Allocation de ressources

Nicolas Maudet
nicolas.maudet@lip6.fr

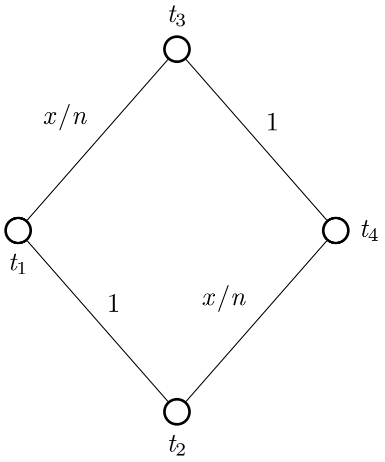
Université Pierre et Marie Curie

December 2014

Exemple

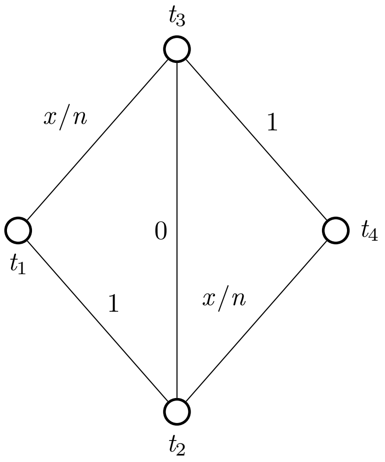
Notions de base
Allouer une seule ressource
Allouer une ressource par agent
Allouer plusieurs ressources par agents
Application: enchères de mots-clefs

Un nombre donné (n) d'agents souhaitent aller de t_1 à t_4.
Chaque agent souhaite minimiser son temps de parcours.



Exemple

Un nombre donné (n) d'agents souhaitent aller de t_1 à t_4.
Chaque agent souhaite minimiser son temps de parcours.



Questions

- que se passe-t-il si les agents peuvent mentir / tricher?
- que se passe-t-il si les agents coopèrent (avec quel objectif?) et peuvent se coordonner?
- que se passe-t-il si les observations des agents sont partielles ou défectueuses?
- que se passe-t-il si la situation est répétée?

<u>Note</u>: certaines hypothèses fortes sur le caractère “rationnel” des agents se justifient facilement dans le cadre d'agents artificiels ($\neq$ humains)

Organisation

- 5 séances
  - Allocation de ressources
  - Négociation bilatérale (avec TME)
  - Négociation multilatérale
  - Consensus
  - Argumentation (avec TME)

Une première définition...

Un système multiagents est un ensemble d'agents agissant de manière autonome en vue d'atteindre leurs buts.

On peut distinguer deux grandes classes de systèmes multiagents:

- systèmes coopératifs: agents conçus par la même personne, en vue de satisfaire un objectif commun
- systèmes compétitifs: agents conçus éventuellement des personnes différentes, cherchant à satisfaire des objectifs éventuellement divergents

Une première définition...

Notions de base
Allouer une seule ressource
Allouer une ressource par agent
Allouer plusieurs ressources par agents
Application: enchères de mots-clefs

Un système multiagents est un ensemble d'agents agissant de manière autonome en vue d'atteindre leurs buts.

On peut distinguer deux grandes classes de systèmes multiagents:

- systèmes coopératifs: agents conçus par la même personne, en vue de satisfaire un objectif commun
- systèmes compétitifs: agents conçus éventuellement des personnes différentes, cherchant à satisfaire des objectifs éventuellement divergents

La perspective que l'on adopte peut être :

- orientée agent: quelle stratégie mettre en oeuvre au niveau de l'agent pour lui permettre d'atteindre ses buts
- orientée système: comment concevoir le système pour atteindre certains objectifs (en dépit, éventuellement, du caractère non coopératif des agents)

Wooldridge. *An introduction to multiagent systems*. 2009.

Shoham & Leyton-Brown. *Multiagent systems*. 2008.

