РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ КАК ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ЭЛЕМЕНТОВ КАРТИНЫ МИРА

А. И. Панов

Институт системного анализа РАН 117213, Россия, Москва, пр. 60—летия Октября, 9 e-mail: pan@isa.ru

Аннотация

Рассматривается алгоритм работы образной компоненты элементарной единицы индивидуального знаний субъекта деятельности. В основе работы алгоритма лежат нейрофизиологические данные. Формулируется ряд статических и динамических постановок задач распознавания (классификации) в русле алгебраического подхода. Доказываются теоремы корректности линейных замыканий образуемых операторов распознавания, результаты которых интерпретируются как возможность провести обучение в картине мира субъекта таким образом, что он будет правильно категоризовать поступающий стимул.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования психологов и нейрофизиологов свидетельствуют о существовании элементарных единиц индивидуального знания, которые, с одной стороны, обладают независимой от области и типа деятельности субъекта универсальной структурой, а с другой стороны, обладают одинаковыми для всех таких элементов функциями при формировании человеческого поведения. Существуют разные точки зрения при описании таких единиц, обеспечивающих элементарные когнитивные функции субъекта: группы нейронов [1], фокус взаимодействия нейронных ансамблей [2], локальный анализатор признаков [3], нейроны—символы [4], объемлющие характеристики [5] и др. Для описания элементарных единиц индивидуального знания в данной работе используется понятие знака, рассматриваемое как в логических работах [6, 7], так и в психологических исследованиях по теории деятельности [8].

В теории деятельности Леонтьева знак представляет некоторый процесс или объект внешней среды и имеет три компоненты, определяющие его роль в деятельности субъекта: образ, значение и личностный смысл. Образ знака представляет собой процедуры отделения представляемого объекта от других объектов и одновременно процедуры построения внутреннего описания этого объекта. Значение знака определяет общепринятые в культурно—исторической среде, к которой принадлежит субъект, действия, совершаемые над этим объектом или с ним. Личностные смыслы знака определяют действия, совершаемые с этим объектом при учёте внутренних характеристик субъекта (его потребностей и возможностей) (Рисунок 1а).

Для построения модели знака был введён четвёртый компонент—имя ([9, 10]). Такое представление о структуре знака позволило описать процедуры формирования знака, самоорганизации на множестве знаков и построить модель картины мира субъекта. Однако строение самих компонентов знака и их связь с нейрофизиологическими данными о строении и

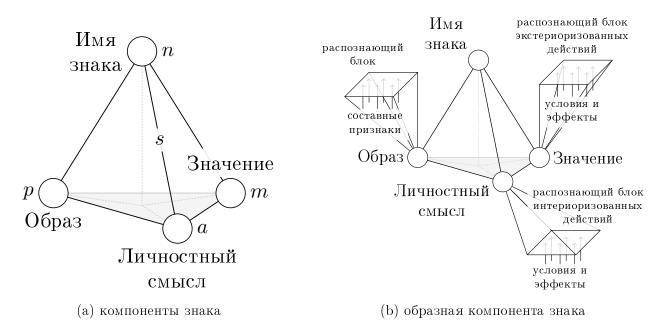


Рис. 1: Структура знака.

механизмах работы мозга оставались за рамками модели. В настоящем исследовании рассмотрено описание образной компоненты, алгоритм работы которой с одной стороны основан на одной из нейрофизиологических моделей, а с другой — реализует основные психологические функции этой компоненты.

В качестве базисной нейрофизиологической модели была выбрана модель неокортекса человека, описываемая в работах [11, 12]. В предлагаемой авторами так называемой иерархической временной памяти (ИВП—модель) основным элементом является регион неокортекса, состоящий из шестислойных колонок нейронов. Регионы организованы в иерархию (несколько иерархий с учётом модальности поступающих сигналов), в которой имеются как восходящие потоки информации (о распознаваемых объектах), так и нисходящие — управляющие процессом распознавания. В процессе обучения данные сохраняются в виде последовательности связанных колонок региона, именно такая последовательность и хранит в себе развёрнутое во времени внутреннее представление об объекте.

В качестве модели неокортекса в данной статье рассмотрен объект под названием распознающий блок, который реализует основные принципы работы ИВП—модели: иерархичность представления, предсказывающее воздействие верхних уровней иерархии, хранение развёрнутого во времени представления в виде последовательности признаков. При этом мы будем считать, что один из распознаваемых объектов представляется некоторым знаком, образом которого и будет являться та последовательность признаков, которая хранится в соответствующем распознающем блоке (Рисунок 1b). В следующих параграфах статьи изложено формальное описание распознающего блока и исследованы его свойства в контексте задачи на распознавание.

1. РАСПОЗНАЮЩИЙ БЛОК

Будем рассматривать объект R_i^j , который будем называть распознающим блоком уровня j с индексом i или просто распознающим блоком. Опишем кратко функции введённого объекта, а затем определим алгоритм его работы формально. Далее будем пользоваться понятием npuзнaka, который будем понимать как составную часть информационного, описательного представления некоторой сущности, явления или процесса.

Каждый распознающий блок, исходя из своего названия, распознает, или, применитель-

но к низкоуровневым сигналам, измеряет, некоторые признаки. Распознавание (измерение) заключается в сопоставлении признака — весовому значению, характеризующему тот факт, удаётся ли собрать (измерить) признак из составляющих его низкоуровневых входных признаков, информация о которых содержится во входном векторе. Такой вес будем называть весом присутствия признака во входном векторе.

Входной вектор, в свою очередь, представляет собой весовой вектор присутствия низкоуровневых признаков, по которым распознаются выходные признаки. Распознающий блок обладает состоянием, которое представляет собой также весовой вектор присутствия входных признаков, но в следующий момент времени. Такой вектор будем называть вектором ожиданий. Запишем все вышесказанное строго.

Пусть заданы множества $\{R_i^j\}$ и $\{f_k\}$. Множество $\{R_i^j\}$ будем называть совокупностью распознающих блоков, а множество $\{f_k\}$ — совокупностью допустимых признаков. Введём бинарное отношение \dashv , определённое на паре множеств $\{f_k\}$ и $\{R_i^j\}$, и будем читать $f_k \dashv R_i^j$ как «признак f_k распознаётся блоком R_i^j » или как «признак f_k распознаётся блоком R_i^j ». Множество всех распознаваемых блоком R_i^j признаков будем обозначать F_i^{*j} , т.е. $\forall f^* \in F_i^{*j} f^* \dashv R_i^j, F_i^{*j} \subseteq \{f_k\}$

Рассмотрим связный ориентированный (ярусный) граф $G_R=(V,E)$, где V - множество вершин, E - множество рёбер. Каждую вершину v, принадлежащую j-ому ярусу графа G_R , будем связывать с соответствующим распознающим блоком R_i^j уровня j, а ребро $e=(v,u)\in E$ будем интерпретировать как иерархическую связь между соответствующим вершине v дочерним блоком $R_{i_1}^{j_1}$ и соответствующим вершине u блоком—родителем $R_{i_2}^{j_2}$.

