名市大 AI 自主ゼミ
Python 勉強会　1 回目　環境確認と基礎制御構文

課題は全部解ける必要はなく、わかるところまでで大丈夫です!
プログラミング言語は Python 以外でも構いません。

課題 1
以下の微分方程式を考えます。

$$\frac{dv(t)}{dt} = -9.80665$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

(1) 初速度$v(0)$が与えられて、$0 \leq t \leq 1$なる区間を 100 等分し、オイラー法によりこの微分方程式を解いた結果、各時刻での$v(t)$の値を求めるプログラムを記述してください。

$$v\left(\frac{1}{100}\right) = v(0) + \frac{1}{100}(-9.80665) = 9.019335$$

入力が 10 の場合、各時刻でのvの値は 10　9.019335 …

(2) 初期位置$x(0)$が与えられて、$0 \leq t \leq 1$なる区間を 100 等分し、オイラー法によりこの微分方程式を解いた結果、各点での$x(t)$の値を表示するプログラムを記述してください。

(3) 上記 2 つの微分方程式の解析解$v(t), x(t)$を求めてください。

課題 2
(1) 以下の計算を行うプログラムを記述してください。

$$112 + \sqrt{\pi} * \lfloor e^2 \rfloor$$

(2) 次の定積分の値を数値計算により行うプログラムを記述してください。

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

(3) 次の等式を示してください。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

課題 3

(1) 以下の連立合同式の解を求めてください。

$x \equiv 32134 \pmod{1584891}$

$x \equiv 193127 \pmod{3438478}$

(2) 線形合同法は以下の漸化式によって系列乱数$\{X_i\}$を得る、値A, B, M, X_0 ($M > A, M > B, A \geq, B \geq 0$) を与えると対応する乱数を 100 個表示するプログラムを記述してください。

$$X_{n+1} = (A \times X_n + B)\ mod\ M$$

(3) 6 面サイコロを振った結果を出力するプログラムを記述してください。乱数生成の外部ライブラリを用いてはいけません。乱数は疑似乱数でも構いません。

課題 4

株価$S(t)$を幾何ブラウン運動(ブラックショールズモデル)によりモデル化する。

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

オイラー・丸山近似によるとこの確率微分方程式は以下のように離散化される。

$$S(t + \mathit{\Delta}) = S(t) + \mu S(t)\mathit{\Delta} + \sigma S(t)[W(t + \mathit{\Delta}) - W(t)]$$

(1) $S(0)e^{\mu t}$の値を計算するプログラムを記述してください。

(2) $S(0) = 100, \mu = 0.05, \sigma = 0.4$ が与えられた時、$t = 1$を 1000 等分して$S(1)$を求めるプログラムを記述してください。

ただし標準ブラウン運動の過程より、$W(t + \mathit{\Delta}) - W(t)$はεを標準正規分布に従う確率変数として、$\sqrt{\mathit{\Delta}}\varepsilon$となることを利用してください。

(3) この確率微分方程式

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

の解が、

$$S(t) = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}$$

であることを示してください。