Test o contrastes para numeros aleatorios

Sergio Andres Murillo Jimenez

Meta, Villavicencio, 4-72, Colombia

ABSTRACT

En la actualidad, a la hora de crear cualquier sistema en base al mundo real que satisfagan una o varias necesidades, se hace necesaria la simulación de los mismos como paso previo a su creación física, ya que esta da la posibilidad de poder evaluar todas las posibles variables, efectos, alternativas y restricciones que se imponen en la realidad; además de proporcionar cada vez más exactitud y precisión. Como primer paso al simular algún sistema se tomar un conjunto de datos lo más grande posible para posteriormente analizar su comportamiento; en este sentido, se hace necesario la selección de una fuente que genere una cantidad considerable de valores aleatorios y que sigan una distribución para contrastarlos con los valores reales y lograr caracterizar y aproximar dichos datos a una distribución. Para saber cuan aproximados son los datos reales a una determinada distribución requiere que sean evaluados junto con los datos generados aleatoriamente, por medio de test o contrates los cuales proporcionaran información valiosa de la tendencia.

Introduccion

Al momento de analizar un conjunto extenso de muestras aleatorias, se hace necesario verificar varios aspectos en cuanto a la calidad de distribución de los mismos por medio de métodos disponibles para ese objetivo. Para dicha evaluación, se requiere del uso de generadores de números pseudoaleatorios disponibles (en algunos casos) con el cual se puedan contrastar los datos reales; pero existe una cuestión que surge y es: cuál generador es mejor que otro. Y es que en el sin fin de métodos existentes para generar números aleatorios, hay unos mejores que otros. Las dos propiedades importantes esperadas en un buen generador de números aleatorios son uniformidad y aleatoriedad. La prueba de uniformidad se puede realizar usando las pruebas de ajuste de bondad disponibles actualmente. Por ejemplo, un conjunto muestral suficiente de números aleatorios pueden ser usados para verificar como se distribuyen dichos números en contraste con la distribución uniforme teórica usando ya sea el método chi-cuadrado o el método Kolmogomorov-Smirnov. Pero no basta con saber si siguen una distribución uniforme sino hay que evaluar si realmente son aleatorios. Para dicho objetivo, existen test de aleatoriedad como contraste de rachas, contraste de permutaciones, contraste de huecos, repetición de contrastes, etc.

Marco teorico y conceptual

Existen metodos que tienen como objetivo evaluar la calidad de un conjunto de datos aleatorios. Dicha calidad corresponde a si se cumplen dos propiedades fundamentales: Uniformidad y aleatoriedad. Por tanto, la distribucion de los datos debe ser uniforme, esto es, que la propabilidad de todos los valores generados sean equivalentes (**equiprobables**); a estos metodos se les conoce como test de uniformidad o pruebas de frecuencia. Y no solo eso, sino que hay que verificar que la secuencia de datos sea independiente uno de otro o que su periodo de repeticion sea extenso; a dichos metodos se les conoce como test de aleatoriedad.

Pruebas de frecuencia

Una prueba basica que siempre se hace a un conjunto de datos pseudoaleatorios es la prueba de uniformidad. Dicha prueba mide el grado de ajuste entre la distribucion de una muestra de numeros aleatorios generados y la distribucion uniforme teorica, de modo que la diferencia entre ambas sea lo mas minima posible. Aunque ambas pruebas estan basadas en la hipotesis nula que no existe diferencia entre la distribucion de las muestra y la distribucion teorica. Los metodos en los que se haran enfasis son: La prueba de Kolmogorov-Smirnov o prueba K-S y la prueba Chi-Cuadrado.

- **Prueba de Kolmogorov-Smirnov:** Basicamente, esta prueba lo que hace es medir diferencias entre cada punto imagen del generador F_n con la funcion de distribucion uniforme teorica F_0, de modo que la maxima diferencia es evaluada en la tabla K-S dados siertos parametros. Por definicion $F_x = x$, $0 < x < 1$. Conforme N crece, F_n deberá tener una mejor aproximación de F_0,, dado que la hipótesis nula sea verdadera. La prueba Kolmogorov-Smirnov esta basada en la desviación máxima absoluta entre F_n y F_0 sobre el rango de la variable aleatoria. Esto es, basado en la estadistica

  D= $\max_{x,0} |F_n - F_0|$

La distribución de la muestra D es conocida y es tabulada como una función de N en la tabla Kolmogorov-Smirnov. Para probar contra una pdf uniforme, el procedimiento sigue los pasos siguientes:

- Ordenar los datos en forma ascendente. Sea R_i, la i-esima más pequeña observación, tal que
- Usando la FDP teórica $R_1 <= R_2 <= ...R_N$,F_n calcule

$$D_+ = \max_{1<=i<=N}(\frac{i}{N} - R_i)$$

$$D_- = \max_{1<=i<=N}(R_i - \frac{i-1}{N})$$

- Calcular

$$D = \max(D_+, D_-)$$

- Encontrar el valor crítico D_i de la tabla KS para un $\alpha = 0.05$ con $k-1$ grados de libertad para una muestra N.
- Si $D <= D_\alpha/2$, se acepta la distribución candidata como aquella que tiene un buen ajuste a los datos observados; de otra forma se rechaza.

La distribución del estadístico de Kolmogorov-Smirnov es independiente de la distribución poblacional especificada en la hipótesis nula y los valores críticos de este estadístico están tabulados. Si la distribución postulada es la normal y se estiman sus parámetros, los valores críticos se obtienen aplicando la corrección de significación propuesta por Lilliefors. El test de Kolmogorov-Smirnov se extiende a la comparación de dos funciones de distribución empíricas y permite entonces poner a prueba la hipótesis de si dos muestras salieron de la misma ley. Se pueden utilizar muchos otros tests de ajuste, como los de Stephens, Anderson-Darling y Cramer-von Mises.

- **Prueba Chi-Cuadrado:** A diferencia de la prueba de Kolmogorov-Smirnov, no se toman las diferencias de cada punto entre la muestra y la desviacion verdadera, sino que se calcula la desviacion del valor esperado. Esta prueba puede utilizarse incluso con datos medibles en una escala nominal. La hipótesis nula de la prueba Chi-cuadrado postula una distribución de probabilidad totalmente especificada como el modelo matemático de la población que ha generado la muestra. Para calcular el valor de chi-cuadrado se dispone de una tabla de frencuencias ya sea por valor o intervalos de valores, de manera que se tenga la frecuencia empirica u observada. Seguidamente, suponiendo que la hipotesis nula es cierta, se calcula para cada valor o intervalo la frecuencia esperada. Dicha frencuencia se calcula como

$$e_i = \frac{n}{k}$$

El estadistico de prueba se basa en las diferencias entre f_i y e_i asi

$$X^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

Donde n es el número de intervalos de clase y e_i es el numero esperado de cada clase. Este estadístico tiene una distribución Chi-cuadrado con k-1 grados de libertad si n es suficientemente grande, es decir, si todas las frecuencias esperadas son mayores que 5. Si existe concordancia perfecta entre las frecuencias observadas y las esperadas el estadístico tomará un valor igual a 0; por el contrario, si existe una gran discrepancias entre estas frecuencias el estadístico tomará un valor grande y, en consecuencia, se rechazará la hipótesis nula. Así pues, la región crítica estará situada en el extremo superior de la distribución Chi-cuadrado con k-1 grados de libertad.

Existen varios tipos de pruebas de chi-cuadrado:

Prueba de chi-cuadrado de bondad de ajuste: Utilice este análisis para probar qué tan bien una muestra de datos categóricos se ajusta a una distribución teórica. Por ejemplo, usted puede comprobar si un dado es justo, lanzando el dado muchas veces y utilizando una prueba de chi-cuadrado de bondad de ajuste para determinar si los resultados siguen una distribución uniforme. En este caso, el estadístico chi-cuadrado cuantifica qué tanto varía la distribución observada de conteos con respecto a la distribución hipotética.

