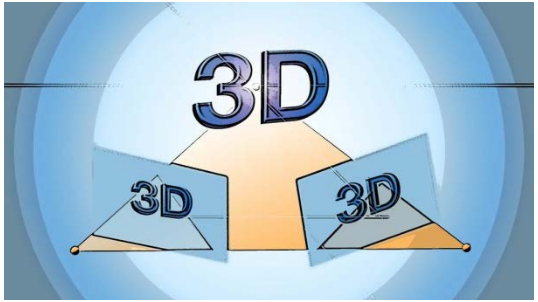
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

Martin Kleinsteuber: Computer Vision

Kapitel 2 – Bildentstehung

5. Bild, Urbild und Cobild



Motivation

Wiederholung

Projektion von Geraden

- Gerade im Raum in homogenen Koordinaten

$$L^{(\mathrm{hom})} = \left\{ \mathbf{P}_0^{(\mathrm{hom})} + \lambda \left[v_1, v_2, v_3, 0 \right]^\top \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Perspektivische Projektion einer Geraden – Beispiel

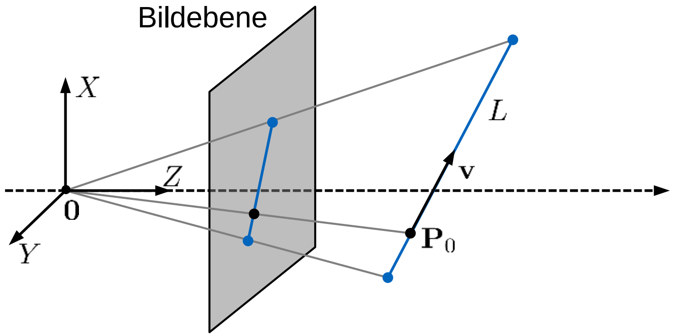


Bild und Urbild

Definitionen

- Das Bild eines Punktes bzw. einer Geraden ist deren perspektivische Projektion
  $\Pi_0 \mathbf{P}^{(\mathrm{hom})}$ bzw. $\Pi_0 L^{(\mathrm{hom})}$

- Das Urbild eines Punktes $\mathbf{P}$ bzw. einer Geraden L sind alle Punkte im Raum, die auf den gleichen Bildpunkt bzw. auf die gleiche Gerade in der BE projiziert werden.

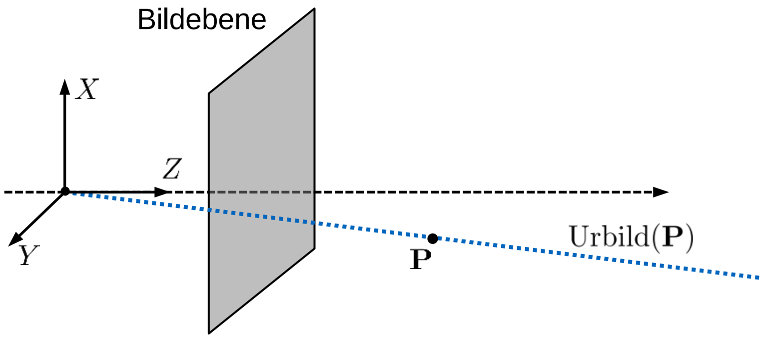
$$\mathrm{Urbild}(\mathbf{P}) = \{\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^3 \mid \Pi_0 \mathbf{Q}^{(\mathrm{hom})} \sim \Pi_0 \mathbf{P}^{(\mathrm{hom})}\}$$

