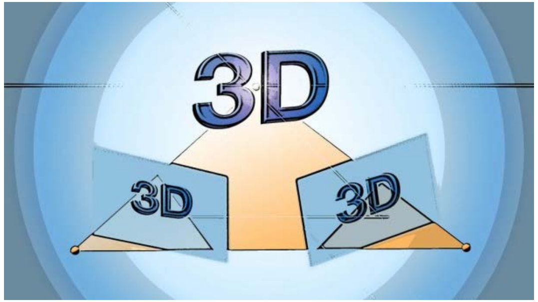
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

# Martin Kleinsteuber: Computer Vision

# Kapitel 3 – Epipolargeometrie

## 5. Die Fundamentalmatrix



# Motivation

- Epipolargleichung für kalibrierte Kameras $\mathbf{x_2}^\top E\mathbf{x_1} = 0$
- Kann man eine ähnliche Beziehung zwischen Pixelkoordinaten im unkalibrierten Fall finden?
- Beziehung zwischen kalibrierten und unkalibrierten Koordinaten ergibt sich aus der Matrix $K$

$$\mathbf{x}' \sim K\Pi_0 \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}$$

$$\mathbf{x} = K^{-1}\mathbf{x}' \sim \Pi_0 \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P}$$

$$K = K_s K_f = \begin{bmatrix} fs_x & fs_\theta & o_x \\ 0 & fs_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Epipolargleichung

## Unkalibrierter Fall

- Epipolargleichung für kalibrierte Kameras $\mathbf{x_2}^\top E \mathbf{x_1} = 0$

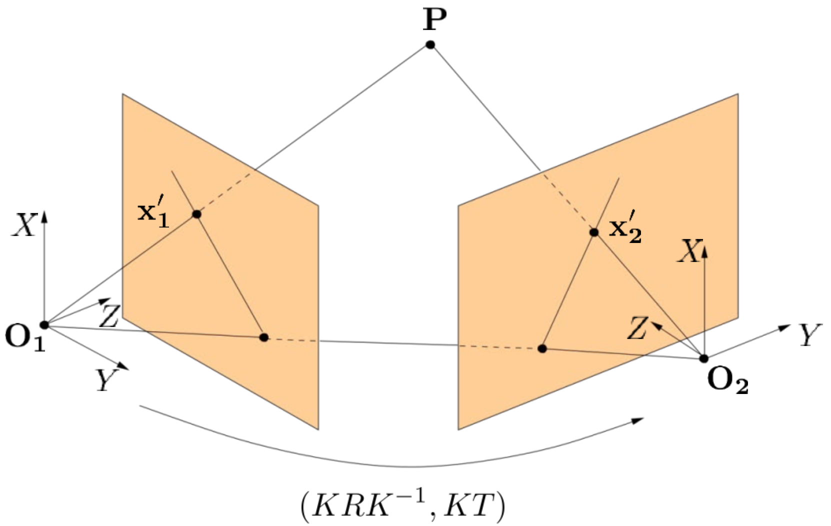
- Unkalibrierte Version der Epipolargleichung:

$$\mathbf{x_2'}^\top K^{-\top} E K^{-1} \mathbf{x_1'} = 0$$

- Die Matrix $F := K^{-\top} E K^{-1}$ heißt Fundamentalmatrix.

# Epipolargeometrie

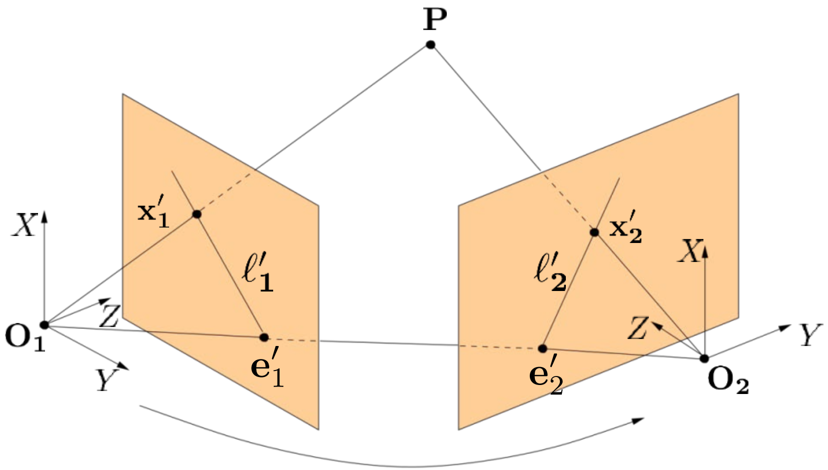
## Unkalibrierter Fall




- Euklidische Transformation $\lambda_2 \mathbf{x_2} = R\lambda_1 \mathbf{x_1} + T$
- Es gilt $\mathbf{x_2'}^\top \hat{T}' KRK^{-1} \mathbf{x_1'} = 0$
- Mit $\hat{T}' \sim K^{-\top} \hat{T} K^{-1}$ folgt $F \sim \hat{T}' KRK^{-1}$