Outline of the Talk

Notions de base
Allouer une seule ressource
Allouer une ressource par agent
Allouer plusieurs ressources par agents
Application: enchères de mots-clefs

1. Notions de base
2. Allouer une seule ressource
3. Allouer une ressource par agent
4. Allouer plusieurs ressources par agents
5. Application: enchères de mots-clefs

Partage de ressources: notions de base

- ensembles d'agents $\mathcal{A} = \{1, \ldots, n\}$, et d'objets $\mathcal{R} = \{a, b, \ldots\}$
- une allocation est une partition des objets $\mathcal{R}$ parmi les agents $\mathcal{A}$ (tous les objets, ni partageables ni divisibles, doivent être alloués).

$A(i)$ indique le lot d'objet(s) de l'agent i à l'allocation A.
Par ex.,

$$A(2) = \{b, d\}$$

Les agents ont des préférences les lots de ressources qu'ils peuvent obtenir, qui peuvent être ordinales ou cardinales.

Préférences ordinales

Par exemple, chaque agent exprime un ordre linéaire (strict et complet) sur l'ensemble des ressources (ou des lots de ressources)

agent 1: 

agent 2: 

agent 3: 

agent 4: 

agent 5: 

Préférences cardinales

- la valuation d'un agent pour un lot B est $v_i(B)$

agent/resource:					
agent 1:	3	1	10	9	14
agent 2:	2	3	1	8	6
agent 3:	5	3	2	1	6
agent 4:	7	2	3	6	8
agent 5:	3	2	9	6	8

Domaines

La nature du domaine induit des classes de préférences différentes. En particulier:

- domaine modulaire: les ressources n'ont pas de synergies: la valuation d'un lot de ressources est donc simplement la somme des valeurs des ressources prises individuellement.
- domaine combinatoire: les ressources peuvent avoir des synergies entre elles, soit positives (super-modularité), soit négatives (sous-modularité).

Utilisation possible d'argent

L'utilisation éventuelle de monnaie et de paiements compensatoires.:

- avec monnaie: permet les transferts d'utilités entre les agents
- sans monnaie: systèmes d'échanges, de troc

On suppose alors les préférences quasi-linéaires:

$$u_i(A) = v_i(A(i)) - p_i$$

- les préférences des agents sont sans externalités (ils ne se préoccupent que de leur lot), noté ici $u_i(A) = u_i(A(i))$

Questions typiques...

- quel langage de représentation pour les préférences des agents?
- comment déterminer une allocation de ressources qui soit efficace et/ou équitable?
- les agents peuvent-ils avoir des comportements stratégiques?
- jusqu'à quel point peut-on décentraliser la procédure de partage?
- quel est la complexité de communication induite par la procédure?

Efficacité

Pour l'éfficacité, on cherche typiquement à

1. obtenir une allocation *Pareto-efficace*
2. maximiser une mesure *utilitaire* du bien-être social

$$sw_u(A) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i(A)$$

Equité

Pour l'équité, différentes mesures peuvent être utilisées:

1. le bien-être social *égalitaire* (et raffinements...)

$$sw_e(A) = min\{u_i(A) \mid i \in \mathcal{A}\}$$

2. l'*absence d'envie*: pour toute paire (i, j) d'agents, on a:

$$u_i(A(i)) \geq u_i(A(j))$$

Stabilité

Lorsque l'on traite de systèmes multiagents non-collaboratifs, la notion de stabilité est cruciale:

1. aucun agent n'a intérêt (seul) à changer de stratégie (équilibre de Nash)
2. aucune coalition/groupe d'agents n'a intérêt à changer de stratégie (équilibre fort)

On peut ensuite quantifier la qualité des états stables en rapport de ce que nous aurions pu obtenir grâce à une solution centraliée.
Le prix de l'anarchie est le ratio, dans le pire des cas:

$$\frac{\max_{A \in allocs(I)} sw_u(A)}{\min_{A \in stable(I)} sw_u(A)}$$

On étudie souvent des dynamiques simples, par ex. dynamiques de meilleures réponses.

Coût de communication

Lorsque l'on traite de systèmes multiagents, le coût de commiunication est crucial:

1. les agents ont des capacités limités d'expression
2. les protocols d'interaction ont des limites et des contraintes (par exemple tous les agents ne peuvent pas communiquer avec tous les autres agents, pas tout leur dire, etc.)