Pruebas de chi-cuadrado de asociación e independencia:

- **Prueba de asociación:** utiliza una prueba de asociación para determinar si una variable está asociada a otra variable. Por ejemplo, determine si las ventas de diferentes colores de automóviles dependen de la ciudad donde se venden.

- **Prueba de independencia:** utiliza una prueba de independencia para determinar si el valor observado de una variable depende del valor observado de otra variable. Por ejemplo, determine si el hecho de que una persona vote por un candidato no depende del sexo del elector.

Pruebas de aleatoriedad

son pruebas estadisticas usadas para decidir si una determinada muestra o conjuntos de datos responde a un patrón o puede considerarse aleatoria. Se dice que la aleatoriedad esta dada por el factor azar, por ende el comportamiento futuro o proyectado de cualquier conjunto muestral que se puede considerar aleatorio no debe ser predecible en presicion absoluta dado que esa es la esencia de la aleatoriedad. Las pruebas de aleatoriedad nos reducen a analizar el resultado de un generador de números pseudoaleatorios, también puden usarse para determinar si un conjunto de datos es explicable mediante un patrón reconocible. Por ejemplo, Wolfram usaba pruebas de aleatoriedad para examinar el resultado de la Regla 30 para examinar su capacidad para generar números aleatorios, aunque demostró tener un tamaño clave efectivo bastante más pequeño que su tamaño real y tener un desempeño pobre en una Prueba X^2

- **Test de rachas:** El contraste de rachas permite verificar la hipótesis nula de que la muestra es aleatoria, es decir, si las sucesivas observaciones son independientes. Este contraste se basa en el número de rachas que presenta una muestra. Una racha se define como una secuencia de valores muestrales con una característica común precedida y seguida por valores que no presentan esa característica. Así, se considera una racha la secuencia de k valores consecutivos superiores o iguales a la media muestral (o a la mediana o a la moda, o a cualquier otro valor de corte) siempre que estén precedidos y seguidos por valores inferiores a la media muestral (o a la mediana o a la moda, o a cualquier otro valor de corte). El número total de rachas en una muestra proporciona un indicio de si hay o no aleatoriedad en la muestra. Un número reducido de rachas (el caso extremo es 2) es indicio de que las observaciones no se han extraído de forma aleatoria, los elementos de la primera racha proceden de una población con una determinada característica (valores mayores o menores al punto de corte) mientras que los de la segunda proceden de otra población. De forma idéntica un número excesivo de rachas puede ser también indicio de no aleatoriedad de la muestra.

  De este modo, si tenemos observaciones positivas y negativas ordenadas secuencialmente segun el tiempo, podriamos preguntarnos si tienen algun patron particular o si se presentan en forma aleatoria.Bajo la hipotesis nula de aleatoriedad, su distribucion asintotica esta dada por:

  $$N(\frac{2n-1}{3},\frac{16n-29}{90})$$

  El estadistico de contraste es:

  $$Z=\frac{R-\frac{2n-1}{3}}{\sqrt[2]{\frac{16n-29}{90}}}$$

Resultados

A continuacion, se evaluan 4 generadores de numeros pseudoaleatorios, sometiendolos uno a uno a las pruebas de uniformidad y de aleatoriedad. Estos generadores son:

- RANDU:$X_{i+1}=65539X_i mod 2^{31}$
- Sinclair ZX81:$X_{i+1}=75X_i mod 2^{16}+1$
- Numerical reciepes:$X_{i+1}=(1664525X_i+1013904223) mod 2^{32}$
- Borland C/C++:$X_{i+1}=(22695477X_i+1) mod 2^{32}$

Prueba de Kolmogorov - Smirnov

- **RANDU**

De este modo, se avaluara la uniformidad del generador **RANDU** con una seed o semilla de 244, inicialmente con el **Test de Kolmogorov - Smirnov**, presentando los resultados en la siguiente tabla:

Table 1. Datos variando la cantidad de numeros aleatorios en generador RANDU

Cantidad de numeros aleatorios generados	Maxima diferencia entre f_0 y f_n (D)	Valor de la tabla K-S para $\alpha = 0.05$
1000	0.25755073179716936	0.0430
10000	0.24708281930790477	0.0136
100000	0.25006790529342587	0.0043

Se puede intuir de **Tabla 1** claramente, que las hipotesis de uniformidad son aceptadas ya que $D > D_{0.05}$, por tanto f_n, se puede decir que es igual a f_n ($f_n = f_0$).

Graficamente, se puede corroborar la aceptacion de dicha hipotesis observando la tendencia y el comportamiento del generador RANDU mientras se varia la cantidad de numeros aleatorios como parametro del mismo; mostrando un comportamiento uniforme cada vez mas estable a medida que se aumenta el parametro de muestras de numeros aleatorios a generar.

Para 1000 muestras:

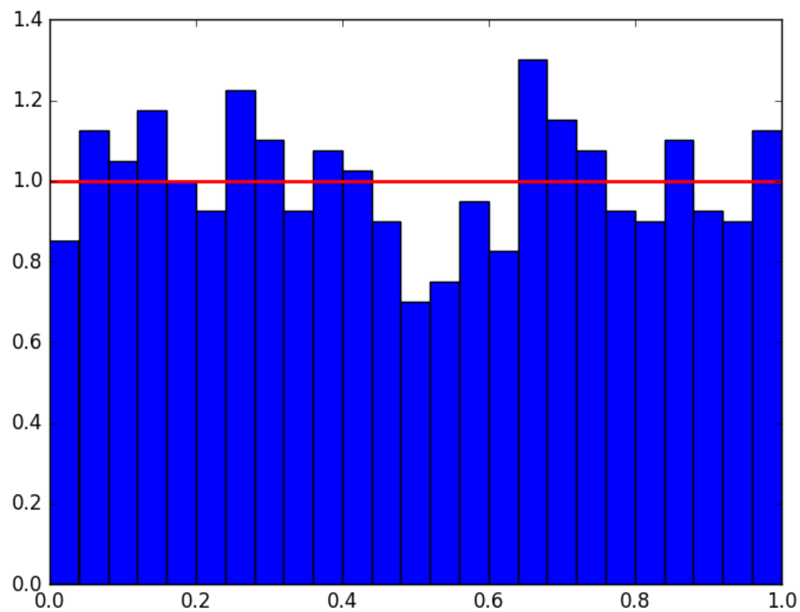

Figure 1. Histograma del generador Randu para 1000 muestras

Para 10000 muestras:

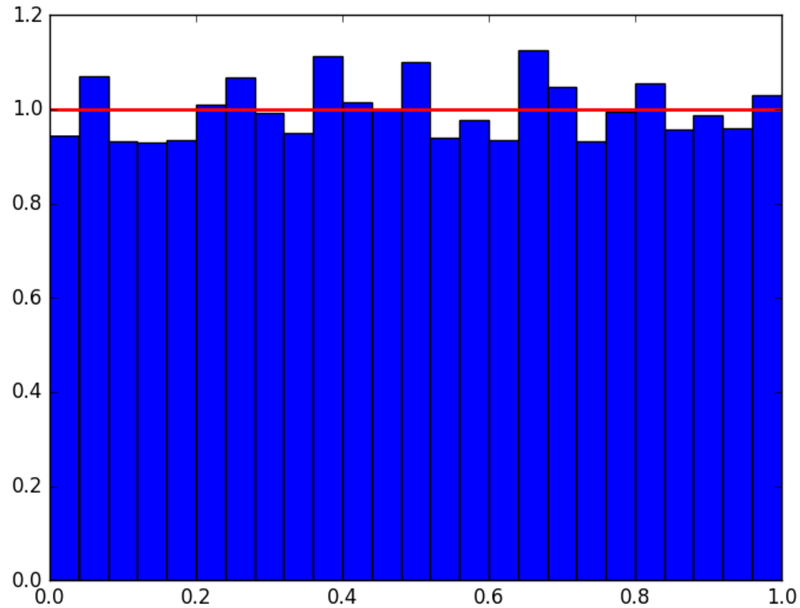

Figure 2. Histograma del generador Randu para 10000 muestras

Para 100000 muestras:

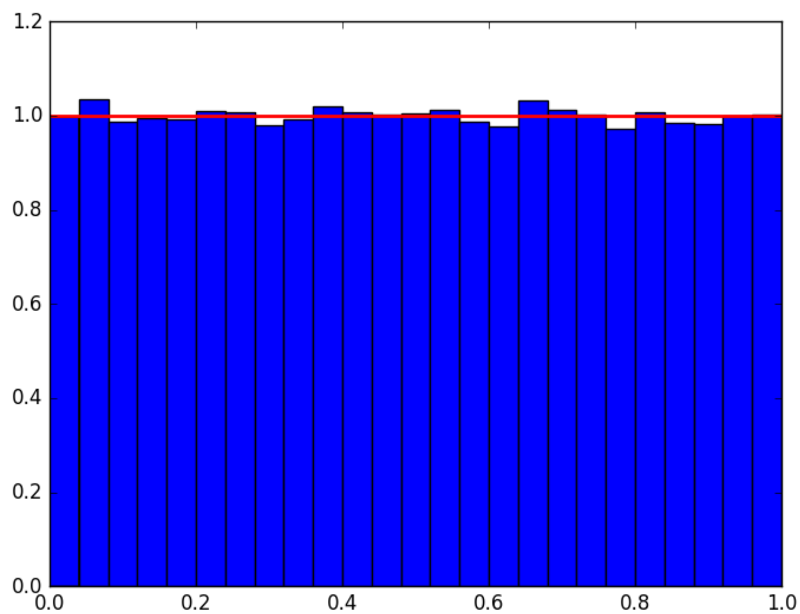

Figure 3. Histograma del generador Randu para 100000 muestras.

- **Sanclair**

Ahora se evaluara y analizara el generador **Sanclair** en cuanto a su uniformidad con una seed o semilla de 244:

Table 2. Datos variando la cantidad de numeros aleatorios en generador Sanclair

Cantidad de numeros aleatorios generados	Maxima diferencia entre f_0 y f_n (D)	Valor de la tabla K-S para $\alpha = 0.05$
1000	0.23576270693566476	0.0430
10000	0.25166164755615761	0.0136
100000	0.25002635528814293	0.0043

Se puede intuir de **Tabla 2** claramente, que las hipotesis de uniformidad son aceptadas ya que $D > D_{0.05}$, por tanto f_n, se puede decir que es igual a f_n ($f_n = f_0$).

Graficamente, se puede corroborar la aceptacion de dicha hipotesis observando la tendencia y el comportamiento del generador Sanclair mientras se varia la cantidad de numeros aleatorios como parametro del mismo; mostrando un comportamiento uniforme cada vez mas estable a medida que se aumenta el parametro de muestras de numeros aleatorios a generar.

Para 1000 muestras:

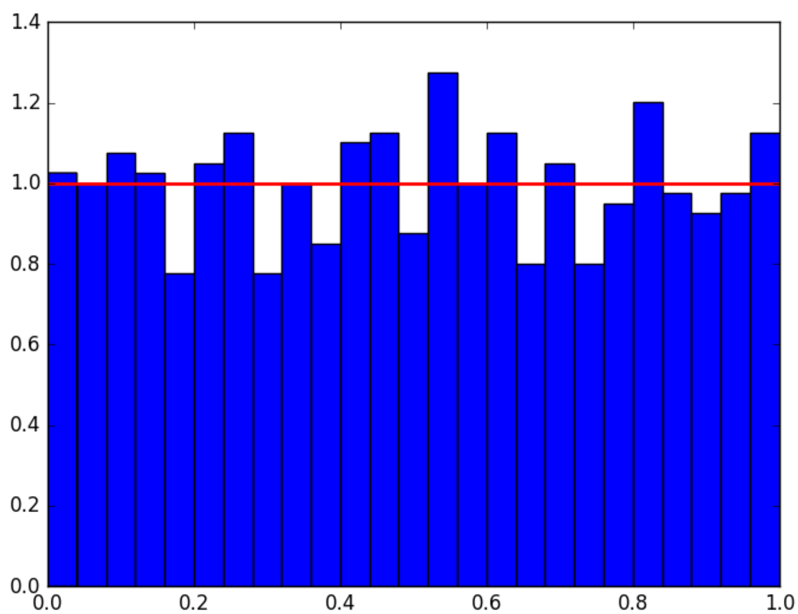

Figure 4. Histograma del generador Sanclair para 1000 muestras.

Para 10000 muestras:

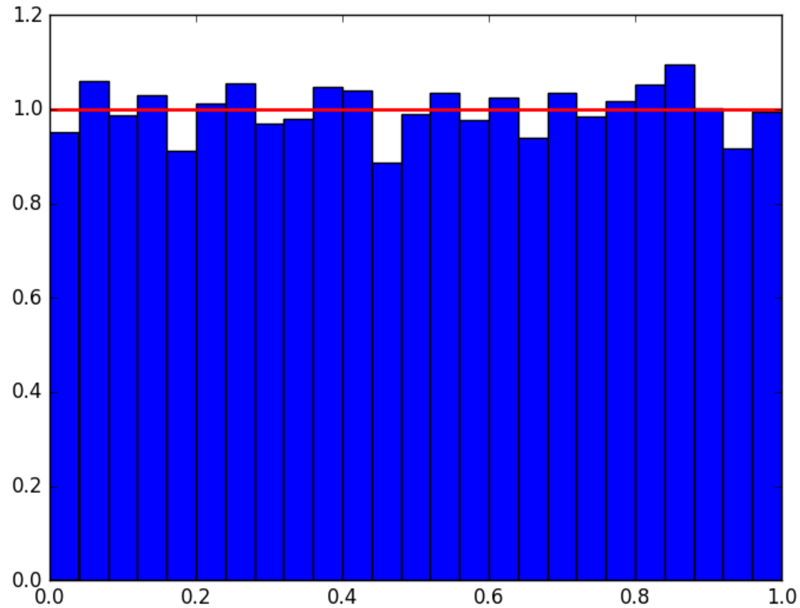

Figure 5. Histograma del generador Sanclair para 10000 muestras.

Para 100000 muestras:

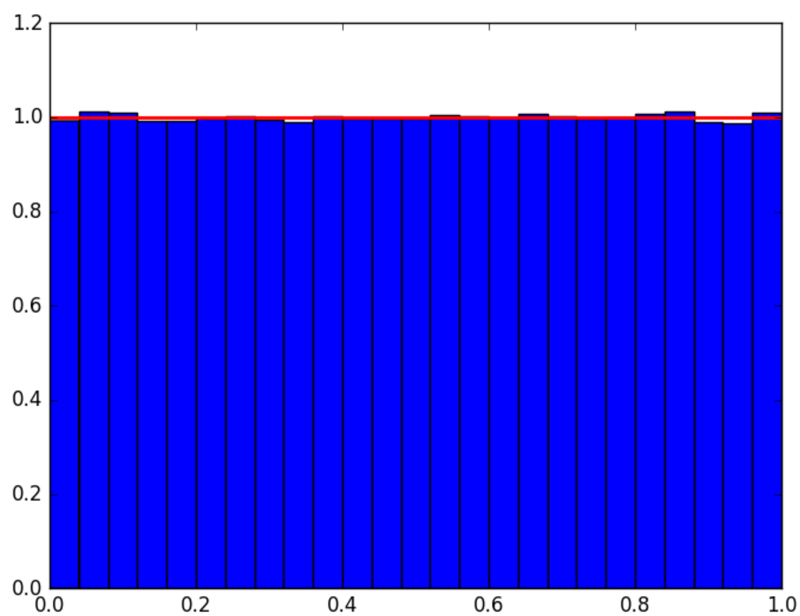

Figure 6. Histograma del generador Sanclair para 100000 muestras.

