

# РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ЭЛЕМЕНТОВ КАРТИНЫ МИРА

А. И. Панов

Институт системного анализа РАН

117213, Россия, Москва, пр. 60—летия Октября, 9

e-mail: pan@isa.ru

## Аннотация

Рассматривается алгоритм работы образной компоненты элементарной единицы индивидуального знаний субъекта деятельности. В основе работы алгоритма лежат нейрофизиологические данные. Формулируется ряд статических и динамических постановок задач распознавания (классификации) в русле алгебраического подхода. Доказываются теоремы корректности линейных замыканий образуемых операторов распознавания, результаты которых интерпретируются как возможность провести обучение в картине мира субъекта таким образом, что он будет правильно категоризовать поступающий стимул.

## ВВЕДЕНИЕ

Исследования психологов и нейрофизиологов свидетельствуют о существовании элементарных единиц индивидуального знания, которые, с одной стороны, обладают независимой от области и типа деятельности субъекта универсальной структурой, а с другой стороны, обладают одинаковыми для всех таких элементов функциями при формировании человеческого поведения. Существуют разные точки зрения при описании таких единиц, обеспечивающих элементарные когнитивные функции субъекта: группы нейронов [1], фокус взаимодействия нейронных ансамблей [2], локальный анализатор признаков [3], нейроны—символы [4], объемлющие характеристики [5] и др. Для описания элементарных единиц индивидуального знания в данной работе используется понятие *знака*, рассматриваемое как в логических работах [6, 7], так и в психологических исследованиях по теории деятельности [8].

В теории деятельности Леонтьева знак представляет некоторый процесс или объект внешней среды и имеет три компоненты, определяющие его роль в деятельности субъекта: образ, значение и личностный смысл. Образ знака представляет собой процедуры отделения представляемого объекта от других объектов и одновременно процедуры построения внутреннего описания этого объекта. Значение знака определяет общепринятые в культурно—исторической среде, к которой принадлежит субъект, действия, совершаемые над этим объектом или с ним. Личностные смыслы знака определяют действия, совершаемые с этим объектом при учёте внутренних характеристик субъекта (его потребностей и возможностей) (Рисунок 1а).

Для построения модели знака был введён четвёртый компонент — имя ([?, 9]). Такое представление о структуре знака позволило описать процедуры формирования знака, самоорганизации на множестве знаков и построить модель картины мира субъекта. Однако строение самих компонентов знака и их связь с нейрофизиологическими данными о строении и механизмах работы мозга оставались за рамками модели. В настоящем исследовании рассмотрено

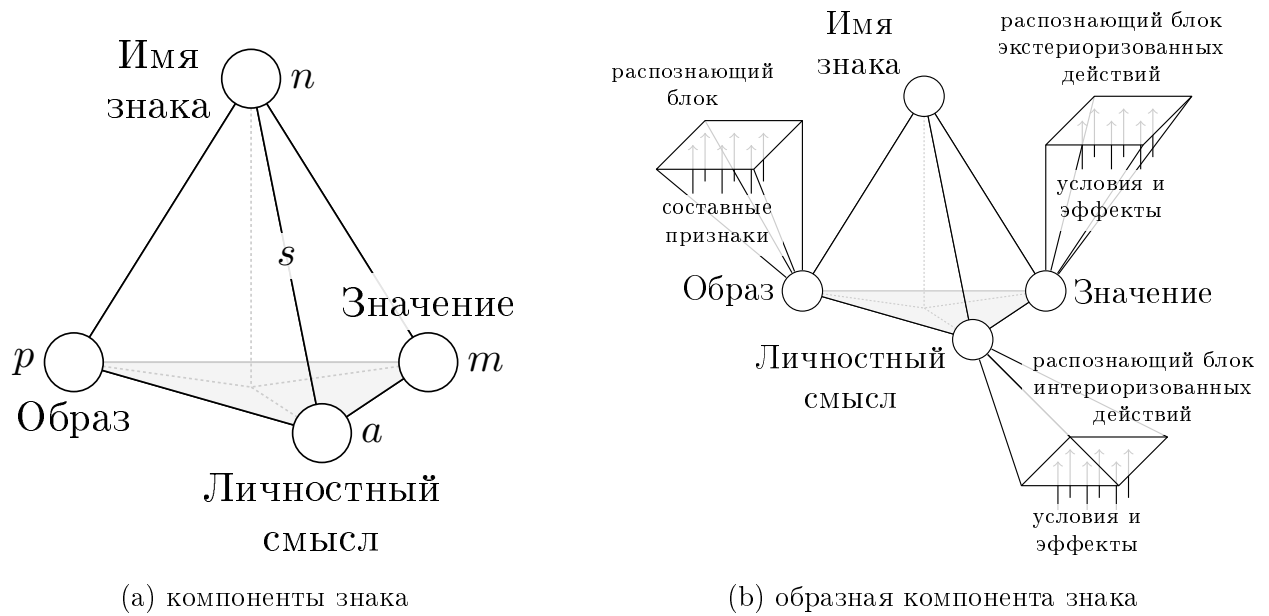


Рис. 1: Структура знака.

описание образной компоненты, алгоритм работы которой с одной стороны основан на одной из нейрофизиологических моделей, а с другой — реализует основные психологические функции этой компоненты.

В качестве базисной нейрофизиологической модели была выбрана модель неокортекса человека, описываемая в работах [10, ?]. В предлагаемой авторами так называемой иерархической временной памяти (ИВП—модель) основным элементом является регион неокортекса, состоящий из шестислойных колонок нейронов. Регионы организованы в иерархию (несколько иерархий с учётом модальности поступающих сигналов), в которой имеются как восходящие потоки информации (о распознаваемых объектах), так и нисходящие — управляющие процессом распознавания. В процессе обучения данные сохраняются в виде последовательности связанных колонок региона, именно такая последовательность и хранит в себе развёрнутое во времени внутреннее представление об объекте.

В качестве модели неокортекса в данной статье рассмотрен объект под названием *распознающий блок*, который реализует основные принципы работы ИВП—модели: иерархичность представления, предсказывающее воздействие верхних уровней иерархии, хранение развёрнутого во времени представления в виде последовательности признаков. При этом мы будем считать, что один из распознаваемых объектов представляется некоторым знаком, образом которого и будет являться та последовательность признаков, которая хранится в соответствующем распознающем блоке (Рисунок 1b). В следующих параграфах статьи изложено формальное описание распознающего блока и исследованы его свойства в контексте задачи на распознавание.

## 1. РАСПОЗНАЮЩИЙ БЛОК

Будем рассматривать объект  $R_i^j$ , который будем называть *распознающим блоком* уровня  $j$  с индексом  $i$  или просто распознающим блоком. Опишем кратко функции введённого объекта, а затем определим алгоритм его работы формально. Далее будем пользоваться понятием *признака*, который будем понимать как составную часть информационного, описательного представления некоторой сущности, явления или процесса.

Каждый распознающий блок, исходя из своего названия, распознает, или, применительно к низкоуровневым сигналам, измеряет, некоторые признаки. Распознавание (измерение)

заключается в сопоставлении признака — весовому значению, характеризующему тот факт, удаётся ли собрать (измерить) признак из составляющих его низкоуровневых входных признаков, информация о которых содержится во входном векторе. Такой вес будем называть *весом присутствия признака* во входном векторе.

Входной вектор, в свою очередь, представляет собой весовой вектор присутствия низкоуровневых признаков, по которым распознаются выходные признаки. Распознающий блок обладает состоянием, которое представляет собой также весовой вектор присутствия входных признаков, но в следующий момент времени. Такой вектор будем называть *вектором ожиданий*. Запишем все вышесказанное строго.

