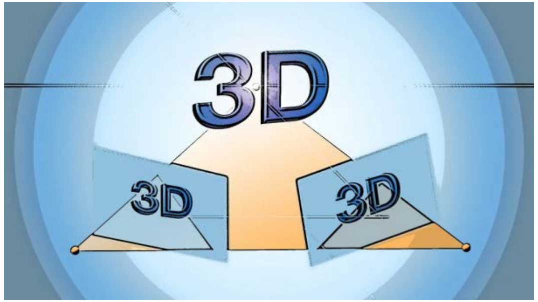
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

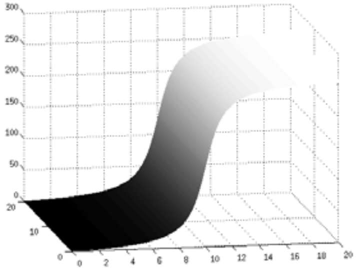
Martin Kleinsteuber: Computer Vision

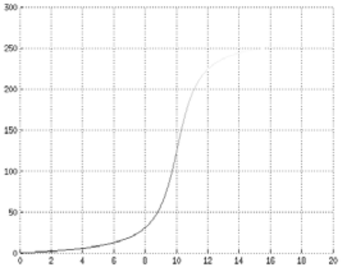
Kap. 1 – Wissenswertes über Bilder

2. Bildgradient



Der Gradient eines Bildes





Kanten sind starke lokale Änderungen der Intensität

Lokale Änderungen werden durch den Gradienten beschrieben

$$\nabla I(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} I(x,y) \\ \frac{d}{dy} I(x,y) \end{bmatrix}$$

Video

Gradient eines Bildes

Wie schätzt man den Gradienten?

- Gegeben ist das Bild in diskreter Form $I \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Naiver Ansatz:

$$\frac{d}{dx} I(x,y) \approx I(x+1,y) - I(x,y)$$
$$\frac{d}{dy} I(x,y) \approx I(x,y+1) - I(x,y)$$

Video

Diskretes und kontinuierliches Signal

Interpolation

- Vom diskreten Signal $f[x] = S\{f(x)\}$ zum kontinuierlichen Signal $f(x)$

- Interpoliertes Signal ist Faltung der Abtastwerte mit dem Interpolationsfilter

$$f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]h(x-k) =: f[x] * h(x)$$

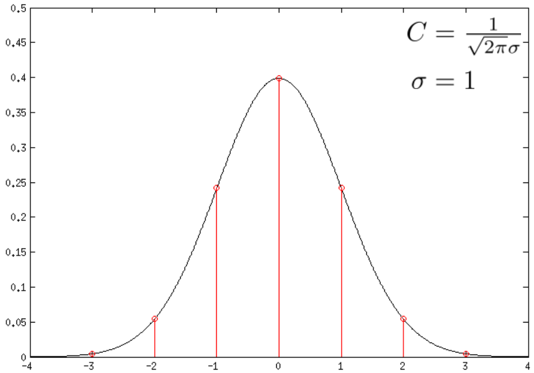
Video

Diskretes und kontinuierliches Signal

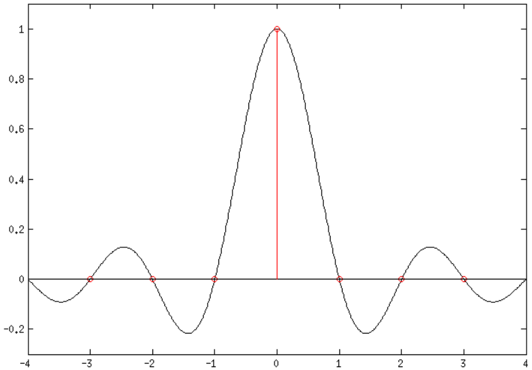
Interpolationsfilter

- Diskretes Signal: $f[x] = S\{f(x)\}$
- Kontinuierliches Signal: $f(x) \approx f[x] * h(x)$
- Gaußfilter: $h(x) = g(x)$