- **Borland**

Hasta el momento, se han evaluado dos generadores (RANDU y Sanclair), dando como resultado una hipotesis de uniformidad aceptable para ambos casos. Ahora, se dispondra del mismo metodo K-S para determinar la uniformidad del generador **Borland** :

Table 3. Datos variando la cantidad de numeros aleatorios en generador Borland

Cantidad de numeros aleatorios generados	Maxima diferencia entre f_0 y f_n (D)	Valor de la tabla K-S para $\alpha = 0.05$
1000	0.24205896587336281	0.0430
10000	0.25022930286305545	0.0136
100000	0.25223453087978509	0.0043

Se puede intuir de **Tabla 3** claramente, que las hipotesis de uniformidad son aceptadas ya que $D > D_{0.05}$, por tanto f_n, se puede decir que es igual a f_n ($f_n = f_0$).

Graficamente, se puede corroborar la aceptacion de dicha hipotesis observando la tendencia y el comportamiento del generador Borland mientras se varia la cantidad de numeros aleatorios como parametro del mismo; mostrando un comportamiento uniforme cada vez mas estable a medida que se aumenta el parametro de muestras de numeros aleatorios a generar.

Para 1000 muestras:

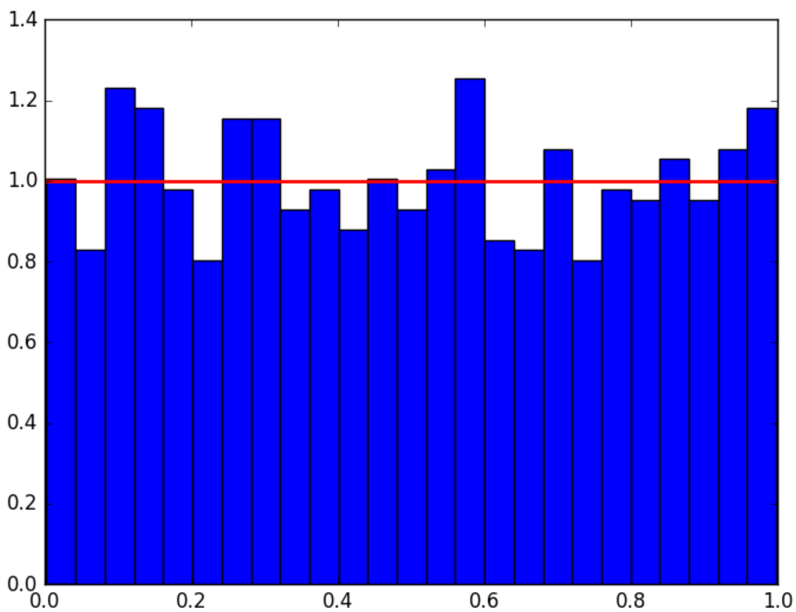

Figure 7. Histograma del generador Borland para 1000 muestras.

Para 10000 muestras:

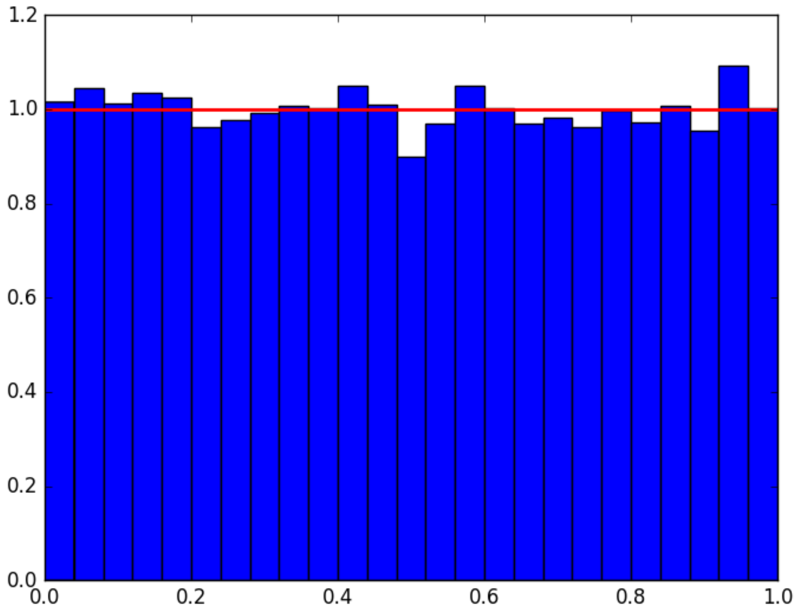

Figure 8. Histograma del generador Borland para 10000 muestras.

Para 100000 muestras:

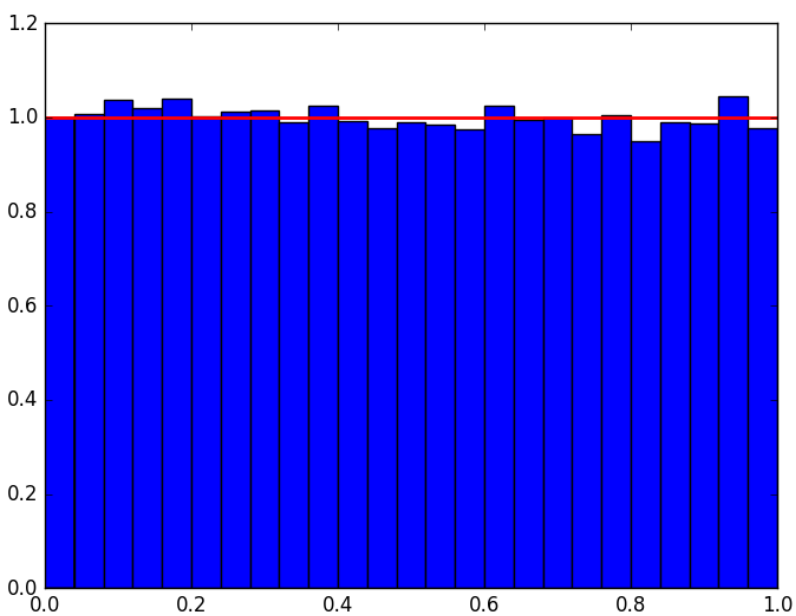

Figure 9. Histograma del generador Borland para 100000 muestras.

- **Numerical Reciepes**

Finalmente, se determinara la uniformidad del generador **Numerical reciepes** tabulando y graficando el conjunto de datos apropiado para tener la facultad de concluir dicha hipotesis :

Table 4. Datos variando la cantidad de numeros aleatorios en generador Numerical reciepes

Cantidad de numeros aleatorios generados	Maxima diferencia entre f_0 y f_n (D)	Valor de la tabla K-S para $\alpha = 0.05$
1000	0.26025073420456935	0.0430
10000	0.25128785218194694	0.0136
100000	0.24998821904225926	0.0043

Se puede intuir de **Tabla 4** claramente, que las hipotesis de uniformidad son aceptadas ya que $D > D_{0.05}$, por tanto f_n, se puede decir que es igual a f_n ($f_n = f_0$).

Graficamente, se puede corroborar la aceptacion de dicha hipotesis observando la tendencia y el comportamiento del generador Borland mientras se varia la cantidad de numeros aleatorios como parametro del mismo; mostrando un comportamiento uniforme cada vez mas estable a medida que se aumenta el parametro de muestras de numeros aleatorios a generar.

