Основная теорема корректности

Доказательство.

В силу утверждения 4 достаточно доказать, что произвольная задача $Q \in \{Q\}$ является полной относительно $\{R\}$. Доказательство полноты Q состоит в прямом построении операторов $R_k, k = 1, 2, \ldots, l$ из $L\{R\}$, переводящих пару $(\hat{x}, \bar{x}), \hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_l), \bar{x} = (x_1, \ldots, x_q)$ в числовой вектор $\bar{x}^*_k = (x^*_{k1}, \ldots, x^*_{kl})$, в котором $x^*_{kk} = 1$, а $x^*_{ku} = 0$ при $k \neq u$. Построение проводится для любого сколь угодно малого ϵ.

Пусть мощность множества $\mathcal{Z}_i$ признака f_i равна N, норма $\|\bar{x}\|$ равна $M \leqslant q$, максимальная компонента вектора $\bar{x}$ равна x_{max}. Зафиксируем величину i и коэффициенты $c_1 = \min_v \hat{x}_v, c_2 = \frac{M}{1+M}$. Рассмотрим матрицы предсказания из множеств $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_l$ признаков $f_1, \ldots, f_l$, удовлетворяющие следующим условиям:

Основная теорема корректности

Доказательство (продолжение).

1. в каждой матрице предсказаний $Z_r^i \in \mathcal{Z}_i$ в столбце $\bar{z}_1^r = (z_{11}^r, \dots, z_{1q}^r)$ компонента $z_{1v}^r = 1$, если $x_v = x_{max}$, и $z_{1v}^r = 0$, если $x_v < x_{max}$;
2. в каждой матрице предсказаний $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k, u{\neq}k$ в столбце $\bar{z}_1^r = (z_{11}^r, \dots, z_{1q}^r)$ компонента $z_{1v}^r = 0$ при любых v.

Вычислим величину x_{ii}^*. Т. к. $c_1 = \min_u \hat{x}_u$, то условие $\hat{x}_k{\geqslant}c_1$ на шаге 4 алгоритма $\mathfrak{A}_{th}$ автоматически выполняется и функция измерения $\hat{f}_i$ попадает в множество $\hat{F}^*$. Из условия 1) следует, что каждая матрица $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$ попадает в множество Z^* на шаге 11 алгоритма $\mathfrak{A}_{th}$:

$$\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}\|} < \frac{\sum_v |z_{1v}^r - x_v|}{1+M} < \frac{M}{1+M} = c_2,$$

Основная теорема корректности

Доказательство (продолжение).

так как минимум один компонент в $\bar{z}_1^r$ равен 1 и существует элемент $x_v > 1/2$. В этом случае $x^*_{kk} = \gamma \cdot N$, где γ — весовой коэффициент. Оценим величины x^*_{ku}. Т.к. $c_1 = \min_v \hat{x}_v$, то условие $\hat{x}_u \geqslant c_1$ на шаге 4 алгоритма $\mathfrak{A}_{th}$ автоматически выполняется и все функции измерения $\hat{f}_j$ попадают в множество $\hat{F}^*$. Из условия 2) следует, что каждая матрица $Z_r^u \in \mathcal{Z}_u$ не попадает в множество Z^* на шаге 11 алгоритма $\mathfrak{A}_{th}$:

$$\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}\|} = \frac{M}{M} = 1 > \frac{M}{1+M} > c_2.$$

В этом случае $x^*_{ku} = 0$.

Основная теорема корректности

Доказательство (окончание).

Рассмотрим оператор распознавания $\frac{1}{\gamma \cdot N} R_k(\hat{x}, \mathcal{Z}^k, \bar{x})$, который переводит задачу Q в вектор $\bar{x}_i^*$, причем $\bar{x}_{kk}^* = 1$, а $\bar{x}_{ku}^* = 0, k \neq u$. Таким образом, условия на числовой вектор $\bar{x}_k^*$ выполняются.

Полнота задачи Q доказана. $\square$