Outline of the Talk

1. Notions de base
2. Allouer une seule ressource
3. Allouer une ressource par agent
4. Allouer plusieurs ressources par agents
5. Application: enchères de mots-clefs

Basic Setting: Allocating an Item

- auctions... (there are many types): English, Dutch, etc.

Truthfulness: Allocating an Item

Suppose we want to allocate a single item among n agents and implement the following rule:

- agents report sealed bids
- the item goes to the agent who values it the most
- the price payed by this agent is the second highest price

This is called a Vickrey auction. It has the enjoyable property that it is a dominant strategy for agents to reveal their true preferences ($\overline{v}(o)$). It is said to be strategy-proof.

Intuition:

- suppose the agent i overbids: but the only case where this affects the allocation is if an agent bidded between $v_i(o)$ and $\overline{v_i}(o)$: i would get the item for a price higher than valuation!
- suppose that agent i underbids: only makes less likely to get the item...

Communication: Allocating an Item

Consider the following situation:

> *There are two agents (A and B); and one object to allocate. Each agent x has a valuation $v_x \in \{0, 1, 2, 3\}$ for the object. The goal is to give the object to the agent who values it the most.*

Can we design efficient protocols to achieve this goal?

I. Segal. *Communication in Economic Mechanisms*. CES-2006.

Communication: Allocating an Item

Notions de base
Allouer une seule ressource
Allouer une ressource par agent
Allouer plusieurs ressources par agents
Application: enchères de mots-clefs

Consider the following situation:

> *There are two agents (A and B); and one object to allocate. Each agent x has a valuation $v_x \in \{0, 1, 2, 3\}$ for the object. The goal is to give the object to the agent who values it the most.*

Can we design efficient protocols to achieve this goal?

Protocol π_0: "One-sided Revelation"	bits
A gives her valuation	2
B computes the allocation, and send it	1
	total $\Rightarrow$ 3

Communication: Allocating an Item

Consider the following situation:

> *There are two agents (A and B); and one object to allocate. Each agent x has a valuation $v_x \in \{0, 1, 2, 3\}$ for the object. The goal is to give the object to the agent who values it the most.*

Can we design efficient protocols to achieve this goal?

Protocol π_1: "English Auction"	bits
$p \leftarrow 0$, $X \leftarrow A$	
while stop:	
ask X "stop"' or "raise"	1
$p \leftarrow p + 1$	
$X \leftarrow \overline{X}$	
allocate to $\overline{X}$	
	total $\Rightarrow$ 1, 2, or 3

Communication: Allocating an Item

Consider the following situation:

> *There are two agents (A and B); and one object to allocate. Each agent x has a valuation $v_x \in \{0, 1, 2, 3\}$ for the object. The goal is to give the object to the agent who values it the most.*

Can we design efficient protocols to achieve this goal?

Protocol π_2: "High/Low Bisection"	bits
A says whether her valuation $\{0, 1\}$ (low) or $\{2, 3\}$ (high)	1
B computes the allocation	
(if low (if $v_B = 0$ then give to A else give to B))	
(if high (if $v_B = 3$ then give to B else give to A))	
and send it	1
	total $\Rightarrow$ 2

Outline of the Talk

1. Notions de base
2. Allouer une seule ressource
3. Allouer une ressource par agent
4. Allouer plusieurs ressources par agents
5. Application: enchères de mots-clefs

Allouer une ressource par agent

Notions de base
Allouer une seule ressource
Allouer une ressource par agent
Allouer plusieurs ressources par agents
Application: enchères de mots-clefs

- supposons que le même nombre d'agents et de ressources, et ajoutons la contrainte suivante: chaque agent doit recevoir exactement une ressource.
- il s'agit d'un problème d'appariemment (assignment) dans un graphe bipartite: de nombreux algorithmes efficaces existent pour par maximiser le poids total du matching obtenu
- et si l'on cherche une allocation minimisant le rang minimal pour des préférences ordinales?

