклых множеств выпукло**. В данном случае первая вогнутая функция это $f(x, y) = x$, а вторая это $g(x, y) = y$.

Вообще, **линейные функции всегда вогнутые**, запомните.

Критерий Сильвестра

Джеймс Джозеф Сильвестер

(James Joseph Sylvester)

английский и американский математик второй половины 19 века, профессор Университета Джон Хопкинс и позже Оксфорда. Изобрел матрицы, дискриминанты, и, собственно, критерий имени самого себя. Этот критерий заключается в проверке отрицательной определенности матрицы Гесса.



Однако, с вогнутостью есть проблема. Три полезности

- x^2y^2
- \sqrt{xy}
- $\log x + \log y$

задают одни и те же предпочтения однако 2 из них вогнутые а одна - вовсе нет.

Попробуйте определить какие?

Поэтому экономисты придумали свою собственную почти-вогнутость, или **квази-вогнутость** (quasi- от лат. почти). Она, в отличие от истинной вогнутости, полностью оторвана от свойств графика функции.

Definition 4

Полезность U квазивогнута в X , если $\forall x \in X$ верхнее Лебегово множество $L_+(x)$ выпукло.

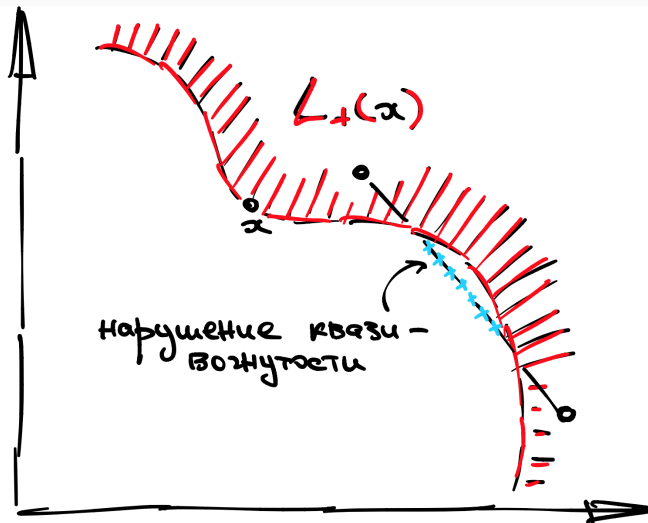
И совершенно эквивалентное ему

Definition 5

Полезность U квазивогнута в X , если для любых $x, y \in X$ их линейная комбинация не хуже, чем худшая из двух:

$$\forall \alpha \in (0, 1) : U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min(U(x), U(y))$$

Квазивогнутость



Вогнутость против квазивогнутости

Лемма 6

Из вогнутости следует квазивогнутость, но не наоборот.

Доказательство.

$$(1) : U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y)$$

$$(2) : \alpha U(x) + (1 - \alpha)U(y) \geq \min(U(x), U(y))$$

$$(1), (2) \Rightarrow U(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \min(U(x), U(y))$$

P.S. Иногда я буду делать приставку «**строго**», это значит, что либо соответствующее множество строго выпукло, либо соответствующее неравенство строгое, смотрите на контекст.

Критика классической модели

Неоднозначность полезности

Для любого строго монотонного преобразования φ , две полезности - $U(x)$ и $\varphi(U(x))$ - производят идентичное поведение у потребителей.

Довольно легко генерировать примеры идентичных функций, используя такие монотонные преобразования, как $\varphi(z) = z + c, cz, \log z$.

$$x^2 y^3,$$

$$2 \log x + 3 \log y,$$

$$2 \log x + 3 \log y + 1,$$

$$2(2 \log x + 3 \log y) + 1.$$

Все выше перечисленные полезности эквивалентны.

Неоднозначность вогнутости

Вогнутость легко ломается при монотонных преобразованиях

Lemma 7

Если $U(x)$ вогнута, то $\varphi(U(x))$ квазивогнута для любого строго монотонного преобразования φ .