Рассмотрим распознающий блок R_i^j . Определим множество $F_i^j \subseteq f_k$ таких признаков, что для любого $f \in F_i^j$ существует распознающий блок R_k^{j-1} уровня j-1, дочерний по отношению к блоку R_i^j , такой, что $f \dashv R_k^{j-1}$. Такое множество F_i^j будем называть совокупностью входных признаков распознающего блока R_i^j . Для каждого признака $f^* \in F_i^{*j}$ введём функцию распознавания $\hat{f}(x_1,\ldots,x_q)=x^*$, где $x^* \in [0,1]$ — весовой вектор присутствия распознаваемого признака f^* , а $x_1,\ldots,x_q \in [0,1]$ — весовой вектор присутствия признаков из множества F_i^j . Множество таких функций для распознающего блока R_i^j обозначим как \hat{F}_i^j .

Пусть мощность множества распознаваемых признаков F_i^{*j} и множества функций распознавания \hat{F}_i^j равна l_i^j , а мощность множества входных признаков F_i^j равна q_i^j . Введём упорядоченное множество локальных моментов времени T_i^j для распознающего блока R_i^j . Для каждого распознающего блока определим характерный масштаб времени h_i^j , за который происходит один цикл вычисления в распознающем блоке R_i^j .

В начале s-ого цикла вычисления (момент времени $\tau_s \in T_i^j$) распознающий блок R_i^j получает на вход вектор длины $_i^j l$ ожиданий $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$, вычисляемый по формуле среднего от векторов ожиданий, получаемых от родительских относительно блока R_i^j распознающих блоков R_k^{j+1} :

$$\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s) = \frac{1}{N_i^j} \sum_{k \in K_s^{j+1}} \hat{x}_k^{j+1}(\tau_s),$$

где N_i^j - количество родительских блоков, K_i^{j+1} - множество индексов родительских относительно R_i^j распознающих блоков. Далее в каждый момент времени $t \in T_i^j$, $\tau_s \leqslant t \leqslant \tau_s + h_i^j$, распознающий блок R_i^j получает на вход весовой вектор $\bar{x}_i^j(t)$ длины l_i^j присутствия входных признаков из множества F_i^j , вычисляет выходной весовой вектор $\bar{x}_i^{*j}(t)$ длины l_i^j присутствия распознаваемых признаков из множества F_i^{*j} , вычисляет вектор длины q_i^j ожиданий $\hat{x}_i^j(t)$ присутствия входных признаков в следующий момент времени (Рисунок 2).

2. АЛГОРИТМ РАБОТЫ РАСПОЗНАЮЩЕГО БЛОКА

Опишем распознающий блок R_i^j с точки зрения классической теории динамических систем [13]. Обозначим множество возможных мгновенных значений выходных векторов рас-

$$\hat{x}_{i}^{j+1}(0) \qquad \hat{x}_{i}^{j+1}(h_{i}^{j}) \qquad \hat{x}_{i}^{j+1}(2h_{i}^{j})$$

$$\downarrow \bar{x}_{i}^{j*}(0) \quad \bar{x}_{i}^{j*}(1) \qquad \bar{x}_{i}^{j*}(h_{i}^{j}-1) \downarrow \bar{x}_{i}^{j*}(h_{i}^{j}) \qquad \bar{x}_{i}^{j*}(h_{i}^{j}+1) \qquad \downarrow \bar{x}_{i}^{j*}(2h_{i}^{j}) \qquad \bar{x}_{i}^{j*}(2h_{i}^{j}+1)$$

$$\downarrow \bar{x}_{i}^{j*}(2h_{i}^{j}) \qquad \bar{x}_{i}^{j*}(2h_{i}^{j}+1) \qquad \downarrow \bar{x}_{i}^{j*}(2h_{i}^{j}+1) \qquad \downarrow \bar{x}_{i}^{j}(2h_{i}^{j}+1) \qquad \downarrow \bar{x}_{i}^{j$$

Рис. 2: Вычислительные циклы распознающего блока. Символом «И» обозначен этап инициализации в начале каждого цикла.

познающего блока R_i^j как X_i^{*j} . Очевидно, что X_i^{*j} является векторным пространством. Обозначим множество возможных мгновенных значений весового вектора присутствия входных признаков как X_i^j . Очевидно, что X_i^j также является векторным пространством. Определим входное воздействие $\omega_i^j: T {\to} X_i^j$ и выходную величину $\gamma_i^j: T {\to} X_i^{*j}$ в смысле теории динамических систем. Будем считать, что совокупность всех возможных мгновенных значений векторов ожиданий образует множесство состояний \hat{X}_i^j распознающего блока R_i^j . Определим функцию переходов $\varphi_i^j(t;\tau_s,\hat{x}_i^{j+1},\omega_i^j)=\hat{x}_i^j$ в смысле теории динамических систем. Множество \hat{X}_i^j в таком случае интерпретируется как множесство состояний распознающего блока R_i^j . Также зададим выходное отображение $\eta_i^j: T {\times} \hat{X}_i^j {\to} X_i^{*j}$ в смысле теории динамических систем, определяющее выходные векторы $\bar{x}_i^{*j}(t)=\eta_i^j(t,\hat{x}_i^j(t))$ (Рисунок 3).

$$F_{i}^{**j} \begin{cases} f_{1}^{*} : & x_{11}^{*} \rightarrow x_{21}^{*} \rightarrow \cdots \rightarrow x_{t1}^{*} \rightarrow \cdots \rightarrow x_{h_{i}^{j}1}^{*} \\ f_{2}^{*} : & x_{12}^{*} \rightarrow x_{22}^{*} \rightarrow \cdots \rightarrow x_{t2}^{*} \rightarrow \cdots \rightarrow x_{h_{i}^{j}2}^{*} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{l_{i}^{*}}^{*} : & x_{1l_{i}^{j}}^{*} \rightarrow x_{2l_{i}^{j}}^{*} \rightarrow \cdots \rightarrow x_{tl_{i}^{j}}^{*} \rightarrow \cdots \rightarrow x_{h_{i}^{j}l_{i}^{j}}^{*} \\ \uparrow \bar{x}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}^{*}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}^{*}(t) & \uparrow \bar{x}^{*}(h_{i}^{j}) \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}^{*}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}^{*}(t) & \uparrow \bar{x}^{*}(h_{i}^{j}) \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}^{*}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}^{*}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}^{*}(h_{i}^{j}) \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}^{*}(t_{2}) & \hat{x}_{i}^{*}(t_{2}) & \hat{x}_{i}^{*}(h_{i}^{j}) & \text{время} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}^{*}(t_{2}) & \hat{x}_{i}^{*}(t_{2}) & \hat{x}_{i}^{*}(h_{i}^{j}) & \text{состояния} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{время} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{состояния} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{spems} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{spems} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{spems} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{spems} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{spems} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(t_{1}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{spems} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(t_{2}) & \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{spems} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \text{spems} \\ \hline \hat{x}_{i}^{*}(t_{1}) \uparrow \bar{x}(h_{i}^{j}) & \bar$$

Рис. 3: Схема входных и выходных отображений распознающего блока.