$$\mathrm{Urbild}(L) = \bigcup_{\mathbf{P} \in L} \mathrm{Urbild}(\mathbf{P})$$

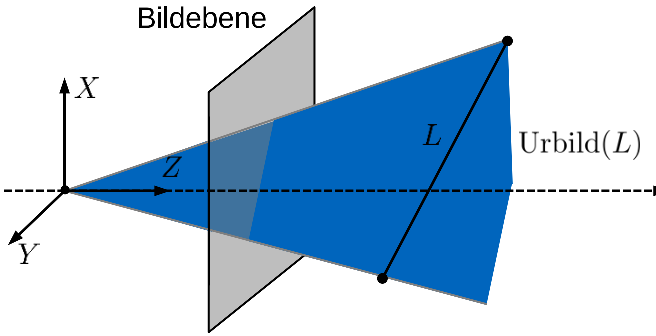
Bild und Urbild

Eigenschaften

- Urbilder von Punkten sind Geraden durch den Ursprung

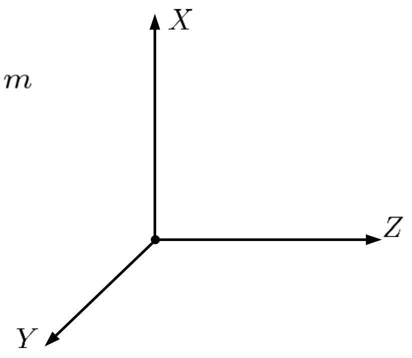


- Urbilder von Geraden sind Ebenen durch den Ursprung



Exkurs: Lineare Algebra

Erzeugnis und Orthogonales Komplement



- Erzeugnis von Spaltenvektoren $\mathbf{a}_i$ einer Matrix $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\operatorname{span}(\mathbf{A}) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{a}_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- Das Erzeugnis ist ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}^n$

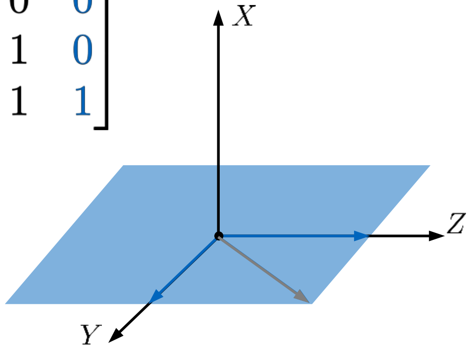
- Orthogonales Komplement eines Untervektorraums

$$\operatorname{span}(\mathbf{A})^{\perp} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{v} \rangle = 0, i = 1, \ldots, m \}$$

Exkurs: Lineare Algebra

Dimension, Kern und Rang

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



- Dimension eines Untervektorraums:

  Anzahl der Elemente eines minimalen Erzeugendensystems

- Rang einer Matrix ist Dimension des Erzeugnisses der Spalten

- Kern einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

  $$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathbf{Ax} = 0\}$$

- $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ ist Untervektorraum im $\mathbb{R}^m$

- Dimensionssatz:

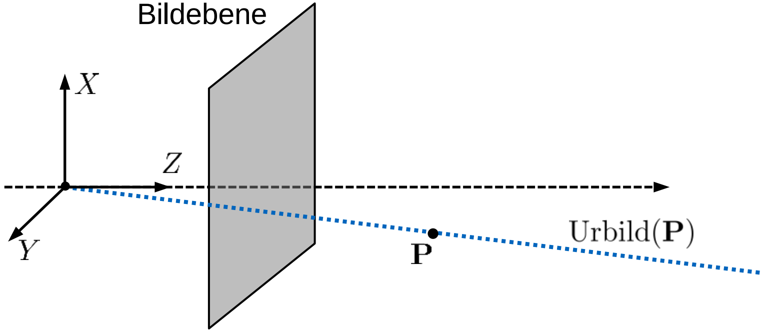
  $$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

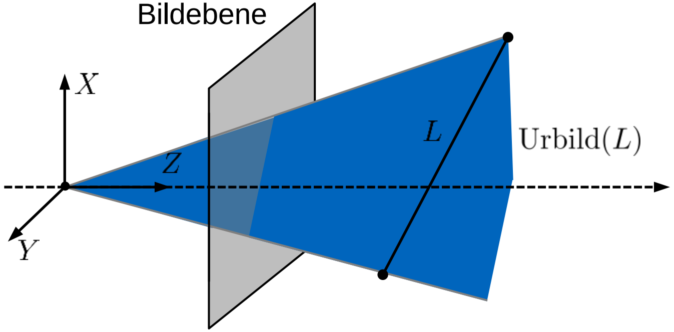
  $$\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) + \dim \mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = m$$

Cobild

Definition

- Das Cobild von Punkten oder Geraden ist das orthogonale Komplement des Urbildes



