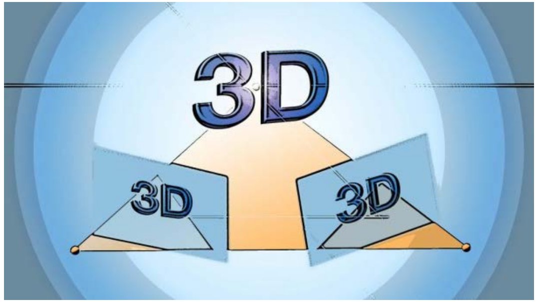
Fachgebiet
Geometrische Optimierung
und Maschinelles Lernen

Technische Universität München

Martin Kleinsteuber: Computer Vision

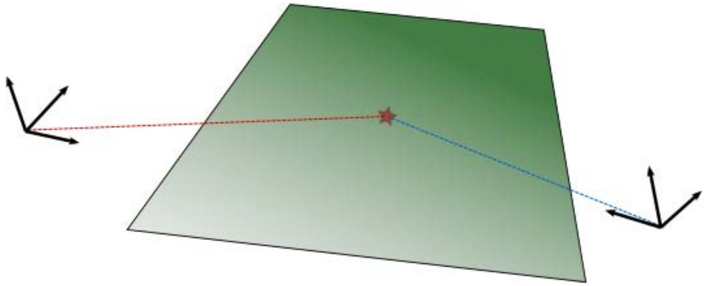
Kapitel 2 – Bildentstehung

3. Euklidische Bewegungen



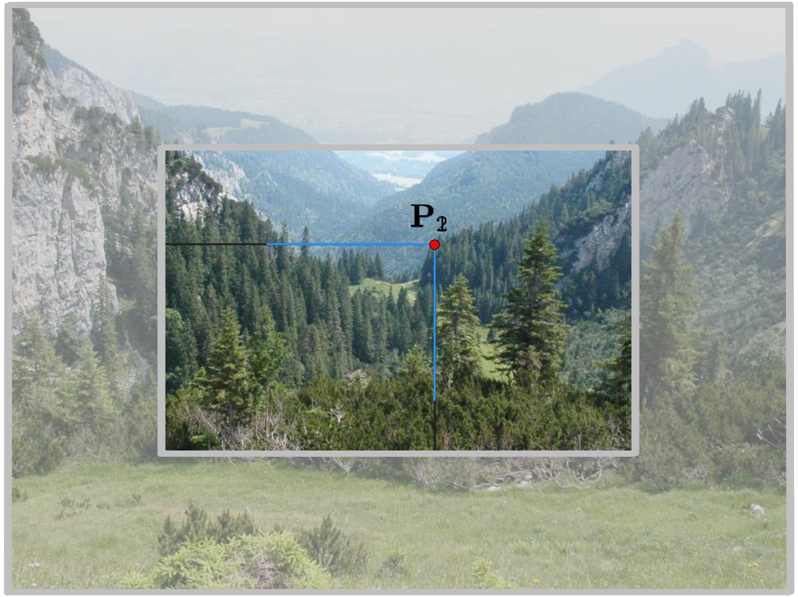
Motivation

- Zwei Bilder einer 3D-Szene aus unterschiedlichen Positionen
- Positionswechsel bestehen aus Rotation der Kamera und anschließender Translation
- Beschreibung der Kamerabewegung in Form von Koordinatenänderung eines festen Raumpunktes