Будем рассматривать распознающий блок R_i^j как динамическую систему с дискретным временем, т. е. считать множество моментов времени T_i^j множеством целых чисел. Каждой функции распознавания \hat{f}_k из множества \hat{F}_i^j будем ставить в соответствие набор матриц

 $npeдсказания\ Z_k=\{Z_1^k,\dots,Z_m^k\}$ размерности $q_i^j\times h_i^j$, где h_i^j —характерное время распознающего блока R_i^j . Столбец $\bar{z}_u^r=(z_{u1}^k,\dots,z_{uq}^k)$ матрицы Z_r^k интерпретируется как вектор предсказания присутствия входных признаков из множества F_i^j в момент времени τ_s+u , при этом $z_{uv}^k\in\{0,1\}$, т.е. вектор \bar{z}_u^r является булевым вектором. Сама матрица Z_r^k задаёт, таким образом, последовательность событий, наличие которых свидетельствует о присутствии распознаваемого функцией \hat{f}_k признака. Множество всех матриц предсказания распознающего блока R_i^j будем обозначать как \mathcal{Z}_i^j .

В листингах 1 и 2 приведён алгоритм \mathfrak{A}_{th} вычислительного цикла распознающего блока, в котором рассчитываются значения функции переходов $\varphi_i^j(\tau_s+t;\tau_s,\hat{x}_i^{j+1},\omega_i^j),\ 1\leqslant t\leqslant h_i^j-1,$ и выходного отображения $\eta_i^j(\tau_s+t,\hat{x}_i^j(\tau_s+t)),\ 1\leqslant t\leqslant h_i^j-1.$ В листингах используется функция W нормировки весовых функций, действие которой для вектора $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ описывается формулой

$$W(\bar{x}) = \left(\frac{x_1}{\max_i x_i}, \dots, \frac{x_n}{\max_i x_i}\right).$$

Кратко опишем шаги алгоритма.

1 Алгоритм \mathfrak{A}_{th} (часть I, инициализация)

```
Require: \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \omega_i^j;
Ensure: \varphi_i^j, \eta_i^j;
   1: \hat{F}^* = \varnothing, Z^* = \varnothing, t = 0;
  2: c_1 \in (0,1), c_2 \in (0,1);

3: for all компонент \hat{x}_{ik}^{j+1} вектора \hat{x}_i^{j+1}(\tau_s) = (\hat{x}_{i1}^{j+1}, \hat{x}_{i2}^{j+1}, \dots, \hat{x}_{il}^{j+1}) do
4: if \hat{x}_{ik}^{j+1} \ge c_1 then
5: \hat{F}^* := \hat{F}^* \cup \{\hat{f}_k\};
    7: end for
   8: \bar{x}_i^j := \omega_i^j(\tau_s);
   9: for all функций распознавания \hat{f}_k \in \hat{F}^* do
                    for all Z_r^k \in \mathcal{Z}_k, соответствующих функции распознавания \hat{f}_k, do
                            \begin{array}{c} \textbf{if} \ \frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}_i^j\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}_i^j\|} < c_2 \ \textbf{then} \\ Z^* := Z^* \cup \{Z_r^k\}; \end{array}
 11:
 12:
 13:
                    end for
 14:
 15: end for
 16: \bar{N} := (|\{Z_r^1 | Z_r^1 \in Z^*\}|, \dots, |\{Z_r^{l_i^j} | Z_r^{l_i^j} \in Z^*\}|);
17: \bar{x}_i^{*j} := W(\bar{N});
17: x_i .— r (17),

18: \eta(\tau_s, \hat{x}_i^j(\tau_s)) = \bar{x}_i^{*j};

19: \hat{x}_i^j = W(\sum_{\hat{f}_k \in \hat{F}^*} \hat{x}_{ik}^{j+1} \sum_{Z_r^k \in Z^*} \bar{z}_2^r);

20: \varphi(\tau_s + 1; \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}, \omega) = \hat{x}_i^j(\tau_s + 1) = \hat{x}_i^j;
```

Вычислительный цикл распознающего блока начинается с инициализации состояния при помощи управляющего воздействия от верхних уровней иерархии — вектора ожиданий $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$ (шаги 3–20). Начальное состояние определяется отбором тех распознаваемых признаков из множества F_i^{*j} , которые предсказываются на основе состояния блоков верхнего уровня. Первая константа c_1 определяет порог предсказываемого веса присутствия распознаваемых признаков, вышей которого соответствующие функции распознавания попадают во множество активных функций \hat{F}^* (шаг 4). Далее производится отбор тех матриц предсказания активных

функций распознавания, для которых обычное расстояние по норме $\|x\| = \sum_i |x_i|$ первого столбца \bar{z}_1^r от входного вектора \bar{z}_i^j в начальный момент времени не превышает второй константы c_2 (шаг 11). На основе активных матриц предсказания методом голосования вычисляется выходной вектор в начальный момент времени $\bar{x}_i^{j*}(\tau_s)$ (шаги 16–18).

Начальное состояние $\hat{x}_i^j(\tau_s+1)$ определяется как нормированный вектор, s-ый компонент которого равен сумме всех s-ых элементов вторых колонок активных матриц предсказания с весами, соответствующими элементам вектора ожиданий $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$ (шаг 19). Т. к. используется представление о будущем входном сигнале (вторая колонка матриц предсказания), то $\hat{x}_i^j(\tau_s+1)$ играет роль предсказывающего управляющего вектора для нижних уровней иерархии.

После инициализации состояния начинает выполняться тело основного цикла, в котором до тех пор, пока время не превысит характерное время распознающего блока h_i^j повторяется вычисление выходного вектора и состояния в следующий момент времени (шаги 22–37). В начале обновляется множество активных матриц предсказания Z^* за счёт удаления тех матриц, соответствующие столбцы которых достаточно сильно отличаются от текущего входного вектора \bar{x}_i^j (шаг 25). Далее методом голосования по количеству матриц в множестве активных матриц предсказания, отвечающих за соответствующий выходной признак, вычисляется выходной вектор \bar{x}_i^{j*} (шаги 29–31).

В завершение тела основного цикла вычисляется состояние в следующий момент времени $\hat{x}_i^j(\tau_s+t+1)$. Как и на этапе инициализации, вектор ожиданий равен нормированному вектору, элементы которого равны сумме элементов столбцов всех активных матриц предсказания, соответствующих текущему моменту времени с учётом весов начального управляющего вектора $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$ (шаги 34–35).