Пусть заданы множества  $\{R_i^j\}$  и  $\{f_k\}$ . Множество  $\{R_i^j\}$  будем называть совокупностью распознающих блоков, а множество  $\{f_k\}$  — совокупностью допустимых признаков. Введём бинарное отношение  $\dashv$ , определённое на паре множеств  $\{f_k\}$  и  $\{R_i^j\}$ , и будем читать  $f_k \dashv R_i^j$  как «признак  $f_k$  распознаётся блоком  $R_i^j$ » или как «признак  $f_k$  распознаётся блоком  $R_i^j$ ». Множество всех распознаваемых блоком  $R_i^j$  признаков будем обозначать  $F_i^{*j}$ , т.е.  $\forall f^* \in F_i^{*j} f^* \dashv R_i^j, F_i^{*j} \subseteq \{f_k\}$

Рассмотрим связный ориентированный (ярусный) граф  $G_R = (V, E)$ , где  $V$  - множество вершин,  $E$  - множество рёбер. Каждую вершину  $v$ , принадлежащую  $j$ -ому ярусу графа  $G_R$ , будем связывать с соответствующим распознающим блоком  $R_i^j$  уровня  $j$ , а ребро  $e = (v, u) \in E$  будем интерпретировать как иерархическую связь между соответствующим вершине  $v$  дочерним блоком  $R_{i_1}^{j_1}$  и соответствующим вершине  $u$  блоком—родителем  $R_{i_2}^{j_2}$ .

Рассмотрим распознающий блок  $R_i^j$ . Определим множество  $F_i^j \subseteq f_k$  таких признаков, что для любого  $f \in F_i^j$  существует распознающий блок  $R_k^{j-1}$  уровня  $j-1$ , дочерний по отношению к блоку  $R_i^j$ , такой, что  $f \dashv R_k^{j-1}$ . Такое множество  $F_i^j$  будем называть совокупностью входных признаков распознающего блока  $R_i^j$ . Для каждого признака  $f^* \in F_i^{*j}$  введём функцию распознавания  $\hat{f}(x_1, \dots, x_q) = x^*$ , где  $x^* \in [0, 1]$  — весовой вектор присутствия распознаваемого признака  $f^*$ , а  $x_1, \dots, x_q \in [0, 1]$  — весовой вектор присутствия признаков из множества  $F_i^j$ . Множество таких функций для распознающего блока  $R_i^j$  обозначим как  $\hat{F}_i^j$ .

Пусть мощность множества распознаваемых признаков  $F_i^{*j}$  и множества функций распознавания  $\hat{F}_i^j$  равна  $l_i^j$ , а мощность множества входных признаков  $F_i^j$  равна  $q_i^j$ . Введём упорядоченное множество локальных моментов времени  $T_i^j$  для распознающего блока  $R_i^j$ . Для каждого распознающего блока определим характерный масштаб времени  $h_i^j$ , за который происходит один цикл вычисления в распознающем блоке  $R_i^j$ .

В начале  $s$ -ого цикла вычисления (момент времени  $\tau_s \in T_i^j$ ) распознающий блок  $R_i^j$  получает на вход вектор длины  $l_i^j$  ожиданий  $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$ , вычисляемый по формуле среднего от векторов ожиданий, получаемых от родительских относительно блока  $R_i^j$  распознающих блоков  $R_k^{j+1}$ :

$$\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s) = \frac{1}{N_i^j} \sum_{k \in K_i^{j+1}} \hat{x}_k^{j+1}(\tau_s),$$

где  $N_i^j$  - количество родительских блоков,  $K_i^{j+1}$  - множество индексов родительских относительно  $R_i^j$  распознающих блоков. Далее в каждый момент времени  $t \in T_i^j$ ,  $\tau_s \leq t \leq \tau_s + h_i^j$ , распознающий блок  $R_i^j$  получает на вход весовой вектор  $\bar{x}_i^j(t)$  длины  $l_i^j$  присутствия входных признаков из множества  $F_i^j$ , вычисляет выходной весовой вектор  $\bar{x}_i^{*j}(t)$  длины  $l_i^j$  присутствия распознаваемых признаков из множества  $F_i^{*j}$ , вычисляет вектор длины  $q_i^j$  ожиданий  $\hat{x}_i^j(t)$  присутствия входных признаков в следующий момент времени (Рисунок 2).

## 2. АЛГОРИТМ РАБОТЫ РАСПОЗНАЮЩЕГО БЛОКА

Опишем распознающий блок  $R_i^j$  с точки зрения классической теории динамических систем [11]. Обозначим множество возможных мгновенных значений выходных векторов рас-

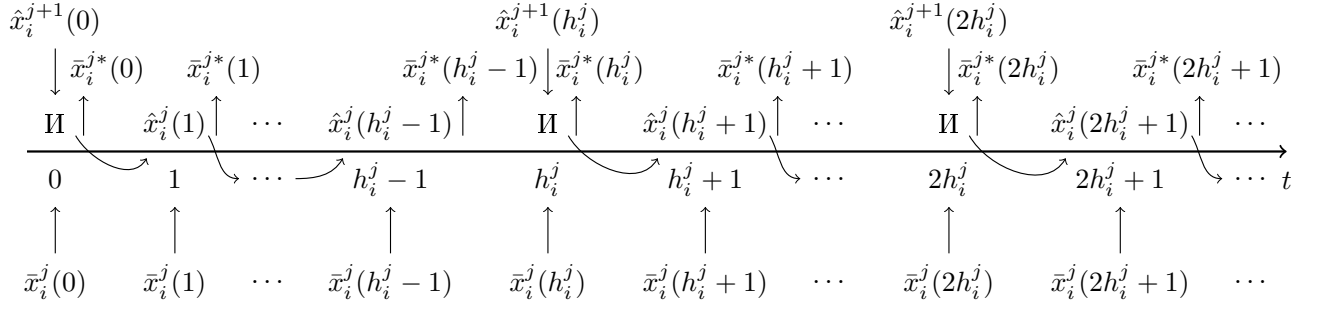


Рис. 2: Вычислительные циклы распознающего блока. Символом «И» обозначен этап инициализации в начале каждого цикла.

познающего блока  $R_i^j$  как  $X_i^{*j}$ . Очевидно, что  $X_i^{*j}$  является векторным пространством. Обозначим множество возможных мгновенных значений весового вектора присутствия входных признаков как  $X_i^j$ . Очевидно, что  $X_i^j$  также является векторным пространством. Определим *входное воздействие*  $\omega_i^j : T \rightarrow X_i^j$  и *выходную величину*  $\gamma_i^j : T \rightarrow X_i^{*j}$  в смысле теории динамических систем. Будем считать, что совокупность всех возможных мгновенных значений векторов ожиданий образует *множество состояний*  $\hat{X}_i^j$  распознающего блока  $R_i^j$ . Определим *функцию переходов*  $\varphi_i^j(t; \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}, \omega_i^j) = \hat{x}_i^j$  в смысле теории динамических систем. Множество  $\hat{X}_i^j$  в таком случае интерпретируется как *множество состояний* распознающего блока  $R_i^j$ . Также зададим *выходное отображение*  $\eta_i^j : T \times \hat{X}_i^j \rightarrow X_i^{*j}$  в смысле теории динамических систем, определяющее выходные векторы  $\bar{x}_i^{*j}(t) = \eta_i^j(t, \hat{x}_i^j(t))$  (Рисунок 3).

