

# Projeto de controlador PID via LMIs com alocação de polos para sistema de segunda ordem com atraso no tempo

Mayara C. F. Wiira

Renato Alves Borges  
Tognetti

Eduardo Stockler

Universidade de Brasília



CBA 2016

3 a 7 de outubro – Vitória/ ES

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Formulação do problema
- 3 Resultado principal
- 4 Exemplo numérico
- 5 Conclusão

# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.

# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.

# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- **Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?**
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.

# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- **Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?**
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.

# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- **Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?**
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.

# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- **Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?**
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.



# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- **Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?**
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- ▶ Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.

# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- **Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?**
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- ▶ Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.

# Introdução

## Motivação

- PID  $\rightsquigarrow$  cerca de 90% das malhas na indústria (Gonçalves et al., 2008);
- Técnicas clássicas bem consolidadas;
- **Garantias de desempenho e estabilidade para plantas com atraso, incertezas, não-linearidades, variantes no tempo etc?**
- Abordagens baseadas no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs);
- D-estabilidade como critério de desempenho para muitas aplicações;
- Atraso no tempo  $\rightsquigarrow$  número infinito de raízes do polinômio característico;
- Condições LMIs para a estabilidade de sistemas com atraso (Chu, 2006).

## Objetivo:

- Apresentar condições LMIs para o projeto de controladores PID's com alocação de polos para funções de transferência de segunda ordem com incertezas e atraso no tempo.

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Formulação do problema**
- 3 Resultado principal
- 4 Exemplo numérico
- 5 Conclusão

# Formulação do problema

- Seja o sistema de segunda ordem com atraso no tempo

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} e^{-\tau s} \quad (1)$$

e a seguinte representação no espaço de estados aumentado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (2)$$

- Vetor de estados dado por  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \int y(t)]'$  e as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C' = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

# Formulação do problema

- O controlador que se deseja projetar é da forma

$$PID(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (4)$$

e a lei de controle pode ser dada por

$$u(t) = \begin{bmatrix} k_p & k_d & k_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + k_d b_1 \dot{x}_2(t) \quad (5)$$

ou

$$u(t) = KFx(t) \quad (6)$$

com

$$K = \begin{bmatrix} \frac{k_p}{a - k_d b_1} & \frac{k_d}{a - k_d b_1} & \frac{k_i}{a - k_d b_1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$F = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ -b_1 a_0 & b_0 - b_1 a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

# Formulação do problema

● Considere também um vetor de distúrbio  $w(t)$  para representar uma incerteza não estruturada  $\Delta(s)$ , ou seja,

$$W(s) = \Delta(s)Y(s) \quad (9)$$

onde  $\Delta(s)$  é uma função de transferência causal com norma  $H_\infty$  limitada.

● Sistema em malha fechada

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t - \tau) + B_w w(t) \\ y(t) = Cx(t) + d_w w(t) \end{cases} \quad (10)$$

em que  $A_d = BKF$ , e  $B_w$  e  $d_w$  ponderam a influência do distúrbio no processo, e

$$G_{uy}(s) = \frac{G(s)}{1 - C(sI - A)^{-1}B_w\Delta(s) - d_w\Delta(s)} \quad (11)$$

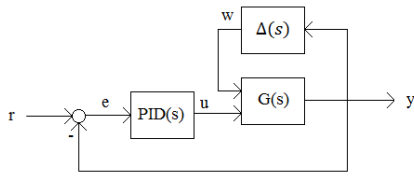


Figura: Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.

# Alocação de polos

- Região para alocação de polos para assegurar taxa de decaimento mínima das trajetórias do sistema em malha fechada.

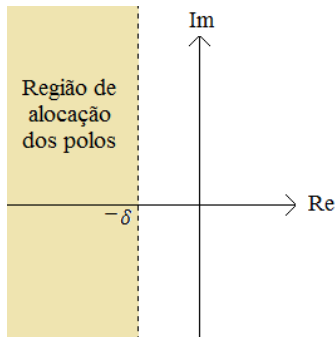


Figura: Região aberta à esquerda de  $-\delta$  do plano-s com  $\delta > 0$ .



# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Formulação do problema
- 3 Resultado principal**
- 4 Exemplo numérico
- 5 Conclusão

# Resultado principal

## Teorema 1

Se existirem matrizes simétricas positivas definidas  $R, M \in \Re^{3 \times 3}$  e  $L \in \Re^{1 \times 3}$ , tal que, para um dado  $\delta > 0$

$$\begin{bmatrix} \Upsilon_{11} & \tau^2(e^{\delta\tau}B)L + \tau R & \tau^2 R(A + \delta I)' & \tau RC' & \tau B_w \\ * & -\tau^2 M - \tau R & \tau^2 L'(e^{\delta\tau}B)' & 0 & 0 \\ * & * & -\tau R & 0 & \tau B_w \\ * & * & * & -I & d_w \\ * & * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

$$\Upsilon_{11} = \tau^2(R(A + \delta I)' + (A + \delta I)R + M) - \tau R$$

então o sistema em malha fechada (10) é assintoticamente estável com  $\|\Delta(s)\|_\infty < \sqrt{\gamma}$  e possui os polos alocados na região à esquerda de  $-\delta$ . Os parâmetros do PID são dados por:

$$k_p = \frac{k_1}{1 + k_2 b_1}, k_i = \frac{k_2}{1 + k_2 b_1}, k_d = \frac{k_3}{1 + k_2 b_1} \quad (13)$$

em que  $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = L(FR)^{-1}$ .

# Prova

- Considera-se o funcional Lyapunov-Krasovskii

$$\begin{aligned}
 v_{dd}(x(t)) = & x(t)'Px(t) + \int_{t-\tau}^t x(\theta)'Qx(\theta)d\theta \\
 & + \int_{-\tau}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{x}(\theta)'P\dot{x}(\theta)d\theta d\beta
 \end{aligned} \tag{14}$$

## Lema 1 (Gu, 2000)

Para qualquer matriz constante  $M \in \Re^{m \times m}$ ,  $M = M' > 0$ , um escalar  $\rho > 0$ , uma função vetorial  $\omega : [0, \sigma] \rightarrow \Re^m$ , tal que as integrações a seguir são bem definidas, então

$$\rho \int_0^P \omega'(\beta)M\omega(\beta)d\beta \geq \left( \int_0^P \omega(\beta)d\beta \right)' M \left( \int_0^P \omega(\beta)d\beta \right). \tag{15}$$

$$\dot{v}_{dd} \leq \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'Px(t) + x(t)'Qx(t) - x_d'Qx_d + \tau \dot{x}(t)'P\dot{x}(t) - \frac{1}{\tau} \dot{z}(t)'P\dot{z}(t).$$

↪ Uso do *Bounded Real Lemma* (Boyd et al., 1994)

# Prova

- Equação característica do sistema em malha fechada

$$F(s) = \det(sI - A - A_d e^{-s\tau}) \quad (16)$$

Define-se a função

$$\begin{aligned} H(\varepsilon) &= F(\varepsilon - \delta) = \det(\varepsilon I - \delta I - A - A_d e^{-(\varepsilon - \delta)\tau}) \\ &= \det(\varepsilon I - \bar{A} - \bar{A}_d e^{\varepsilon\tau}) \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $\bar{A} = A + \delta I$  e  $\bar{A}_d = A_d e^{\delta\tau}$ .

- Assim, se as raízes de  $H(\varepsilon) = 0$  satisfazem  $\operatorname{Re}(\varepsilon) < 0$ , então tem-se  $\operatorname{Re}(s) < 0$  para as raízes de  $F(s)$ , o que conclui a demonstração.

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Formulação do problema
- 3 Resultado principal
- 4 Exemplo numérico**
- 5 Conclusão

## Exemplo numérico

- Considere o seguinte sistema de segunda ordem (Parada et al, 2011)

$$G(s) = \frac{6(s+1)}{(7s+1)(3s+1) - 21\beta} e^{-5s} = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0 - \beta} e^{-5s} \quad (18)$$

$|\beta| \leq \beta_{max}$  é um escalar incerto adicionado de modo a modelar os erros nos parâmetros do sistema escolhido com  $\beta_{max} = 0.999a_0$ .