- Ideales Interpolationsfilter: $h(x) = \mathrm{sinc}(x)$
- Damit gilt: $f[x] * h(x) = f(x)$



$$g(x) = Ce^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$$



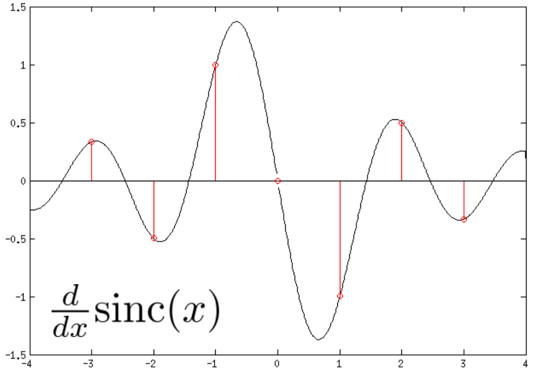
$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \quad \mathrm{sinc}(0) := 1$$

Die diskrete Ableitung

Mit Hilfe des rekonstruierten Signals

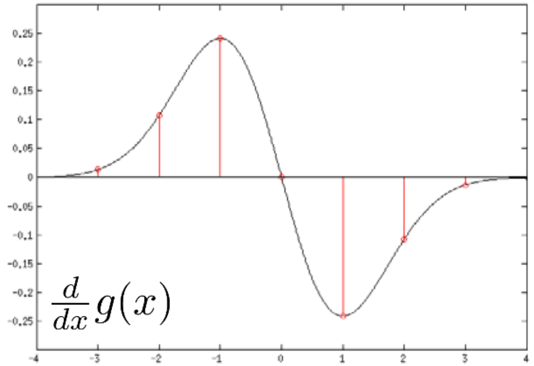
- Algorithmisch
  1. Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals
  2. Ableitung des kontinuierlichen Signals
  3. Abtastung der Ableitung

- Sinc-Funktion
  - Langsames Abklingen



- Herleitung:
  - $f'(x) \approx \frac{d}{dx}(f[x] * h(x))$
    $= f[x] * h'(x)$
  - $f'[x] = f[x] * h'[x]$
    $$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[x-k]h'[k]$$

- Gaußfilter
  - Schnelles Abklingen

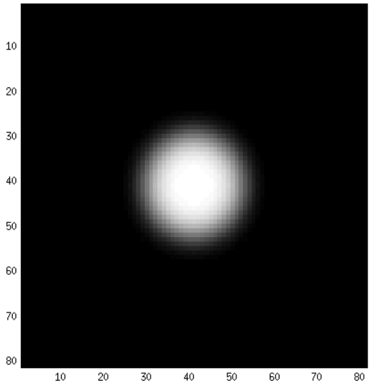


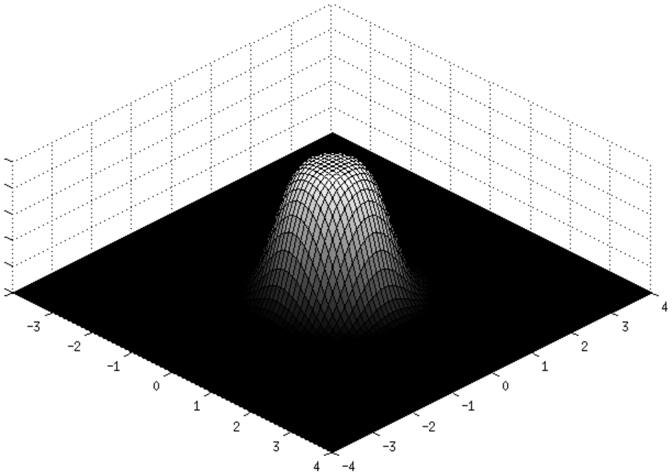
Zweidimensionale Rekonstruktion

Separables 2D-Gaußfilter

- 2D-Rekonstruktion: $I(x,y) \approx I[x,y] * h(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I[k,l]g(x-k)g(y-l)$

$$h(x,y) := g(x)g(y)$$

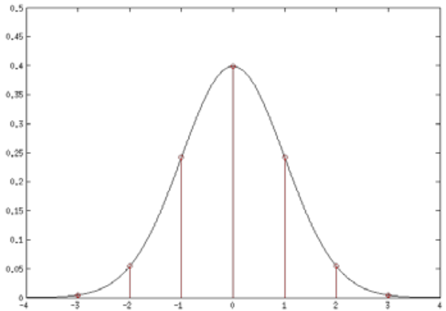


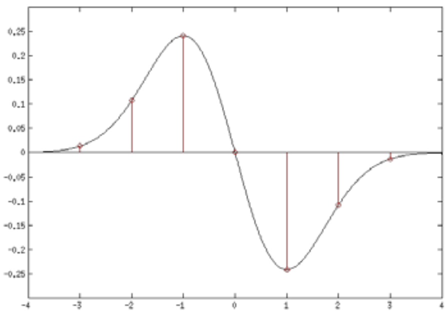


Video

Zweidimensionale Ableitung

Ausnutzen der Separabilität





- Ableitung in x-Richtung

$$\frac{d}{dx}I(x,y) \approx I[x,y] * \left(\frac{d}{dx}h(x,y)\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I[k,l]g'(x-k)g(y-l)$$

$$S\{\tfrac{d}{dx}I(x,y)\} = I[x,y] * g'[x] * g[y]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I[x-k,y-l]g'[k]g[l]$$