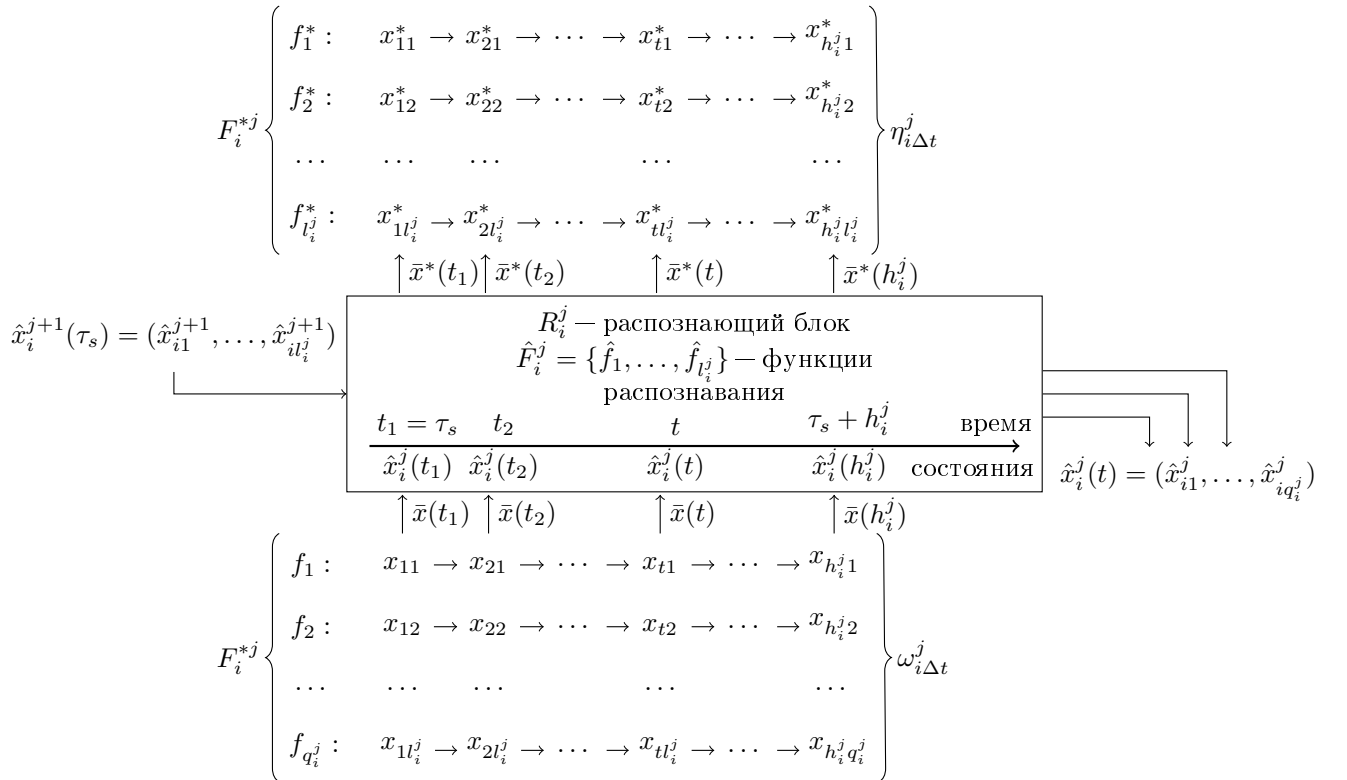


Рис. 3: Схема входных и выходных отображений распознающего блока.

Будем рассматривать распознающий блок  $R_i^j$  как динамическую систему с дискретным временем, т. е. считать множество моментов времени  $T_i^j$  множеством целых чисел. Каждой функции распознавания  $\hat{f}_k$  из множества  $\hat{F}_i^j$  будем ставить в соответствие набор *матриц*

предсказания  $Z_k = \{Z_1^k, \dots, Z_m^k\}$  размерности  $q_i^j \times h_i^j$ , где  $h_i^j$  — характерное время распознающего блока  $R_i^j$ . Столбец  $\bar{z}_u^r = (z_{u1}^k, \dots, z_{uq}^k)$  матрицы  $Z_r^k$  интерпретируется как вектор предсказания присутствия входных признаков из множества  $F_i^j$  в момент времени  $\tau_s + u$ , при этом  $z_{uv}^k \in \{0, 1\}$ , т.е. вектор  $\bar{z}_u^r$  является булевым вектором. Сама матрица  $Z_r^k$  задаёт, таким образом, последовательность событий, наличие которых свидетельствует о присутствии распознаваемого функцией  $\hat{f}_k$  признака. Множество всех матриц предсказания распознающего блока  $R_i^j$  будем обозначать как  $\mathcal{Z}_i^j$ .

В листингах 1 и 2 приведён алгоритм  $\mathcal{A}_{th}$  вычислительного цикла распознающего блока, в котором рассчитываются значения функции переходов  $\varphi_i^j(\tau_s + t; \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}, \omega_i^j)$ ,  $1 \leq t \leq h_i^j - 1$ , и выходного отображения  $\eta_i^j(\tau_s + t, \hat{x}_i^j(\tau_s + t))$ ,  $1 \leq t \leq h_i^j - 1$ . В листингах используется функция  $W$  нормировки весовых функций, действие которой для вектора  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$  описывается формулой

$$W(\bar{x}) = \left( \frac{x_1}{\max_i x_i}, \dots, \frac{x_n}{\max_i x_i} \right).$$

Кратко опишем шаги алгоритма.

---

#### 1 Алгоритм $\mathcal{A}_{th}$ (часть I, инициализация)

---

**Require:**  $\tau_s, \hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \omega_i^j$ ;

**Ensure:**  $\varphi_i^j, \eta_i^j$ ;

- 1:  $\hat{F}^* = \emptyset, Z^* = \emptyset, t = 0$ ;
  - 2:  $c_1 \in (0, 1), c_2 \in (0, 1)$ ;
  - 3: **for all** компонент  $\hat{x}_{ik}^{j+1}$  вектора  $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s) = (\hat{x}_{i1}^{j+1}, \hat{x}_{i2}^{j+1}, \dots, \hat{x}_{il}^{j+1})$  **do**
  - 4:     **if**  $\hat{x}_{ik}^{j+1} \geq c_1$  **then**
  - 5:          $\hat{F}^* := \hat{F}^* \cup \{\hat{f}_k\}$ ;
  - 6:     **end if**
  - 7: **end for**
  - 8:  $\bar{x}_i^j := \omega_i^j(\tau_s)$ ;
  - 9: **for all** функций распознавания  $\hat{f}_k \in \hat{F}^*$  **do**
  - 10:     **for all**  $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$ , соответствующих функции распознавания  $\hat{f}_k$ , **do**
  - 11:         **if**  $\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}_i^j\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}_i^j\|} < c_2$  **then**
  - 12:              $Z^* := Z^* \cup \{Z_r^k\}$ ;
  - 13:         **end if**
  - 14:     **end for**
  - 15: **end for**
  - 16:  $\bar{N} := (|\{Z_r^1 | Z_r^1 \in Z^*\}|, \dots, |\{Z_r^{l_j} | Z_r^{l_j} \in Z^*\}|)$ ;
  - 17:  $\bar{x}_i^{*j} := W(\bar{N})$ ;
  - 18:  $\eta(\tau_s, \hat{x}_i^j(\tau_s)) = \bar{x}_i^{*j}$ ;
  - 19:  $\hat{x}_i^j = W(\sum_{\hat{f}_k \in \hat{F}^*} \hat{x}_{ik}^{j+1} \sum_{Z_r^k \in Z^*} \bar{z}_2^r)$ ;
  - 20:  $\varphi(\tau_s + 1; \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}, \omega) = \hat{x}_i^j(\tau_s + 1) = \hat{x}_i^j$ ;
- 

Вычислительный цикл распознающего блока начинается с инициализации состояния при помощи управляющего воздействия от верхних уровней иерархии — вектора ожиданий  $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$  (шаги 3–20). Начальное состояние определяется отбором тех распознаваемых признаков из множества  $F_i^{*j}$ , которые предсказываются на основе состояния блоков верхнего уровня. Первая константа  $c_1$  определяет порог предсказываемого веса присутствия распознаваемых признаков, выше которой соответствующие функции распознавания попадают во множество активных функций  $\hat{F}^*$  (шаг 4). Далее производится отбор тех матриц предсказания активных

функций распознавания, для которых обычное расстояние по норме  $\|x\| = \sum_i |x_i|$  первого столбца  $\bar{z}_1^r$  от входного вектора  $\bar{z}_i^j$  в начальный момент времени не превышает второй константы  $c_2$  (шаг 11). На основе активных матриц предсказания методом голосования вычисляется выходной вектор в начальный момент времени  $\bar{x}_i^{j*}(\tau_s)$  (шаги 16–18).