Para 1000 muestras:

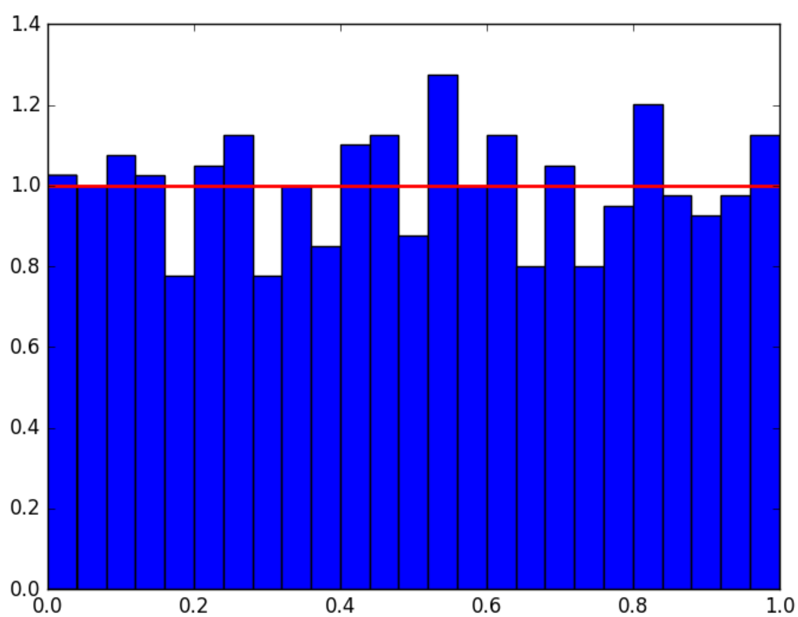

Figure 10. Histograma del generador Numerical reciepes para 1000 muestras.

Para 10000 muestras:

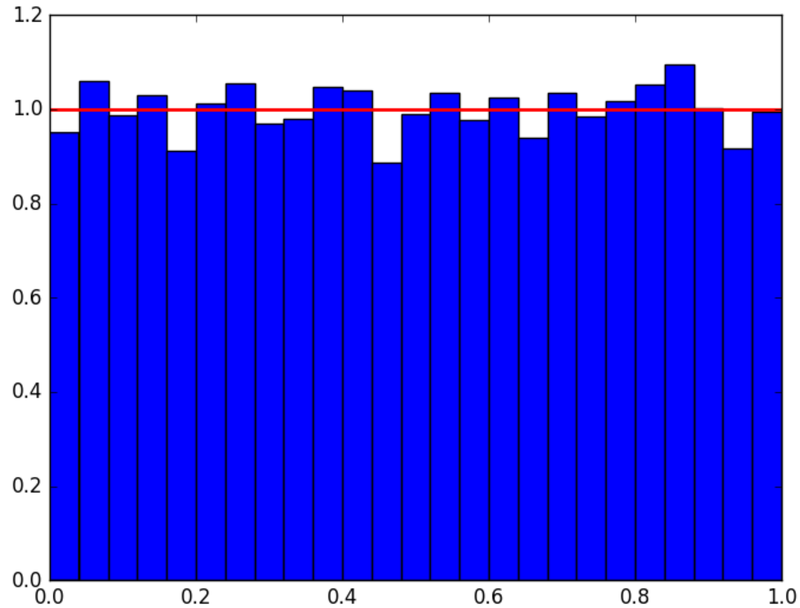

Figure 11. Histograma del generador Numerical reciepes para 10000 muestras.

Para 100000 muestras:

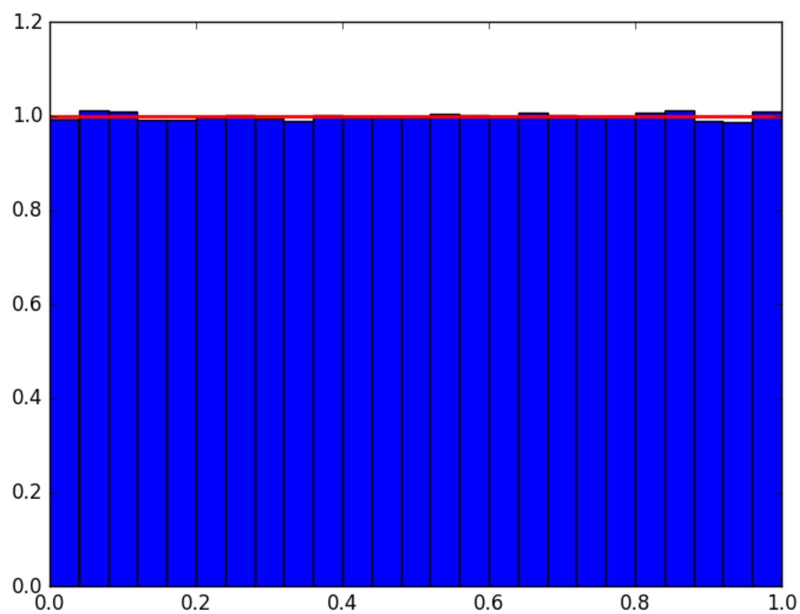

Figure 12. Histograma del generador Numerical reciepes para 100000 muestras.

Prueba de Chi - Cuadrado

Otro metodo que puede servir para verificar la uniformidad de un conjunto de datos es la **prueba de Chi-Cuadrado**. Se aplicara este metodo a los 4 generadores para comprobar si la hipotesis resultante es igual a la dada por el metodo K-S.

- **RANDU**

En este sentido, se aplicara en primera instancia el metodo para el generador **RANDU** con 101 divisiones o beans:

Table 5. Datos variando la cantidad de numeros aleatorios en generador Randu

Cantidad de numeros aleatorios generados	X^2	$X^2_{\alpha=0.05}$
1000	118.272	124.34
10000	94.3844	124.34
100000	114.73298	124.34

Como $X^2 < X^2_{\alpha=0.05}$ en todos los casos, la hipotesis de uniformidad es aceptada.

Ahora se presentan las graficas en histograma que describen el comportamiento del generador para diferentes cantidades de numeros aleatorios:

Para 1000 muestras:

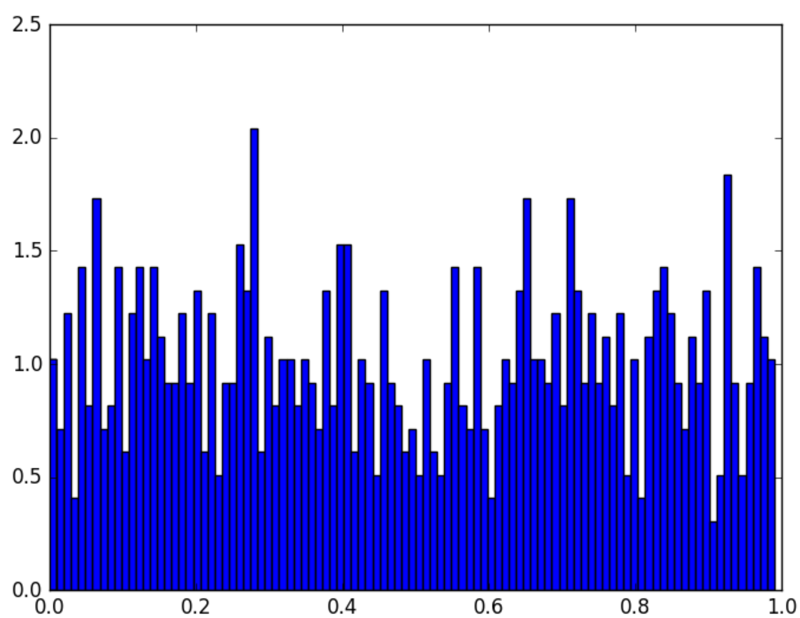

Figure 13. Histograma del generador Randu para 1000 muestras y 101 beans.