Чтобы придумать доказательство, достаточно знать следующие свойства монотонных преобразований:

$$U(x) \leq U(y) \Leftrightarrow \varphi(U(x)) \leq \varphi(U(y))$$

$$U(x) \geq U(y) \Leftrightarrow \varphi(U(x)) \geq \varphi(U(y))$$

$$\min(\varphi(U(x)), \varphi(U(y))) = \varphi(\min(U(x), U(y)))$$

Попробуйте теперь написать доказательство самостоятельно.

Неоднозначность вогнутости

В отличие от вогнутости, квазивогнутость сохраняется при монотонных преобразованиях.

Это верно хотя бы потому, что определение вообще никак не опирается на форму графика полезности, а только на форму его Лебеговых множеств. А **строго монотонные преобразования оставляют Лебеговы множества на месте.**

Lemma 8

Если $U(x)$ квазивогнута, то $\varphi(U(x))$ тоже квазивогнута для любого строго монотонного преобразования φ .

Это делает ее гораздо более удобной, чем просто вогнутость.

Предпочтения

Модель предпочтений еще более абстрактна

- снова один агент
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в \mathbb{R}_+^n
- категории, а также координаты обозначаются x, y, z, \dots
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}_+^n$

Однако вместо полезности $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ у агента в голове зашито бинарное предпочтение $\succsim : X^2 \rightarrow \{0, 1\}$. Что это значит?

Предпочтения

Проще всего визуализировать бинарное отношение на множестве альтернатив малой размерности, например 3.

\succsim	x	y	z
x	1	1	0
y	0	1	1
z	0	1	0

$x \succsim y$ означает что $(x, y) \mapsto 1$.

$x \precsim y$ означает что $(y, x) \mapsto 1$.

Формально, бинарное отношение – это любое расположение ноликов и единичек внутри матрицы.

Для простоты вводятся дополнительные обозначения:

$x \sim y$ означает что $x \succcurlyeq y$ и $x \preccurlyeq y$.

$x \succ y$ означает что $x \succcurlyeq y$ но не $x \sim y$.

$x \prec y$ означает что $x \preccurlyeq y$ но не $x \sim y$.

Получаются пять интуитивных отношений сильного, слабого предпочтений и безразличия.

Однако какие попало матрицы писать не стоит.

Предпочтения

Поскольку у бинарного отношения есть экономическая интерпретация, это накладывает на него определенные ограничения, называемые **аксиомами рациональности**.

Definition 9

Предпочтения \succsim **рациональны**, если

- для любых $x, y \in X$, хотя бы $x \succsim y$ либо $y \succsim x$.
- для любой $x \in X$, всегда верно что $x \sim x$
- для любых $x, y, z \in X$:

$$x \succsim y, y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$$

Последнее свойство - самое важное и называется **транзитивностью**.

Рациональность накладывают структуру на то, как может заполняться матрица.

\succsim	x	y	z
x	*	*	*
y	0	*	1
z	0	1	*

Попробуйте дозаполнить следующую матрицу так, чтобы предпочтения были рациональными.

Свойства предпочтений

Переопределив Лебеговы множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ в терминах предпочтений, мы получаем непрерывность предпочтений.

Definition 10

Предпочтения \succsim **непрерывны** в X , если для любого $x \in X$ множества $L_+(x)$ и $L_-(x)$ замкнуты, где

$$L_+(x) = \{y \in X : y \succsim x\}, \quad L_-(x) = \{y \in X : y \precsim x\}$$

И совершенно аналогично мы переносим квазивогнутость в мир предпочтений...

... однако, вопреки логике, аналог термина квазиВогнутости полезности в мире предпочтений называется Выпуклостью.

Definition 11

Предпочтения \succsim **выпуклы** в X , если $\forall x \in X$ множество $L_+(x)$ выпукло, то есть, оно содержит все свои хорды.

Парадокс в том, что вогнутые полезности - квазивогнутые, однако, ассоциированы с выпуклыми предпочтениями.

А выпуклые полезности (которые еще надо отыскать) с выпуклыми предпочтениями вообще никак не связаны и даже скорее противоположны им.