Начальное состояние  $\hat{x}_i^j(\tau_s + 1)$  определяется как нормированный вектор,  $s$ -ый компонент которого равен сумме всех  $s$ -ых элементов вторых колонок активных матриц предсказания с весами, соответствующими элементам вектора ожиданий  $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$  (шаг 19). Т. к. используется представление о будущем входном сигнале (вторая колонка матриц предсказания), то  $\hat{x}_i^j(\tau_s + 1)$  играет роль предсказывающего управляющего вектора для нижних уровней иерархии.

После инициализации состояния начинается выполнение тела основного цикла, в котором до тех пор, пока время не превысит характерное время распознающего блока  $h_i^j$  повторяется вычисление выходного вектора и состояния в следующий момент времени (шаги 22–37). В начале обновляется множество активных матриц предсказания  $Z^*$  за счёт удаления тех матриц, соответствующие столбцы которых достаточно сильно отличаются от текущего входного вектора  $\bar{x}_i^j$  (шаг 25). Далее методом голосования по количеству матриц в множестве активных матриц предсказания, отвечающих за соответствующий выходной признак, вычисляется выходной вектор  $\bar{x}_i^{j*}$  (шаги 29–31).

В завершение тела основного цикла вычисляется состояние в следующий момент времени  $\hat{x}_i^j(\tau_s + t + 1)$ . Как и на этапе инициализации, вектор ожиданий равен нормированному вектору, элементы которого равны сумме элементов столбцов всех активных матриц предсказания, соответствующих текущему моменту времени с учётом весов начального управляющего вектора  $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$  (шаги 34–35).

---

## 2 Алгоритм $\mathcal{A}_{th}$ (часть II, основной цикл)

---

```

21:  $t = 1$ ;
22: while  $t \leq h_i^j - 1$  do
23:    $\bar{x}_i^j := \omega(\tau_s + t)$ ;
24:   for all матриц предсказания  $Z_r^k$  из множества  $Z^*$  do
25:     if  $\frac{\|\bar{z}_{t+1}^r - \bar{x}_i^j\|}{\|\bar{z}_{t+1}^r\| + \|\bar{x}_i^j\|} \geq c_2$  then
26:        $Z^* := Z^* \setminus \{Z_r^k\}$ ;
27:     end if
28:   end for
29:    $\bar{N} = (|\{Z_r^1 | Z_r^1 \in Z^*\}|, \dots, |\{Z_r^{l_i^j} | Z_r^{l_i^j} \in Z^*\}|)$ ;
30:    $\bar{x}_i^{*j} := W(\bar{N})$ ;
31:    $\eta(\tau_s + t, \hat{x}_i^j(\tau_s + t)) = \bar{x}_i^{*j}$ ;
32:    $t = t + 1$ ;
33:   if  $t \leq h_i^j - 2$  then
34:      $\hat{x}_i^j := W(\sum_{\hat{f}_k \in \hat{F}^*} \hat{x}_{ik}^{j+1} \sum_{Z_r^k \in Z^*} \bar{z}_t^r)$ ;
35:      $\varphi(\tau_s + t; \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}, \omega) = \hat{x}_i^j(\tau_s + t) = \hat{x}_i^j$ ;
36:   end if
37: end while

```

---

## 3. СТАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ

### 3.1. Начальный момент времени

В начале рассмотрим статический случай, т. е. зафиксируем момент времени  $t$ , равный началу некоторого  $s$ -го вычислительного цикла  $\tau_s$ . В этом случае, распознающий блок  $R_i^j$

можно рассматривать как *статический оператор распознавания*  $R_i^j(\hat{x}_i^{j+1}, \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j) = \bar{x}_i^{*j}$ . Напомним, что  $\bar{x}_i^{*j}$  — это весовой вектор присутствия распознаваемых признаков  $f_1^*, \dots, f_l^*$  из множества  $F_i^{*j}$ . Далее кратко будем записывать  $R(\hat{x}, \mathcal{Z}, \bar{x}) = \bar{x}^*$  и везде, где это возможно, будем опускать индексы  $j$  и  $i$ .

Введём совокупность задач  $\{Q\}$  аналогично работе [12]. Задача  $Q(\hat{x}, \bar{x}, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \{Q\}$  состоит в построении оператора, вычисляющего по поступившему вектору ожиданий  $\hat{x}$  и входному вектору  $\bar{x}$  значения  $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \{0, 1\}$  присутствия признаков  $f_1^*, \dots, f_l^*$ . Другими словами, искомый алгоритм  $\mathcal{A}^*$  переводит набор  $(\hat{x}, \bar{x})$  в вектор  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ , который будем называть *информационным вектором* входного вектора  $\bar{x}$  (Рисунок 4а).

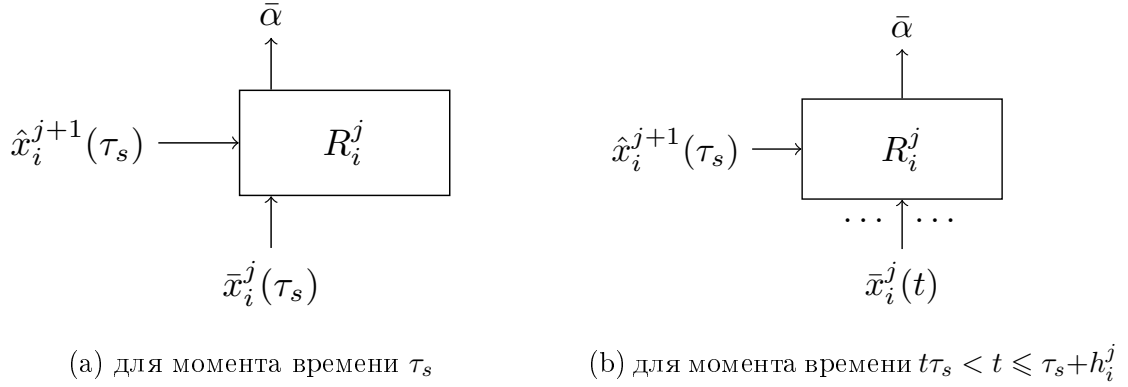


Рис. 4: Статические схемы корректности.

Пусть множество  $\{\mathcal{A}\}$  состоит из алгоритмов, переводящих пары  $(\hat{x}, \bar{x})$  в векторы  $\bar{\beta}$ , составленные из элементов  $0, 1, \Delta$ :  $\mathcal{A}(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{\beta}$ . Если  $\beta_i \in \{0, 1\}$ , то  $\beta_i$  — значение величины  $\alpha_i$ , вычисленное алгоритмом  $\mathcal{A}$ . Если  $\beta_i = \Delta$ , то алгоритм  $\mathcal{A}$  не вычислил значение  $\alpha_i$  информационного вектора  $\bar{\alpha}$ .

**Определение 1.** Алгоритм  $\mathcal{A}$  называется *корректным* для задачи  $Q$ , если выполнено равенство

$$\mathcal{A}(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{\alpha}.$$

Алгоритм  $\mathcal{A}$ , не являющийся корректным для  $Q$ , называется *некорректным*.

Далее будем считать, что множество  $\{\mathcal{A}\}$  является совокупностью, вообще говоря, некорректных алгоритмов.

**Утверждение 1** (аналог теоремы 1 из [12]). Каждый алгоритм  $\mathcal{A} \in \{\mathcal{A}\}$  представим как последовательность выполнения алгоритмов  $R$  и  $C$ , где  $R(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{x}^*$ ,  $\bar{x}^*$  — вектор действительных чисел,  $C(\bar{x}^*) = \bar{\beta}$ ,  $\beta_i \in \{0, 1, \Delta\}$ .

