

RELATÓRIO DA LISTA 1

Jessé Barreto de Barros 17/0067033

Sistemas Mecatrônicos - PPMEC-UnB
Disciplina: Sistemas BioInspirados para a Engenharia
Turma: A
Data: 20/09/2017
email: jesseh.barreto@gmail.com

RESUMO

Este documento possui o objetivo de apresentar as metodologias, resultados e análises obtidos durante a realização da primeira lista de exercício da disciplina de Sistemas Bio-Inspirados para a Engenharia (SBIE). A primeira lista de exercício possui o objetivo de aumentar o domínio do conhecimento do aluno sobre os algoritmos de otimização PSO (*Particle Swarm Optimization*) e ABC (*Artificial Bee Colony*).

1. INTRODUÇÃO

Diversas atividades da sociedade moderna possuem problemas de otimização, desde matemática financeira e economia até problemas na indústria ou pesquisa científica. Conforme [1], nos últimos anos o interesse de pesquisadores no desenvolvimento de técnicas computacionais bioinspiradas para a solução de problemas na engenharia vem ganhando momento. Essas técnicas são inspiradas nas abordagens que a natureza ao longo de anos de evolução desenvolveram para solucionar problemas complexos. Atualmente, há diversos exemplos de casos de aplicações desse tipo de técnica para a solução de problemas em engenharia, como, por exemplo, em [2].

Dentro das técnicas de computação bioinspiradas esse relatório dará importância para as técnicas baseadas em "*Swarm Intelligence*", do inglês, Inteligência em Enxame, mais precisamente às técnicas PSO (*Particle Swarm Optimization*) e ABC (*Ant Bee Colony*) ambos serão explicados com maior riqueza de detalhes em suas subseções. Ambos os algoritmos ABC e PSO terão o seu comportamento explorados na convergência e minimização de diferentes custos e os seus resultados serão comparados. O experimento utilizado será melhor detalhado em suas subseções.

A inteligência em enxame pode ser definida como, conforme [3], grupos de técnicas inspiradas pelo comportamento coletivo de colônias de insetos, ou outras sociedades de animais maiores, que são capazes de solucionar problemas de forma distribuída em larga escala. Cada indivíduo de um

enxame possui um conjunto de regras simples e um baixo poder computacional que é, aparentemente, inviável para a solução de problemas muito complexos, no entanto, quando diversos indivíduos trabalham juntos isso torna possível a solução de problemas. Técnicas computacionais em enxame abrem espaço para a solução de problemas complexos utilizando arquiteturas computacionais fortemente paralelas, como, por exemplo, GPGPUs (*General Purpose Graphical Processor Units*), arquiteturas implementadas em FPGAs (*Field Programmable Gate Arrays*) ou DSPs (*Digital signal Processors*).

1.1. Particle Swarm Optimization

De acordo com [4], o PSO é definido como um algoritmo para a otimização de funções não-lineares baseado no comportamento social de cardumes de peixes ou flocos de pássaros que foi desenvolvido baseando-se em um conjunto de regras simples que podem ser implementado em poucas linhas de código.

O comportamento animal que o PSO se baseia é que, em teoria, cada membro de um enxame de animais podem se beneficiar com o aprendizado e experiências dos outros membros durante a busca de alimento. Essa vantagem pode se tornar decisiva e ultrapassar as desvantagens da competição de indivíduos do mesmo enxame. Dessa forma, é importante frisar que cada indivíduo possui memória sobre as suas próprias experiências, isto é, lembrando, por exemplo, da melhor fonte de alimentos que conseguiu encontrar, e também memória sobre a experiência do grupo, por exemplo, da melhor fonte de alimento que foi encontrado por todo o grupo.

Para simular esse comportamento em um modelo social o algoritmo PSO há duas variáveis: a) o *pbest*, que é a lembrança da melhor posição de alimento encontrado por um indivíduo; b) o *gbest*, que é a lembrança da melhor posição de alimento encontrado por todo o grupo.

Para modelar a movimentação de cada indivíduo no enxame cada um deles possui uma velocidade aleatória associada proporcional a sua distância com os pontos que obteve a

melhor experiência e também proporcional ao ponto em que todo o grupo

Além disso a velocidade individual também é influenciada por um fator aleatório para cada iteração que adiciona aleatoriedade ao enxame como um todo e possibilita a exploração do espaço de procura da melhor solução. As equações 1 e 2 indicam o modelo de velocidade e posição de cada i -ésima partícula do PSO a cada uma de suas t iterações. As constantes c_{soc} representam o componente cognitivo social, c_{ind} o componente cognitivo individual, x_i^t a posição da partícula i na iteração t , v_i^t representa a velocidade da i -ésima partícula na iteração t , r_1 e r_2 representam números aleatórios $\in [0, 1]$ e w^t representa um peso para controlar a velocidade de convergência do PSO, esse peso é utilizado para dar um maior poder de busca ao PSO em suas primeiras iterações e conforme o número de iterações aumenta o peso é reduzido para possibilitar que o algoritmo "refine" os resultados obtidos.

$$v_i^{t+1} = w^t v_i^t + c_{soc} r_1 (gbest - x_i^t) + c_{ind} r_2 (pbest_i - x_i^t) \quad (1)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1} \quad (2)$$

A cada iteração os valores de $pbest$ são atualizados para cada partícula e o valor de $gbest$ é atualizado para todo o enxame. As iterações do algoritmo acontecem até o mesmo passe de um determinado número de iterações ou o valor de $gbest$ ser menor do que um limiar *threshold*.

Uma particularidade do PSO é que o valor de $gbest$ irá sempre armazenar o valor do mínimo, ou máximo, valor encontrado para aquela função custo até aquela iteração. Dessa forma $gbest^t \geq gbest^{t+1}$.

1.2. Artificial Bee Colony

De acordo com [5], o algoritmo ABC é um dos algoritmos baseados em inteligência de enxame (*Swarm Intelligence*) que possui o seu comportamento baseado nas observações e modelos do comportamento de abelhas.

O algoritmo considera que a colônia de abelhas é um sistema dinâmico que obtém informações sobre o ambiente onde habitam e se adaptam de acordo. O algoritmo contém três tipos de abelhas: a) empregadas, que são abelhas que armazenam informações da função custo, mínimos globais ou locais, que no ABC são considerados como pontos de fonte de alimento, ou seja, há sempre uma abelha empregada para cada ponto de alimento conhecido; b) visualizadoras, são abelhas que recebem informações das empregadas sobre a qualidade das fontes de alimento e decidem para as empregadas quais são as melhores fontes de alimentos para serem visitadas; c) exploradoras, que são abelhas que buscam aleatoriamente pelo espaço de busca fontes de alimentos melhores.