Прямая связь

Предположим, что у вас уже есть откалиброванная полезность. Как вывести из нее модель предпочтений?

Definition 12

Будем говорить, что U **представляет** \succsim , если

$$U(x) \geq U(y) \quad \Leftrightarrow \quad x \succsim y.$$

Это определение должно быть понятно на интуитивном уровне.

Также должно быть понятно, что если предпочтения представлены U , то они будут обязательно рациональны, поскольку это просто свойства вещественных чисел.

Обратная связь

Предположим, что у вас уже есть откалиброванные рациональные предпочтения. Можно ли восстановить по ним хотя бы одну непротиворечивую полезность?

Оказывается, что в простых случаях, действительно, можно.

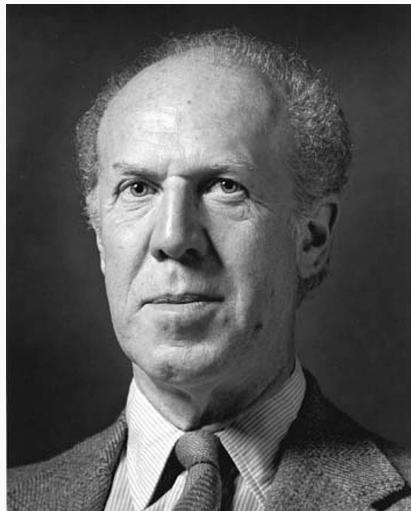
Lemma 13

Если X конечно, то для любых рациональных предпочтений \succsim существует полезность U , представляющая \succsim .

Это легко доказать алгоритмически.

В случае когда пространство альтернатив достаточно мощное, нам понадобится непрерывность предпочтений, и еще кое что.

Жерар Дебрё (Gérard Debreu)
французский экономист и
математик, профессор
экономики университета
Беркли, лауреат нобелевской
премии 1983 года по
экономике. Работал над
представлениями предпочтений
потребителя при помощи
вещественнозначных функций и
существованием равновесий в
конкурентных рынках.



Theorem 14 (Дебрё)

Если $X \subset \mathbb{R}^n$ «хорошее», то для любых рациональных и непрерывных предпочтений \succsim существует непрерывная полезность U , представляющая \succsim .

«Хорошесть» - скучные технические условия связности и сепарабельности, так математики любят оформлять свои теоремы. По-настоящему важной здесь является именно непрерывность предпочтений.

Однако не стоит забывать, что, если предпосылки теоремы не выполнены, это еще не значит, что полезности нет. К примеру, дискретные пространства вовсе не связны.

Выбор

Модель выбора максимально абстрактна

- снова один агент
- товары разделены на n категорий
- портфель (потр. корзина) это точка в \mathbb{R}_+^n
- категории, а также координаты обозначаются $x, y, z \dots$
- множество доступных альтернатив $X \subset \mathbb{R}_+^n$

Вместо полезности $U : X \rightarrow \mathbb{R} \dots$

или бинарного предпочтения $\succsim : X^2 \rightarrow \{0, 1\} \dots$

у агента в голове зашито **отображение выбора** $C : 2^X \rightarrow 2^X$.

Что это значит?

Это значит, что агент отображает подмножества в подмножества. Так же как и с предпочтениями, есть несколько естественных технических ограничений:

- $C(Z) \neq \emptyset$
- $C(Z) \subset Z$

Для любого непустого меню $Z \subset X$.

Есть еще третья, самая важная аксиома.

Рассмотрим любые два портфеля $x, y \in X$ и два меню $Z, Z' \subset X$, таких что x, y содержатся в обоих меню.

Definition 15

Слабой аксиомой выбора (WARP) называется следующее.

Если в первом меню Z : x_2 был выбран в присутствии x_1 , то во втором меню Z' невозможно чтобы: x_1 был выбран в присутствии x_2 , но сам x_2 при этом выбран не был.

Читая это определение задом наперед, можно интуитивно понять, что оставляя x_1 но исключая x_2 внутри меню Z' вы, по сути, озвучиваете строгое предпочтение $x_1 \succ x_2$. И в других меню вам запрещается вести себя в противоречии с этим предпочтением.