2 Алгоритм \mathfrak{A}_{th} (часть II, основной цикл)

```
21: t = 1;
22: while t \leqslant h_i^{\jmath} - 1 do
                  \bar{x}_i^j := \omega(\tau_s + t);
23:
                  t for all матриц предсказания Z_r^k из множества Z^* do
24:
                          if \frac{\|\bar{z}_{t+1}^r - \bar{x}_i^j\|}{\|\bar{z}_{t+1}^r\| + \|\bar{x}_i^j\|} \geqslant c_2 then
25:
                                    Z^* := Z^* \setminus \{Z_r^k\}
26:
                           end if
27:
                  end for
                 \begin{split} \bar{N} &= (|\{Z_r^1|Z_r^1 \in Z^*\}|, \dots, |\{Z_r^{l_i^j}|Z_r^{l_i^j} \in Z^*\}|); \\ \bar{x}_i^{*j} &:= W(\bar{N}); \end{split}
28:
30:
                  \eta(\tau_s + t, \hat{x}_i^j(\tau_s + t)) = \bar{x}_i^{*j};
31:
                  t = t + 1;
32:
                 \begin{array}{l} \textbf{if } t \leqslant h_{i}^{j} - 2 \textbf{ then} \\ \hat{x}_{i}^{j} := W(\sum_{\hat{f}_{k} \in \hat{F}^{*}} \hat{x}_{ik}^{j+1} \sum_{Z_{i}^{k} \in Z^{*}} \bar{z}_{t}^{r}); \\ \varphi(\tau_{s} + t; \tau_{s}, \hat{x}_{i}^{j+1}, \omega) = \hat{x}_{i}^{j}(\tau_{s} + t) = \hat{x}_{i}^{j}; \end{array}
33:
34:
35:
                  end if
36:
37: end while
```

3. СТАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ

3.1. Начальный момент времени

В начале рассмотрим статический случай, т. е. зафиксируем момент времени t, равный началу некоторого s-го вычислительного цикла τ_s . В этом случае, распознающий блок R_i^j

можно рассматривать как статический оператор распознавания $R_i^j(\hat{x}_i^{j+1},\mathcal{Z}_i^j,\bar{x}_i^j)=\bar{x}_i^{*j}$. Напомним, что \bar{x}_i^{*j} — это весовой вектор присутствия распознаваемых признаков f_1^*,\ldots,f_l^* из множества F_i^{*j} . Далее кратко будем записывать $R(\hat{x},\mathcal{Z},\bar{x})=\bar{x}^*$ и везде, где это возможно, будем опускать индексы j и i.

Введём совокупность задач $\{Q\}$ аналогично работе [14]. Задача $Q(\hat{x}, \bar{x}, \alpha_1, \dots, \alpha_l) \in \{Q\}$ состоит в построении оператора, вычисляющего по поступившему вектору ожиданий \hat{x} и входному вектору \bar{x} значения $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \{0,1\}$ присутствия признаков f_1^*, \dots, f_l^* . Другими словами, искомый алгоритм \mathcal{A}^* переводит набор (\hat{x}, \bar{x}) в вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, который будем называть информационным вектором входного вектора \bar{x} (Рисунок 4a).

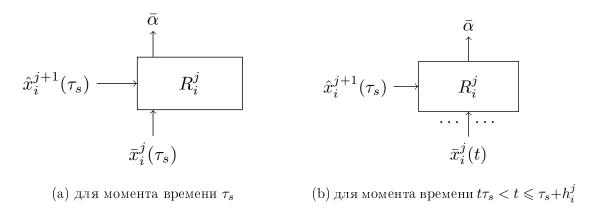


Рис. 4: Статические схемы корректности.

Пусть множество $\{\mathcal{A}\}$ состоит из алгоритмов, переводящих пары (\hat{x}, \bar{x}) в векторы $\bar{\beta}$, составленные из элементов $0, 1, \Delta : \mathcal{A}(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{\beta}$. Если $\beta_i \in \{0, 1\}$, то β_i — значение величины α_i , вычисленное алгоритмом \mathcal{A} . Если $\beta_i = \Delta$, то алгоритм \mathcal{A} не вычислил значение α_i информационного вектора $\bar{\alpha}$.

Определение 1. Алгоритм A называется корректным для задачи Q, если выполнено равенство

$$\mathcal{A}(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{\alpha}.$$

Алгоритм \mathcal{A} , не являющийся корректным для Q, называется некорректным.

Далее будем считать, что множество $\{\mathcal{A}\}$ является совокупностью, вообще говоря, некорректных алгоритмов.

Утверждение 1 (аналог теоремы 1 из [14]). Каждый алгоритм $A \in \{A\}$ представим как последовательность выполнения алгоритмов R и C, где $R(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{x}^*$, \bar{x}^* — вектор действительных чисел, $C(\bar{x}^*) = \bar{\beta}$, $\beta_i \in \{0, 1, \Delta\}$.

Доказательство. Пусть D- алгоритм перехода вектора $\bar{\beta}$ к числовому вектору \bar{y} . В качестве D можно рассмотреть, например, $y_i = \beta_i$, если $\beta_i \in \{0,1\}$, и $y_i = 1/2$, если $\beta_i = \Delta$. Очевидно, что существует обратный алгоритм D^{-1} перехода от \bar{y} к $\bar{\beta}$. Положим $R = \mathcal{A} \cdot D$, $C = D^{-1}$. Тогда очевидно, что $\mathcal{A} = R \cdot C = (\mathcal{A} \cdot D) \cdot D^{-1} = \mathcal{A}$.

Из утверждения 1 следует, что множество алгоритмов $\{A\}$ порождает множества $\{R\}$ и $\{C\}$, которые будем называть множеством операторов распознавания и множеством решающих правил, соответственно. В качестве операторов из множества $\{R\}$ будем рассматривать операторы $R(\hat{x}, \mathcal{Z}, \bar{x})$.

Определение 2. Решающее правило C^* называется корректным на множестве входных векторов X, если для всякого вектора \bar{x} из X существует хотя бы один числовой вектор \bar{x}^* такой, что $C^*(\bar{x}^*) = \bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ — информационный вектор входного вектора \bar{x} .

В множестве операторов $\{R\}$ введём операции умножения на скаляр, сложения и умножения. Пусть r' — скаляр, R', $R'' \in \{R\}$. Определим операторы $r' \cdot R'$, R' + R'' и $R \cdot R''$ следующим образом:

$$r' \cdot R' = (r' \cdot x_1^{*\prime}, \dots, r' \cdot x_l^{*\prime}), \tag{1}$$

$$R' + R'' = (x_1^{*'} + x_1^{*''}, \dots, x_1^{*'} + x_l^{*''}), \tag{2}$$

$$R' \cdot R'' = (x_1^{*'} \cdot x_1^{*''}, \dots, x_1^{*'} \cdot x_l^{*''}). \tag{3}$$

Утверждение 2. Замыкание $L\{R\}$ множества $\{R\}$ относительно операций (1) и (2) является векторным пространством.