- Se considerarmos  $\Delta(s) = \beta\Phi(s)$ , com

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 + a_1s + a_0}, \quad B_w = [0 \ 0 \ 0]' \quad e \quad d_w = 1 \quad (19)$$

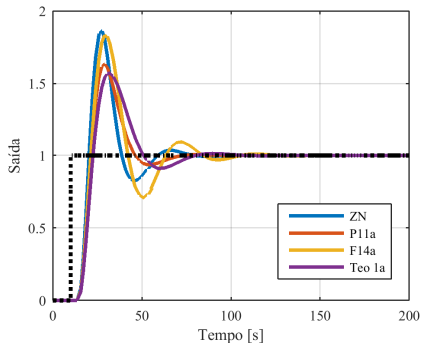
então o sistema pode ser escrito na forma

$$G_{uy}(s) = \frac{G_{nom}(s)}{1 - C(sI - A)^{-1}B_w\Delta(s) - d_w\Delta(s)}, \quad G_{nom} = G(s, \beta = 0) \quad (20)$$

- Observe que o escalar  $\gamma$  é obtido por

$$\|\Delta(s)\|_\infty = |\beta| \cdot \|\Phi(s)\|_\infty \leq \beta_{max} \|\Phi(s)\|_\infty = \sqrt{\gamma}$$

# Exemplo numérico



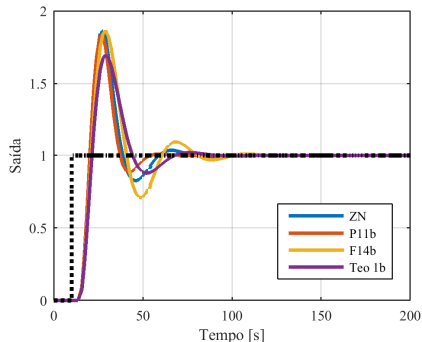
**Figura:** Comparação da resposta dos diferentes PID a uma entrada degrau para  $\delta = 0.03$ .

Acrônimos: **ZN**: Ziegler Nichols; **P11a**: (Parada et al, 2011) (com  $\delta = 0.03$ );

**F14a**: (Felini et al, 2014) (com  $\delta = 0.03$ ,  $\mu = 0.01$  e  $\alpha = 0.001$ ); **Teo 1a**:

Teorema 1 (com  $\delta = 0.03$ );

# Exemplo numérico



**Figura:** Comparação da resposta dos diferentes PID a uma entrada degrau para  $\delta = 0.04$ .

Acrônimos: **ZN**: Ziegler Nichols; **P11b**: (Parada et al, 2011) (com  $\delta = 0.04$ );

**F14b**: (Felini et al, 2014) (com  $\delta = 0.04$ ,  $\mu = 0.01$  e  $\alpha = 0.001$ ); e **Teo 1b**:

Teorema 1 (com  $\delta = 0.04$ ).



## Exemplo numérico

Método	ITAE	IAE	OS[%]	Tr[s]	Ts[s]
ZN	513.6	19.9	86.3	19.7	58.8
P11a	455.4	18.2	63.5	19.7	58.8
F14a	800.7	24.9	83.6	19.7	78.4
Teo 1a	580.0	20.4	57.1	20.4	69.4
P11b	396.7	17.5	83.2	19.8	47.8
F14b	750.7	24.2	86.7	19.8	73.1
Teo 1b	529.3	19.8	70.0	19.8	60.8

**Tabela:** Critérios de desempenho obtido pela resposta ao degrau.

### Análise do resultados

- Diminuição do sobrepasso percentual (OS[%])
- Considerando os índices de erro ITAE e IAE, seu desempenho foi melhor que Felini et al. (2014) e pior que Parada et al. (2011).

# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Formulação do problema
- 3 Resultado principal
- 4 Exemplo numérico
- 5 Conclusão**

# Conclusão

## Conclusão

Este trabalho apresenta uma condição de projeto de PID's com alocação de polos (D-estabilidade) a um sistema de 2ª ordem com atraso no tempo e incertezas. Comparações numéricas foram realizadas e observou-se melhoras em alguns indicadores de desempenho.