Если будет время, я выведу слабую аксиому выбора из рациональности предпочтений, когда агент строит свой выбор оптимизируя предпочтения по конечному числу элементов.

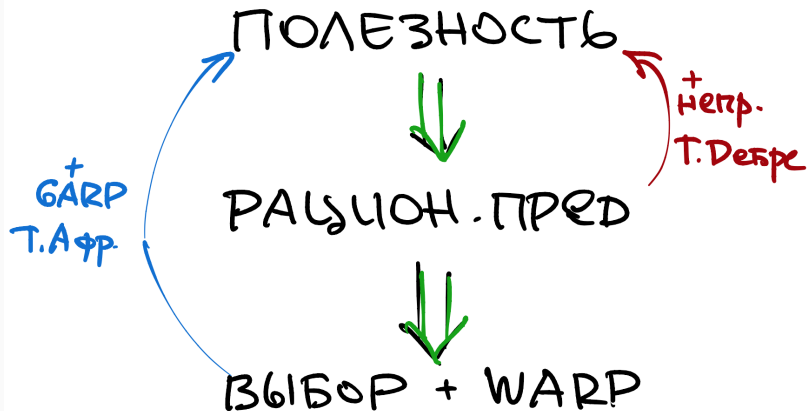
Это будет аналог прямой связи между предпочтениями и выбором.

Перед тем как уйти на перерыв

Мы продемонстрировали, что из любой полезности можно вывести рациональные предпочтения, а из рациональных предпочтений выбор со слабой аксиомой.

С другой стороны, из любых непрерывных и рациональных предпочтений можно вывести непрерывную полезность - это Теорема Дебре.

Аналог обратной связи для выбора я рассказывать не буду, это называется **Теорема Африата**, это очень продвинутый материал, и там понадобится усиленная аксиома выбора (GARP) которая не входит в мой курс.



Какой из всего этого можно сделать вывод?

Все три модели, в каком то смысле эквивалентны. Поэтому можно смело использовать ту, которая вам кажется удобнее.

Чаще всего (99% случаев) это полезность, но иногда это и предпочтения, например в анализе алгоритма Гейла-Шепли, при помощи которого вас распределили по факультетам.

С другой стороны, аксиомы выбора недавно «вылезли» в новейших комбинаторных аукционах, поэтому от теории выбора тоже есть некоторый толк.

Конец первой части лекции

План на вторую часть лекции (1 час)

Далее мы сфокусируемся только на полезностях и как оптимизировать их при различных ограничениях.

- Начала оптимизации
- Условия первого и второго порядка
- Выпуклость задачи
- Краевые и внутренние решения
- Линии уровня и геом. анализ

Начала оптимизации

Любая оптимизационная задача – это две вещи:

- функция U которую мы максимизируем
- область определения X по которым мы максимизируем

Ключевыми факторами тут являются непрерывность и (квази-)вогнутость целевой функции, а также компактность и выпуклость области определения.

Существование

Существование решения, как правило, мы можем легко гарантировать при помощи следующей теоремы

Theorem 16 (Вейерштрасса)

Непрерывная функция на (непустом) компакте гарантированно достигает своего минимума и максимума.

Что такое **непрерывность** вы уже знаете, а **компакт** в \mathbb{R}^n - это просто ограниченное и замкнутое множество.

В контексте одномерной оптимизации, отрезок $[a, b]$ - это компакт, а $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , $[a, \infty)$, (a, ∞) - нет.

В экономике вам будут попадаться, в основном компакты, поэтому вопрос о существовании как правило стоит не остро.

Дифференциальный анализ

Предположим, что функция на компакте не только непрерывна но еще и дифференцируема сколько угодно раз, такая задача называется **гладкой**. Тогда оптимум может быть

- либо на границе X
- либо во внутренней точке X

В последнем случае обязательно выполнены **условия первого порядка** (УПП), это один из самых фундаментальных результатов дифференциального анализа.

