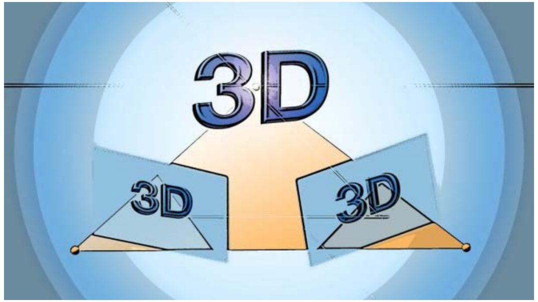
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

Martin Kleinsteuber: Computer Vision

Kap. 1 – Wissenswertes über Bilder

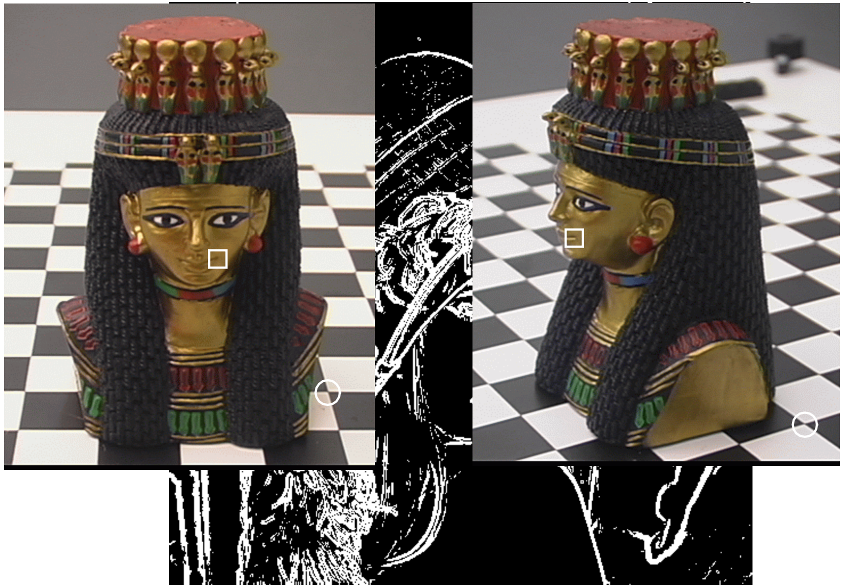
3. Merkmalspunkte – Ecken und Kanten



Ecken und Kanten...

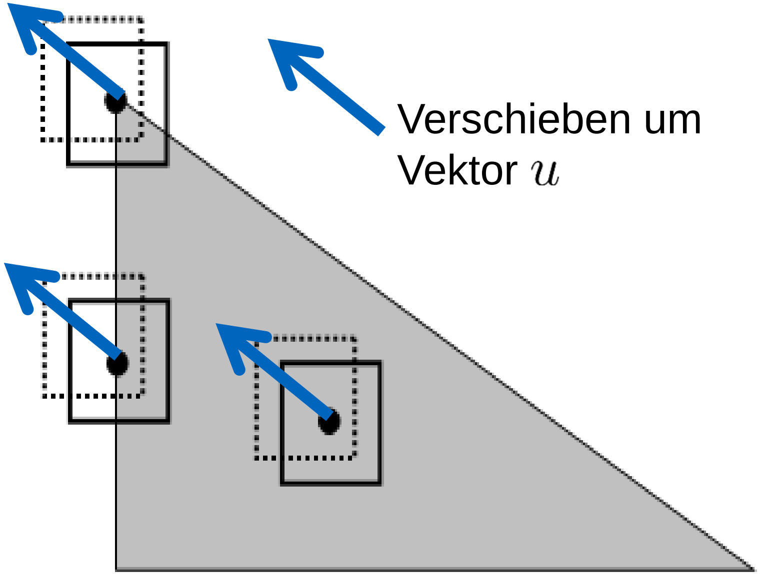
...liefern markante Bildmerkmale

- Bestimmung von Konturen
- Berechnungen von Bewegungen in Bildsequenzen
- Schätzen von Kamerabewegung
- Registrierung von Bildern
- 3D-Rekonstruktion



Harris Ecken- und Kantendetektor

Änderung des Bildsegments in Abhängigkeit der Verschiebung



- Ecke: Verschiebung in jede Richtung bewirkt Änderung
- Kante: Verschiebung in jede bis auf genau eine Richtung bewirkt Änderung
- Homogene Fläche: Keine Änderung, egal in welche Richtung