# Eigenschaften der Fundamentalmatrix

## Epipole und Epipolarlinien




- Der Korrespondenzpunkt $\mathbf{x}_2'$ liegt auf der Linie $\ell_2' \sim F\mathbf{x_1}'$
  und umgekehrt: $\mathbf{x}_1'$ liegt auf $\ell_1' \sim F^\top \mathbf{x}_2'$

- Die Epipole in Pixelkoordinaten:

$$\mathbf{e}_2'^\top F = 0, \quad F\mathbf{e}_1' = 0$$

# Eigenschaften der Fundamentalmatrix

## Singulärwertzerlegung der Fundamentalmatrix

- Eine Matrix ist genau dann eine Fundamentalmatrix wenn für ihre Singulärwertzerlegung gilt:

$$F = U\Sigma V^\top \qquad \text{mit} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

- Fundamentalmatrix kann über den 8-Punkt-Algorithmus geschätzt werden

# Eigenschaften der Fundamentalmatrix

## 8-Punkt-Algorithmus zum Schätzen der Fundamentalmatrix

- Gegeben: $n$ Korrespondenzpunktpaare in Pixelkoordinaten
  $(\mathbf{x_1'}^j, \mathbf{x_2'}^j),\ j = 1, \dots, n \quad (n \geq 8)$
- Bilde Koeffizientenmatrix $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{1\top} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{n\top} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 9}$ mit $\mathbf{a^j} = \mathbf{x_1'}^j \otimes \mathbf{x_2'}^j$
- Extrahiere rechtsseitigen Singulärvektor von $A$ zum kleinsten Singulärwert und konstruiere daraus eine Matrix $G \in \mathbb{R}^{3\times 3}$
- Projiziere auf die Menge der Fundamentalmatrizen:
  - SVD von $G = U_G \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} V_G^\top$
  - Schätzung der Fundamentalmatrix $F = U_G \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, 0\} V_G^\top$

# Kalibrierter vs. Unkalibrierter Fall

## Überblick & Diskussion

### Kalibrierte Kamera

- Epipolargleichung $\mathbf{x}_2^\top E \mathbf{x}_1 = 0$
- Essentielle Matrix $E = \hat{T} R$
- Epipole und Epipolarlinien

$$E\mathbf{e_1} = 0, \quad E^\top \mathbf{e_2} = 0$$
$$\ell_\mathbf{2} \sim E\mathbf{x_1}, \quad \ell_\mathbf{1} \sim E^\top \mathbf{x_2}$$

- 3D-Rekonstruktion möglich

### Unkalibrierte Kamera

- Epipolargleichung $\mathbf{x}_2'^\top F \mathbf{x}_1' = 0$
- Fundamentalmatrix $F = K^{-\top} \hat{T} R K^{-1}$
- Epipole und Epipolarlinien

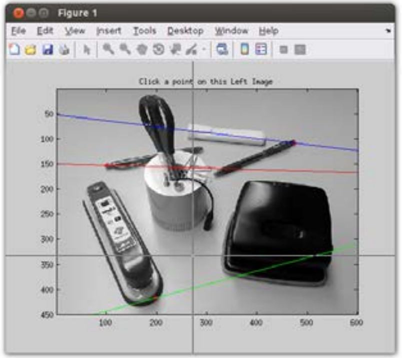
$$F\mathbf{e}'_\mathbf{1} = 0, \quad F^\top \mathbf{e}'_\mathbf{2} = 0$$
$$\ell'_\mathbf{2} \sim F\mathbf{x}'_\mathbf{1}, \quad \ell'_\mathbf{1} \sim F^\top \mathbf{x}'_\mathbf{2}$$

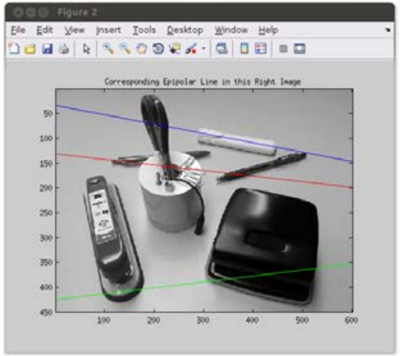
- 3D-Rekonstruktion nicht ohne Weiteres möglich

# MATLAB-Demonstration

## 8-Punkt-Algorithmus und Epipolarlinien

- Mitul Saha & Rohit Singh, Stanford University
- http://ai.stanford.edu/~mitul/cs223b/fm.html



# Zusammenfassung

- Epipolargleichung für unkalibrierte Kamera
- Fundamentalmatrix beinhaltet Information der intrinsischen Kameraparameter und der euklidischen Bewegung
- Schätzen der Fundamentalmatrix mit dem 8-Punkt-Algorithmus und Korrespondenzpunkten in Pixelkoordinaten