No ABC um dos parâmetros do algoritmo são as proporções de indivíduos na colônia. Por exemplo, para esse experimento, metade das abelhas da colônia são empregadas e a outra metade são visualizadoras. Sempre que uma fonte de alimento é exaurida uma abelha empregada se tornará uma abelha exploradora em busca de melhores fontes de alimentos.

O algoritmo possui três passos para cada iteração: a) envio das abelhas empregadas; seleção das melhores fontes de alimentos pelas visualizadoras; c) seleção das abelhas empregadas que se tornarão exploradas e o envio das exploradoras.

As abelhas visualizadoras selecionam quais as fontes de alimentos devem ser selecionados dado uma equação de probabilidade p para cada i -ésima fonte de alimento expressa pela equação (3), com x_i a posição do alimento que aquela abelha empregada está, f a função custo que está sendo minimizada e N_{bee} o número de abelhas empregadas.

$$p_i = \frac{f(x_i)}{\sum_{n=1}^N f(x_n)} \quad (3)$$

Sempre que uma fonte de alimento deixa de ser escolhido por um número l de vezes a abelha empregada daquela fonte de alimento se torna uma abelha exploradora e o valor da posição de alimento que a mesma encontrou entrará na lista de possíveis escolhas das abelhas visualizadoras para a próxima iteração do algoritmo.

1.3. Funções de Benchmark

As funções de *benchmark* utilizadas são muito utilizadas em experimentos e convenções para a comparação de diferentes algoritmos meta-heurísticos, conforme [6].

Geralmente, essas funções são dispostas no hiper espaço são multimodais e testam a capacidade de algoritmos de minimização para as suas capacidades de exploração do espaço de busca e também a capacidade de convergência nos mínimos globais. Algumas das funções possuem também a característica de de aumentar o número de mínimos locais com o aumento do seu número de dimensões, como, por exemplo, a função Griewank.

2. EXPERIMENTO

O experimento foi dividido em duas etapas: a) experimento utilizando o algoritmo PSO; b) experimento utilizando o algoritmo ABC. Cada experimento possui as suas próprias peculiaridades, no entanto, as suas semelhanças serão descritas de forma única.

Cada experimento consiste na implementação de um dos dois algoritmos de otimização bioinspirada com intuito de encontrar os valores de mínimos globais do conjunto de funções de minimização que serão utilizadas como *benchmark* com

diferentes dimensionalidades. Essas funções serão: a) função esfera eq. 4; b) função *Quadric* eq. 5; c) função *Rosenbrock* eq. 6; d) função *Rastrigin* eq. 7; e) função *Ackley* eq. 8; f) função *Schwefel* eq. 9; g) função *Griewank* eq. 10 h) função *Michalewicz* eq. 11; As funções custo utilizadas durante os experimentos podem ser obtidas em [7], [8] e [6].

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i \quad x_i \in [-8, 8] \quad (4)$$

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i x_j^2 \quad x_i \in [-8, 8] \quad (5)$$

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N/2} 100(x_{2i} - x_{2i-1}^2)^2 + (1 - x_{2i-1})^2 \quad x_i \in [-8, 8] \quad (6)$$

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^N (x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i) + 10) \quad x_i \in [-8, 8] \quad (7)$$

$$f(\bar{x}) = -20 \exp\left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(2\pi x_i)\right) + 20 + e \quad x_i \in [-32.768, 32.768] \quad (8)$$

$$f(\bar{x}) = 418.9829N - \sum_{i=1}^N x_i \sin(\sqrt{x_i}) \quad x_i \in [-500, 500] \quad (9)$$

$$f(\bar{x}) = 1 + \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \prod_{i=1}^N \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) \quad x_i \in [-512, 512] \quad (10)$$

$$f(\bar{x}) = - \sum_{i=1}^N \sin(x_i) \sin\left(\frac{ix_i^2}{\pi}\right) \quad x_i \in [0, \pi] \quad (11)$$

Os experimentos foram executados com cada algoritmo variando o número de indivíduos em seus enxames com 10, 15 e 20 indivíduos. Além disso, cada experimento também utilizou cinco valores de dimensionalidades: $N \in [6, 9, 13, 18, 22]$.

Cada execução dos algoritmos rodou por 1000 iterações e foram repetidas 32 vezes com posições iniciais aleatórias para os seus enxames. Dessa forma é possível quantificar

estaticamente as particularidades de cada um dos dois algoritmos para cada função custo. Essa quantificação estatística é basicamente o cálculo para as 32 execuções das médias, medianas, desvios padrões, valores mínimos e também os números de acertos para os 32 experimentos. Para ser considerado um acerto, o mínimo global encontrado pelos algoritmos devem ser menores do que um determinado valor de limiar, que, para todas as funções custo, exceto a função *Michalewicz*, é de 0.01. Para a função de *Michalewicz* o valor de limiar é descrito por $t = f_{min}(d) + 0.1d$, onde, $f_{min}(d)$ é o ponto de mínimo global para a dimensão d . O ponto de mínimo global para o *Michalewicz* foi obtido através de uma regressão polinomial descrita pela equação $f_{min}(d) = 4.76210^{-4}d^2 - 1.0473d + 0.9765$.

Os experimentos com o algoritmo PSO foram executados com os seus parâmetros configurados com os seguintes valores: a) ambos os parâmetros de cognição individual e social $c_1 = c_2 = 2.05$; b) os pesos de cada iteração w decrescendo entre $[0.9, 0.1]$; c) Os valores de velocidades máximas como metade do comprimento entre o espaço de busca, ou seja, $\frac{(range_{ub} - range_{lb})}{2}$ com $range_{ub}$ o limite superior do intervalo de busca e $range_{lb}$ como o limite inferior do intervalo de busca; d) Os valores de velocidade mínimas são um terço da velocidade máxima;

Os experimentos com o algoritmo ABC foram executados com ele configurado com os seguintes parâmetros: a) O número de iterações máximas para enviar abelhas escoteiras igual a 20; b) O número de abelhas é o dobro do número de fontes de alimento;

Os resultados dos experimentos serão explicitados na subseção Resultados.