Определение 3. Множество $L\{A\}$ алгоритмов $A = R \cdot C^*$ таких, что $R \in L\{R\}$, называются линейным замыканием множества $\{A\}$.

Зафиксируем пару (\hat{x}, \bar{x}) вектора ожидания и входного вектора. Аналогично [14] будем рассматривать задачи $Q(\hat{x}, \bar{x})$, обладающие следующим свойством относительно множества операторов распознавания \mathcal{R} .

Определение 4. Если множество векторов $\{R(\hat{x}, \bar{x})\}$, где R пробегает некоторое множество операторов распознавания \mathcal{R} , содержит базис в пространстве числовых векторов длины l, то задача $Q(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\alpha})$ называется полной относительно \mathcal{R} .

Утверждение 3 (аналог теоремы 2 из [14]). Если множество задач $\{Q\}$ состоит лишь из задач, полных относительно \mathcal{R} , то линейное замыкание $L\{R\cdot C^*\}$ $(C^*-$ произвольное фиксированное корректное решающее правило, R пробегает множество \mathcal{R}) является корректным относительно $\{Q\}$.

Следствие 1. Пусть $\{A\}$ — совокупность некорректных алгоритмов, $\{R\}$ — соответствующее множество операторов распознавания, C^* — фиксированное корректное решающее правило. Тогда $L\{A\} = L\{R \cdot C^*\}$ является корректным относительно множества задач $\{Q\}$, если $\{Q\}$ состоит из задач, полных относительно $\{R\}$.

Будем рассматривать только такие задачи $Q(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\alpha})$, для которых удовлетворяется следующее условие: $\exists k$ такое, что x_k является k-ым элементом вектора \bar{x} и $x_k > 1/2$. Такое условие является естественным, иначе вектор \bar{x} , в котором отсутствуют веса большие 1/2, не может рассматриваться как достоверный с точки зрения порогового алгоритма \mathfrak{A}_{th} .

Теорема 1. Линейное замыкание $L\{A\}$ семейства алгоритмов $\{A\} = \{R \cdot C^*\}$ с произвольным корректным решающим правилом C^* и операторами распознавания R, определёнными алгоритмом \mathfrak{A}_{th} , является корректным на множестве задач $\{Q\}$.

Доказательство. В силу утверждения 3 достаточно доказать, что произвольная задача $Q \in \{Q\}$ является полной относительно $\{R\}$. Доказательство полноты Q состоит в прямом построении операторов $R_k, k = 1, 2, \ldots, l$ из $L\{R\}$, переводящих пару $(\hat{x}, \bar{x}), \hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_l), \bar{x} = (x_1, \ldots, x_q)$ в числовой вектор

$$\bar{x}_k^* = (x_{k1}^*, \dots, x_{kl}^*), \ x_{kk}^* = 1, \ \forall u \neq k \ x_{ku}^* = 0.$$
 (4)

Пусть мощность множества \mathcal{Z}_k признака f_k равна N, норма $\|\bar{x}\|$ равна $M \leqslant q$, максимальная компонента вектора \bar{x} равна x_{max} . Зафиксируем величину k и коэффициенты $c_1 = \min_v \hat{x}_v, c_2 = \frac{M}{1+M}$. Рассмотрим матрицы предсказания из множеств $\mathcal{Z}_1, \ldots, \mathcal{Z}_l$ признаков f_1, \ldots, f_l , удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) в каждой матрице предсказаний $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$ в столбце $\bar{z}_1^r = (z_{11}^r, \dots, z_{1q}^r)$ компонента $z_{1v}^r = 1$, если $x_v = x_{max}$, и $z_{1v}^r = 0$, если $x_v < x_{max}$;
- 2) в каждой матрице предсказаний $Z_r^u \in \mathcal{Z}_u, u \neq k$ в столбце $\bar{z}_1^r = (z_{11}^r, \dots, z_{1q}^r)$ компонента $z_{1v}^r = 0$ при любых v.

Вычислим величину x_{kk}^* . Т. к. $c_1 = \min_u \hat{x}_u$, то условие $\hat{x}_k \geqslant c_1$ на шаге 4 алгоритма \mathfrak{A}_{th} автоматически выполняется и функция измерения \hat{f}_k попадает в множество \hat{F}^* . Из условия 1 следует, что каждая матрица $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$ попадает в множество Z^* на шаге 11 алгоритма \mathfrak{A}_{th} :

$$\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}\|} < \frac{\sum_v |z_{1v}^r - x_v|}{1 + M} < \frac{M}{1 + M} = c_2,$$

так как минимум один компонент в \bar{z}_1^r равен 1 и существует элемент $x_v > 1/2$. В этом случае $x_{kk}^* = \gamma \cdot N$, где γ — весовой коэффициент.

Вычислим величины x_{ku}^* . Т.к. $c_1 = \min_v \hat{x}_v$, то условие $\hat{x}_u \geqslant c_1$ на шаге 4 алгоритма \mathfrak{A}_{th} автоматически выполняется и все функции измерения \hat{f}_u попадают в множество \hat{F}^* . Из условия 2 следует, что каждая матрица $Z_r^u \in \mathcal{Z}_u$ не попадает в множество Z^* на шаге 11 алгоритма \mathfrak{A}_{th} :

$$\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}\|} = \frac{M}{M} = 1 > \frac{M}{1+M} = c_2.$$

В этом случае $x_{ku}^* = 0$.

Рассмотрим оператор распознавания $\frac{1}{\gamma \cdot N} R_k(\hat{x}, \mathcal{Z}^k, \bar{x})$, матрицы предсказания которого удовлетворяют условиям 1–2 и который переводит задачу Q в вектор \bar{x}_k^* , причём $\bar{x}_{kk}^* = 1$, а $\bar{x}_{ku}^* = 0, u \neq k$. Данный оператор удовлетворяет критериям (4) на вектор \bar{x}_k^* , а значит, необходимый баз в пространстве выходных векторов построен. Полнота задачи Q доказана.

3.2. Произвольный момент времени

Фиксация момента времени не в начале вычислительного цикла, а на любом другом значении $\tau_s < t < \tau_s + h_i^j$, приводит к операторам вида $R_i^j(\hat{x}_i^j(t), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(t))$, которые кратко будем записывать R^t . Для этих операторов постановка задачи распознавания выглядит таким же образом как и для операторов R начального времени: задача $Q^t(\hat{x}_i^j(t), \bar{x}_i^j(t), \bar{\alpha})$ состоит в построении алгоритма \mathcal{A}^{*t} , переводящего набор $(\hat{x}_i^j(t), \bar{x}_i^j(t))$ в информационный вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$. Определения свойств корректности алгоритма и полноты задачи, а также корректного решающего правила C^{*t} , идентичны случаю с начальным моментом времени (Рисунок 4b). Аналогично, рассматривая только такие задачи $Q^t(\hat{x}_i^j(t), \bar{x}_i^j(t), \bar{\alpha})$, в которых имеется как минимум один значимый компонент входного вектора, можно сформулировать следующую теорему (будем далее опускать индексы i,j).