Allouer une ressource par agent

Avec les hypothèses:

- préférences ordinales
- les ressources ne sont pas initialement possédées par les agents

$\Rightarrow$ Serial dictatorship

- les agents sont classés dans un ordre prédéfini
- à son tour, chaque agent choisit parmi les objets qui restent disponibles
- quelles sont les propriétés d'un tel protocole?

Allouer une ressource par agent

Avec les hypothèses:

- préférences ordinales
- les ressources ne sont pas initialement possédées par les agents

$\Rightarrow$ Serial dictatorship

- les agents sont classés dans un ordre prédéfini
- à son tour, chaque agent choisit parmi les objets qui restent disponibles
- quelles sont les propriétés d'un tel protocole?

$\Rightarrow$ Pareto-optimalité, et strategy-proofness

Allouer une ressource par agent, préférences ordinales

agent 1:

agent 2:

agent 3:

agent 4:

agent 5:

Allouer une ressource par agent

Avec les hypothèses:

- préférences ordinales
- les ressources sont initialement possédées par les agents (A_0)

$\Rightarrow$ Top Trading Cycle (TTC)

- chaque agent pointe vers sa ressource préférée
- chaque ressource pointe vers
- quelles sont les propriétés d'un tel protocole?

Allouer une ressource par agent

Avec les hypothèses:

- préférences ordinales
- les ressources sont initialement possédées par les agents (A_0)

$\Rightarrow$ Top Trading Cycle (TTC)

- chaque agent pointe vers sa ressource préférée
- chaque ressource pointe vers
- quelles sont les propriétés d'un tel protocole?

$\Rightarrow$ Pareto-optimalité, Strategy-proof, et Individually Rational

$\Rightarrow$ l'allocation retournée par TTC est l'unique allocation du core A^*: il n'existe pas de coalition d'agents X et d'allocation A' telle que :

1. $\cup_{x \in X} A'(x) = \cup_{x \in X} A_0(x)$,
2. $A'(x) \succeq A^*(x)$ pour tous les $x \in X$, et
3. $A'(x) \succ A^*(x)$ pour au moins un $x \in X$.

Allouer une ressource par agent

Avec les hypothèses:

- préférences ordinales
- les ressources sont initialement possédées par les agents

$\Rightarrow$ Dynamique d'échanges de ressources entre agents

- chaque agent rencontre au hasard un autre agent
- si l'échange de ressource est favorable, il est réalisé
- on itère jusqu'à aboutir à un état stable
- quelles sont les propriétés d'un tel protocole?

$\Rightarrow$ Parto-optimalité? En attribuant une valeur à chaque rang dans l'ordre, peut-on quantifier le prix de l'anarchie?

Allouer une ressource par agent

- supposons maintenant que les préférences soient cardinales
- les ressources ne sont pas initialement détenues
- de manière intéressante, un protocole utilisant le principe des enchères peut être proposé pour trouver l'allocation.

D. Bertsekas. *Auction Algorithms for Network Flow Problems*. Computational Optimization and Applications, 1992.

Allouer une resssource par agent

1. on associe à chaque ressource un prix, initialisé à 0.
2. on choisit un agent auquel aucune ressource n'est encore allouée
3. on cherche l'objet o^* qui, à son prix actuel p_{o^*} et pour cet agent, donne la meilleure utilité

$$o^* \in \text{argmax}_{o \in \mathcal{R}}(v_i(o) - p_o)$$

4. l'agent augmente le prix de l'objet le plus possible sans rendre un autre objet plus attractif.
5. l'agent se voit alloué l'objet (qui est donc retiré à un autre agent s'il était déjà alloué)

Allouer une resssource par agent (Exemple)

Les agents ont les utilités suivantes:

	a	b	c
x	1	0	4
y	6	8	0
z	0	6	1

tour	p_a	p_b	p_c	agent	objet	offre	allocation
0	0	0	0	x	c	3	$\langle x, c \rangle$

Allouer une resssource par agent (Exemple)

Les agents ont les utilités suivantes:

	a	b	c
x	1	0	4
y	6	8	0
z	0	6	1

tour	p_a	p_b	p_c	agent	objet	offre	allocation
0	0	0	0	x	c	3	$\langle x, c \rangle$
1	0	0	3	y	b	2	$\langle x, c \rangle, \langle y, b \rangle$