3. RESULTADOS

Os resultados dos experimentos foram divididos pelos dois algoritmos bioinspirados: o PSO e o ABC. Como a quantidade de resultados é muito grande apenas alguns dos gráficos resultantes poderão ser visualizados nesse documento. No entanto, os valores das estatísticas podem ser visualizadas nos conjuntos de tabelas obtidas pelo experimento.

3.1. Resultados para o Algoritmo PSO

O algoritmo PSO gerou como resultados as Tabelas 1 - 8.

3.2. Resultados para o algoritmo ABC

Os experimentos com o algoritmo ABC geraram os resultados presentes nas Tabelas 9- 16.

Com os resultados das médias de ambos os algoritmos para facilitar a visualização de uma possível comparação de ambos os algoritmos os gráficos de suas médias foram plotados nas Figuras 1-8.

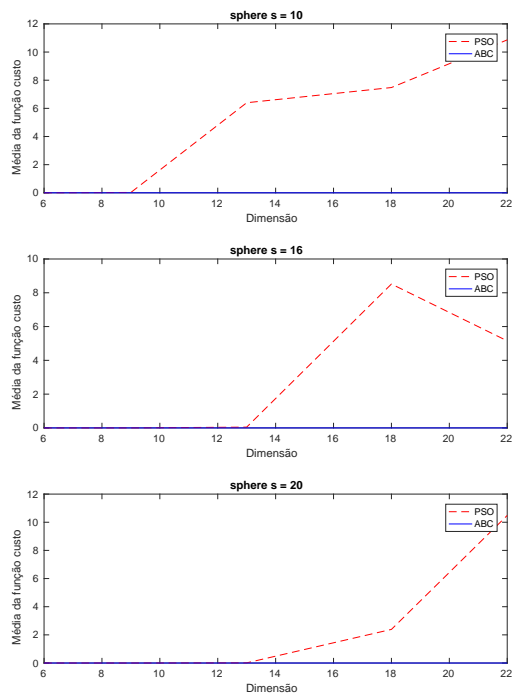


Fig. 1. Gráfico com as médias das soluções de minimização de ambos os algoritmos com diferentes números de partículas e dimensões para a função Esférica (eq. 4).

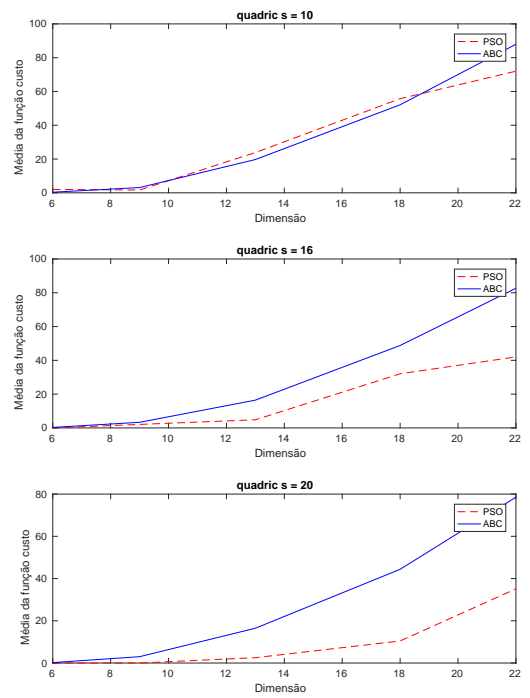


Fig. 2. Gráfico com as médias das soluções de minimização de ambos os algoritmos com diferentes números de partículas e dimensões para a função *Quadric* (eq. 5).

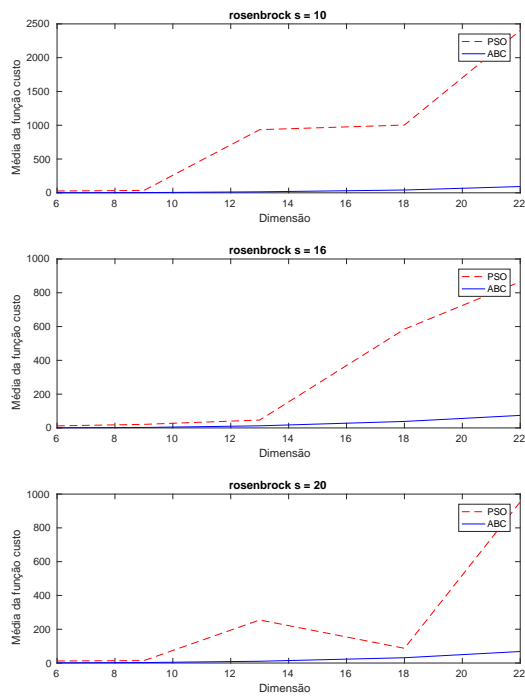


Fig. 3. Gráfico com as médias das soluções de minimização de ambos os algoritmos com diferentes números de partículas e dimensões para a função *Rosenbrock* (eq. 6).

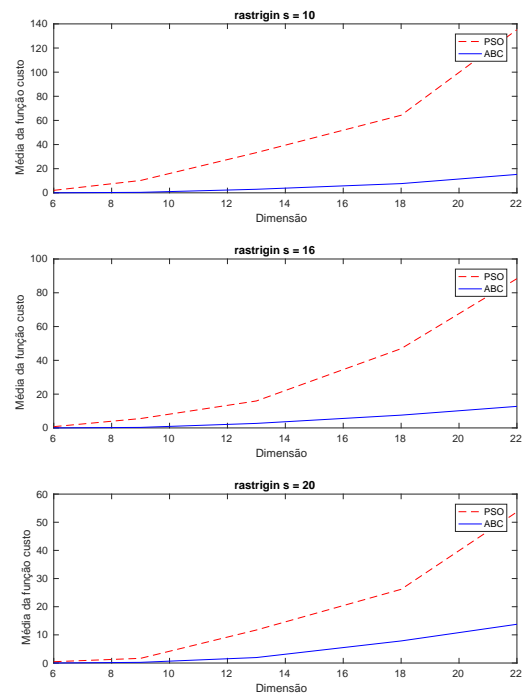


Fig. 4. Gráfico com as médias das soluções de minimização de ambos os algoritmos com diferentes números de partículas e dimensões para a função *Rastrigin* (eq. 7).