Video

Endliche Approximation des Gaußfilters

Normierung des endlichen Filters

- In der Praxis wird die unendliche Summe durch wenige Summanden approximiert
- Wie wählt man eine geeignete Gewichtung C des Gaußfilters $g(x) = Ce^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$?
- Interpoliertes Signal: $f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k]g(x-k)$
- Abgetastetes interpoliertes Signal: $f[x] \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[x-k]g[k]$
- Approximation durch endliche Summe:

$$f[x] \approx \sum_{k=-n}^{n} f[x-k]g[k]$$

Video

Endliche Approximation des Gaußfilters

Normierung des endlichen Filters

- Die endliche Approximation von $f[x]$ ist eine gewichtete Summe der Werte $f[x-n], \ldots, f[x+n]$ mit den Gewichten $g[n], \ldots, g[-n]$
- Normierungskonstante C so gewählt, dass sich alle Gewichte zu 1 addieren
- Wähle $C = \dfrac{1}{\sum\limits_{-n \leq k \leq n} e^{\frac{-k^2}{2\sigma^2}}}$

Video

Sobel-Filter

Herleitung

- Approximation von $S\{\frac{d}{dx}I(x,y)\} = I[x,y] * g'[x] * g[y] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I[x-k, y-l]g'[k]g[l]$

  durch endliche Summe $\sum_{k=-1,0,1} \sum_{l=-1,0,1} I[x-k, y-l]g'[k]g[l]$

- Daraus folgt der Normierungsfaktor $C = \dfrac{1}{1 + 2e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}}$

- Für die Wahl $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2\log 2}}$ ergeben sich somit die Werte

$$g[-1] = \tfrac{1}{4};\ g[0] = \tfrac{1}{2};\ g[1] = \tfrac{1}{4}$$
$$g'[-1] = \tfrac{1}{2}\log 2;\ g'[0] = 0;\ g'[1] = -\tfrac{1}{2}\log 2 \quad (\tfrac{1}{2}\log 2 \approx 0.35)$$

Video

Sobel-Filter

Herleitung

- Aus praktischen Gründen sind ganzzahlige Filterkoeffizienten erwünscht
- Für das Detektieren von Intensitätsunterschieden ist ein Vielfaches des Gradienten ausreichend

$$\frac{1}{8}\log 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ganzzahlige Approximation

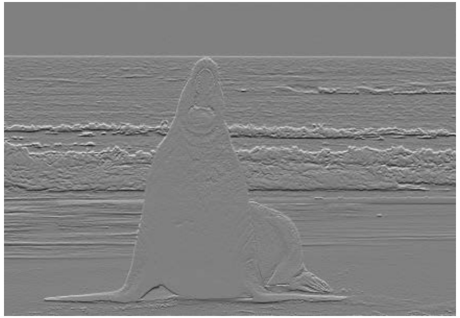
1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

Horizontales Sobel-Filter

Beispiel

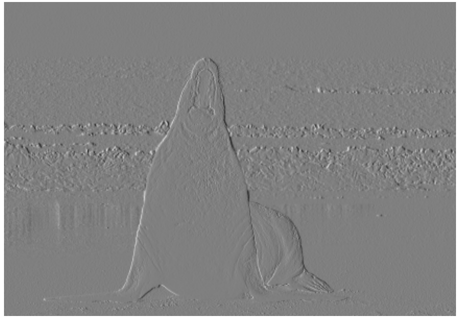
Sobel-Filterung

vertikal



1	2	1
0	0	0
-1	-2	-1

horizontal



1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

Zusammenfassung

Bildgradient

- Der Bildgradient ist ein wichtiges Werkzeug für die Bestimmung von lokalen Intensitätsänderungen
- Diskrete Ableitung wird durch Differenzieren des interpolierten Signals berechnet
- Sobel-Filter sind ganzzahlige Approximation eines Vielfachen des Gradienten