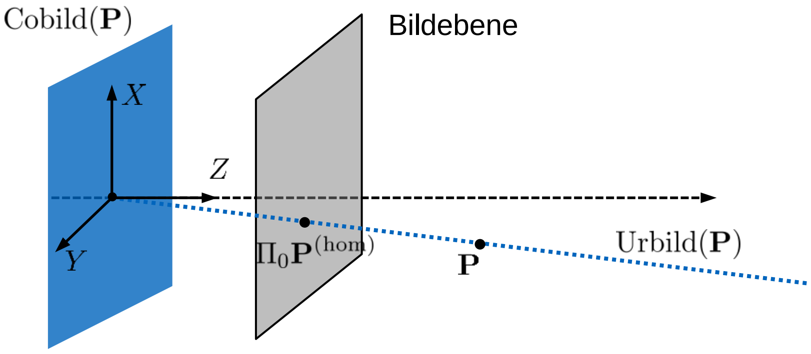


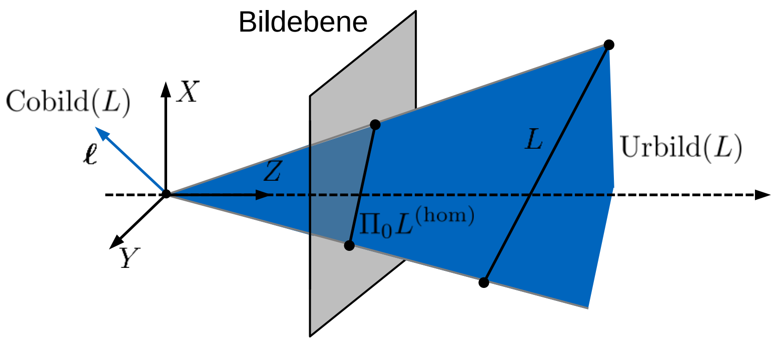
Bild, Urbild und Cobild

Zusammenhänge

- Äquivalente Darstellung von Bild, Urbild und Cobild

	Bild	Urbild	Cobild
Punkt	$\mathrm{span}(\mathbf{P}) \cap \mathrm{BE}$	$\mathrm{span}(\mathbf{P})$	$\mathrm{span}(\hat{\mathbf{P}})$
Linie	$\mathrm{span}(\hat{\boldsymbol{\ell}}) \cap \mathrm{BE}$	$\mathrm{span}(\hat{\boldsymbol{\ell}})$	$\mathrm{span}(\boldsymbol{\ell})$





Cobild

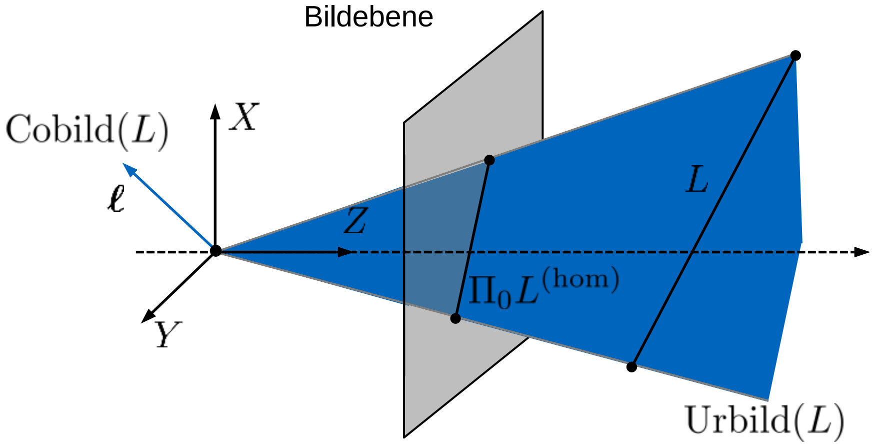
Nützliche Eigenschaften

- Sei L eine Gerade im Raum mit $\boldsymbol{\ell} \in \mathrm{Cobild}(L)$, und sei $\mathbf{x}$ das Bild eines Punktes auf dieser Linie. Dann gilt:

$$\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}^\top \mathbf{x} = 0$$

- Seien $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ Bilder zweier Punkte im Raum. Dann gilt für das Cobild $\boldsymbol{\ell}$ der Verbindungsgeraden:

$$\boldsymbol{\ell} \sim \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$$