Para 10000 muestras:

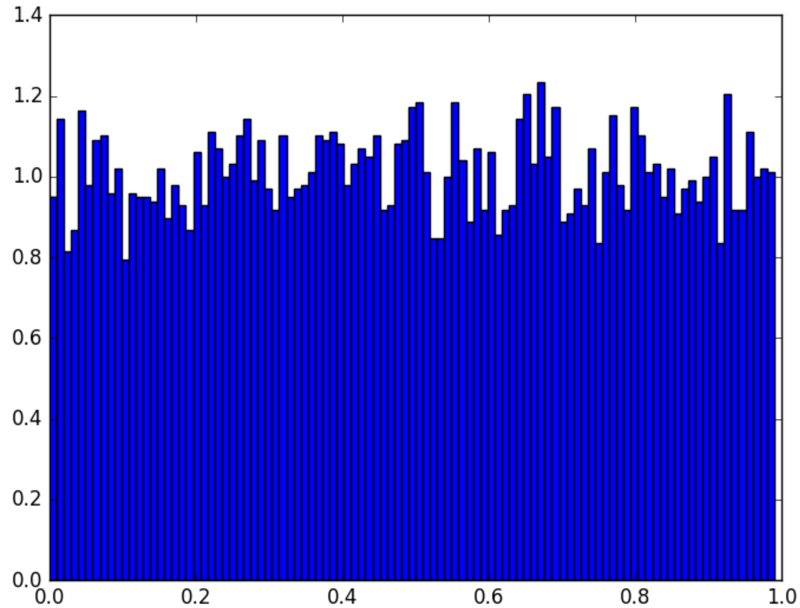

Figure 14. Histograma del generador Randu para 10000 muestras y 101 beans.

Para 100000 muestras:

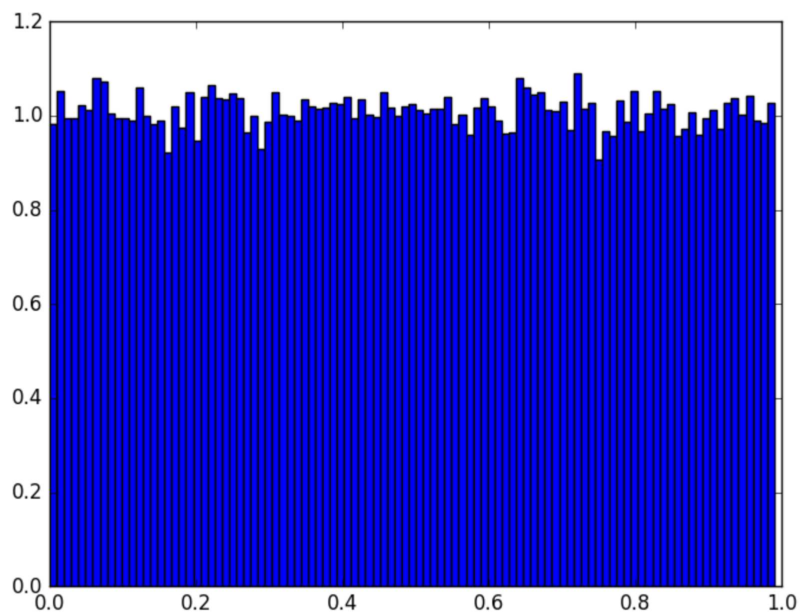

Figure 15. Histograma del generador Randu para 100000 muestras y 101 beans.

- **Sanclair**

Ahora, se aplicara para el generador **Sinclair** con 101 divisiones o beans:

Table 6. Datos variando la cantidad de numeros aleatorios en generador Sanclair

Cantidad de numeros aleatorios generados	X^2	$X^2_{\alpha=0.05}$
1000	85.548	124.34
10000	101.7574	124.34
100000	23.24516	124.34

Como $X^2 < X^2_{\alpha=0.05}$ en todos los casos, la hipotesis de uniformidad es aceptada.

Ahora se presentan las graficas en histograma que describen el comportamiento del generador para diferentes cantidades de numeros aleatorios:

Para 1000 muestras:

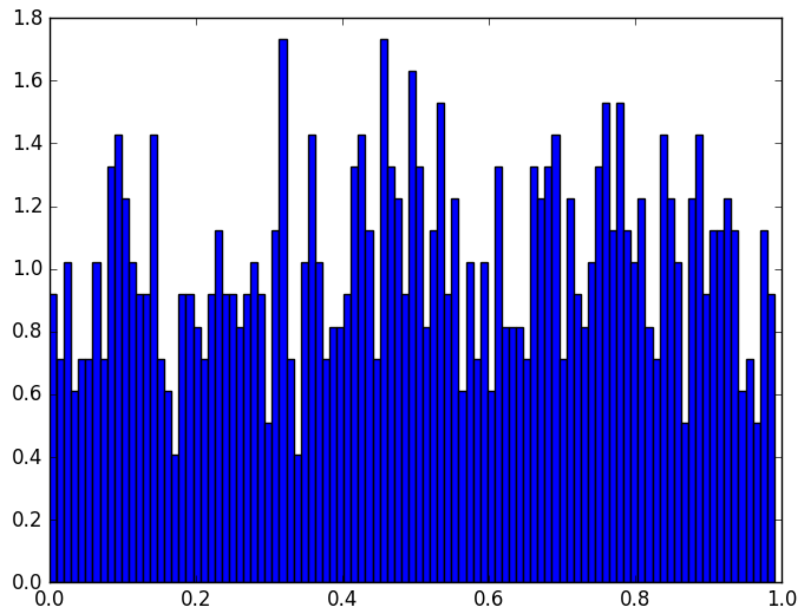

Figure 16. Histograma del generador Sanclair para 1000 muestras y 101 beans.

Para 10000 muestras:

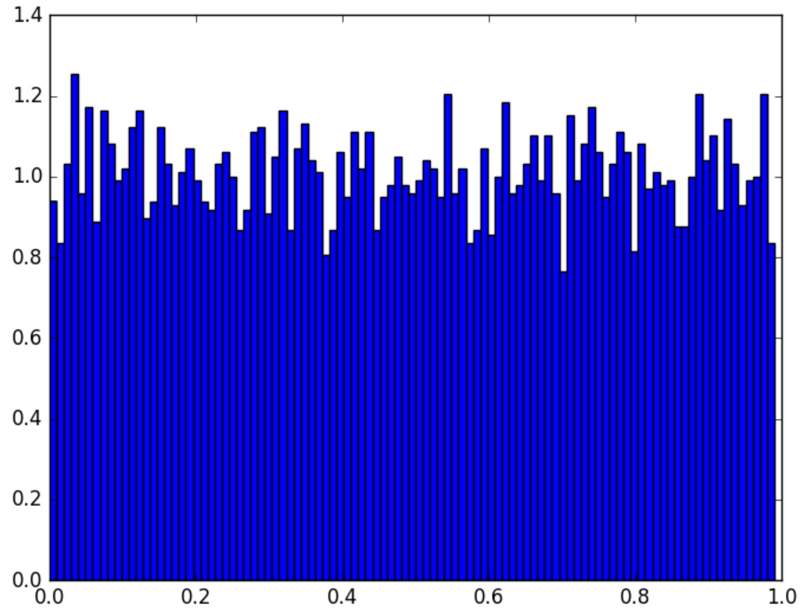

Figure 17. Histograma del generador Sanclair para 10000 muestras y 101 beans.

Para 100000 muestras:

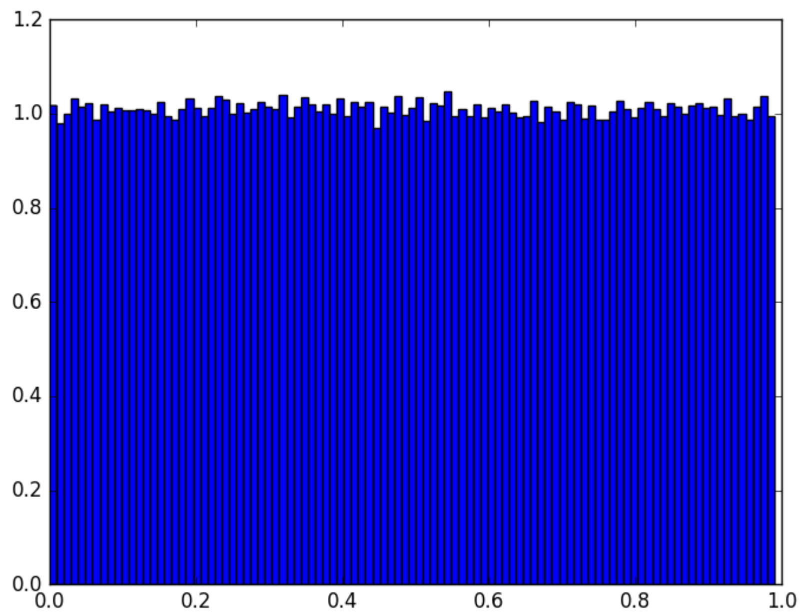

Figure 18. Histograma del generador Sanclair para 100000 muestras y 101 beans.