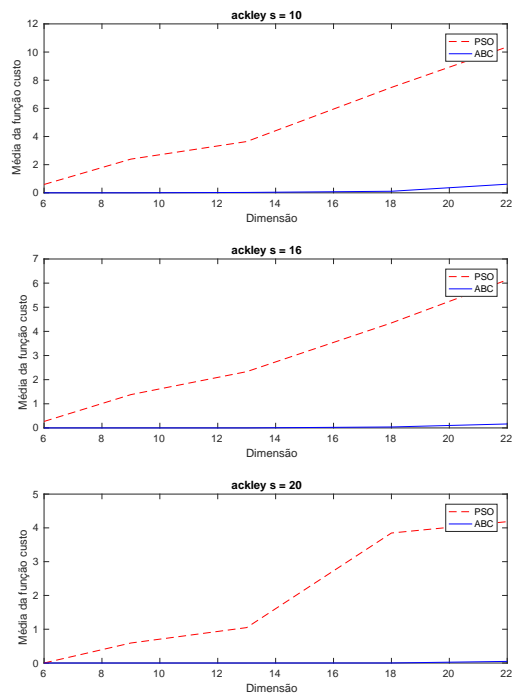


Fig. 5. Gráfico com as médias das soluções de minimização de ambos os algoritmos com diferentes números de partículas e dimensões para a função *Ackley* (eq. 8).

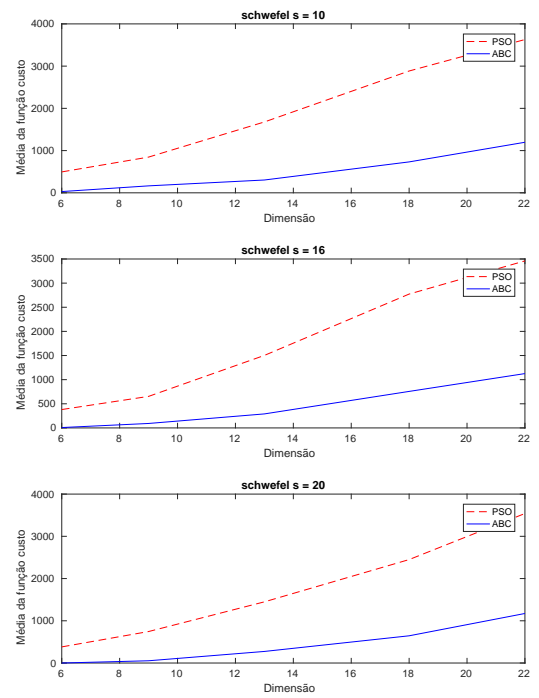


Fig. 6. Gráfico com as médias das soluções de minimização de ambos os algoritmos com diferentes números de partículas e dimensões para a função *Schwefel* (eq. 9).

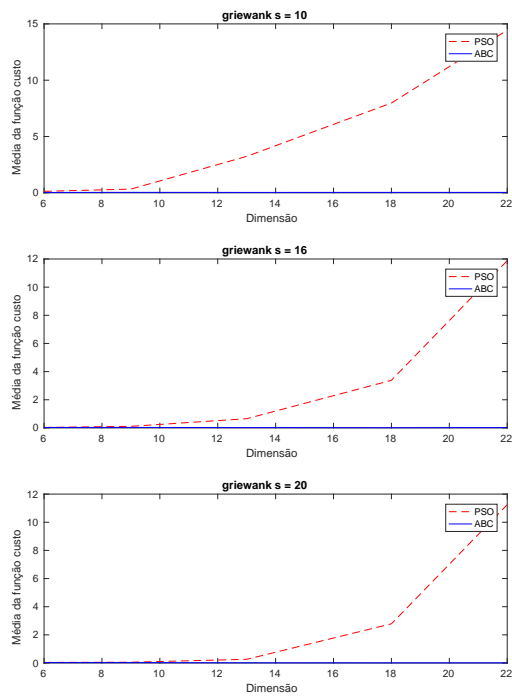


Fig. 7. Gráfico com as médias das soluções de minimização de ambos os algoritmos com diferentes números de partículas e dimensões para a função *Griewank* (eq. 10).

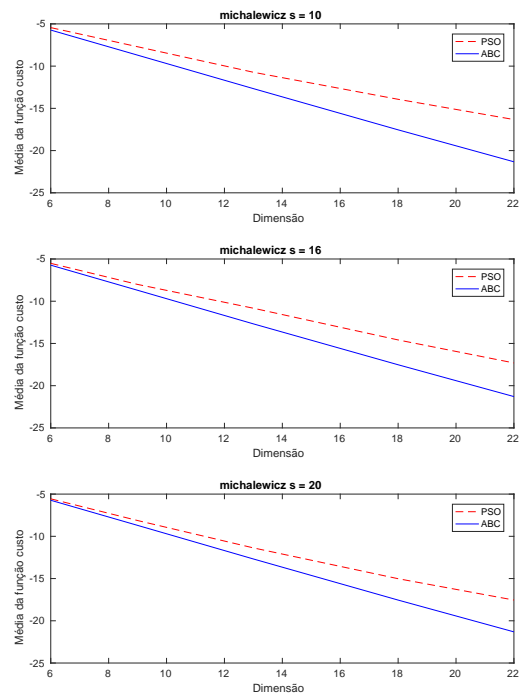


Fig. 8. Gráfico com as médias das soluções de minimização de ambos os algoritmos com diferentes números de partículas e dimensões para a função *Michalewicz* (eq. 11).

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	$1.43 \cdot 10^{-3}$	$6.22 \cdot 10^{-6}$	0	$6.31 \cdot 10^{-3}$	100
10	9	$2.63 \cdot 10^{-2}$	$3.72 \cdot 10^{-3}$	0	$4.62 \cdot 10^{-2}$	93.8
10	13	6.40	0.127	0	18.9	50.0
10	18	7.48	1.43	$2.76 \cdot 10^{-3}$	18.8	15.6
10	22	10.9	4.4	0	19.9	9.38
15	6	$3.96 \cdot 10^{-7}$	0	0	$1.58 \cdot 10^{-6}$	100
15	9	$1.17 \cdot 10^{-3}$	0	0	$3.36 \cdot 10^{-3}$	100
15	13	$4.73 \cdot 10^{-2}$	0	0	$9.36 \cdot 10^{-2}$	87.5
15	18	8.52	0.359	0	21.4	43.8
15	22	5.15	1.01	0	15.8	25.0
20	6	$1.55 \cdot 10^{-11}$	0	0	$7.28 \cdot 10^{-11}$	100
20	9	$1.11 \cdot 10^{-4}$	0	0	$3.48 \cdot 10^{-4}$	100
20	13	$1.13 \cdot 10^{-2}$	$2.34 \cdot 10^3$	0	0.0193	100
20	18	2.39	0.117	0	11.3	62.5
20	22	10.5	0481	0	23.6	37.5

Tabela 1. Algoritmo PSO. Resultados de convergência para a função Esfera (Eq. 4) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

4. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

O experimento foi utilizado com o propósito de ganhar conhecimento sobre os dois algoritmos bioinspirados o PSO e o ABC e também compará-los é possível visualizar que como ambos os algoritmos são meta-heurísticos e os seus parâmetros estatísticos apontam qual dos dois se sai melhor em algumas situações.

