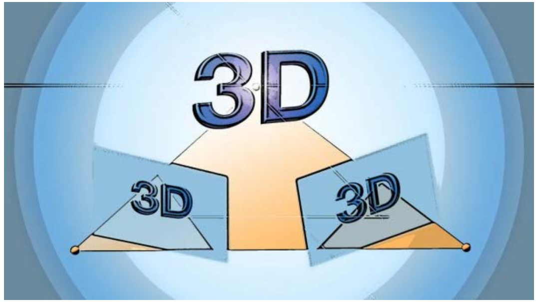
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

Martin Kleinsteuber: Computer Vision

Kapitel 4 – Planare Szenen

2. Der 4-Punkt-Algorithmus



Motivation

planare Szene

- Wie schätzt man die Homographiematrix aus planaren KP?
- Wie extrahiert man daraus die euklidische Bewegung?
- Wie hängen die Homographiematrix und die essentielle Matrix zusammen?

4-Punkt-Algorithmus zur Schätzung der Homographiematrix

Motivation / Voraussetzungen

- Gegeben: n Korrespondenzpunktpaare $(\mathbf{x}_1^j, \mathbf{x}_2^j)$ von Punkten in einer Ebene
- Idealerweise erfüllen alle KP die planare Epipolargleichung

  $$\hat{\mathbf{x}}_2^j H \mathbf{x}_1^j = 0$$

- Ziel: Berechne die Homographiematrix H aus den geschätzten KP

  $H \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, somit 9 Unbekannte

- Skalierungsinvarianz: Wenn H Lösung ist, dann auch

  $$\lambda H, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Vektorisierte planare Epipolargleichung

- Bislang: $\hat{\mathbf{x}}_2^j H \mathbf{x}_1^j = 0$

Kronecker-Produkt $\otimes$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \qquad \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -z_2 & y_2 \\ z_2 & 0 & -x_2 \\ -y_2 & x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B := \mathbf{x}_1 \otimes \hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} x_1 \hat{\mathbf{x}}_2 \\ y_1 \hat{\mathbf{x}}_2 \\ z_1 \hat{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9 \times 3}$$

- $\operatorname{Rang}(\hat{\mathbf{x}}_2) = 2$, also i.A. auch $\operatorname{Rang}(B) = 2$
- Für jedes ideale Korrespondenzpunktpaar $(\mathbf{x}_1^j, \mathbf{x}_2^j)$ enthält das homogene LGS $B^{j\,\top} \mathbf{H}^s = 0$ in der Regel zwei unabhängige Gleichungen
- Benötige mind. 4 allgemein liegende Korrespondenzpunktpaare

Der 4-Punkt-Algorithmus

- Aus n Korrespondenzpunktpaaren ergibt sich das homogene lineare Gleichungssystem $A\mathbf{H}^s = 0$, mit $A := \begin{bmatrix} B^{1\,\top} \\ B^{2\,\top} \\ \vdots \\ B^{n\,\top} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3n\times 9}$
- Löse Minimierungsproblem $\mathbf{H}^{\mathbf{s}}_{\mathbf{L}} = \arg \min\limits_{\|\mathbf{H}^{\mathbf{s}}\|_2=1} \|A\mathbf{H}^{\mathbf{s}}\|_2^2$ mittels SVD von A
- $H_L := \lambda H$ sind umsortierte Einträge des rechtsseitigen Singulärvektors zum kleinsten Singulärwert, Schätzung von H bis auf Skalierung
- Aus den Eigenschaften der Homographiematrix $|\lambda| = \sigma_2(H_L)$ und somit $H = \frac{1}{\sigma_2(H_L)} H_L$

Der 4-Punkt-Algorithmus

Vorzeichen der geschätzten Homographiematrix

- Schätzung von H bis auf Vorzeichen, $\pm H$ erfüllen planare Epipolargleichung
- Ausnutzen der Positivitätsbedingung der Tiefen führt zu Kriterium $\mathbf{x}_2^\top H \mathbf{x}_1 > 0$
- Wähle Vorzeichen von H entsprechend dieses Kriteriums

3D-Rekonstruktion aus Homographiematrix

Herleitung

- Zu einer Homographiematrix $H = (R + \frac{1}{d}\mathbf{T}\mathbf{n}^\top)$ gibt es höchstens zwei physikalisch mögliche Zerlegungen in die Parameter $\{R, \frac{1}{d}\mathbf{T}, \mathbf{n}\}$
- Eigenwertzerlegung $H^\top H = V\Sigma^2 V^\top, \quad V = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(3)$
- Definiere

$$\mathbf{u}_1 := \frac{\sqrt{1-\sigma_3^2}\mathbf{v}_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - 1}\mathbf{v}_3}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}}, \quad \mathbf{u}_2 := \frac{\sqrt{1-\sigma_3^2}\mathbf{v}_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 1}\mathbf{v}_3}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_3^2}}$$