Harris Ecken- und Kantendetektor

Formelle Beschreibung der Änderung

- Position im Bild: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad I(x) = I(x_1, x_2)$
- Verschiebungsrichtung: $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$
- Änderung des Bildsegments:

$$S(u) = \int_W \Big(I(x+u) - I(x)\Big)^2 dx$$

- Differenzierbarkeit von I:

$$\lim_{u \to 0} \frac{I(x+u) - I(x) - \nabla I(x)^\top u}{\|u\|} = 0$$

Harris Ecken- und Kantendetektor

Approximation der Änderung

- Folgerung aus Differenzierbarkeit: $I(x+u) - I(x) = \nabla I(x)^\top u + o(\|u\|)$
- Restterm $o(\|u\|)$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{u \to 0} o(\|u\|)/\|u\| = 0$

- Approximation für kleine Verschiebungen: $I(x+u) - I(x) \approx \nabla I(x)^\top u$

- Approximation der Änderung im Bildsegment:

$$S(u) = \int_W \Big(I(x+u) - I(x)\Big)^2 dx \approx \int_W \Big(\nabla I(x)^\top u\Big)^2 dx$$

Harris Ecken- und Kantendetektor

Die Harris-Matrix

- Ausmultiplizieren des Integrals:

$$\int_W \left(\nabla I(x)^\top u\right)^2 dx = u^\top \left(\int_W \nabla I(x) \nabla I(x)^\top dx \right) u$$

- Harris-Matrix: $G(x) = \int_W \nabla I(x) \nabla I(x)^\top dx$

$$\nabla I(x) \nabla I(x)^\top = \begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial x_1} I(x))^2 & \frac{\partial}{\partial x_1} I(x) \frac{\partial}{\partial x_2} I(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} I(x) \frac{\partial}{\partial x_1} I(x) & (\frac{\partial}{\partial x_2} I(x))^2 \end{bmatrix}$$

- Approximative Änderung des Bildsegments:

$$S(u) \approx u^\top G(x) u$$

Exkurs: Lineare Algebra

Positiv definite und positiv semidefinite Matrizen

- Definition. Eine reelle symmetrische Matrix $A = A^\top$ heißt
  - positiv definit, falls $x^\top A x > 0, \quad x \neq 0$
  - positiv semidefinit, falls $x^\top A x \geq 0$
- Beispiele
  - Die Null-Matrix ist positiv semidefinit, aber nicht positiv definit.
  - Die Einheitsmatrix ist positiv definit.
  - Jede positiv definite Matrix ist auch positiv semidefinit.
  - $G(x)$ ist positiv semi-definit. Warum?

Exkurs: Lineare Algebra

Positiv definite und positiv semidefinite Matrizen

- Satz. Für reelle symmetrische Matrizen $A = A^\top$ ist gleichbedeutend:
  - A positiv (semi-) definit
  - Alle Eigenwerte von A sind größer als Null (größer oder gleich Null)

- Eigenwertzerlegung reeller symmetrischer Matrizen.
  Jede reelle symmetrische Matrix $A = A^\top$ kann zerlegt
  werden in ein Produkt $A = V\Lambda V^\top$ mit $VV^\top = I$ und einer
  Diagonalmatrix Λ, auf deren Diagonale die Eigenwerte
  von A stehen. Die Spalten von V sind die zugehörigen Eigenvektoren.

Harris Ecken- und Kantendetektor

Eigenwertzerlegung

- Eigenwertzerlegung der Harris-Matrix:

$$G(x) = \int_W \nabla I(x) \nabla I(x)^\top dx = V \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} V^\top$$

mit $VV^\top = I_2$ und den Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0.$

- Änderung in Abhängigkeit der Eigenvektoren: $V = [v_1, v_2]$

$$S(u) \approx u^\top G(x) u = \lambda_1 (u^\top v_1)^2 + \lambda_2 (u^\top v_2)^2$$

Harris Ecken- und Kantendetektor

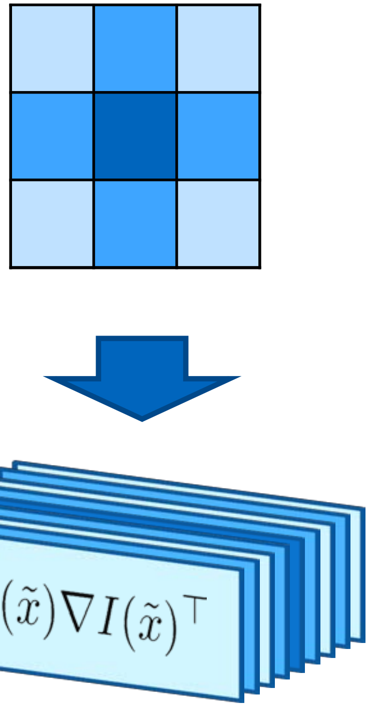
Art des Merkmals in Abhängigkeit der Eigenwerte

$$S(u) \approx u^\top G(x) u = \lambda_1 (u^\top v_1)^2 + \lambda_2 (u^\top v_2)^2$$