Allouer une resssource par agent (Exemple)

Les agents ont les utilités suivantes:

	a	b	c
x	1	0	4
y	6	8	0
z	0	6	1

tour	p_a	p_b	p_c	agent	objet	offre	allocation
0	0	0	0	x	c	3	$\langle x, c\rangle$
1	0	0	3	y	b	2	$\langle x, c\rangle, \langle y, b\rangle$
2	0	2	3	z	b	4	$\langle x, c\rangle, \langle z, b\rangle$

Allouer une resssource par agent (Exemple)

Les agents ont les utilités suivantes:

	a	b	c
x	1	0	4
y	6	8	0
z	0	6	1

tour	p_a	p_b	p_c	agent	objet	offre	allocation
0	0	0	0	x	c	3	$\langle x, c\rangle$
1	0	0	3	y	b	2	$\langle x, c\rangle, \langle y, b\rangle$
2	0	2	3	z	b	4	$\langle x, c\rangle, \langle z, b\rangle$
3	0	6	3	y	a	4	$\langle x, c\rangle, \langle z, b\rangle, \langle y, a\rangle$

Le processus stoppe avec l'allocation
$A(x) = \{c\}, A(z) = \{b\}, A(y) = \{a\}$ et le vecteur de prix $\langle 4, 6, 3\rangle$.
Les utilités des agents sont donc: 1 pour x, 2 pour y, et 0 pour z.

Equilibre compétitifs et allocations efficaces

- Une allocation A et un vecteur de prix sont en équilibre compétitif quand, pour tout agent i, on a

$$\forall o, u_i(A(i)) \geq u_i(o)$$

- le processus d'enchère termine (hmm...) en équilibre compétitif
- en fait:
  (1) si une allocation et un vecteur de prix sont en équilibre compétitif alors cette allocation est nécessairement optimale, et
  (2) pour toute allocation efficace A il existe un vecteur de prix p tels que A et p sont en équilibre compétitif

Outline of the Talk

Notions de base
Allouer une seule ressource
Allouer une ressource par agent
Allouer plusieurs ressources par agents
Application: enchères de mots-clefs

1. Notions de base
2. Allouer une seule ressource
3. Allouer une ressource par agent
4. Allouer plusieurs ressources par agents
5. Application: enchères de mots-clefs

Allocating many items

Now we consider a slightly more complex setting:

- there are p items to allocate to n agents
- agents have additive preferences

What procedure can be used to find an allocation which maximizes utilitarian social welfare?

Allocating many items

Now we consider a slightly more complex setting:

- there are p items to allocate to n agents
- agents have additive preferences

What procedure can be used to find an allocation which maximizes utilitarian social welfare?

- run p auctions
- allocate each item to the agent who values it the most. Easy!

Allocating many items

What procedure can be used to find an allocation which maximizes utilitarian social welfare?
This is known as the Santa Claus problem.

Example:

$$\begin{array}{lllll} u_1(\{a\}) = 18 & u_1(\{b\}) = 12 & u_1(\{c\}) = 8 & u(\{d\}) = 7 & u(\{e\}) = 5 \\ u_2(\{a\}) = 15 & u_2(\{b\}) = 8 & u_2(\{c\}) = 12 & u(\{d\}) = 4 & u(\{e\}) = 10 \end{array}$$

Allocating many items

Notions de base
Allouer une seule ressource
Allouer une ressource par agent
Allouer plusieurs ressources par agents
Application: enchères de mots-clefs

What procedure can be used to find an allocation which maximizes utilitarian social welfare?
This is known as the Santa Claus problem.

Example:

$$\begin{array}{lllll} u_1(\{a\}) = 18 & u_1(\{b\}) = 12 & u_1(\{c\}) = 8 & u(\{d\}) = 7 & u(\{e\}) = 5 \\ u_2(\{a\}) = 15 & u_2(\{b\}) = 8 & u_2(\{c\}) = 12 & u(\{d\}) = 4 & u(\{e\}) = 10 \end{array}$$

We cannot allocate the items one by one...