Например, если функция $U(x, y, z)$ от трех переменных, и вы убедили себя, что решение надо искать внутри, то

$$\text{УПП (FOC)} : \quad \nabla U = 0$$

должны выполняться в оптимальной точке (x^*, y^*, z^*) .

Значок ∇ означает взятие градиента функции

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \partial U / \partial x \\ \partial U / \partial y \\ \partial U / \partial z \end{pmatrix}$$

в соответствующей точке.

УПП на границе

Например, если функция $U(x, y, z)$, и вы убедили себя, что решение надо искать на границе $F(x, y, z) = 0$, то

$$\text{УПП (FOC)} : \quad \nabla \mathcal{L} = 0,$$

где $\mathcal{L}(x, y, z|\lambda) = U(x, y, z) - \lambda F(x, y, z)$ это **Лагранжиан**.

Значок ∇ означает взятие градиента Лагранжиана по всем переменным включая множители Лагранжа

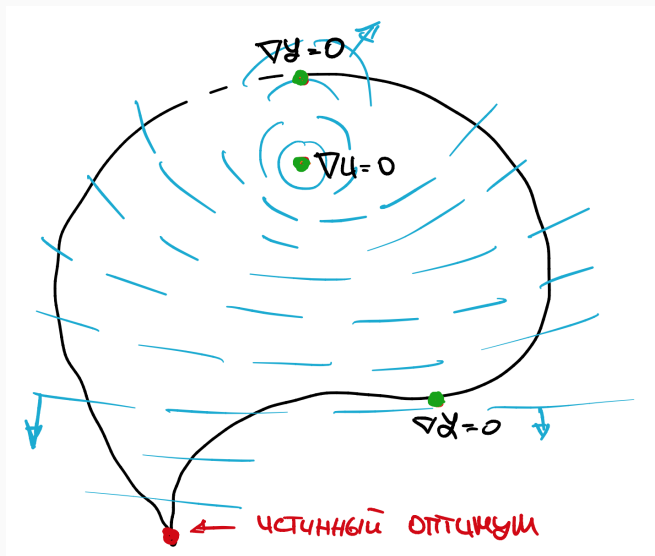
$$\nabla \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \partial \mathcal{L} / \partial x \\ \partial \mathcal{L} / \partial y \\ \partial \mathcal{L} / \partial z \\ \partial \mathcal{L} / \partial \lambda \end{pmatrix}$$

в соответствующей точке.

Как правило, количество точек, в которых выполнены УПП, с Лагранжианом или без, конечно. Оптимум может также находиться на каком-то изломе или иной аномалии границы области определения.

Все такие точки называются **критическими**, их мало, и оптимум гарантированно лежит в одном из них.

Критические точки



Если у вас по любой причине остался один кандидат, то он и является оптимумом, поскольку существование нам гарантирует Теорема Вейерштрасса.

Если же кандидатов несколько, то надо сравнивать значения функции руками и выбирать все точки с наибольшим значением.

Тупой перебор Критические точки может привести к неожиданно быстрому решению задачи.

Пример 1

Промаксимизируем функцию $f(x) = (x - 1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = 1$
- Две других критические точки это $x = 0$ и $x = 3$
- Сравним значения:

$$f(0) = 1, f(1) = 0, f(3) = 4.$$

Получается, что в этой задаче один единственный оптимум в точке $x = 3$, причем до условий второго порядка у нас даже руки не дошли.

Число внутренних точек, прошедших УПП, можно дополнительно сузить за счет условий второго порядка.

$$\text{УВП (SOC)} : \quad \nabla^2 U \neq 0$$

Если Гессиан во внутренней точке отрицательно полу-определен $\nabla^2 U \leq 0$ (собственные значения ≤ 0), то это **локальный максимум** и этот кандидат проходит отбор.

Если Гессиан положительно определен $\nabla^2 U > 0$ (собственные значения > 0), то это строгий **локальный минимум** и этот кандидат точно не проходит отбор.

Есть еще третий случай, когда собственные значения Гессиана имеют противоположные знаки, это **седло** и оно тоже не проходит отбор.

