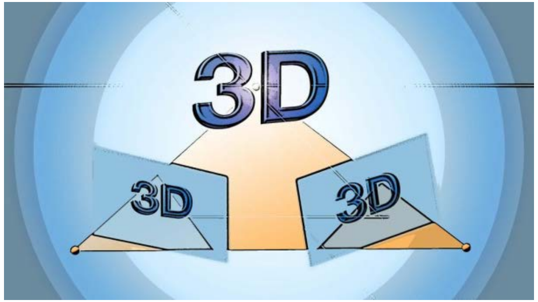
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

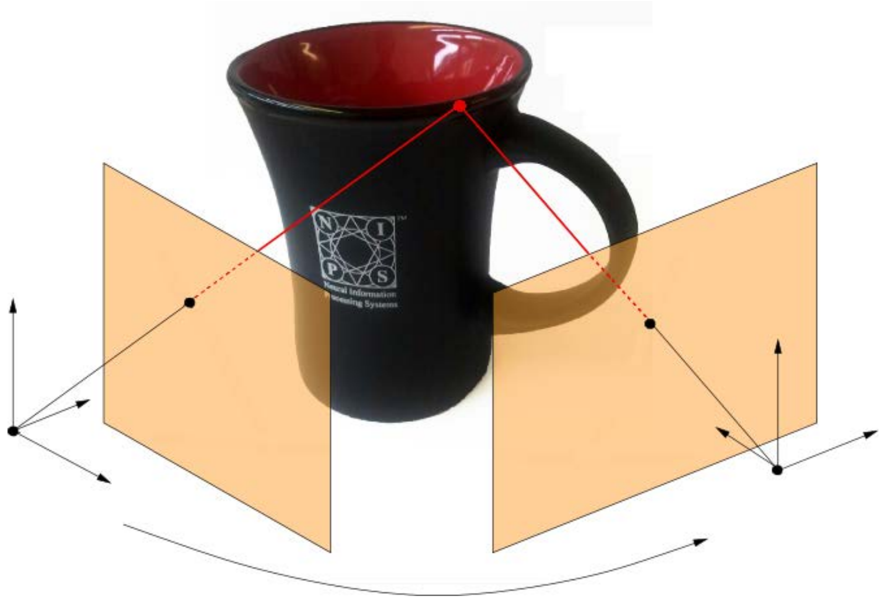
Martin Kleinsteuber: Computer Vision

Kapitel 3 – Epipolargeometrie

1. Epipolargleichung



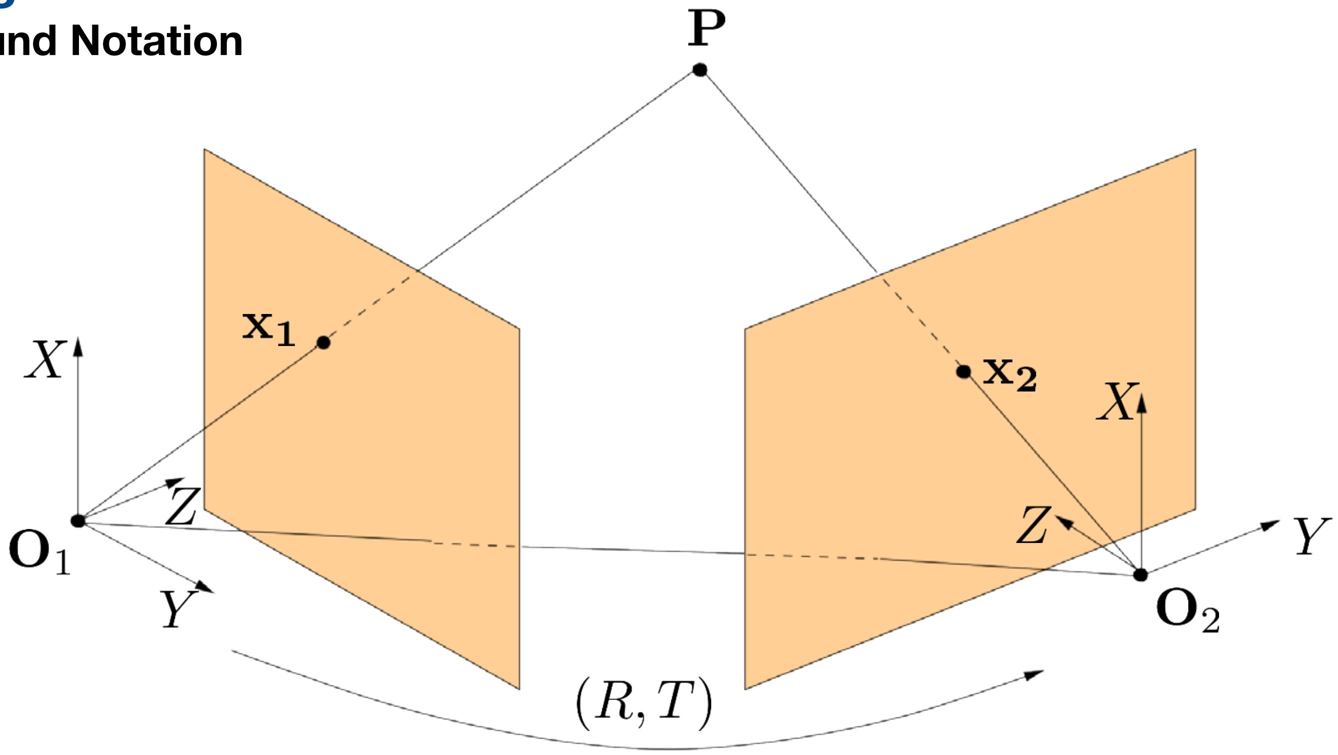
Motivation



- Ziel: Zusammenhang zwischen korrespondierenden Bildpunkten in Abhängkeit der euklidischen Bewegung der Kamera beschreiben

Epipolargeometrie

Überblick und Notation



Euklidische Bewegung

Umrechnung von Kamera 1 in Kamera 2

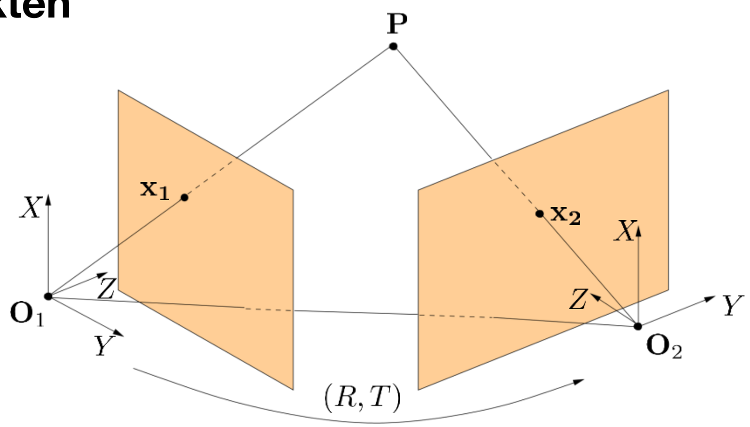
- $\mathbf{P_1}$ sind die Koordinaten des Punktes $\mathbf{P}$ in Kamerasystem 1
- $\mathbf{P_2}$ sind die Koordinaten des Punktes $\mathbf{P}$ in Kamerasystem 2
- Euklidische Bewegung der Kameras beschrieben
  durch die Koordinatentransformation

$$\mathbf{P}_2 = R\mathbf{P}_1 + T$$

mit $R \in SO(3), T \in \mathbb{R}^3$

Perspektivische Projektion

Zusammenhang zwischen Punkten und Bildpunkten



- Unter Annahme einer idealen Kamera gilt

$$\lambda_i \mathbf{x_i} = \mathbf{P_i}, \quad i = 1, 2\ , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Einsetzen in Euklidische Bewegung

$$\lambda_2 \mathbf{x_2} = R \lambda_1 \mathbf{x_1} + T$$

- Problem: Die Skalierungsfaktoren λ_i sind im Allgemeinen unbekannt

Die Epipolargleichung

Formeller Zusammenhang zwischen korrespondierenden Bildpunkten

$$\lambda_2 \mathbf{x_2} = R\lambda_1 \mathbf{x_1} + T$$

- Die Matrix $E = \hat{T}R$ heißt *essentielle Matrix* zur euklidischen Bewegung (R, T)