Allocating many items

What procedure can be used to find an allocation which maximizes utilitarian social welfare?
This is known as the Santa Claus problem.

Example:

$$\begin{array}{lllll} u_1(\{a\}) = 18 & u_1(\{b\}) = 12 & u_1(\{c\}) = 8 & u(\{d\}) = 7 & u(\{e\}) = 5 \\ u_2(\{a\}) = 15 & u_2(\{b\}) = 8 & u_2(\{c\}) = 12 & u(\{d\}) = 4 & u(\{e\}) = 10 \end{array}$$

We cannot allocate the items one by one...
In fact, the problem turns out to be NP-hard.

Allocating many items

How to show this? Reduction from partition.

partition
Instance: we are given a collection $c_1, \dots, c_q$ of integers such that $\sum_i^n c_i = 2C$.
Question: is there a subset $I \subseteq \{1, dots, q\}$ such that $\sum_{i \in I} c_i = C$.

We build an instance of the resource allocation problem as follows:

- there are two agents
- we create a resource o_i corresponding to each $i \in \{1, dots, q\}$
- agents have utilities $u(i) = c_i$.
- we seek an allocation with egalitarian social welfare $\geq C$

So: it is very unlikely that we can find an efficient procedure to find such an allocation.

Allocating many items

Suppose now that agents have a fixed order of selection among them. For instance

$$[12323211]$$

means that agent 1 selects first, then agent 2, then agent 3, then again agent 2, etc.

Thsi is called a picking sequence.

Which sequences do you think will produce the most equitable allocations?

Envy-freenes

Approximating envy-freeness. (not additive here)

$$e(A) = max\{e_pq(A), p, q \in N\}$$

- are there allocations with bounded envy?
- is it possible to design a truthful allocation procedure for envy-freeness?

Lipton et al.. *On approximately Fair Allocation of Indivisible Goods*. EC-04.

Envy-freenes

The following procedure allocates resources one by one to agents:

- construct the envy graph of agents.
- allocate a new resource to an agent not envied by any other agent
- if there is a cycle, rotate the resources so that each agent gets a preferred ressource
- at some point this breaks the cycle: one agent (at least) is not envied

$\Rightarrow$ what are the properties of this protocol?

Lipton et al.. *On approximately Fair Allocation of Indivisible Goods*. EC-04.

Outline of the Talk

Notions de base
Allouer une seule ressource
Allouer une ressource par agent
Allouer plusieurs ressources par agents
Application: enchères de mots-clefs

1 Notions de base

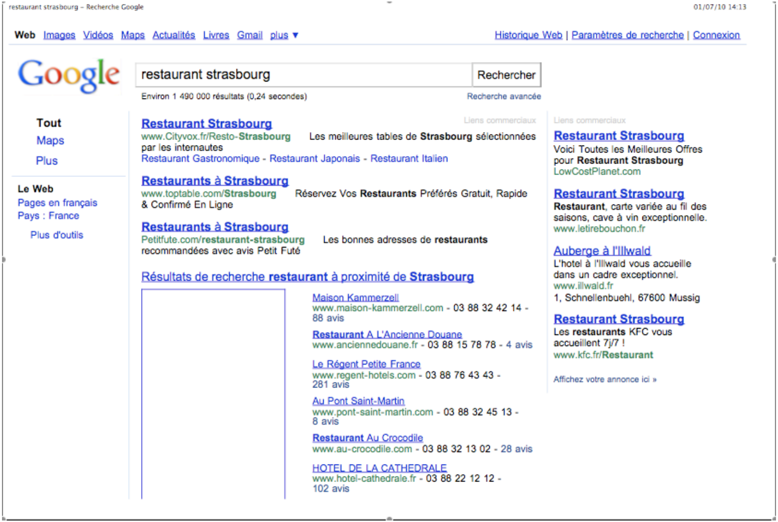
2 Allouer une seule ressource

3 Allouer une ressource par agent

4 Allouer plusieurs ressources par agents

5 Application: enchères de mots-clefs

Enchères de mots-clefs



Allocations de positions publicitaires par les moteurs de recherche

- le processus d'allocation des positions aux agents est géré grâce à des enchères qui ont lieu *en continu*
- les ressources à allouer sont les *positions* sur la page de recherche donnée en réponse à un (ensemble de) mot-clefs(s).
- les agents sont d'accord sur les positions les plus souhaitables sur la page, classées par *taux de clic* t_j
- chaque agent possède une valuation personnelle pour un clic $\widehat{v_i}$
- la valuation d'une position j pour un agent i est donc

