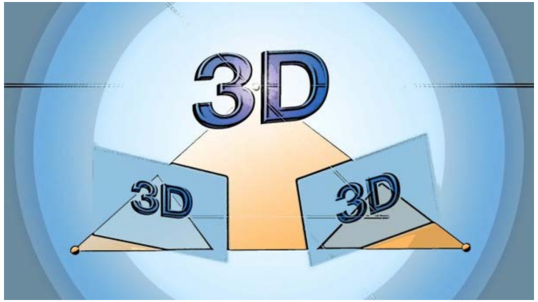
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

Martin Kleinsteuber: Computer Vision

Kapitel 2 – Bildentstehung

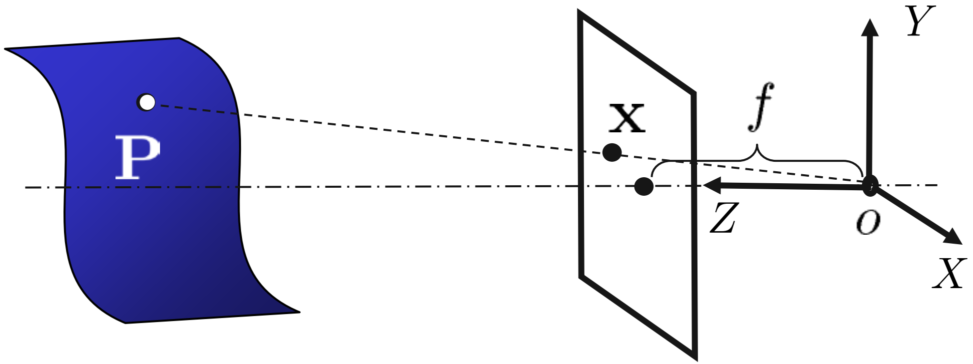
2. Homogene Koordinaten



Wiederholung: Lochkameramodell

Bildpunkte und Geraden

- Alle Punkte auf einer Geraden durch das optische Zentrum werden auf denselben Bildpunkt abgebildet
- Umgekehrt existiert zu jedem Bildpunkt genau eine Gerade



Der projektive Raum

- Zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ nennen wir zueinander **äquivalent**, falls ein $\lambda \neq 0$ existiert mit $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$. In diesem Fall schreiben wir

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$$

- Eine Gerade durch $\mathbf{x} \neq 0$ können wir nun beschreiben als **Äquivalenzklasse**

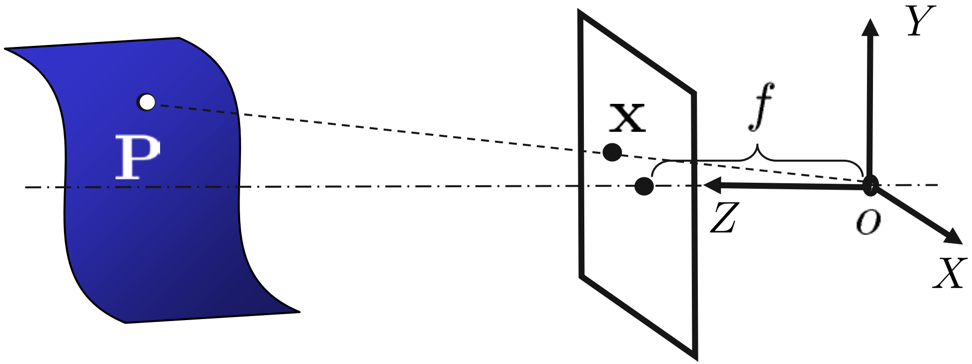
$$[\mathbf{x}] := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} \sim \mathbf{x}\}$$

- Die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ heißt **projektiver Raum**

$$\mathbb{P}_n = \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\}$$

Homogene Koordinaten

- Normiert man die Längeneinheit auf die Brennweite, ist die Bildebene gegeben durch



$$BE = \left\{ \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid Z = 1 \right\}$$

- Der Vektor $\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix}$ heißt die **homogenen Koordinaten** von $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$

Homogene Koordinaten

- Allgemeine Definition: $\mathbf{x} := (X_1, \dots, X_n)^\top \in \mathbb{R}^n$

  Dann heißt

  $$\mathbf{x}^{(\text{hom})} := (X_1, \dots, X_n, 1)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$$

  die homogenen Koordinaten von $\mathbf{x}$

Zusammenfassung

- Äquivalente Vektoren unterscheiden sich nur durch Multiplikation mit einer Zahl ungleich Null.

- Homogene Koordinaten eines Vektors erhält man durch Hinzufügen einer weiteren Koordinate mit dem Wert Eins.