Para ambos os algoritmos é possível visualizar que a qualidade dos seus resultados é reduzida rapidamente conforme o aumento de dimensões do problema. Esse comportamento é comum para algoritmos de otimização e é chamado de "curse of dimensionality" (Maldição da dimensionalidade), porque o espaço de solução aumenta exponencialmente conforme o número de dimensões da função custo.

No entanto, é possível visualizar pelas tabelas que conforme o número de indivíduos do enxame aumenta os algoritmos possuem melhores taxas de convergência. um exemplo desse comportamento está presente na Figura 6.

Para a maioria das tabelas é possível visualizar que a média das soluções obtidas com o algoritmo ABC foram melhores que as obtidas pelo algoritmo PSO, no entanto, vale frisar que a complexidade de implementação e o tempo gasto pelo algoritmo ABC são maiores do que aqueles do algoritmo PSO.

De todas as funções a única que não possui mínimo global no ponto $x_i = [0, \dots, 0]$ é a função *Michalewicz* é por isso que as suas médias são menores do que zero e diminuem com o número de dimensões. Por isso o gráfico presente na Figura 8 pouco nos informa a respeito do comportamento dos algoritmos para essa função e a relação entre convergência e o número de dimensões do problema.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	2.01	$2.35 \cdot 10^{-3}$	0	7.87	84.4
10	9	1.67	0.141	0	5.87	43.8
10	13	23.8	8.95	0.367	28.3	0
10	18	55.7	44.7	2.83	48.4	0
10	22	72.0	51.0	10.1	52.4	0
15	6	$6.07 \cdot 10^{-5}$	$9.96 \cdot 10^{-10}$	0	$2.15 \cdot 10^{-4}$	100.0
15	9	2.08	$8.40 \cdot 10^{-2}$	0	7.86	75.0
15	13	4.82	1.32	0	9.49	6.25
15	18	32.0	26.0	2.31	25.4	0
15	22	42.0	44.5	4.54	29.1	0
20	6	$1.16 \cdot 10^{-11}$	0	0	$4.15 \cdot 10^{-11}$	100.0
20	9	$1.56 \cdot 10^{-3}$	$6.45 \cdot 10^{-4}$	0	$2.29 \cdot 10^{-3}$	100.0
20	13	2.53	0.187	0	8.42	43.8
20	18	10.4	3.89	0.0381	16.3	6.25
20	22	35.1	24.2	4.62	36.1	0

Tabela 2. Algoritmo PSO. Resultados de convergência para a função *Quadric* (Eq. 5) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

5. REFERENCIAS

- [1] N. Quijano and K. M. Passino, "Honey bee social foraging algorithms for resource allocation: Theory and application," *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, vol. 23, no. 6, pp. 845–861, 2010.
- [2] L. Mussi, S. Cagnoni, and F. Daolio, "GPU-Based Road Sign Detection Using Particle Swarm Optimization," in *2009 Ninth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*. IEEE, 2009, pp. 152–157. [Online]. Available: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5364748/>
- [3] E. Bonabeau, M. Dorigo, and G. Theraulaz, *Swarm intelligence: from natural to artificial systems*. Oxford university press, 1999, no. 1.
- [4] J. Kennedy and R. Eberhart, "Particle Swarm Optimization," *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*, vol. 4, pp. 1942–1948, 1995.
- [5] D. Karaboga and B. Basturk, "A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm," pp. 459–471, 2007.
- [6] T. Ke, L. Xiaodong, S. P. N., Y. Zhenyu, and W. Thomas, "Benchmark Functions for the CEC'2013 Special Session and Competition on Large-Scale Global Optimization," *Technical report, Univ. of Science and Technology of China*, no. 1, pp. 1–21, 2010. [Online]. Available: <http://goanna.cs.rmit.edu.au/~xiaodong/cec13-lsgo/competition/cec2013-lsgo-benchmark-tech-report.pdf>
- [7] "Virtual library of simulation experiments: Test functions and datasets," <https://www.sfu.ca/~ssurjano/optimization.html>, NOTE = "acessado em 08/09/2017".
- [8] "Test functions for unconstrained global optimization," http://www-optima.amp.i.kyoto-u.ac.jp/member/student/hedar/Hedar_files/TestGO_files/Page364.htm, NOTE = "acessado em 15/09/2017".

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	27.12	19.91	$9.282 \cdot 10^{-10}$	28.16	6.25
10	9	34.97	4.801	$1.164 \cdot 10^{-3}$	49.71	6.25
10	13	934.4	59.21	3.202	2209.0	0
10	18	1003.0	245.9	$1.126 \cdot 10^{-8}$	1977.0	3.125
10	22	2403.0	852.6	46.45	3585.0	0
15	6	12.13	0.203	$2.341 \cdot 10^{-8}$	23.75	34.38
15	9	21.1	4.883	$2.145 \cdot 10^{-4}$	27.76	12.5
15	13	46.65	45.98	2.675	43.2	0
15	18	584.5	159.2	4.978	1570.0	0
15	22	865.4	245.1	12.86	1887.0	0
20	6	$1.165 \cdot 10^{-11}$	0	0	$4.151 \cdot 10^{-11}$	100.0
20	9	$1.564 \cdot 10^{-3}$	$6.45 \cdot 10^{-3}$	0	$2.290 \cdot 10^{-3}$	100.0
20	13	2.525	0.187	0	8.424	43.75
20	18	10.44	3.894	0.0381	16.32	6.25
20	22	35.12	24.19	4.616	36.1	0