- **Borland**

Ahora, se aplicara para el generador **Borland** con 101 divisiones o beans:

Table 7. Datos variando la cantidad de numeros aleatorios en generador Borland

Cantidad de numeros aleatorios generados	X^2	$X^2_{\alpha=0.05}$
1000	97.87	124.34
10000	104.1814	124.34
100000	651.6813	124.34

Como $X^2 < X^2_{\alpha=0.05}$ en todos los casos, la hipotesis de uniformidad es aceptada.

Ahora se presentan las graficas en histograma que describen el comportamiento del generador para diferentes cantidades de numeros aleatorios:

Para 1000 muestras:

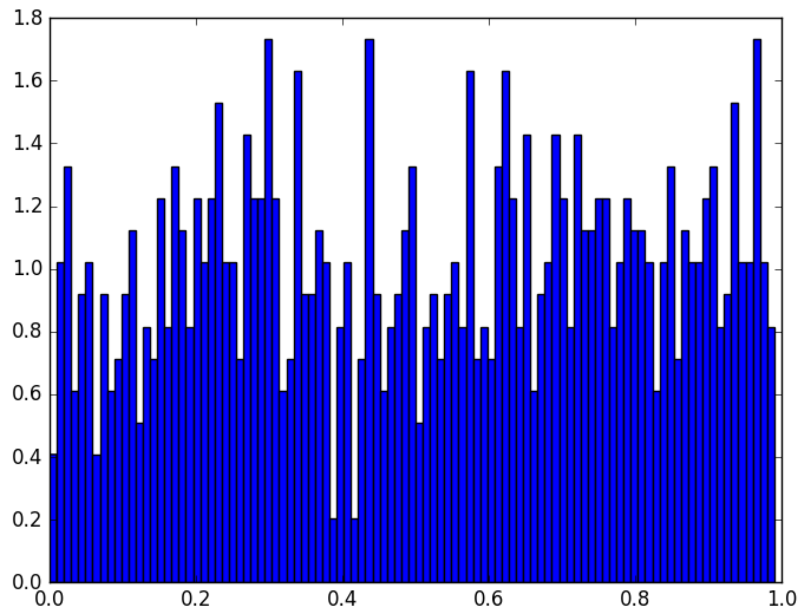

Figure 19. Histograma del generador Borland para 1000 muestras y 101 beans.

Para 10000 muestras:

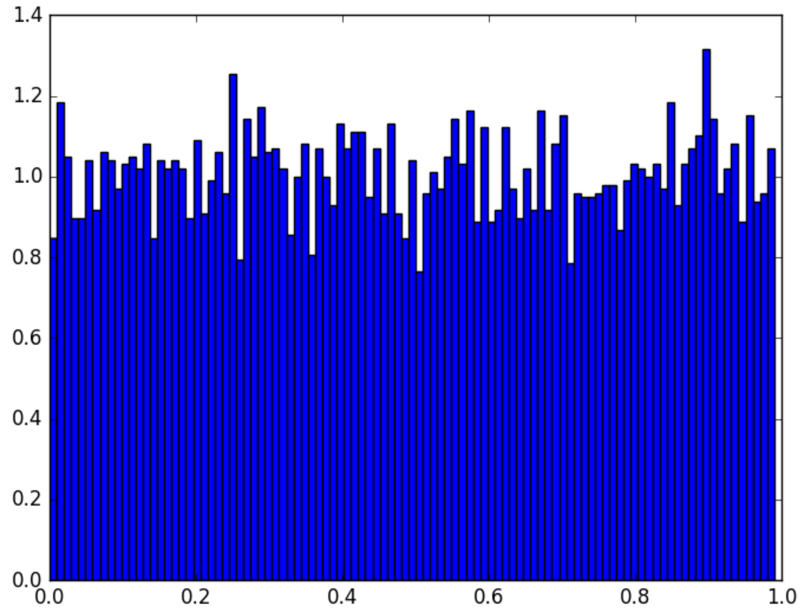

Figure 20. Histograma del generador Borland para 10000 muestras y 101 beans.

Para 100000 muestras:

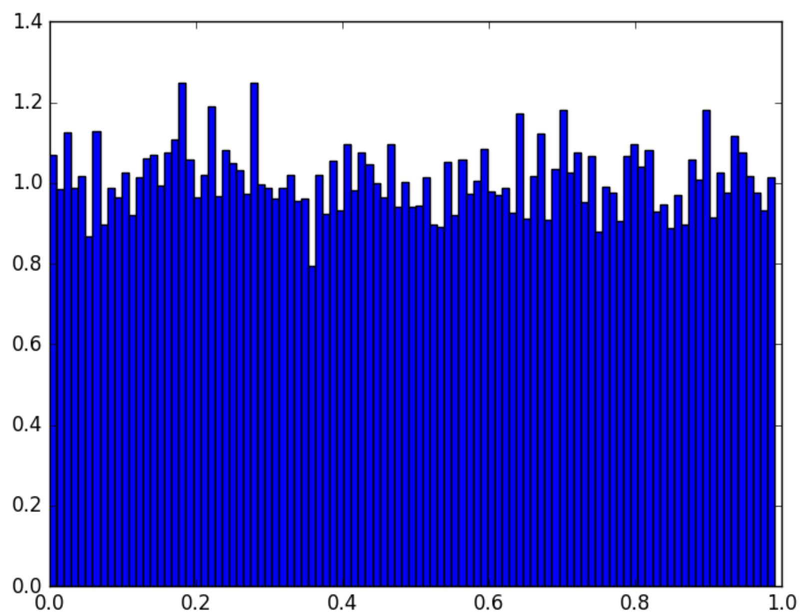

Figure 21. Histograma del generador Borland para 100000 muestras y 101 beans

- **Numerical Reciepes**

Finalmente, se aplicara para el generador **Numerical Recipies** con 101 divisiones o beans:

Table 8. Datos variando la cantidad de numeros aleatorios en generador Numerical Recipies

Cantidad de numeros aleatorios generados	X^2	$X^2_{\alpha=0.05}$
1000	106.96	124.34
10000	108.7466	124.34
100000	78.08008	124.34

Como $X^2 < X^2_{\alpha=0.05}$ en todos los casos, la hipotesis de uniformidad es aceptada.

Ahora se presentan las graficas en histograma que describen el comportamiento del generador para diferentes cantidades de numeros aleatorios:

Para 1000 muestras:

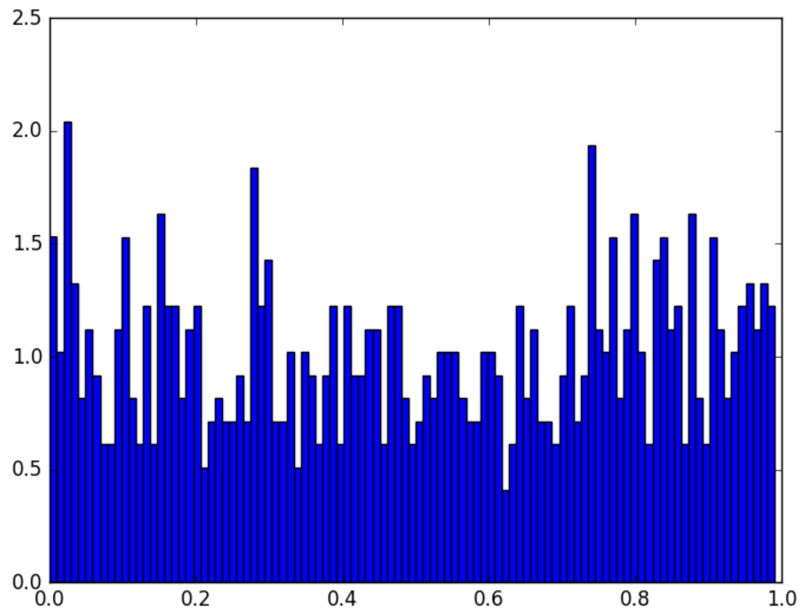

Figure 22. Histograma del generador Numerical recipies para 1000 muestras y 101 beans

