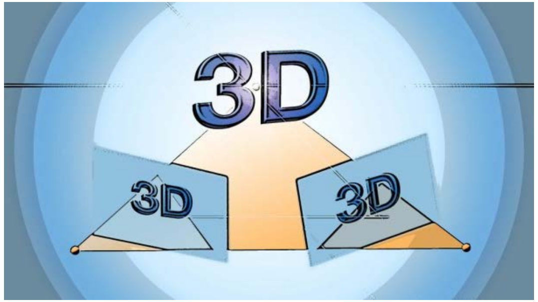
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

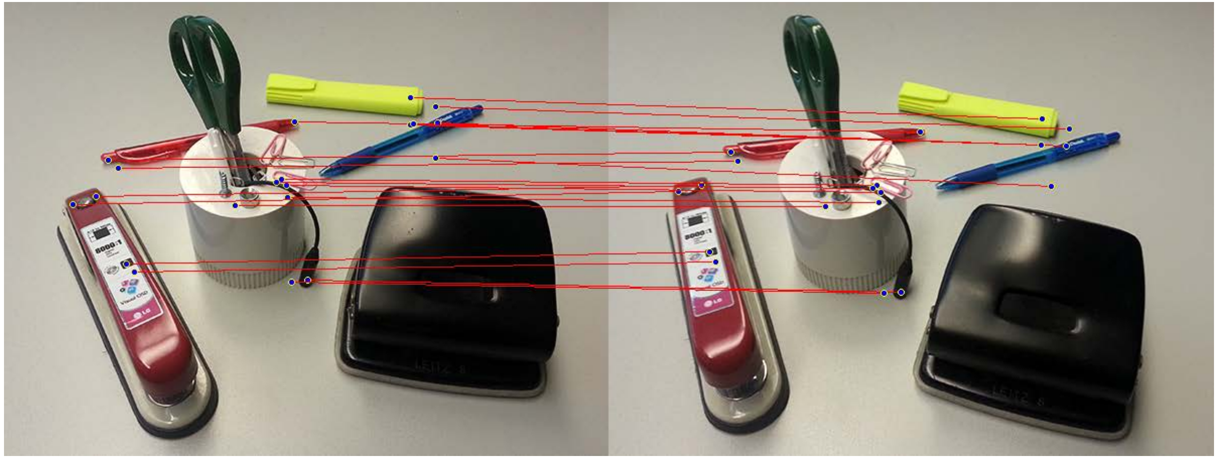
Martin Kleinsteuber: Computer Vision

Kapitel 3 – Epipolargeometrie

3. Der 8-Punkt-Algorithmus



Motivation



(R,T)

- Euklidische Bewegung nicht bekannt
- Korrespondenzen von Merkmalspunkten bekannt
- Wie schätzt man die essentielle Matrix?

8-Punkt-Algorithmus zur Schätzung der Essentiellen Matrix

Motivation / Voraussetzungen

- Gegeben: n Korrespondenzpunktpaare $(\mathbf{x}_1^j, \mathbf{x}_2^j)$
- Idealerweise erfüllen alle KP die Epipolargleichung

  $\mathbf{x}_2^{j\top} E \mathbf{x}_1^j = 0$
- Ziel: Berechne die essentielle Matrix E aus den geschätzten KP

  $E \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, somit 9 Unbekannte
- Skalierungsinvarianz: Wenn E Lösung ist, dann auch

  $\lambda E, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- Benötige 8 unabhängige Gleichungen

Vektorisierte Epipolargleichung

- Bislang: ${\mathbf{x}_2^j}^\top E \mathbf{x}_1^j = 0$

- Für ein ideales Korrespondenzpunktpaar $(\mathbf{x}_1^j, \mathbf{x}_2^j)$ gilt somit

$$ {\mathbf{a}^j}^\top \mathbf{E}^s = 0 $$

Kronecker-Produkt $\otimes$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} := \mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_1x_2 \\ x_1y_2 \\ x_1z_2 \\ y_1x_2 \\ y_1y_2 \\ y_1z_2 \\ z_1x_2 \\ z_1y_2 \\ z_1z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9$$

Vektorisieren („stacking“)

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ergibt} \quad \mathbf{E}^s = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \end{bmatrix}$$