Tabela 3. Algoritmo PSO. Resultados de convergência para a função *Rosenbrock* (Eq. 6) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	2.05	0.9968	0	2.661	46.88
10	9	10.24	4.029	0	18.99	28.12
10	13	33.31	15.47	0	39.08	9.375
10	18	64.29	67.18	0	44.45	6.25
10	22	135.2	128.5	50.66	52.25	0
15	6	0.7522	0	0	1.551	68.75
15	9	5.549	0.578	0	12.31	43.75
15	13	15.96	5.981	0	22.02	21.88
15	18	46.92	35.29	0	39.2	6.25
15	22	88.36	68.94	0	60.9	3.125
20	6	0.4664	0	0	1.212	84.38
20	9	1.665	$3.474 \cdot 10^{-4}$	0	2.897	56.25
20	13	11.73	2.595	0	21.86	34.38
20	18	26.18	11.45	0	27.66	3.125
20	22	53.65	43.8	0	52.04	6.25

Tabela 4. Algoritmo PSO. Resultados de convergência para a função *Rastrigin* (Eq. 7) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	0.594	$8.882 \cdot 10^{-16}$	$8.882e-16$	0.9535	65.62
10	9	2.394	1.513	$8.882e-16$	4.32	37.5
10	13	3.642	3.179	$8.882e-16$	3.278	9.375
10	18	7.487	5.885	$8.882e-16$	5.077	6.25
10	22	10.37	9.579	$8.882e-16$	4.847	3.125
15	6	0.2686	$8.882 \cdot 10^{-16}$	$8.882e-16$	0.6567	84.38
15	9	1.38	$5.974 \cdot 10^{-3}$	$8.882e-16$	3.246	56.25
15	13	2.331	2.645	$8.882e-16$	1.673	18.75
15	18	4.35	4.19	$8.882e-16$	3.882	12.5
15	22	6.136	5.699	$8.882e-16$	5.045	15.62
20	6	$4.953 \cdot 10^{-6}$	$8.882 \cdot 10^{-16}$	$8.882e-16$	$2.661 \cdot 10^{-5}$	100.0
20	9	0.5923	0.01444	$8.882e-16$	0.8698	62.5
20	13	1.049	$8.882 \cdot 10^{-16}$	$8.882e-16$	1.635	62.5
20	18	3.848	3.203	$8.882e-16$	3.671	12.5
20	22	4.184	4.054	$8.882e-16$	3.658	15.62

Tabela 5. Algoritmo PSO. Resultados de convergência para a função *Ackley* (Eq. 8) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	495.1	454.8	0.01378	285.4	3.125
10	9	846.0	716.0	10.1	508.5	0
10	13	1678.0	1672.0	496.6	631.1	0
10	18	2885.0	2766.0	506.3	824.7	0
10	22	3629.0	3673.0	2011.0	790.4	0
15	6	380.7	296.9	$7.644 \cdot 10^{-5}$	262.7	9.375
15	9	653.4	538.2	1.54	393.5	0
15	13	1502.0	1467.0	411.5	583.7	0
15	18	2773.0	2978.0	986.3	791.1	0
15	22	3461.0	3481.0	1911.0	942.2	0
20	6	381.6	287.0	$7.637 \cdot 10^{-5}$	339.8	12.5
20	9	745.6	773.4	0.01789	404.8	3.125
20	13	1448.0	1460.0	241.4	620.2	0
20	18	2449.0	2315.0	603.3	960.5	0
20	22	3540.0	3659.0	1332.0	893.6	0

Tabela 6. Algoritmo PSO. Resultados de convergência para a função *Schwefel* (Eq. 9) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	0.1319	0.04131	0	0.1661	53.12
10	9	0.3298	0.3848	0	0.2662	28.12
10	13	3.237	1.193	0	11.61	15.62
10	18	7.974	2.293	0	17.15	12.5
10	22	14.44	3.077	0	24.34	9.375
15	6	0.03282	0	0	0.07569	81.25
15	9	0.1119	0.06629	0	0.126	50.0
15	13	0.6556	0.7051	0	0.4287	21.88
15	18	3.381	1.325	0	11.75	15.62
15	22	11.88	1.684	0	29.4	18.75
20	6	0.04419	0	0	0.1321	84.38
20	9	0.05647	0	0	0.1164	78.12
20	13	0.2631	$9.734 \cdot 10^{-5}$	0	0.3221	53.12
20	18	2.784	0.9198	0	11.6	28.12
20	22	11.25	1.229	0	24.27	28.12

Tabela 7. Algoritmo PSO. Resultados de convergência para a função *Griewank* (Eq. 10) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	-5.441	-5.546	-5.731	0.3333	81.25
10	9	-7.705	-7.93	-8.521	0.5802	0
10	13	-10.73	-10.72	-11.76	0.7223	0
10	18	-13.93	-13.91	-15.8	0.9064	0
10	22	-16.33	-16.03	-17.94	0.9172	0
15	6	-5.516	-5.561	-5.731	0.2542	90.62
15	9	-8.011	-8.068	-8.649	0.4472	0
15	13	-10.83	-10.96	-11.85	0.6542	0
15	18	-14.58	-14.69	-16.31	0.965	0
15	22	-17.31	-17.29	-18.82	0.818	0
20	6	-5.562	-5.589	-5.731	0.1528	93.75
20	9	-8.13	-8.153	-8.583	0.3199	0
20	13	-11.37	-11.41	-12.12	0.4516	0
20	18	-15.02	-14.94	-16.71	0.8985	0
20	22	-17.54	-17.17	-19.75	1.169	0