**Доказательство.** Пусть  $D$  — алгоритм перехода вектора  $\bar{\beta}$  к числовому вектору  $\bar{y}$ . В качестве  $D$  можно рассмотреть, например,  $y_i = \beta_i$ , если  $\beta_i \in \{0, 1\}$ , и  $y_i = 1/2$ , если  $\beta_i = \Delta$ . Очевидно, что существует обратный алгоритм  $D^{-1}$  перехода от  $\bar{y}$  к  $\bar{\beta}$ . Положим  $R = \mathcal{A} \cdot D$ ,  $C = D^{-1}$ . Тогда очевидно, что  $\mathcal{A} = R \cdot C = (\mathcal{A} \cdot D) \cdot D^{-1} = \mathcal{A}$ . ■

Из утверждения 1 следует, что множество алгоритмов  $\{\mathcal{A}\}$  порождает множества  $\{R\}$  и  $\{C\}$ , которые будем называть *множеством операторов распознавания* и *множеством решающих правил*, соответственно. В качестве операторов из множества  $\{R\}$  будем рассматривать операторы  $R(\hat{x}, \mathcal{Z}, \bar{x})$ .

**Определение 2.** Решающее правило  $C^*$  называется *корректным* на множестве входных векторов  $X$ , если для всякого вектора  $\bar{x}$  из  $X$  существует хотя бы один числовой вектор  $\bar{x}^*$  такой, что  $C^*(\bar{x}^*) = \bar{\alpha}$ , где  $\bar{\alpha}$  — информационный вектор входного вектора  $\bar{x}$ .

В множестве операторов  $\{R\}$  введём операции умножения на скаляр, сложения и умножения. Пусть  $r'$  — скаляр,  $R', R'' \in \{R\}$ . Определим операторы  $r' \cdot R'$ ,  $R' + R''$  и  $R' \cdot R''$  следующим образом:

$$r' \cdot R' = (r' \cdot x_1^{*'}, \dots, r' \cdot x_l^{*'}), \quad (1)$$

$$R' + R'' = (x_1^{*'} + x_1^{*''}, \dots, x_l^{*'} + x_l^{*''}), \quad (2)$$

$$R' \cdot R'' = (x_1^{*'} \cdot x_1^{*''}, \dots, x_l^{*'} \cdot x_l^{*''}). \quad (3)$$

**Утверждение 2.** Замыкание  $L\{R\}$  множества  $\{R\}$  относительно операций (1) и (2) является векторным пространством.

**Определение 3.** Множество  $L\{A\}$  алгоритмов  $A = R \cdot C^*$  таких, что  $R \in L\{R\}$ , называются линейным замыканием множества  $\{A\}$ .

Зафиксируем пару  $(\hat{x}, \bar{x})$  вектора ожидания и входного вектора. Аналогично [12] будем рассматривать задачи  $Q(\hat{x}, \bar{x})$ , обладающие следующим свойством относительно множества операторов распознавания  $\mathcal{R}$ .

**Определение 4.** Если множество векторов  $\{R(\hat{x}, \bar{x})\}$ , где  $R$  пробегает некоторое множество операторов распознавания  $\mathcal{R}$ , содержит базис в пространстве числовых векторов длины  $l$ , то задача  $Q(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\alpha})$  называется полной относительно  $\mathcal{R}$ .

**Утверждение 3** (аналог теоремы 2 из [12]). Если множество задач  $\{Q\}$  состоит лишь из задач, полных относительно  $\mathcal{R}$ , то линейное замыкание  $L\{R \cdot C^*\}$  ( $C^*$  — произвольное фиксированное корректное решающее правило,  $R$  пробегает множество  $\mathcal{R}$ ) является корректным относительно  $\{Q\}$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\{A\}$  — совокупность некорректных алгоритмов,  $\{R\}$  — соответствующее множество операторов распознавания,  $C^*$  — фиксированное корректное решающее правило. Тогда  $L\{A\} = L\{R \cdot C^*\}$  является корректным относительно множества задач  $\{Q\}$ , если  $\{Q\}$  состоит из задач, полных относительно  $\{R\}$ .

Будем рассматривать только такие задачи  $Q(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\alpha})$ , для которых удовлетворяется следующее условие:  $\exists k$  такое, что  $x_k$  является  $k$ -ым элементом вектора  $\bar{x}$  и  $x_k > 1/2$ . Такое условие является естественным, иначе вектор  $\bar{x}$ , в котором отсутствуют веса большие  $1/2$ , не может рассматриваться как достоверный с точки зрения порогового алгоритма  $\mathfrak{A}_{th}$ .

**Теорема 1.** Линейное замыкание  $L\{A\}$  семейства алгоритмов  $\{A\} = \{R \cdot C^*\}$  с произвольным корректным решающим правилом  $C^*$  и операторами распознавания  $R$ , определёнными алгоритмом  $\mathfrak{A}_{th}$ , является корректным на множестве задач  $\{Q\}$ .

**Доказательство.** В силу утверждения 3 достаточно доказать, что произвольная задача  $Q \in \{Q\}$  является полной относительно  $\{R\}$ . Доказательство полноты  $Q$  состоит в прямом построении операторов  $R_k, k = 1, 2, \dots, l$  из  $L\{R\}$ , переводящих пару  $(\hat{x}, \bar{x})$ ,  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_l)$ ,  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_q)$  в числовой вектор

$$\bar{x}_k^* = (x_{k1}^*, \dots, x_{kl}^*), \quad x_{kk}^* = 1, \quad \forall u \neq k \quad x_{ku}^* = 0. \quad (4)$$

Пусть мощность множества  $\mathcal{Z}_k$  признака  $f_k$  равна  $N$ , норма  $\|\bar{x}\|$  равна  $M \leq q$ , максимальная компонента вектора  $\bar{x}$  равна  $x_{max}$ . Зафиксируем величину  $k$  и коэффициенты  $c_1 = \min_v \hat{x}_v, c_2 = \frac{M}{1+M}$ . Рассмотрим матрицы предсказания из множеств  $\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_l$  признаков  $f_1, \dots, f_l$ , удовлетворяющие следующим условиям:



- 1) в каждой матрице предсказаний  $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$  в столбце  $\bar{z}_1^r = (z_{11}^r, \dots, z_{1q}^r)$  компонента  $z_{1v}^r = 1$ , если  $x_v = x_{\max}$ , и  $z_{1v}^r = 0$ , если  $x_v < x_{\max}$ ;
- 2) в каждой матрице предсказаний  $Z_r^u \in \mathcal{Z}_u, u \neq k$  в столбце  $\bar{z}_1^r = (z_{11}^r, \dots, z_{1q}^r)$  компонента  $z_{1v}^r = 0$  при любых  $v$ .

Вычислим величину  $x_{kk}^*$ . Т. к.  $c_1 = \min_u \hat{x}_u$ , то условие  $\hat{x}_k \geq c_1$  на шаге 4 алгоритма  $\mathfrak{A}_{th}$  автоматически выполняется и функция измерения  $\hat{f}_k$  попадает в множество  $\hat{F}^*$ . Из условия 1 следует, что каждая матрица  $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$  попадает в множество  $Z^*$  на шаге 11 алгоритма  $\mathfrak{A}_{th}$ :

$$\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}\|} < \frac{\sum_v |z_{1v}^r - x_v|}{1 + M} < \frac{M}{1 + M} = c_2,$$

так как минимум один компонент в  $\bar{z}_1^r$  равен 1 и существует элемент  $x_v > 1/2$ . В этом случае  $x_{kk}^* = \gamma \cdot N$ , где  $\gamma$  — весовой коэффициент.

Вычислим величины  $x_{ku}^*$ . Т.к.  $c_1 = \min_v \hat{x}_v$ , то условие  $\hat{x}_u \geq c_1$  на шаге 4 алгоритма  $\mathfrak{A}_{th}$  автоматически выполняется и все функции измерения  $\hat{f}_u$  попадают в множество  $\hat{F}^*$ . Из условия 2 следует, что каждая матрица  $Z_r^u \in \mathcal{Z}_u$  не попадает в множество  $Z^*$  на шаге 11 алгоритма  $\mathfrak{A}_{th}$ :

$$\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}\|} = \frac{M}{M} = 1 > \frac{M}{1 + M} = c_2.$$

В этом случае  $x_{ku}^* = 0$ .