- Beide Eigenwerte positiv
  - $S(u) > 0$ für alle u (Änderung in jede Richtung)
  - Untersuchtes Bildsegment enthält eine Ecke
- Ein Eigenwert positiv, ein Eigenwert gleich null
  - $S(u) \begin{cases} = 0, & \text{falls } u = r v_2 \\ > 0, & \text{sonst} \end{cases}$ (Keine Änderung nur in Richtung des Eigenvektors zum Eigenwert 0)
  - Untersuchtes Bildsegment enthält eine Kante
- Beide Eigenwerte gleich null
  - $S(u) = 0$ für alle u (Keine Änderung, egal in welche Richtung)
  - Untersuchtes Bildsegment ist eine homogene Fläche

Praktische Realisierung des Harris-Detektors

Berechnung der Harris-Matrix



- Approximiere $G(x)$ durch endliche Summe

$$G(x) = \int_W \nabla I(x) \nabla I(x)^\top dx \approx \sum_{\tilde{x} \in W(x)} \nabla I(\tilde{x}) \nabla I(\tilde{x})^\top$$

- Gewichtete Summe in Abhängigkeit der Position von $\tilde{x}$

$$G(x) \approx \sum_{\tilde{x} \in W(x)} w(\tilde{x}) \nabla I(\tilde{x}) \nabla I(\tilde{x})^\top$$

- Gewichte $\omega(\tilde{x}) > 0$ betonen Einfluss der zentralen Pixel

Praktische Realisierung des Harris-Detektors

Eigenwerte

- In der Realität nehmen Eigenwerte nie genau den Wert Null an, z.B. auf Grund von Rauschen, diskreter Abtastung und numerischen Ungenauigkeiten

- Charakteristik in der Praxis
  - Ecke: zwei große Eigenwerte
  - Kante: ein großer Eigenwert, ein kleiner Eigenwert
  - Homogene Fläche: zwei kleine Eigenwerte

- Entscheidung mittels empirischer Schwellwerte

Exkurs: Lineare Algebra

Eigenwerte, Determinante, Spur

- Zusammenhang von Eigenwerten, Determinante und Spur einer Matrix.

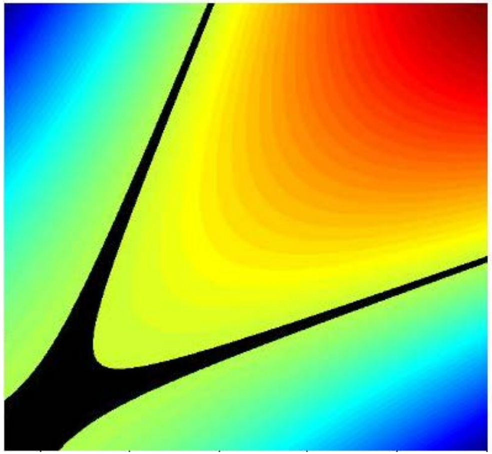
  Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte einer Matrix G.

  Dann gilt

  - $\det G = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ (Determinante ist das Produkt der Eigenwerte)
  - $\mathrm{tr}\ G = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (Spur ist die Summe der Eigenwerte)

Praktische Realisierung des Harris-Detektors

Ein einfaches Kriterium für Ecken und Kanten



- Betrachte die Größe $H := \det(G) - k(\operatorname{tr}(G))^2$

$$H = (1-2k)\lambda_1\lambda_2 - k(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$$

- Ecke (beide Eigenwerte groß)
  - H größer als ein positiver Schwellwert
- Kante (ein Eigenwert groß, ein Eigenwert klein)
  - H kleiner als ein negativer Schwellwert
- Homogene Fläche (beide Eigenwerte klein)
  - H betragsmäßig klein

Zusammenfassung

Harris-Detektor zur Bestimmung von Merkmalspunkten

- Auswertung der (approximierten) Harris-Matrix

$$G(x) \approx \sum_{\tilde{x} \in W(x)} w(\tilde{x}) \nabla I(\tilde{x}) \nabla I(\tilde{x})^\top$$

- Eigenwertzerlegung von $G(x)$ liefert auch Info über Richtung etwaiger Kanten
- Effiziente Implementierung mit Hilfe des Ausdrucks

$$H := \det(G) - k(\operatorname{tr}(G))^2$$

- Entscheidung mittels Schwellwerten
  - Ecke: $0 < \tau_+ < H$
  - Kante: $H < \tau_- < 0$
  - Homogene Fläche: $\tau_- < H < \tau_+$