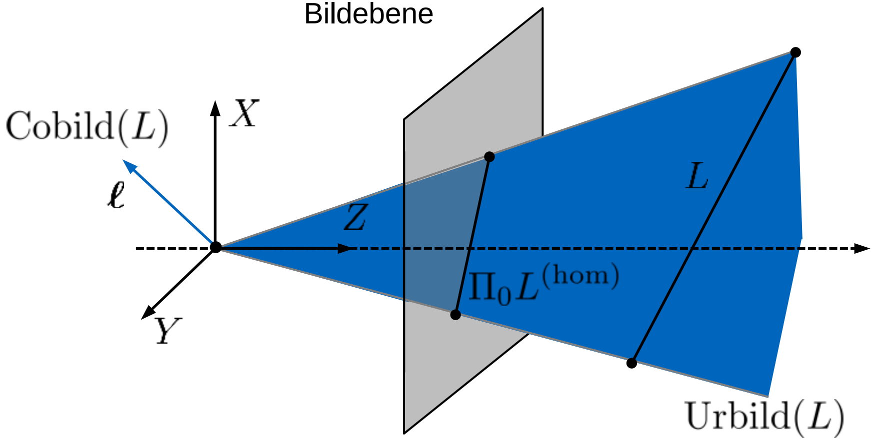


Cobild

Nützliche Eigenschaften

- Seien $\boldsymbol{\ell}_1$ und $\boldsymbol{\ell}_2$ die Cobilder zweier Geraden.
  Dann gilt für den Schnittpunkt $\mathbf{x}$
  der Bilder dieser Geraden:

$$\mathbf{x} \sim \boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2$$



Kollinearität von Bildpunkten

Untersuchung mit Hilfe des Ranges

- Die Bildpunkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ liegen genau dann auf einer Linie (sind kollinear), wenn

$$\mathrm{Rang}([\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]) \leq 2$$

Allgemein sind für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- $\det \mathbf{A} = 0$
- $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) < n$

Kollinearität von Bildpunkten

Untersuchung mit Hilfe des Ranges

- Die Bildpunkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ liegen genau dann auf einer Linie (sind kollinear), wenn

$$\mathrm{Rang}([\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]) \leq 2$$

- Drei Bildpunkte sind genau dann kollinear, wenn

$$\det\left[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\right] = 0$$

Allgemein sind für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ äquivalent:

- $\det \mathbf{A} = 0$
- $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) < n$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Diagonalisierbarkeit von Matrizen

- Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \qquad \text{falls} \quad \exists\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$

- Eigenvektoren sind nur bis auf Skalierung bestimmt

$$\alpha \mathbf{A}\mathbf{v} = \alpha \lambda \mathbf{v}$$

- Manche Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind diagonalisierbar, d.h.

$$\exists\, \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{S} \text{ invertierbar} \qquad \mathbf{D}_A = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

- Reelle symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar und haben zueinander orthogonale Eigenvektoren, d.h.

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n],\ \mathbf{v}_i \text{ EV von } \mathbf{A} \qquad \mathbf{D}_A = \mathbf{V}^\top \mathbf{A}\mathbf{V}$$

Positiv (semi-)definite Matrizen

Orthogonale Diagonalisierbarkeit

- Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$ heißt positiv (semi-)definit, wenn $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- Die Eigenwerte positiv (semi-)definiter Matrizen sind positiv (nicht negativ)
- Also können positiv (semi-)definite Matrizen orthogonal diagonalisiert werden, d.h.

$$\lambda_i \geq 0,\ \forall\, \lambda_i\, \mathrm{EW\ \ von}\ \mathbf{A}$$

$$\mathbf{D}_A = \mathbf{V}^\top \mathbf{A}\mathbf{V} \qquad \mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]\,,\ \mathbf{v}_i\, \mathrm{EV\ \ von}\ \mathbf{A}$$

Kollinearität von Bildpunkten

Untersuchung mit Hilfe der Eigenwerte

- Die Bildpunkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ liegen genau dann auf einer Linie (sind kollinear), wenn

$$\mathrm{Rang}([\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n]) \leq 2$$

- Drei Bildpunkte sind genau dann kollinear, wenn

$$\det\left[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\right] = 0$$

- Die Bildpunkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ sind genau dann kollinear, wenn der kleinste Eigenwert von

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top$$

gleich null ist $\forall\, \omega_i > 0$

Aspekte bei der praktischen Umsetzung

Ungenauigkeiten durch Diskretisierung / Rauschen

- In der Praxis sind die Bedingungen
  - $\det\left[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\right] = 0$
  - Kleinster Eigenwert von $\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top$ ist gleich null

  nicht erfüllt

- Verwendung von Schwellwerten

Zusammenfassung

- Urbilder von Punkten und Geraden sind Untervektorräume
- Cobild ist das orthogonale Komplement des Urbildes
- Darstellung von Linien im Bild mittels Cobildes
- Kriterien zur Kollinearität von Punkten
- Bild, Urbild und Cobild sind nützlicher Formalismus zum Erklären von einfachen geometrischen Zusammenhängen von Punkten und Geraden im Raum und auf der Bildebene