Der 8-Punkt-Algorithmus

Gleichungssystem zur Bestimmung von E

- Aus n Korrespondenzpunktpaaren ergibt sich das homogene lineare Gleichungssystem $A\mathbf{E}^s = 0$, mit $A := \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{1\top} \\ \mathbf{a}^{2\top} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{n\top} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 9}$
- Für generisch verteilte ideale KP gilt
  $\dim(\operatorname{kern}(A)) = 1$ und somit $\operatorname{rk}(A) = 8$
- Durch Diskretisierungsfehler gilt in der Realität

  $$\operatorname{rk}(A) = 9$$

- Für $n > 8$ hat das homogene LGS keine nicht-triviale Lösung

Exkurs: Lineare Algebra

Homogene Gleichungssysteme

- Idee: Statt $A\mathbf{x} = 0$ wird Minimierungsproblem gelöst

$$\min_{\mathbf{x}} \|A\mathbf{x}\|_2^2$$

- Da Lösungen skalierungsinvariant sind, kann die Suche beschränkt werden auf

$$\mathbf{x} : \ \|\mathbf{x}\|_2 = 1$$

- Also finde $\mathbf{x}$ mit $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$, welches $\|A\mathbf{x}\|_2^2$ minimiert.

Exkurs: Lineare Algebra

Lösung des Minimierungsproblems mittels SVD

- Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\top$

$$= \mathbf{x}^\top V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix} V^\top \mathbf{x}$$

- $\mathbf{v}_n = \arg \min_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|A\mathbf{x}\|_2^2$

Der 8-Punkt-Algorithmus

Bisherige Herleitung

- Bilde Matrix A aus $n \geq 8$ generisch gelegenen Korrespondenzpunktpaaren

- Löse Minimierungsproblem $\mathbf{G}^s = \arg \min_{\|\mathbf{E}^s\|_2 = 1} \|A\mathbf{E}^s\|_2^2$:

  Singulärwertzerlegung $A = U_A \Sigma_A V_A^\top$ liefert die Lösung

  $\mathbf{G}^s = \mathbf{v}_9$ (9. Spalte von V_A)

- Umsortieren der Einträge von $\mathbf{G}^s$ führt zu $G \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

Der 8-Punkt-Algorithmus

Von der Lösung des Minimierungsproblems zur Essentiellen Matrix

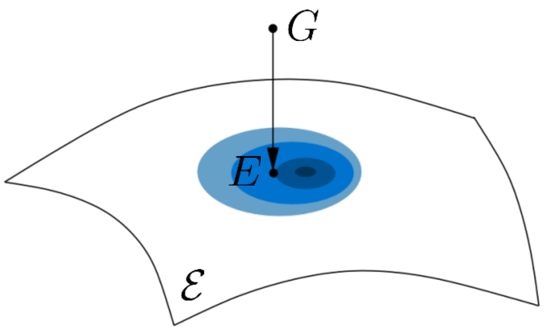
- G ist in der Regel keine essentielle Matrix

$$G = U_G \Sigma_G V_G^\top \qquad \Sigma_G = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

- Finde die „nächste“ essentielle Matrix zu G

$$E = \arg\min_{E \in \mathcal{E}} \|E - G\|_F^2$$

- Projektion auf den Raum der essentiellen Matrizen $\mathcal{E}$



Der 8-Punkt-Algorithmus

Projektion auf die nächste Essentielle Matrix

- $E = \arg\min_{E \in \mathcal{E}} \|E - G\|_F^2$
- $E = U_G \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & \sigma & \\ & & 0 \end{bmatrix} V_G^\top$
- $\sigma = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$

- E kann nur bis auf Skalierung geschätzt werden
- In der Praxis daher üblicherweise

$$E = U_G \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} V_G^\top$$

Zusammenfassung

8-Punkt-Algorithmus

- Lineares Gleichungssystem aus Epipolarbedingungen
- Koeffizientenmatrix aus Kroneckerprodukt der KP-Paare
- Lösung ist der 9. rechtsseitige Singulärvektor
- Projektion auf normierte essentielle Matrizen
  - Singulärwertzerlegung der umsortieren Lösung
  - Zu-Eins-Setzen der ersten beiden Singulärwerte
  - Zu-Null-Setzen des kleinsten Singulärwerts