Выпуклость

К счастью, в экономике зачастую удастся показать, что поверх непрерывности функция полезности

- либо вогнутая
- либо она монотонное преобразование вогнутой
- либо она квазивогнутая

Если, вдобавок, область определения - выпуклое множество, то условия второго порядка можно не проверять. Такие задачи называются **выпуклыми**.

Пример 2

Промаксимизируем функцию $f(x) = -(x - 1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая и выпуклая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = 1$
- Убедимся что он находится внутри области

Все, этот экстремум и есть решение.

Пример 3

Промаксимизируем функцию $f(x) = -(x + 1)^2$ на отрезке $[0, 3]$.

- Задача гладкая и выпуклая на компакте
- Решим УПП, получим первую критическую точку $x = -1$
- Однако он не попадает в область, то есть, его нет
- Две других критических точки это $x = 0$ и $x = 3$
- Сравним значения:

$$f(0) = 1, f(3) = -16.$$

Получается, что в этой задаче один единственный оптимум в точке $x = 0$.

Выпуклость

Очень важно уметь, глядя на задачу, определять выпуклая она или нет, чтобы не тратить время на анализ второго порядка.

Общий алгоритм решения гладких и выпуклых задач на компакте очень простой:

- ищем первую критическую точку, как будто решение внутреннее
- если не попало в область определения - ищем на границе
- не забываем про изломы и иные аномалии области определения, потому что они, формально, являются кандидатами на решение

В выпуклых задачах условия второго порядка выполнены автоматически, их проверка - пустая трата времени.

Геометрический анализ

Наконец, линии уровня - это очень удобный инструмент для быстрого отлова и классификации кандидатов на решение оптимизационной задачи...

Definition 17

Линией уровня полезности U , проходящей через точку x называется множество всех точек $y \in X$ таких, что $U(y) = U(x)$.

... особенно в двумерном случае.

Definition 18

Кривой безразличия предпочтений \succsim , проходящей через точку x называется множество всех точек $y \in X$ таких, что $x \sim y$. Другими словами, это пересечение $L_+(x)$ и $L_-(x)$.

Совершенно ясно, что в контексте представлений предпочтений полезностями, кривая безразличия и линия уровня - это одно и то же.

Локальная ненасыщаемость

Definition 19

Предпочтения \succsim **локально ненасыщаемы** в X , если для любой точки $x \in X$ найдется сколь угодно близкая к ней точка $x' \in X$, такая что $x' \succ x$.

Definition 20

Полезность U **локально ненасыщаема** в X , если для любой точки $x \in X$ найдется сколь угодно близкая к ней точка $x' \in X$, такая что $U(x') > U(x)$.

Почти все полезности, которые будут вам встречаться, локально ненасыщаемы. Интуитивно это означает что кривые безразличия - тонкие линии. Если кривая безразличия толстая - это явное нарушение локальной ненасыщаемости.

Примеры полезностей

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = ax + by$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = ax + by$$

$$c - ax = by$$

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

Линия уровня - это прямая вида $y = \alpha x + \beta$.

Эта полезность гладкая, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = a \log x + \log y$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$c = a \log x + \log y$$

$$e^c = x^a y$$

$$y = \frac{e^c}{x^a}$$

Линия уровня - это гипербола вида $y = x^{\alpha\beta}$.

Эта полезность гладкая, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Полезность минимум

Рассмотрим полезность вида: $U(x, y) = \min(ax, by)$. Тогда линия уровня ищется следующим образом:

$$\begin{aligned}c &= \min(ax, by) \\ \frac{c}{b} &= \min\left(\frac{a}{b}x, y\right), \quad \frac{c}{a} = \min\left(x, \frac{b}{a}y\right) \\ y &= \frac{c}{b}\mathbb{I}(ax > c), \quad x = \frac{c}{a}\mathbb{I}(by > c)\end{aligned}$$

Линия уровня - это конкатенация горизонтальной и вертикальной линий, соединенных вдоль $ax = by$.

Эта полезность НЕгладкая, но непрерывная, вогнутая и локально ненасыщаемая.