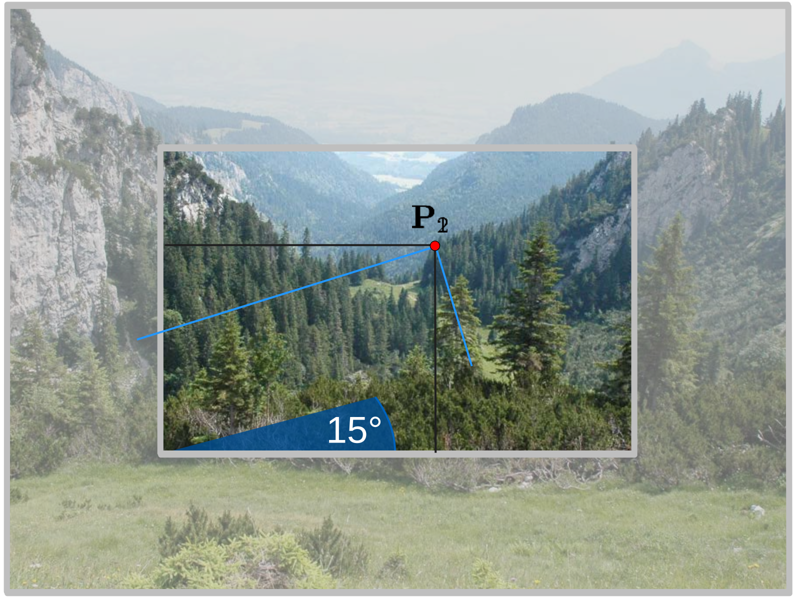
Visualisierung

Translation



Visualisierung

Rotation



Euklidische Bewegungen

Allgemein

- Die Matrizen $O(n) := \{O \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid O^\top O = I_n\}$ heißen orthogonale Matrizen
- Rotationen im $\mathbb{R}^n$ werden beschrieben durch die speziellen orthogonalen Matrizen

$$SO(n) := \{R \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid R^\top R = I_n, \det(R) = 1\}$$

- Euklidische Bewegungen durch die Koordinatenänderung

$$g_{R,T} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{P} \mapsto R\mathbf{P} + T$$

- Seien $\mathbf{P}_1$ die Koordinaten eines Punktes bzgl. CF 1 und $\mathbf{P}_2$ die Koordinaten des selben Punktes bzgl. des bewegten CF 2, dann ist $\mathbf{P}_2 = R\mathbf{P}_1 + T$

Euklidische Bewegungen

In homogenen Koordinaten

- In homogenen Koordinaten als Matrix-Vektor-Multiplikation

$$M = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} \quad , R \in SO(n)\,,\, T \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{P}_2^{(\mathrm{hom})} = M\,\mathbf{P}_1^{(\mathrm{hom})}$$

- Spezielle Euklidische Gruppe

$$SE(n) = \left\{ M = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| R \in SO(n)\,,\, T \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

Euklidische Bewegungen

Eigenschaften

- Verknüpfungen zweier eukl. Bewegungen ist wieder eine eukl. Bewegung

$$M_1 M_2 = \begin{bmatrix} R_1 & T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_2 & T_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 R_2 & R_1 T_2 + T_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Euklidische Bewegungen sind invertierbar:

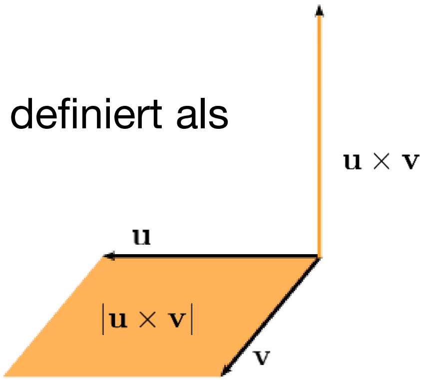
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} R^\top & -R^\top T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Das Kreuzprodukt

Definition

- Das Kreuzprodukt zwischen den Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$



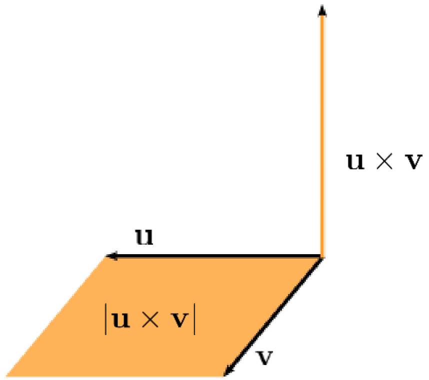
- Es gilt: $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$

Das Kreuzprodukt

Matrix-Vektor-Multiplikation

- Das Kreuzprodukt lässt sich schreiben als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$



- Es gilt (für A invertierbar):

$$\widehat{A\mathbf{v}} = \det(A) A^{-\top} \hat{\mathbf{v}} A^{-1}$$

Euklidische Bewegungen

Eigenschaften Orthogonaler Transformationen

- Orthogonale Transformationen erhalten Skalarprodukt $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle O\mathbf{u}, O\mathbf{v} \rangle$
- Euklidische Transformationen erhalten Abstand
- Spezielle orthogonale Transformationen erhalten das Kreuzprodukt

$$R\mathbf{u} \times R\mathbf{v} = R\,(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

Zusammenfassung

- Kamerabewegungen durch Koordinatenänderung eines festen Raumpunktes
- Koordinatenänderung durch euklidische Bewegungen
- Rotationen durch spezielle orthogonale Matrizen
- Euklidische Bewegung in homogenen Koordinaten durch Matrix-Vektor-Multiplikation