Рассмотрим оператор распознавания  $\frac{1}{\gamma \cdot N} R_k(\hat{x}, \mathcal{Z}^k, \bar{x})$ , матрицы предсказания которого удовлетворяют условиям 1–2 и который переводит задачу  $Q$  в вектор  $\bar{x}_k^*$ , причём  $\bar{x}_{kk}^* = 1$ , а  $\bar{x}_{ku}^* = 0, u \neq k$ . Данный оператор удовлетворяет критериям (4) на вектор  $\bar{x}_k^*$ , а значит, необходимый базис в пространстве выходных векторов построен. Полнота задачи  $Q$  доказана. ■

### 3.2. Произвольный момент времени

Фиксация момента времени не в начале вычислительного цикла, а на любом другом значении  $\tau_s < t < \tau_s + h_i^j$ , приводит к операторам вида  $R_i^j(\hat{x}_i^j(t), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(t))$ , которые кратко будем записывать  $R^t$ . Для этих операторов постановка задачи распознавания выглядит таким же образом как и для операторов  $R$  начального времени: задача  $Q^t(\hat{x}_i^j(t), \bar{x}_i^j(t), \bar{\alpha})$  состоит в построении алгоритма  $\mathcal{A}^{*t}$ , переводящего набор  $(\hat{x}_i^j(t), \bar{x}_i^j(t))$  в информационный вектор  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ . Определения свойств корректности алгоритма и полноты задачи, а также корректного решающего правила  $C^{*t}$ , идентичны случаю с начальным моментом времени (Рисунок 4b). Аналогично, рассматривая только такие задачи  $Q^t(\hat{x}_i^j(t), \bar{x}_i^j(t), \bar{\alpha})$ , в которых имеется как минимум один значимый компонент входного вектора, можно сформулировать следующую теорему (будем далее опускать индексы  $i, j$ ).

**Теорема 2.** *Линейное замыкание  $L\{\mathcal{A}^t\}$  семейства алгоритмов  $\{\mathcal{A}^t\} = \{R^t \cdot C^{*t}\}$  с произвольным корректным решающим правилом  $C^{*t}$  и операторами распознавания  $R^t$ , определёнными алгоритмом  $\mathfrak{A}_{th}$ , является корректным на множестве задач  $\{Q^t\}$ .*

**Доказательство.** Как и в случае доказательства теоремы 1 будем строить операторы  $R_k^t, k = 1, 2, \dots, l$  из  $l\{R^t\}$ , переводящие пару  $(\hat{x}(t), \bar{x}(t))$  в числовой вектор

$$\bar{x}_k^*(t) = (x_{t1,k}^*, \dots, x_{tl,k}^*), \quad x_{tk,k}^* = 1, \quad \forall u \neq k \quad x_{tu,k}^* = 0. \quad (5)$$

Фиксируя константы  $c_1, c_2$  на основании свойств входного вектора и вектора ожиданий и налагая аналогичные условия на матрицы предсказания, но только для  $t$ -ых столбцов, приходим к построению операторов распознавания  $\frac{1}{\gamma} R_k^t(\hat{x}(t), \mathcal{Z}^{t,k} \bar{x}(t))$  ( $\gamma$  — некоторый весовой коэффициент), выходной вектор которых удовлетворяет критерию (5). Необходимый базис в пространстве выходных векторов построен, полнота задачи  $Q^t$  доказана. ■

## 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ

### 4.1. Случай одного распознающего блока

Теперь рассмотрим динамическую постановку задачи. Будем фиксировать не конкретный момент времени  $t$ , а промежуток времени  $\Delta t = [\tau_s, \tau_s + h_i^j]$ . В этом случае распознающий блок  $R_i^j$  можно рассматривать как *динамический оператор распознавания*  $\hat{R}_i^j(\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_i^j, \omega_{i\Delta t}^j) = \gamma_{i\Delta t}^j$ , принимающий функцию входного воздействия  $\omega_{i\Delta t}^j$ , ограниченную на промежутке времени  $\Delta t$ , и выдающий функцию выходной величины  $\gamma_{i\Delta t}^j$  на том же временном промежутке. Так как мы предполагаем время дискретным, т. е. множество моментов времени  $T_i^j$  является множеством целых чисел, то действие динамического оператора  $\hat{R}_i^j$  можно заменить последовательным действием статических операторов  $R(\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s))$ ,  $R^1(\hat{x}_i^j(\tau_s + 1), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s + 1))$ ,  $\dots$ ,  $R^{h_i^j-1}(\hat{x}_i^j(\tau_s + h_i^j - 1), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s + h_i^j - 1))$ , в результате выдающих последовательность  $\{\bar{x}_i^{*j}(t)\} = \{\bar{x}_i^{*j}(\tau_s), \bar{x}_i^{*j}(\tau_s + 1), \dots, \bar{x}_i^{*j}(\tau_s + h_i^j - 1)\}$ . Так как параметр  $h_i^j$  фиксирован, то конечные последовательности векторов  $\omega_{i\Delta t}^j$  и  $\gamma_{i\Delta t}^j$  можно считать матрицами размерности  $l_i^j \times h_i^j$ . Далее будем опускать индексы  $i$  и  $j$ .

Формулировка задачи в динамическом случае будет выглядеть следующим образом: задача  $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$  состоит в построении алгоритма  $\hat{\mathcal{A}}^*$ , вычисляющего по поступившему начальному вектору ожиданий  $\hat{x}$  матрице входных воздействий  $\omega_{\Delta t}$  последовательность векторов  $\beta_{\Delta t}$ , монотонно сходящуюся к информационному вектору  $\bar{\alpha}$ . Т. е. искомый оператор распознавания  $\hat{R}$  должен выдавать матрицу весов присутствия распознаваемых признаков  $\gamma_{\Delta t}$ , столбцы которой должны сходиться (с учётом корректного решающего правила) к информационному вектору:  $\lim_{t \rightarrow \tau_s + h} \bar{x}^*(t) = \bar{\alpha}$  (Рисунок 5а). Введём соответствующие определения.

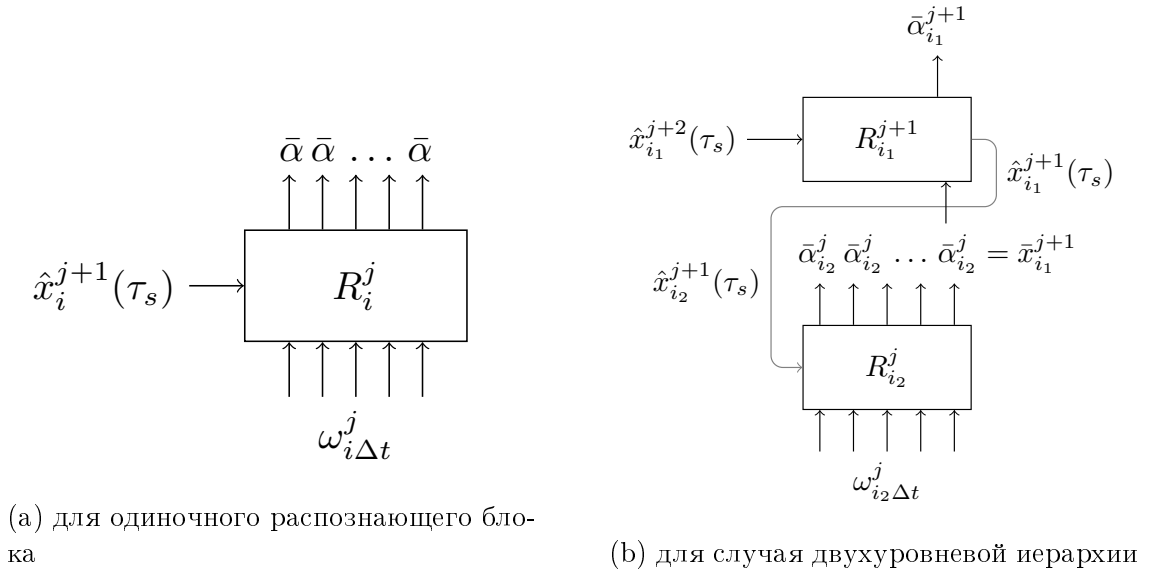


Рис. 5: Динамические схемы корректности.