Tabela 8. Algoritmo PSO. Resultados de convergência para a função *Michalewicz* (Eq. 11) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	$2.367 \cdot 10^{-26}$	$5.312 \cdot 10^{-35}$	$8.268 \cdot 10^{-72}$	$1.115 \cdot 10^{-25}$	100.0
10	9	$2.753 \cdot 10^{-13}$	$3.896 \cdot 10^{-24}$	$2.039 \cdot 10^{-49}$	$1.557 \cdot 10^{-12}$	100.0
10	13	$4.555 \cdot 10^{-13}$	$6.434 \cdot 10^{-23}$	$9.527 \cdot 10^{-34}$	$2.275 \cdot 10^{-12}$	100.0
10	18	$6.426 \cdot 10^{-10}$	$1.959 \cdot 10^{-16}$	$2.282 \cdot 10^{-23}$	$3.620 \cdot 10^{-9}$	100.0
10	22	$1.470 \cdot 10^{-7}$	$1.200 \cdot 10^{-11}$	$7.225 \cdot 10^{-17}$	$4.206 \cdot 10^{-7}$	100.0
15	6	$6.578 \cdot 10^{-34}$	$1.113 \cdot 10^{-50}$	$9.414 \cdot 10^{-79}$	$3.650 \cdot 10^{-33}$	100.0
15	9	$9.354 \cdot 10^{-23}$	$2.361 \cdot 10^{-36}$	$5.838 \cdot 10^{-54}$	$5.234 \cdot 10^{-22}$	100.0
15	13	$1.060 \cdot 10^{-17}$	$1.396 \cdot 10^{-28}$	$5.035 \cdot 10^{-36}$	$3.825 \cdot 10^{-17}$	100.0
15	18	$2.971 \cdot 10^{-10}$	$1.213 \cdot 10^{-20}$	$1.433 \cdot 10^{-25}$	$1.474 \cdot 10^{-9}$	100.0
15	22	$1.341 \cdot 10^{-8}$	$4.637 \cdot 10^{-17}$	$4.979 \cdot 10^{-21}$	$6.070 \cdot 10^{-8}$	100.0
20	6	$2.284 \cdot 10^{-36}$	$1.724 \cdot 10^{-59}$	$2.158 \cdot 10^{-80}$	$1.216 \cdot 10^{-35}$	100.0
20	9	$4.718 \cdot 10^{-25}$	$6.793 \cdot 10^{-42}$	$5.413 \cdot 10^{-52}$	$2.451 \cdot 10^{-24}$	100.0
20	13	$1.059 \cdot 10^{-16}$	$1.818 \cdot 10^{-30}$	$1.888 \cdot 10^{-36}$	$5.785 \cdot 10^{-16}$	100.0
20	18	$1.198 \cdot 10^{-11}$	$9.152 \cdot 10^{-22}$	$9.063 \cdot 10^{-26}$	$5.851 \cdot 10^{-11}$	100.0
20	22	$1.230 \cdot 10^{-13}$	$4.272 \cdot 10^{-18}$	$1.953 \cdot 10^{-20}$	$6.594 \cdot 10^{-13}$	100.0

Tabela 9. Algoritmo ABC. Resultados de convergência para a função Esfera (Eq. 4) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	0.3649	0.3602	0.04615	0.2479	0
10	9	3.124	2.851	0.9948	1.389	0
10	13	19.71	20.79	7.785	6.079	0
10	18	52.11	55.31	32.66	10.98	0
10	22	87.93	89.21	44.9	19.42	0
15	6	0.3037	0.241	0.05445	0.1902	0
15	9	3.322	3.226	0.251	1.421	0
15	13	16.45	16.41	6.364	5.107	0
15	18	48.79	48.3	28.82	10.51	0
15	22	82.66	86.14	47.34	15.92	0
20	6	0.197	0.1846	0.04259	0.111	0
20	9	2.997	2.96	0.6548	1.618	0
20	13	16.47	17.19	5.64	5.774	0
20	18	44.38	45.89	26.11	9.236	0
20	22	78.53	77.45	53.72	15.67	0

Tabela 10. Algoritmo ABC. Resultados de convergência para a função *Quadric* (Eq. 5) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	1.183	1.211	0.2231	0.5208	0
10	9	3.474	2.811	1.355	1.938	0
10	13	14.63	13.75	4.307	7.775	0
10	18	41.5	36.95	16.53	16.55	0
10	22	93.04	83.65	48.58	33.13	0
15	6	0.8086	0.6972	0.1304	0.4609	0
15	9	2.577	2.47	1.044	1.052	0
15	13	12.39	12.37	3.63	6.326	0
15	18	38.35	37.1	13.97	15.41	0
15	22	74.09	76.64	17.8	32.42	0
20	6	0.8745	0.8249	0.2065	0.4012	0
20	9	2.768	2.565	0.7873	1.399	0
20	13	10.39	8.993	3.154	5.967	0
20	18	31.3	29.87	11.9	12.59	0
20	22	68.11	59.65	24.56	30.39	0

Tabela 11. Algoritmo ABC. Resultados de convergência para a função *Rosenbrock* (Eq. 6) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	0.019	$7.693 \cdot 10^{-6}$	$8.882 \cdot 10^{-15}$	0.0734	87.5
10	9	0.3883	$5.631 \cdot 10^{-3}$	$1.312 \cdot 10^{-11}$	0.6164	56.25
10	13	2.936	2.755	$9.495 \cdot 10^{-10}$	2.195	6.25
10	18	7.642	7.844	1.020	3.651	0
10	22	15.24	14.44	7.388	4.855	0
15	6	$5.399 \cdot 10^{-6}$	$4.081 \cdot 10^{-12}$	0	$2.510 \cdot 10^{-5}$	100.0
15	9	0.3062	0.01282	$1.243 \cdot 10^{-14}$	0.4542	46.88
15	13	2.677	2.589	0.02828	1.445	0
15	18	7.567	7.343	1.169	2.783	0
15	22	12.76	11.47	1.544	4.918	0
20	6	$2.872 \cdot 10^{-5}$	$3.618 \cdot 10^{-12}$	0	$1.572 \cdot 10^{-4}$	100.0
20	9	0.2364	$2.989 \cdot 10^{-3}$	$7.283 \cdot 10^{-14}$	0.4178	56.25
20	13	1.944	1.388	$2.26 \cdot 10^{-7}$	1.200	3.125
20	18	7.842	7.558	2.452	2.265	0
20	22	13.76	13.55	5.895	4.093	0