Теорема 2. Линейное замыкание $L\{A^t\}$ семейства алгоритмов $\{A^t\} = \{R^t \cdot C^{*t}\}$ с произвольным корректным решающим правилом C^{*t} и операторами распознавания R^t , определёнными алгоритмом \mathfrak{A}_{th} , является корректным на множестве задач $\{Q^t\}$.

Доказательство. Как и в случае доказательства теоремы 1 будем строить операторы $R_k^t, \ k = 1, 2, \ldots, l$ из $l\{R^t\}$, переводящие пару $(\hat{x}(t), \bar{x}(t))$ в числовой вектор

$$\bar{x}_k^*(t) = (x_{t1,k}^*, \dots, x_{tl,k}^*), \ x_{tk,k}^* = 1, \ \forall u \neq k \ x_{tu,k}^* = 0.$$
 (5)

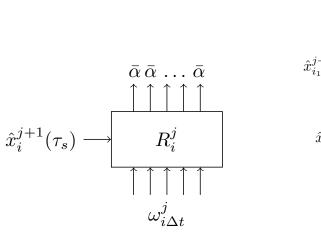
Фиксируя константы c_1, c_2 на основании свойств входного вектора и вектора ожиданий и налагая аналогичные условия на матрицы предсказания, но только для t-ых столбцов, приходим к построению операторов распознавания $\frac{1}{\gamma}R_k^t(\hat{x}(t), \mathcal{Z}^{t,k}\bar{x}(t))$ (γ — некоторый весовой коэффициент), выходной вектор которых удовлетворяет критерию (5). Необходимый базис в пространстве выходных векторов построен, полнота задачи Q^t доказана.

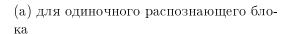
4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ КЛАССИФИКАЦИИ

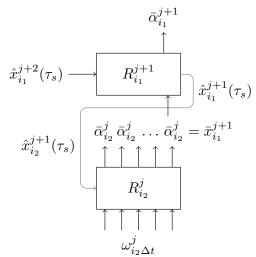
4.1. Случай одного распознающего блока

Теперь рассмотрим динамическую постановку задачи. Будем фиксировать не конкретный момент времени t, а промежуток времени $\Delta t = [\tau_s, \tau_s + h_i^j)$. В этом случае распознающий блок R_i^j можно рассматривать как duнамический оператор распознавания $\hat{R}_i^j(\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_i^j, \omega_{i\Delta t}^j) = \gamma_{i\Delta t}^j$, принимающий функцию входного воздействия ω_i^j , ограниченную на промежутке времени Δt , и выдающий функцию выходной величины γ_i^j на том же временном промежутке. Так как мы предполагаем время дискретным, т. е. множество моментов времени T_i^j является множеством целых чисел, то действие динамического оператора \hat{R}_i^j можно заменить последовательным действием статических операторов $R(\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s)), R^1(\hat{x}_i^j(\tau_s+1), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s+1)), \ldots, R^{h_i^j-1}(\hat{x}_i^j(\tau_s+h_i^j-1), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s+h_i^j-1))$, в результате выдающих последовательность $\{\bar{x}_i^{*j}(t)\} = \{\bar{x}_i^{*j}(\tau_s), \bar{x}_i^{*j}(\tau_s+1), \ldots, \bar{x}_i^{*j}(\tau_s+h_i^j-1)\}$. Так как параметр h_i^j фиксирован, то конечные последовательности векторов $\omega_{i\Delta t}^j$ и $\gamma_{i\Delta t}^j$ можно считать матрицами размерности $l_i^j \times h_i^j$. Далее будем опускать индексы i и j.

Формулировка задачи в динамическом случае будет выглядеть следующим образом: задача $\hat{Q}(\hat{x},\omega_{\Delta t},\bar{\alpha})$ состоит в построении алгоритма $\hat{\mathcal{A}}^*$, вычисляющего по поступившему начальному вектору ожиданий \hat{x} матрице входных воздействий $\omega_{\Delta t}$ последовательность векторов $\beta_{\Delta t}$, монотонно сходящуюся к информационному вектору $\bar{\alpha}$. Т. е. искомый оператор распознавания \hat{R} должен выдавать матрицу весов присутствия распознаваемых признаков $\gamma_{\Delta t}$, столбцы которой должны сходиться (с учётом корректного решающего правила) к информационному вектору: $\lim_{t\to\tau_s+h}\bar{x}^*(t)=\bar{\alpha}$ (Рисунок 5а). Введём соответствующие определения.







(b) для случая двухуровневой иерархии

Рис. 5: Динамические схемы корректности.

Определение 5. Алгоритм $\hat{\mathcal{A}}(\hat{x}, \bar{x}) = \beta_{\Delta t} = (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_h)$ называется корректным для задачи \hat{Q} , если выполнено условие

$$\|\bar{\beta}_1 - \bar{\alpha}\| \geqslant \|\bar{\beta}_2 - \bar{\alpha}\| \geqslant \dots \geqslant \|\bar{\beta}_h - \bar{\alpha}\| = 0.$$

 $\|\bar{\beta}_i - \bar{\alpha}\| = \sum_j (\beta_{ij} - \alpha_j)$, где $\beta_{ij} - \alpha_j = 0$, если $\beta_{ij} = \alpha_j$, $\beta_{ij} - \alpha_j = \frac{1}{2}$, если $\beta_{ij} = \Delta$, и $\beta_{ij} - \alpha_j = 1$ иначе. Алгоритм $\hat{\mathcal{A}}$, не являющийся корректным для \hat{Q} , называется некорректным.

Утверждение 4. Каждый алгоритм $\hat{A} \in \{\hat{A}\}$ представим как последовательность выполнения алгоритмов \hat{R} и \hat{C} , где $\hat{R}(\hat{x}, \mathcal{Z}, \omega_{\Delta t}) = \gamma_{\Delta t}$, $\gamma_{\Delta t}$ —матрица действительных чисел, $\hat{C}(\gamma_{\Delta t}) = \beta_{\Delta t}$, $\beta_{\Delta t}$ —матрица значений $\beta_{ij} \in \{0, 1, \Delta\}$.