**Определение 5.** Алгоритм  $\hat{\mathcal{A}}(\hat{x}, \bar{x}) = \beta_{\Delta t} = (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_h)$  называется корректным для задачи  $\hat{Q}$ , если выполнено условие

$$\|\bar{\beta}_1 - \bar{\alpha}\| \geq \|\bar{\beta}_2 - \bar{\alpha}\| \geq \dots \geq \|\bar{\beta}_h - \bar{\alpha}\| = 0.$$

$\|\bar{\beta}_i - \bar{\alpha}\| = \sum_j (\beta_{ij} - \alpha_j)$ , где  $\beta_{ij} - \alpha_j = 0$ , если  $\beta_{ij} = \alpha_j$ ,  $\beta_{ij} - \alpha_j = \frac{1}{2}$ , если  $\beta_{ij} = \Delta$ , и  $\beta_{ij} - \alpha_j = 1$  иначе. Алгоритм  $\hat{\mathcal{A}}$ , не являющийся корректным для  $\hat{Q}$ , называется некорректным.

**Утверждение 4.** Каждый алгоритм  $\hat{A} \in \{\hat{A}\}$  представим как последовательность выполнения алгоритмов  $\hat{R}$  и  $\hat{C}$ , где  $\hat{R}(\hat{x}, \mathcal{Z}, \omega_{\Delta t}) = \gamma_{\Delta t}$ ,  $\gamma_{\Delta t}$  — матрица действительных чисел,  $\hat{C}(\gamma_{\Delta t}) = \beta_{\Delta t}$ ,  $\beta_{\Delta t}$  — матрица значений  $\beta_{ij} \in \{0, 1, \Delta\}$ .

Корректное решающее правило  $\hat{C}^*$  для матрицы  $\gamma_{\Delta t}$  определяется через набор корректных правил для векторов  $(\hat{C}_1^*, \dots, \hat{C}_h^*)$  таких, что  $\|C_1^*(\bar{x}^*(\tau_s)) - \bar{\alpha}\| \geq \|C_2^*(\bar{x}^*(\tau_s + 1)) - \bar{\alpha}\| \geq \dots \geq \|C_h^*(\bar{x}^*(\tau_s + h - 1)) - \bar{\alpha}\| = 0$ . В простейшем случае  $\forall i C_i^*(\bar{x}^*(\tau_s + i)) = \bar{\alpha}$  и такое решающее правило будем называть константным. Аналогично статическому случаю вводится определение линейного  $L\{\hat{R}\}$  замыкания над множеством  $\{\hat{R}\}$ .

**Определение 6.** Если множество матриц  $\{\hat{R}(\hat{x}, \omega_{\Delta t})\}$ , где  $\hat{R}$  пробегает некоторое множество операторов распознавания  $\hat{\mathcal{R}}$ , содержит базис в пространстве числовых матриц размерности  $l \times q$ , то задача  $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$  называется полной относительно  $\hat{\mathcal{R}}$ .

**Утверждение 5** (аналог теоремы 2 из [12]). Если множество задач  $\{\hat{Q}\}$  состоит лишь из задач, полных относительно  $\hat{\mathcal{R}}$ , то линейное замыкание  $L\{\hat{R} \cdot \hat{C}^*\}$  ( $\hat{C}^*$  — произвольное фиксированное корректное решающее правило,  $\hat{R}$  пробегает множество  $\hat{\mathcal{R}}$ ) является корректным относительно  $\{\hat{Q}\}$ .

Для того, чтобы воспользоваться результатами, полученными при рассмотрении статических операторов  $R = R^0$  и  $R^t$ , необходимо ввести понятие подзадачи.

**Определение 7.** Если в задаче  $Q^t(\hat{x}(t), \bar{x}(t), \bar{\alpha})$  входной вектор  $\bar{x}(t)$  совпадает с  $t$ -ым столбцом матрицы  $\omega_{\Delta t}$  задачи  $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$ , а вектор  $\hat{x}(t)$  вычисляется на основании алгоритма  $\mathcal{A}_{th}$  с входным воздействием, равным матрице  $\omega_{\Delta t}$ , и начальным вектором ожиданий, равным  $\hat{x}$ , называется подзадачей задачи  $\hat{Q}$ .

Зафиксируем начальный вектор ожиданий  $\hat{x}$  и последовательность входных векторов  $\omega_{\Delta t}$ . Если, как и в статическом случае, мы будем рассматривать только такие задачи  $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$ , для которых в матрице  $\omega_{\Delta t}$  в каждом столбце с номером  $s \exists k$  такое, что  $x_{sk}$  является  $k$ -ым элементом вектора  $\bar{x}(\tau_s + s)$  и  $x_{sk} > 1/2$ , то можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.** Линейное замыкание  $L\{\hat{A}\}$  семейства алгоритмов  $\{\hat{A}\} = \{\hat{R} \cdot \hat{C}^*\}$  с константным корректным решающим правилом  $\hat{C}^*$  и операторами распознавания  $\hat{R}$ , определёнными алгоритмом  $\mathcal{A}_{th}$ , является корректным на множестве задач  $\{\hat{Q}\}$ .

**Доказательство.** В силу того, что динамический оператор  $\hat{R}$  представим в виде последовательного применения статических операторов  $R^t$  к столбцам матрицы  $\omega_{\Delta t}$ , то для доказательства теоремы необходимо подобрать такие операторы  $R^t$ ,  $t = 0, \dots, h - 1$ , которые выдают последовательность  $\gamma_{\Delta t}$ , сходящуюся (с учётом применения константного корректного решающего правила  $\hat{C}^* = (C_1^*, \dots, C_i^*)$ ) к информационному вектору  $\bar{\alpha}$ .

Рассмотрим алгебраическое замыкание  $L\{R^t\}$  операторов вида  $R^t(\hat{x}(\tau_s + t), \mathcal{Z}, \omega_{\Delta t}(\tau_s + t))$  с фиксированным вектором  $\hat{x}(\tau_s + t)$  и  $\omega(\tau_s + t)$ . Из задачи  $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$  выделим подзадачу  $Q_i(\hat{x}(\tau_s + t), \omega_{\Delta t}(\tau_s + t), \bar{\alpha})$ .

В силу теорем 1 и 2 можно построить такой оператор  $R^{*t} \in L\{R^t\}$ , что  $C^{*t} \cdot R^{*t}(\omega(\tau_s + i)) = \bar{\alpha}$ . Формируя таким образом линейные замыкания и выделяя подзадачи для каждого момента времени  $t \in [0, h)$ , получим необходимую последовательность  $\gamma_{\Delta t} = (C^{*1} \cdot R^{*1}(\omega(\tau_s)), \dots, C^{*h} \cdot R^{*h}(\omega(\tau_s + h - 1))) = (\bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha})$ , которая очевидным образом сходится к  $\bar{\alpha}$ . Корректность, таким образом, доказана.  $\blacksquare$