Tabela 12. Algoritmo ABC. Resultados de convergência para a função *Rastrigin* (Eq. 7) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	$1.785 \cdot 10^{-9}$	$1.190 \cdot 10^{-11}$	$2.220 \cdot 10^{-14}$	$6.165 \cdot 10^{-9}$	100.0
10	9	$9.005 \cdot 10^{-6}$	$1.953 \cdot 10^{-8}$	$1.039 \cdot 10^{-13}$	$4.622 \cdot 10^{-5}$	100.0
10	13	0.02712	$1.288 \cdot 10^{-6}$	$8.996 \cdot 10^{-12}$	0.1333	90.62
10	18	0.1105	$9.045 \cdot 10^{-6}$	$1.266 \cdot 10^{-9}$	0.3511	78.12
10	22	0.6130	0.08113	$1.175 \cdot 10^{-6}$	0.8106	34.38
15	6	$5.043 \cdot 10^{-11}$	$3.952 \cdot 10^{-13}$	$2.220 \cdot 10^{-14}$	$2.336 \cdot 10^{-10}$	100.0
15	9	$2.507 \cdot 10^{-8}$	$5.714 \cdot 10^{-11}$	$2.425 \cdot 10^{-13}$	$1.322 \cdot 10^{-7}$	100.0
15	13	$1.491 \cdot 10^{-3}$	$1.534 \cdot 10^{-9}$	$2.989 \cdot 10^{-12}$	$7.633 \cdot 10^{-4}$	100.0
15	18	0.03915	$6.968 \cdot 10^{-6}$	$1.727 \cdot 10^{-10}$	0.09969	71.88
15	22	0.1636	$4.713 \cdot 10^{-5}$	$8.924 \cdot 10^{-8}$	0.4149	62.5
20	6	$4.946 \cdot 10^{-13}$	$1.235 \cdot 10^{-13}$	$1.155 \cdot 10^{-14}$	$1.069 \cdot 10^{-12}$	100.0
20	9	$9.550 \cdot 10^{-11}$	$1.282 \cdot 10^{-11}$	$1.359 \cdot 10^{-13}$	$1.846 \cdot 10^{-10}$	100.0
20	13	$2.235 \cdot 10^{-6}$	$1.837 \cdot 10^{-9}$	$3.064 \cdot 10^{-13}$	$8.121 \cdot 10^{-6}$	100.0
20	18	$1.118 \cdot 10^{-3}$	$6.048 \cdot 10^{-7}$	$5.729 \cdot 10^{-10}$	$5.337 \cdot 10^{-3}$	96.88
20	22	0.04801	$1.151 \cdot 10^{-5}$	$2.300 \cdot 10^{-8}$	0.1853	84.38

Tabela 13. Algoritmo ABC. Resultados de convergência para a função *Ackley* (Eq. 8) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	29.73	0.05897	$7.637 \cdot 10^{-5}$	52.04	43.75
10	9	164.8	137.8	$1.146 \cdot 10^{-4}$	83.1	3.125
10	13	303.5	248.8	89.68	124.4	0
10	18	732.1	720.1	128.3	255.1	0
10	22	1197.0	1242.0	582.5	334.5	0
15	6	7.604	$7.914 \cdot 10^{-5}$	$7.637 \cdot 10^{-5}$	29.1	87.5
15	9	92.29	118.4	$1.145 \cdot 10^{-4}$	96.48	12.5
15	13	290.2	254.0	0.03238	128.5	0
15	18	756.4	747.3	438.9	153.0	0
15	22	1126.0	1140.0	596.7	237.0	0
20	6	0.04841	$7.679 \cdot 10^{-5}$	$7.637 \cdot 10^{-5}$	0.2331	93.75
20	9	53.27	14.44	$2.089 \cdot 10^{-4}$	58.28	6.25
20	13	274.1	267.2	118.5	116.2	0
20	18	644.5	665.2	263.8	151.2	0
20	22	1173.0	1140.0	641.1	291.8	0

Tabela 14. Algoritmo ABC. Resultados de convergência para a função *Schwefel* (Eq. 9) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	0.03289	0.03262	0.01032	0.01457	0
10	9	0.04185	0.03953	$5.889 \cdot 10^{-5}$	0.02497	3.125
10	13	0.03579	0.03136	$7.087 \cdot 10^{-5}$	0.03023	25.0
10	18	0.03826	0.03861	$8.485 \cdot 10^{-5}$	0.02846	18.75
10	22	0.037	0.02975	0.00555	0.02693	12.5
15	6	0.03268	0.03365	0.002586	0.01478	6.25
15	9	0.03501	0.03361	$9.461 \cdot 10^{-4}$	0.01803	12.5
15	13	0.02352	0.02121	$1.115 \cdot 10^{-9}$	0.01807	28.12
15	18	0.01447	0.01435	$2.123 \cdot 10^{-8}$	0.01424	43.75
15	22	0.02476	0.02224	$7.594 \cdot 10^{-7}$	0.0234	34.38
20	6	0.03032	0.02949	$5.419 \cdot 10^{-3}$	0.01193	6.25
20	9	0.03044	0.02537	$2.429 \cdot 10^{-4}$	0.01749	9.375
20	13	0.01637	0.01143	$3.424 \cdot 10^{-6}$	0.01762	50.0
20	18	0.01194	0.009334	$1.341 \cdot 10^{-7}$	0.01204	53.12
20	22	0.01137	0.009658	$7.234 \cdot 10^{-7}$	0.01234	56.25

Tabela 15. Algoritmo ABC. Resultados de convergência para a função *Griewank* (Eq. 10) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.

S	N	\bar{x}	\tilde{x}	min	σ	%
10	6	-5.731	-5.731	-5.731	$2.386 \cdot 10^{-4}$	100.0
10	9	-8.701	-8.704	-8.704	$9.192 \cdot 10^{-3}$	0
10	13	-12.66	-12.67	-12.69	0.02654	100.0
10	18	-17.54	-17.57	-17.68	0.09736	0
10	22	-21.33	-21.34	-21.58	0.1507	0
15	6	-5.731	-5.731	-5.731	$7.086 \cdot 10^{-9}$	100.0
15	9	-8.704	-8.704	-8.704	$1.187 \cdot 10^{-3}$	0
15	13	-12.68	-12.69	-12.69	0.01767	100.0
15	18	-17.52	-17.54	-17.66	0.08117	0
15	22	-21.29	-21.28	-21.53	0.1614	0
20	6	-5.731	-5.731	-5.731	$1.258 \cdot 10^{-12}$	100.0
20	9	-8.704	-8.704	-8.704	$8.77 \cdot 10^{-5}$	0
20	13	-12.68	-12.69	-12.69	0.01727	100.0
20	18	-17.55	-17.56	-17.66	0.08077	0
20	22	-21.31	-21.32	-21.62	0.1455	0

Tabela 16. Algoritmo ABC. Resultados de convergência para a função *Michalewicz* (Eq. 11) com S sendo o número de partículas, N as dimensões que foram testadas, \bar{x} as médias, \tilde{x} as medianas, min os mínimos, σ os desvios padrões e % simbolizando as porcentagens de acertos.