$$v_i(j) = \widehat{v_i} \times t_j$$

- l'utilité d'un agent i pour une position j est toujours

$$u_i(j) = v_i(j) - p_i$$

B. Edelman, M. Ostrovsky, M. Schwartz. *Internet Advertising and the Generalized Second Priced Auction*. American Economic Review, 2007.

Enchères de premier prix

- chaque agent i fait une offre unique b_i (très simple!), et les positions sont attribuées dans l'ordre des valeurs des offres
- lorsqu'un utilisateur clique sur le lien sponsorisé, l'agent paye b_i
- problèmes de "cycles" en raison du caractère continu de l'enchère

Enchères de premier prix

- chaque agent i fait une offre unique b_i (très simple!), et les positions sont attribuées dans l'ordre des valeurs des offres
- lorsqu'un utilisateur clique sur le lien sponsorisé, l'agent paye b_i
- problèmes de "cycles" en raison du caractère continu de l'enchère

Exemple: 2 agents x_1 avec $\widehat{v_1} = 0.6$ et agent x_2 avec $\widehat{v_2} = 0.8$.

- agent x_1 offre 0.4
- agent x_2 offre 0.5
- agent x_1 offre 0.6
- agent x_2 offre 0.7

Enchères de premier prix

- chaque agent i fait une offre unique b_i (très simple!), et les positions sont attribuées dans l'ordre des valeurs des offres
- lorsqu'un utilisateur clique sur le lien sponsorisé, l'agent paye b_i
- problèmes de "cycles" en raison du caractère continu de l'enchère

Exemple: 2 agents x_1 avec $\widehat{v_1} = 0.6$ et agent x_2 avec $\widehat{v_2} = 0.8$.

- agent x_1 offre 0.4
- agent x_2 offre 0.5
- agent x_1 offre 0.6
- agent x_2 offre 0.7

... mais à ce moment là l'agent 1 a intérêt à faire l'offre minimale acceptable (pour garder la deuxième position)

- agent x_1 offre 0.1
- agent x_2 offre 0.2
- etc.

Enchères de deuxième prix généralisées (GSP)

- chaque agent i fait une offre unique b_i (très simple!), et les positions sont attribuées dans l'ordre des valeurs des offres (avec $\pi(k)$ l'agent placé à la position k)
- le principe du *Generalized Second Price* est proposé en 2002: chaque agent paie l'offre de celui juste derrière lui dans l'ordre

$$p_{\pi(k)} = b_{\pi(k+1)} \cdot t_k$$

- Google affime que

> *unique auction model uses Nobel Prize-winning economic theory to eliminate (...) that feeling that you have paid too much.*

GSP: analyse des équilibres

- Nash: aucun agent n'a intérêt à dévier seul
- Quelles sont les déviations envisageables pour un agent à la position j?
  - obtenir une position mieux placée $k < j$: il faut alors battre l'offre de $\pi(k)$, pour une utilité
  $$t_k(\hat{v}_i - b_{\pi(k)})$$
  - obtenir une position moins bien placée $k > j$: il faut faire une offre plus basse que $b_{\pi(k)}$, pour une utilité
  $$t_k(\hat{v}_i - b_{\pi(k+1)})$$
- Note: les deux situations ne sont pas symétriques

Leme & Tardos. *Pure and Bayes-Nash Price of Anarchy for Generalized Second Price Auctions*. FOCS-2010.