Метод пристального взгляда

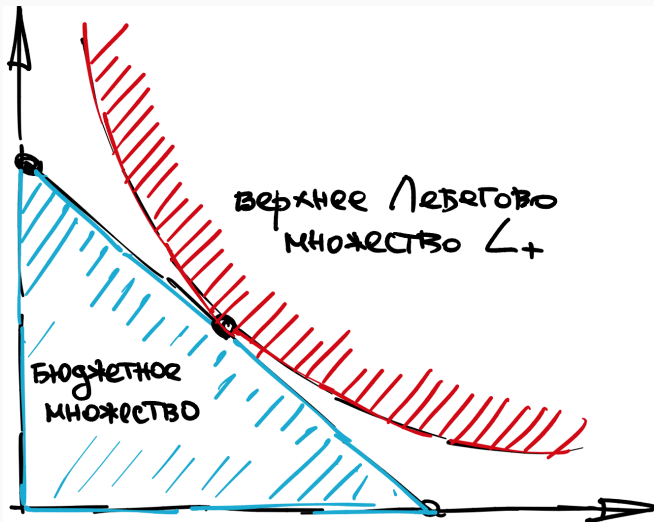
Метод пристального взгляда

Очень часто, в задачах есть выпуклое ограничение типа неравенства, например, бюджетное ограничение. А полезность вогнутая или квазивогнутая.

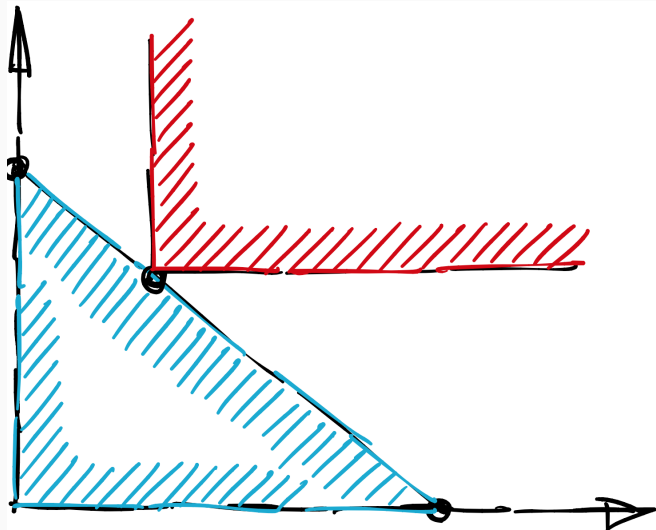
В таком случае, оптимум можно охарактеризовать как точку касания выпуклой области определения с одним из выпуклых верхних Лебеговых множеств. Однако, **метод пристального взгляда работает только для локально ненасыщаемых предпочтений.**

В маломерных задачах, эта точка ищется визуально, а точные ее координаты либо угадываются из симметрии, либо из каких то других соображений.

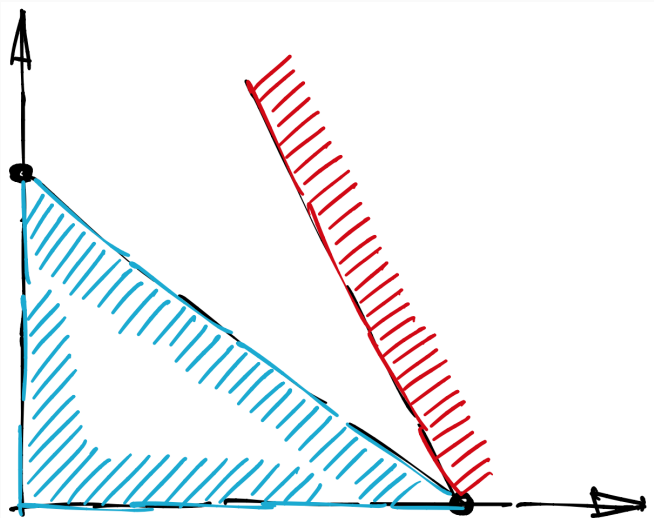
Метод пристального взгляда



Метод пристального взгляда



Метод пристального взгляда



Конец второй части лекции