- Definiere

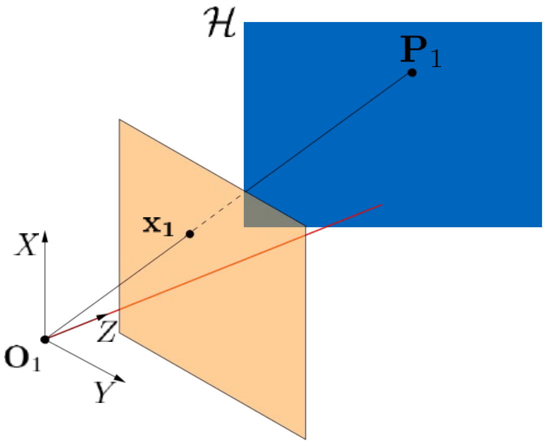
$$U_1 := \begin{bmatrix}\mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_1 & \hat{\mathbf{v}}_2\mathbf{u}_1\end{bmatrix}, \quad W_1 := \begin{bmatrix}H\mathbf{v}_2 & H\mathbf{u}_1 & \widehat{H\mathbf{v}_2}H\mathbf{u}_1\end{bmatrix}$$

$$U_2 := \begin{bmatrix}\mathbf{v}_2 & \mathbf{u}_2 & \hat{\mathbf{v}}_2\mathbf{u}_2\end{bmatrix}, \quad W_2 := \begin{bmatrix}H\mathbf{v}_2 & H\mathbf{u}_2 & \widehat{H\mathbf{v}_2}H\mathbf{u}_2\end{bmatrix}$$

3D-Rekonstruktion aus Homographiematrix

4 Lösungen

Lösung 1:	$R_1 = W_1 U_1^\top$ $\mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_1$ $\frac{1}{d}\mathbf{T}_1 = (H - R_1)\mathbf{n}_1$	Lösung 3:	$R_3 = R_1$ $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_1$ $\frac{1}{d}\mathbf{T}_3 = -\frac{1}{d}\mathbf{T}_1$
Lösung 2:	$R_2 = W_2 U_2^\top$ $\mathbf{n}_2 = \mathbf{v}_2 \mathbf{u}_2$ $\frac{1}{d}\mathbf{T}_2 = (H - R_2)\mathbf{n}_2$	Lösung 4:	$R_4 = R_2$ $\mathbf{n}_4 = -\mathbf{n}_2$ $\frac{1}{d}\mathbf{T}_4 = -\frac{1}{d}\mathbf{T}_2$



Homographiematrix und essentielle Matrix

Zusammenhänge

- Betrachte $E = \hat{\mathbf{T}}R$ und $H = R + \mathbf{T}\mathbf{u}^\top, \quad R \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \ \mathbf{T}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3, \quad \|\mathbf{T}\| = 1$
- Dann gilt
  - $E = \hat{\mathbf{T}}H$
  - $H^\top E + E^\top H = 0$
  - $H = \hat{\mathbf{T}}^\top E + \mathbf{T}\mathbf{v}^\top$ für ein bestimmtes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

Homographiematrix und essentielle Matrix

Berechnung der essentiellen Matrix aus der Homographiematrix

- Homographiematrix H bekannt
- Habe außerdem zwei KP-Paare $(\mathbf{x}_1^j, \mathbf{x}_2^j),\ j = 1, 2$, deren 3D-Punkte nicht auf der Ebene zur Homographiematrix liegen
- Epipolarlinien $\ell_2^j \sim \hat{\mathbf{x}}_2^j H \mathbf{x}_1^j$ schneiden sich im Epipol $\mathbf{e}_2 \sim \mathbf{T}$
- Dann gilt $E = \hat{\mathbf{T}} H$ mit $\mathbf{T} \sim \hat{\ell}_2^1 \ell_2^2$ und $\|\mathbf{T}\|_2 = 1$

Homographiematrix und essentielle Matrix

Berechnung der Homographiematrix aus der essentiellen Matrix

- Essentielle Matrix E bekannt
- Habe außerdem drei KP-Paare $(\mathbf{x}_1^j, \mathbf{x}_2^j),\ j = 1, 2, 3$, deren 3D-Punkte eine Ebene im Raum definieren
- Dann gilt $H = \hat{\mathbf{T}}^\top E + \mathbf{T}\mathbf{v}^\top$ mit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, welches das Gleichungssystem $\hat{\mathbf{x}}_2^j \left(\hat{\mathbf{T}}^\top E + \mathbf{T}\mathbf{v}^\top\right) \mathbf{x}_1^j = 0, \quad j = 1, 2, 3$ löst

Zusammenfassung

- 4-Punkt-Algorithmus zur Bestimmung der Homographiematrix
- Zwei physikalisch plausible Lösungen für die Parameter der 3D-Rekonstruktion
- Mit Hilfe von weiteren Korrespondenzpunkten lässt sich die essentielle Matrix aus der Homographie bestimmen und umgekehrt