- Epipolargleichung $$\mathbf{x_2}^\top E \mathbf{x_1} = 0$$

Eigenschaften der essentiellen Matrix

Singulärwertzerlegung

- Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ lässt sich schreiben als Produkt

$$A = U\tilde{\Sigma}V^\top$$

wobei $U \in O(n), V \in O(m)$ und

- $n \leq m$: $\tilde{\Sigma} = \left[\begin{array}{c|c} \quad\Sigma\quad & 0 \end{array}\right]$
- $m < n$: $\tilde{\Sigma} = \left[\begin{array}{c} \Sigma \\ \hline 0 \end{array}\right]$
- $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{\min\{n,m\}} \end{bmatrix} \qquad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq 0$

Eigenschaften der essentiellen Matrix

Singulärwertzerlegung

- Singulärwerte einer Matrix sind eindeutig bestimmt. U und V in der Regel nicht.

- Zusammenhang mit der Eigenwertzerlegung von $AA^\top$ und $A^\top A$:

Eigenschaften der essentiellen Matrix

Charakterisierung durch Singulärwertzerlegung

- Eine Matrix E ist genau dann eine essentielle Matrix, also von der Form $E = \hat{T}R$ mit schiefsymmetrischem $\hat{T}$ und Rotationsmatrix R, wenn für die Singulärwertzerlegung von E gilt:

$$E = U \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & \sigma & \\ & & 0 \end{bmatrix} V^\top$$

Zusammenfassung

- Epipolargleichung beschreibt Zusammenhang zwischen korrespondierenden Bildpunkten aus unterschiedlichen Aufnahmen
- Die essentielle Matrix enthält die Information aus der euklidischen Bewegung
- Essentielle Matrizen sind genau die mit zwei gleichen Singulärwerten und einem Singulärwert gleich null