GSP: analyse des équilibres

Exemple: agents x_1 avec $\widehat{v_1} = 1$ et agent x_2 avec $\widehat{v_2} = 0$, $r \in]0, 1[$.

position	taux	agent	offre
1	1	x_2	$b_2 = 1 - r$
2	r	x_1	$b_1 = 0$

- agent x_1 ($\Uparrow$), si $1(1 - r) > r(1 - 0)$
- agent x_2 ($\Downarrow$): si $r(0 - 0) > 1(0 - 0)$

En prenant $r \to 0$ on a bien un équilibre de Nash et le rapport entre la somme des utilités des agents du meilleur équilibre vs. cet équilibre (prix de l'anarchie) est arbitrairement grand ($1/r$).

GSP: analyse des équilibres

Exemple: agents x_1 avec $\widehat{v_1} = 1$ et agent x_2 avec $\widehat{v_2} = 0$, $r \in]0, 1[$.

position	taux	agent	offre
1	1	x_2	$b_2 = 1 - r$
2	r	x_1	$b_1 = 0$

- agent x_1 ($\Uparrow$), si $1(1 - r) > r(1 - 0)$
- agent x_2 ($\Downarrow$): si $r(0 - 0) > 1(0 - 0)$

En prenant $r \to 0$ on a bien un équilibre de Nash et le rapport entre la somme des utilités des agents du meilleur équilibre vs. cet équilibre (prix de l'anarchie) est arbitrairement grand ($1/r$).

- mais cet équilibre semble très improbable... pourquoi faire une offre plus haute que 0 pour x_2?
- de manière genérale, faire une offre $b_i > v_i$ est dominé par $b_i = v_i$
- en faisant l'hypothèse d'offres non dominées, le PoA est $\simeq$ 1.6

GSP: garantie de véracité?

- deux positions disponibles, avec $t_1 = 200$ et $t_2 = 100$
- trois agents avec les valuations par clic $\widehat{v_1} = 10$, $\widehat{v_2} = 4$, $\widehat{v_3} = 2$
- si les agents font des offres honnêtes

position	taux	agent	offre
1	200	x_1	$b_1 = 10$
2	100	x_2	$b_2 = 4$
$---$	$---$	x_3	$b_3 = 2$

1. x_1 obtient s_1 au prix de 4, x_2 obtient s_2 au prix de 2.
2. $u_1(s_1) = 200 \times (10 - 4) = 1200$, et $u_2(s_2) = 100 \times (4 - 2) = 200$
3. le moteur de recherche obtient $200 \times 4 + 100 \times 2 = 1000$

- aucun agent n'a intérêt à changer de position
  Est-ce toujours le cas?

GSP: garantie de véracité?

- deux positions disponibles, avec $t_{s_1} = 200$ et $t_{s_2} = \mathbf{190}$
- trois agents avec les valuations par clic $v_1 = 10$, $v_2 = 4$, $v_3 = 2$
- si les agents font des offres honnêtes

position	taux	agent	offre
1	200	x_1	$b_1 = 10$
2	190	x_2	$b_2 = 4$
$---$	$---$	x_3	$b_3 = 2$

1. x_1 obtient s_1 au prix de 4, x_2 obtient s_2 au prix de 2.
2. $u_1(s_1) = 200 \times (10 - 4) = 1200$, et $u_2(s_2) = 190 \times (4 - 2) = 380$
3. le moteur de recherche obtient $200 \times 4 + 100 \times 2 = 1180$

- mais si l'agent x_1 offre seulement 3, il aura s_2 et son utilité sera $u_1(s_2) = 190 \times (10 - 2) = 1520 (> 1200)$

En dépit des apparences, GSP n'est donc pas une généralisation correcte des enchères de deuxième prix (le paiement induit n'est pas VCG).

GSP: équilibres avec absence d'envie locale

- en pratique, les agents appliquent des stratégies simples: par exemple en augmentant leurs offres petit à petit, de manière à gagner la position juste au dessus (squeezing).
- note: le prix payé par l'agent lui-même n'augmente pas, mais celui de l'agent au-dessus si.
- un équilibre est localement sans envie si aucun agent n'a intérêt à échanger sa position avec celle de l'agent juste au dessus de lui dans le classement.