Корректное решающее правило \hat{C}^* для матрицы $\gamma_{\Delta t}$ определяется через набор корректных правил для векторов $(\hat{C}_1^*,\ldots,\hat{C}_h^*)$ таких, что $\|C_1^*(\bar{x}^*(\tau_s))-\bar{\alpha}\|\geqslant \|C_2^*(\bar{x}^*(\tau_s+1))-\bar{\alpha}\|\geqslant \cdots \geqslant \|C_h^*(\bar{x}^*(\tau_s+h-1))-\bar{\alpha}\|=0$. В простейшем случае $\forall i\ C_i^*(\bar{x}^*(\tau_s+i))=\bar{\alpha}$ и такое решающее правило будем называть константным. Аналогично статическому случаю вводится определение линейного $L\{\hat{R}\}$ замыкания над множеством $\{\hat{R}\}$.

Определение 6. Если множесство матрии $\{\hat{R}(\hat{x},\omega_{\Delta t})\}$, где \hat{R} пробегает некоторое множесство операторов распознавания $\hat{\mathcal{R}}$, содержит базис в пространстве числовых матрии размерности $l \times q$, то задача $\hat{Q}(\hat{x},\omega_{\Delta t},\bar{\alpha})$ называется полной относительно $\hat{\mathcal{R}}$.

Утверждение 5 (аналог теоремы 2 из [14]). Если множество задач $\{\hat{Q}\}$ состоит лишь из задач, полных относительно $\hat{\mathcal{R}}$, то линейное замыкание $L\{\hat{R}\cdot\hat{C}^*\}$ (\hat{C}^*-n) произвольное фиксированное корректное решающее правило, \hat{R} пробегает множество $\hat{\mathcal{R}}$) является корректным относительно $\{\hat{Q}\}$.

Для того, чтобы воспользоваться результатами, полученными при рассмотрении статических операторов $R=R^0$ и R^t , необходимо ввести понятие подзадачи.

Определение 7. Если в задаче $Q^t(\hat{x}(t), \bar{x}(t), \bar{\alpha})$ входной вектор $\bar{x}(t)$ совпадает с t-ым столбиом матрицы $\omega_{\Delta t}$ задачи $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$, а вектор $\hat{x}(t)$ вычисляется на основании алгоритма \mathfrak{A}_{th} с входным воздействием, равным матрице $\omega_{\Delta t}$, и начальным вектором ожиданий, равным \hat{x} , называется подзадачей задачи \hat{Q} .

Зафиксируем начальный вектор ожиданий \hat{x} и последовательность входных векторов $\omega_{\Delta t}$. Если, как и в статическом случае, мы будем рассматривать только такие задачи $\hat{Q}(\hat{x},\omega_{\Delta t},\bar{\alpha})$, для которых в матрице $\omega_{\Delta t}$ в каждом столбце с номером s $\exists k$ такое, что x_{sk} является k-ым элементом вектора $\bar{x}(\tau_s+s)$ и $x_{sk}>1/2$, то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Линейное замыкание $L\{\hat{A}\}$ семейства алгоритмов $\{\hat{A}\} = \{\hat{R}\cdot\hat{C}^*\}$ с константным корректным решающим правилом \hat{C}^* и операторами распознавания \hat{R} , определёнными алгоритмом \mathfrak{A}_{th} , является корректным на множестве задач $\{\hat{Q}\}$.

Доказательство. В силу того, что динамический оператор \hat{R} представим в виде последовательного применения статических операторов R^t к столбцам матрицы $\omega_{\Delta t}$, то для доказательства теоремы необходимо подобрать такие операторы R^t , $t=0,\ldots,h-1$, которые выдают последовательность $\gamma_{\Delta t}$, сходящуюся (с учётом применения константного корректного решающего правила $\hat{C}^* = (C_1^*, \ldots, C_i^*)$) к информационному вектору $\bar{\alpha}$.

Рассмотрим алгебраическое замыкание $L\{R^t\}$ операторов вида $R^t(\hat{x}(\tau_s+t), \mathcal{Z}, \omega_{\Delta t}(\tau_s+t))$ с фиксированным вектором $\hat{x}(\tau_s+t)$ и $\omega(\tau_s+t)$. Из задачи $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$ выделим подзачаду $Q_i(\hat{x}(\tau_s+t), \omega_{\Delta t}(\tau_s+t), \bar{\alpha})$.

В силу теорем 1 и 2 можно построить такой оператор $R^{*t} \in L\{R^t\}$, что $C^{*t} \cdot R^{*t}(\omega(\tau_s+i)) = \bar{\alpha}$. Формируя таким образом линейные замыкания и выделяя подзадачи для каждого момента времени $t \in [0,h)$, получим необходимую последовательность $\gamma_{\Delta t} = (C^{*1} \cdot R^{*1}(\omega(\tau_s)), \ldots, C^{*h} \cdot R^{*h}(\omega(\tau_s+h-1))) = (\bar{\alpha},\ldots,\bar{\alpha})$, которая очевидным образом сходится к $\bar{\alpha}$. Корректность, таким образом, доказана.

Рассмотрим иерархическую постановку задачи, в которой будет учитываться иерархическая связь между операторами распознавания. Зафиксируем, как и в динамическом случае, промежуток времени $\Delta t = [\tau_s, \tau_s + h_{i_2}^j)$. Далее, будем рассматривать не единичный распознающий блок, а двухуровневую иерархию E_j^2 , на каждом уровне которой будет по одному распознающему блоку $R_{i_1}^{j+1}$ и $R_{i_2}^j$. Данную иерархию можно рассматривать как иерархический оператор распознавания $\hat{R}_{e,j}^2(\hat{x}_{i_1}^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_{i_1}^{j+1}, \mathcal{Z}_{i_2}^j, \omega_{i_2\Delta t}^j) = \bar{x}_{i_1}^{*j+1}$, принимающий функцию входного воздействия $\omega_{i_2\Delta t}^j$ нижнего уровня, ограниченную на промежутке времени Δt , и выдающий весовой вектор присутствия распознаваемых признаков $\bar{x}_{i_1}^{*j+1}$. Т. к. в иерархии E_j^2 вектор состояния блока $R_{i_1}^{j+1}$ является одновременно и вектором ожидания для блока $R_{i_2}^j$, а конечный выходной вектор $\bar{x}_{i_2}^{*j}$ — входным вектором $\bar{x}_{i_1}^{j+1}$, то действие иерархического оператора $\hat{R}_{i_2}^2(\hat{x}_{i_2}^{j+1}, \mathcal{Z}_{i_2}^j, \omega_{i_2\Delta t}^j)$ нижнего уровня и статического оператора $R_{i_1}^{j+1}(\hat{x}_{i_1}^{j+1}, \mathcal{Z}_{i_1}^{j+1}, \bar{x}_{i_1}^{j+1}(\tau_s))$ верхнего уровня, где t является моментом времени текущего вычислительного цикла распознающего блока $R_{i_1}^{j+1}$, соответствующему моменту времени τ_s для распознающего блока $R_{i_2}^j$.