#### 4.2. Случай двухуровневой иерархии распознающих блоков

Рассмотрим иерархическую постановку задачи, в которой будет учитываться иерархическая связь между операторами распознавания. Зафиксируем, как и в динамическом случае, промежуток времени  $\Delta t = [\tau_s, \tau_s + h_{i_2}^j]$ . Далее, будем рассматривать не единичный распознающий блок, а двухуровневую иерархию  $E_j^2$ , на каждом уровне которой будет по одному распознающему блоку  $R_{i_1}^{j+1}$  и  $R_{i_2}^j$ . Данную иерархию можно рассматривать как *иерархический оператор распознавания*  $\hat{R}_{e,j}^2(\hat{x}_{i_1}^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_{i_1}^{j+1}, \mathcal{Z}_{i_2}^j, \omega_{i_2\Delta t}^j) = \bar{x}_{i_1}^{*j+1}$ , принимающий функцию входного воздействия  $\omega_{i_2\Delta t}^j$  нижнего уровня, ограниченную на промежутке времени  $\Delta t$ , и выдающий весовой вектор присутствия распознаваемых признаков  $\bar{x}_{i_1}^{*j+1}$ . Т. к. в иерархии  $E_j^2$  вектор состояния блока  $R_{i_1}^{j+1}$  является одновременно и вектором ожидания для блока  $R_{i_2}^j$ , а конечный выходной вектор  $\bar{x}_{i_2}^{*j}$  — входным вектором  $\bar{x}_{i_1}^{j+1}$ , то действие иерархического оператора  $\hat{R}_{e,j}^2$  можно заменить последовательным действием динамического оператора  $\hat{R}_{i_2}^j(\hat{x}_{i_2}^{j+1}, \mathcal{Z}_{i_2}^j, \omega_{i_2\Delta t}^j)$  нижнего уровня и статического оператора  $R_{i_1}^{j+1,t}(\hat{x}_{i_1}^{j+1}, \mathcal{Z}_{i_1}^{j+1}, \bar{x}_{i_1}^{j+1}(\tau_s))$  верхнего уровня, где  $t$  является моментом времени текущего вычислительного цикла распознающего блока  $R_{i_1}^{j+1}$ , соответствующему моменту времени  $\tau_s$  для распознающего блока  $R_{i_2}^j$ .

Формулировка задачи в иерархическом случае будет выглядеть следующим образом: задача  $\hat{Q}_{e,j}^2(\hat{x}_{i_1}^{j+2}, \omega_{i_2\Delta t}^j, \bar{\alpha}_{i_1}^{j+1})$  состоит в построении алгоритма  $\hat{\mathcal{A}}_e$ , вычисляющего по поступившему начальному вектору ожиданий  $\hat{x}_{i_1}^{j+2}$  и матрице входных воздействий  $\omega_{i_2\Delta t}^j$  значения информационного вектора  $\bar{\alpha}_{i_1}^{j+1}$  (Рисунок 5b). Определения свойств корректности алгоритма и полноты задачи, а также корректного решающего правила, в данном случае в точности совпадают с аналогичными определениями для статического случая.

Зафиксируем начальный вектор ожиданий  $\hat{x}_{i_1}^{j+2}$  и последовательность входных векторов  $\omega_{i_2\Delta t}^j$ . Если мы будем рассматривать только такие задачи  $\hat{Q}_{e,j}^2(\hat{x}_{i_1}^{j+2}, \omega_{i_2\Delta t}^j, \bar{\alpha}_{i_1}^{j+1})$ , для которых в матрице  $\omega_{i_2\Delta t}^j$  в каждом столбце с номером  $s \in k$  такое, что  $x_{sk}$  является  $k$ -ым элементом вектора  $\bar{x}_{i_2}^j(\tau_s + s)$  и  $x_{sk} > 1/2$ , то можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 4.** *Линейное замыкание  $L\{\hat{\mathcal{A}}_e\}$  семейства алгоритмов  $\{\hat{\mathcal{A}}_e\} = \{\hat{R}_{e,j}^2 \cdot \hat{C}_e^*\}$  с произвольным корректным решающим правилом  $\hat{C}_e^*$  и операторами распознавания  $\hat{R}_{e,j}^2$ , определёнными алгоритмом  $\mathcal{A}_{th}$ , является корректным на множестве задач  $\{\hat{Q}_{e,j}^2\}$ .*

**Доказательство.** Доказательство корректности в данном случае сводится к формулировке подзадачи нижнего уровня  $\hat{Q}_2(\hat{x}_{i_2}^{j+1}, \omega_{i_2\Delta t}^j, \bar{\alpha}_{i_2}^j)$ . Т. е. необходимо сформировать по задаче  $\hat{Q}_{e,j}^2$  информационный вектор  $\bar{\alpha}_{i_2}^j$  и вектор ожидания  $\hat{x}_{i_2}^{j+1}$ .

Следую определению вычислительного цикла в алгоритме  $\mathcal{A}_{th}$ , будем считать, что  $\hat{x}_{i_2}^{j+1}$  равен тому состоянию распознающего блока  $R_{i_1}^{j+1}$ , которое было вычислено к моменту времени  $\tau_s$ , т. е. вектору  $\hat{x}_{i_1}^{j+1}$ . Каждый компонент  $\alpha_{i_2u}^j$  информационного вектора  $\bar{\alpha}_{i_2}^j$  будем вычислять по следующему правилу:

$$\alpha_{i_2u}^j = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{v=1}^{l_1^{j+1}} \frac{\alpha_{i_1v}^{j+1}}{|\mathcal{Z}_v|} \sum_{w=1}^{|\mathcal{Z}_v|} z_{1v}^w > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Т.к. входной вектор распознающего блока  $R_{i_1}^j$  равен вектору  $\bar{\alpha}_{i_2}^j$ , то такие значения компонентов информационного вектора позволяют удовлетворить ограничениям теоремы 2 (существование такого компонента входного вектора, который бы имел значение большее  $1/2$ ). С другой стороны, формулируя задачу  $\hat{Q}_2(\hat{x}_{i_2}^{j+1}, \omega_{i_2\Delta t}^j, \bar{\alpha}_{i_2}^j)$  мы попадаем в условия теоремы 3. Пользуясь результатами этих теорем, мы приходим к выводу, что среди алгоритмов линейного замыкания  $L\{\hat{\mathcal{A}}_e\}$  имеется оператор, переводящий пару  $(\hat{x}_{i_1}^{j+1}, \omega_{i_2\Delta t}^j)$  в информационный вектор  $\bar{\alpha}_{i_1}^{j+1}$ . ■

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы алгебраические свойства множества распознающих блоков. Показано, что динамические характеристики образной компоненты описываются в терминах классической теории управления. Построены операторы распознавания, позволяющие выполнить постановки задач классификации в терминах алгебраической теорий распознавания. Установлено, что линейные замыкания операторов распознавания, которые строятся в статических и динамических случаях, обладают свойством корректности относительно входных данных и требуемых результатов классификации. Это означает существования такого процесса обучения, в рамках которого будет сформирована иерархия образных компонент, корректно распознающая (классифицирующая) поступающие сигналы.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках инициативного проекта №14-07-00611 а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эделмен Д., Маунткасл В. Разумный мозг. — М. : Мир, 1981.
2. Ivanitsky A. M. Brain basis of subjective experience: information synthesis hypothesis // Neuroscience and Behavioral Physiology. — 1996. — Vol. 46, no. 2. — P. 251–252.
3. Вартанов А. В. Механизмы семантики: человек — нейрон — модель // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. — 2011. — № 12. — С. 54–64.
4. Процесс мышления в контексте динамической теории информации. часть II: понятие «образ» и «символ» как инструменты моделирования процесса мышления средствами нейрокомпьютинга / О. Д. Чернавская, Д. С. Чернавский, В. П. Карп и др. // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. — 2012. — № 2. — С. 46–65.
5. Сергин В. Я. Психофизиологические механизмы восприятия: концепция объемлющих сенсорных характеристик // Успехи физиологических наук. — 2009. — Т. 40, № 4. — С. 42–63.
6. Фреге Г. Логика и логическая семантика. — М. : Аспект Пресс, 2000.
7. Пирс Ч. С. Начала прагматизма. Т. 2. Логические основания теории знаков. — СПб. : Алетейя, 2000.
8. Леонтьев А. Н. Деятельность. Сознание. Личность. — М. : Политиздат, 1975.
9. Осипов Г. С., Панов А. И., Чудова Н. В. Управление поведением как функция сознания. I. Картина мира и целеполагание // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2014. — № 4. — С. 83–96.
10. George D., Hawkins J. Towards a mathematical theory of cortical micro-circuits // PLoS Computational Biology. — 2009. — Vol. 5, no. 10. — P. 1–26.
11. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. — М. : Мир, 1971.

12. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов. Часть I // Кибернетика. — 1977. — № 4. — С. 5–17.