Para 10000 muestras:

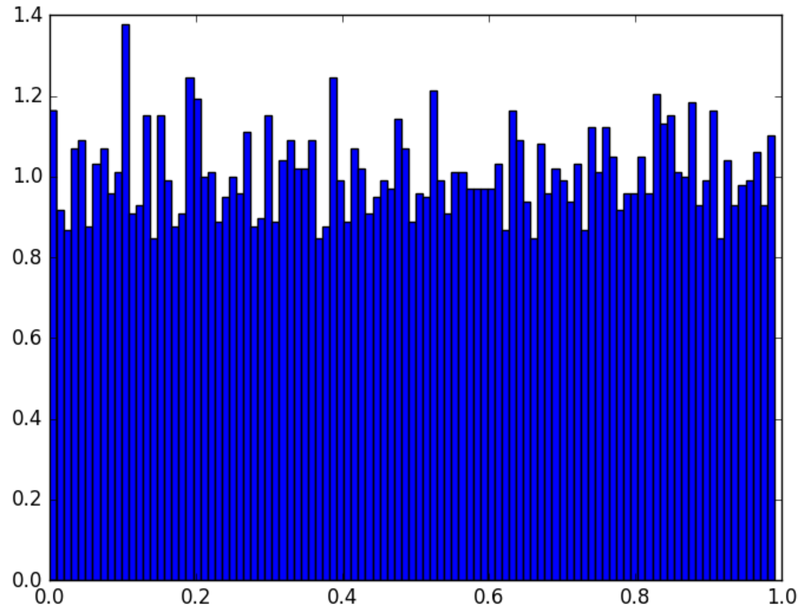

Figure 23. Histograma del generador Numerical recipies para 10000 muestras y 101 beans

Para 100000 muestras:

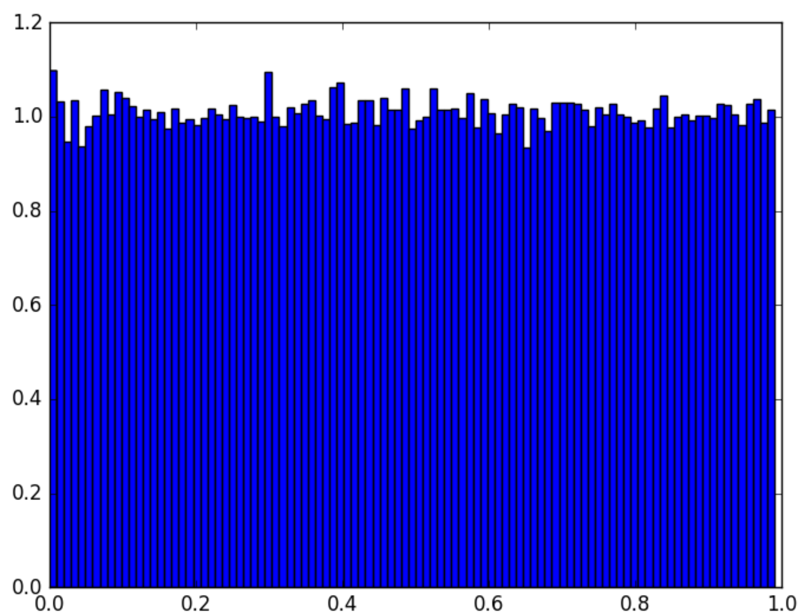

Figure 24. Histograma del generador Numerical recipies para 100000 muestras y 101 beans

Test de rachas

Despues de comprobar exitosamente por medio de los metodos de Kolmogorov - Smirnoff y Chi- cuadrado que los generadores siguen una distribucion uniforme, ahora se evaluara uno a uno por medio del **test de rachas** si poseen la propiedad de aleatoriedad.

Primeramente, se evaluara el generador **Randu** con una seed o semilla de 24457:

Table 9. Datos del metodo Randu variando la cantidad de numeros aleatorios

cant. numeros aleatorios	Varianza	Esperanza	Z	Cantidad de rachas +	Cantidad de rachas -	Cantidad total de rachas
1000	177	666	0.225	331	332	663
10000	1777	6666	1.233	3359	3359	6718
100000	17777	66666	0.7875	33385	33386	66771

Ahora, se evaluara el generador **Sinclair** con una seed o semilla de 24457:

Table 10. Datos del metodo Sanclair variando la cantidad de numeros aleatorios

cant. numeros aleatorios	Varianza	Esperanza	Z	Cantidad de rachas +	Cantidad de rachas -	Cantidad total de rachas
1000	177	666	0.9019	326	328	654
10000	1777	6666	2.799	3273	3275	6548
100000	17777	66666	3.4200	33104	33106	66210

Seguidamente, se evaluara el generador **Borland** con una seed o semilla de 24457:

Table 11. Datos del metodo Borland variando la cantidad de numeros aleatorios

cant. numeros aleatorios	Varianza	Esperanza	Z	Cantidad de rachas +	Cantidad de rachas -	Cantidad total de rachas
1000	177	666	2.1046	346	348	694
10000	1777	6666	0.4981	3322	3323	6645
100000	17777	66666	0.2475	33316	33317	66633

Finalmente, se evaluara el generador **Numerical Recipies** con una seed o semilla de 24457:

Table 12. Datos del metodo Numerical recipies variando la cantidad de numeros aleatorios

cant. numeros aleatorios	Varianza	Esperanza	Z	Cantidad de rachas +	Cantidad de rachas -	Cantidad total de rachas
1000	177	666	1.5784	343	344	687
10000	1777	6666	1.5893	3366	3367	6733
100000	17777	66666	2.2425	33482	33483	66965

Analisis de resultados

Despues de haber realizado los tests de uniformidad y aleatoriedad se pudo observar de manera analitica que los genereadores Randu, Sinclair, Borland y Numerical Recipies cumplen a cabalidad ambas propiedades; esto se puedo evidenciar tantos analiticamente como graficamente, siendo mas notorio la distribucion uniforme a la vez que se el parametro de cantidad de numeros aleatorios aumentaba.

En cuanto al test de rachas o prueba de aleatoriedad, se pudo observar que la media y varianza no cambio para ninguno de los generadores a diferencia del valor de Z que tenia cambios que oscilaban entre 0 y 3; ademas la cantidad de rachas positivas era muy aproximada o equivalente a la cantidad de rachas negativas, evidenciando la propiedad mas significativa de la distribucion normal llamada **reflexion**

Conclusiones

- Todos los 4 generadores evaluados en cuanto a su uniformidad y aleatoriedad, pasaron los test de Kolmogorov - Smirnov, de Chi-cuadrado y de rachas, lo que indica que son generadores ideales.

- En cuanto al test de rachas, se evidencia la propiedad reflexiba propia de la distribucion normal.
- Graficamente, se comprobo que a medida que se aumenta la cantidad de numeros aleatorios a generar, esta tiende cada vez mas a a estabilizarse en 1 uniformente.
- Bastaria con aplicar por lo menos una de las pruebas de uniformidad para conocer si verdaderamente se ajusta a una distribucion uniforme
- La prueba de Kolmogorov - Smirnov mide la distancia maxima de diferencia entre la distribucion uniforme teorica y el conjunto de valores aleatorios generados, mientras que la prueba de Chi - Cuadrado mide desviaciones

References

1. Figueredo, A. J. & Wolf, P. S. A. Assortative pairing and life history strategy - a cross-cultural study. *Human Nature* **20**, 317–330 (2009).

1