Формулировка задачи в иерархическом случае будет выглядеть следующим образом: задача $\hat{Q}_{e,j}^2(\hat{x}_{i_1}^{j+2},\omega_{i_2\Delta t}^j,\bar{\alpha}_{i_1}^{j+1})$ состоит в построении алгоритма $\hat{\mathcal{A}}_e$, вычисляющего по поступившему начальному вектору ожиданий $\hat{x}_{i_1}^{j+2}$ и матрице входных воздействий $\omega_{i_2\Delta t}^j$ значения информационного вектора $\bar{\alpha}_{i_1}^{j+1}$ (Рисунок 5b). Определения свойств корректности алгоритма и полноты задачи, а также корректного решающего правила, в данном случае в точности совпадают с аналогичными определениями для статического случая.

Зафиксируем начальный вектор ожиданий $\hat{x}_{i_1}^{j+2}$ и последовательность входных векторов $\omega_{i_2\Delta t}^j$. Если мы будем рассматривать только такие задачи $\hat{Q}_{e,j}^2(\hat{x}_{i_1}^{j+2},\omega_{i_2\Delta t}^j,\bar{\alpha}_{i_1}^{j+1})$, для которых в матрице $\omega_{i_2\Delta t}^j$ в каждом столбце с номером s $\exists k$ такое, что x_{sk} является k-ым элементом вектора $\bar{x}_{i_2}^j(\tau_s+s)$ и $x_{sk}>1/2$, то можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Линейное замыкание $L\{\hat{\mathcal{A}}_e\}$ семейства алгоритмов $\{\hat{\mathcal{A}}_e\} = \{\hat{R}_{e,j}^2 \cdot \hat{C}_e^*\}$ с произвольным корректным решающим правилом \hat{C}_e^* и операторами распознавания $\hat{R}_{e,j}^2$, определёнными алгоритмом \mathfrak{A}_{th} , является корректным на множестве задач $\{\hat{Q}_{e,j}^2\}$.

Доказательство. Доказательство корректности в данном случае сводится к формулировке подзадачи нижнего уровня $\hat{Q}_2(\hat{x}_{i_2}^{j+1},\omega_{i_2\Delta t}^j,\bar{\alpha}_{i_2}^j)$. Т. е. необходимо сформировать по задаче $\hat{Q}_{e,j}^2$ информационный вектор $\bar{\alpha}_{i_2}^j$ и вектор ожидания $\hat{x}_{i_2}^{j+1}$.

Следую определению вычислительного цикла в алгоритме \mathfrak{A}_{th} , будем считать, что $\hat{x}_{i_2}^{j+1}$ равен тому состоянию распознающего блока $R_{i_1}^{j+1}$, которое было вычислено к моменту времени τ_s , т. е. вектору $\hat{x}_{i_1}^{j+1}$. Каждый компонент $\alpha_{i_2u}^j$ информационного вектора $\bar{\alpha}_{i_2}^j$ будем вычислять по следующему правилу:

$$\alpha_{i_2u}^j = \begin{cases} 1, & \text{если} \sum_{v=1}^{l_{i_1}^{j+1}} \frac{\alpha_{i_1v}^{j+1}}{|\mathcal{Z}_v|} \sum_{w=1}^{|\mathcal{Z}_v|} z_{1v}^w > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Т.к. входной вектор распознающего блока $R^j_{i_1}$ равен вектору $\bar{\alpha}^j_{i_2}$, то такие значения компонентов информационного вектора позволяют удовлетворить ограничениям теоремы 2 (существование такого компонента входного вектора, который бы имел значение большее 1/2). С другой стороны, формулируя задачу $\hat{Q}_2(\hat{x}^{j+1}_{i_2}, \omega^j_{i_2\Delta t}, \bar{\alpha}^j_{i_2})$ мы попадаем в условия теоремы 3. Пользуясь результатами этих теорем, мы приходим к выводу, что среди алгоритмов линейного замыкания $L\{\hat{\mathcal{A}}_e\}$ имеется оператор, переводящий пару $(\hat{x}^{j+1}_{i_1}, \omega^j_{i_2\Delta t})$ в информационный вектор $\bar{\alpha}^{j+1}_{i_1}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы алгебраические свойства множества распознающих блоков. Показано, что динамические характеристики образной компоненты описываются в терминах классической теории управления. Построены операторы распознавания, позволяющие выполнить постановки задач классификации в терминах алгебраической теорий распознавания. Установлено, что линейные замыкания операторов распознавания, которые строятся в статических и динамических случаях, обладают свойством корректности относительно входных данных и требуемых результатов классификации. Это означает существования такого процесса обучения, в рамках которого будет сформирована иерархия образных компонент, корректно распознающая (классифицирующая) поступающие сигналы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках инициативного проекта №14-07-00611 а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Эделмен Д., Маунткасл В. Разумный мозг. М.: Мир, 1981.
- 2. Ivanitsky A. M. Brain basis of subjective experience: information synthesis hypothesis // Neuroscience and Behavioral Physiology. 1996. Vol. 46, no. 2. P. 251–252.
- 3. Вартанов А. В. Механизмы семантики: человек нейрон модель // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2011. № 12. С. 54–64.
- 4. Процесс мыщления в контексте динамической теории информации. часть II: понятие «образ» и «символ» как инструменты моделирования процесса мышления средствами нейрокомпьютинга / О. Д. Чернавская, Д. С. Чернавский, В. П. Карп и др. // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2012. № 2. С. 46–65.
- 5. Сергин В. Я. Психофизиологические механизмы восприятия: концепция объемлющих сенсорных характеристик // Успехи физиологических наук. 2009. Т. 40, № 4. С. 42—63.
- 6. Фреге Г. Логика и логическая семантика. М.: Аспект Пресс, 2000.
- 7. Пирс Ч. С. Начала прагматизма. Т. 2. Логические основания теории знаков. СПб. : Алетейя, 2000.
- 8. Леонтьев А. Н. Деятельность. Сознание. Личность. М.: Политиздат, 1975.
- 9. Поспелов Д. А., Осипов Г. С. Введение в прикладную семиотику. Глава 5. Операции в семиотических базах знаний // Новости искусственного интеллекта. 2002. № 6. С. 28–35.
- Осипов Г. С., Панов А. И., Чудова Н. В. Управление поведением как функция сознания.
 Картина мира и целеполагание // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. — № 4. — С. 83–96.
- 11. George D., Hawkins J. Towards a mathematical theory of cortical micro-circuits // PLoS Computational Biology. -2009. Vol. 5, no. 10. P. 1–26.

- 12. George D., Hawkins J. A hierarchical bayesian model of invariant pattern recognition in the visual cortex // Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks. Vol. 3.-2005. P. 1812-1817.
- 13. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М. : Мир, 1971.
- 14. Журавлев Ю. И. Корректные алгебры над множеством некорректных (эвристических) алгоритмов. Часть І // Кибернектика. 1977. \mathbb{N} 4. С. 5–17.