2.2 Le Jacobien

2.2.1 Introduction

Dans les paragraphes précédents, nous avons traité la cinématique des robots sériels et parallèles. Nous avons présenté la relation liant la position de l'organe terminal à celles des moteurs, notamment appelée le modèle géométrique. Dans ce paragraphe, nous allons essayer d'étendre l'étude depuis une analyse liée à la position à une analyse liée aux vitesses.
La relation qui lie les vitesses opérationnelles (celles de l'organe terminal) aux vitesses articulaires (celles des moteurs) est appelée ***Jacobien***.

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J \cdot \dot{q} \qquad \textbf{2.2.1}$$

v et ω représentent respectivement les composantes translationnelles et rotationnelles des vitesses de l'organe terminal.

Rappelons que le vecteur des coordonnées articulaire du robot (correspondant aux positions de chacune des articulations (moteurs)) est donnée par :

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T \qquad \textbf{2.2.2}$$

n étant le nombre d'articulations du robot.

Et le vecteur vitesse articulaire associé s'écrit comme suit:

$$\dot{q} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_n]^T \qquad \mathbf{2.2.3}$$

Dans ce cours, nous allons traiter :

- les vitesses opérationnelles d'un corps rigide et les notations associées,
- les différentes manières de calculer le Jacobien :
  - analytique,
  - vectorielle (géométrique),
  - numérique,
- Discuter sur les différentes représentations du Jacobien,
- Enumérer quelques utilités de Jacobien.
- l'analyse des singularités d'un robot.

2.2.2 Le Jacobien, définitions et méthode de détermination,

Les mathématiciens parlent de ***matrice Jacobienne*** alors que les roboticiens utilisent plutôt les termes ***Jacobien*** ou ***Jacobienne***. C'est une matrice qui relie les vitesses de l'organe terminal (la poignée du robot) aux vitesses articulaires du robot (Equation 2.2.1).

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J \cdot \dot{q}$$

v et ω sont les vitesses translationnelles et rotationnelles de l'organe terminal. Ces composantes sont choisies pour pouvoir identifier d'une manière unique la vitesse de ce dernier.

Dans ce qui suit nous allons traiter les méthodes de détermination du Jacobien et la terminologie associée. Ainsi le Jacobien obtenu directement depuis une dérivation analytique du modèle géométrique est appelé ***Jacobien analytique***. Quand le Jacobien est déduit à partir d'une construction vectorielle, il sera nommé ***Jacobien géométrique***. Le concept du Jacobien géométrique est traité en annexe.

2.2.2.1 Jacobien analytique

Une autre manière de déduire le Jacobien est de l'obtenir d'une manière analytique à partir de la dérivation du modèle géométrique.
Dans un cas général, la sortie du robot ou les coordonnées de son organe terminal est décrite par deux types d'informations :

- sa position translationnelle $p(q)$, et
- l'orientation $\phi(q)$

$$X(q) = \begin{bmatrix} p(q) \\ \phi(q) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.2.4}$$

La dimension de cet espace opérationnel est ***m***, donnant lieu au vecteur opérationnel suivant[1] :

[1] Les coordonnées opérationnelles permettent de référencer l'organe terminal dans l'espace tridimensionnel de la même manière qu'un corps rigide. De ce fait, il faut au maximum 6 coordonnées pour identifier sa disposition dans l'espace. Pas seulement, car les cordonnées opérationnelles donnent aussi la possibilité de reconnaître la

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.2.5}$$

A titre d'exemple, en choisissant les angles d'Euler pour la représentation de l'orientation nous aurons:

$$X(q) = \begin{bmatrix} p_x(q) \\ p_y(q) \\ p_z(q) \\ \alpha(q) \\ \beta(q) \\ \gamma(q) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.2.6}$$

Soit la fonction $f(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ donnant la relation entre les coordonnées opérationnelles et articulaires (Modèle géométrique). Nous pouvons écrire :

$$X(q) = \begin{bmatrix} X_1(q) \\ X_2(q) \\ \vdots \\ X_m(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, & q_2, & \cdots & q_n) \\ f_2(q_1, & q_2, & \cdots & q_n) \\ & \vdots & & \\ f_m(q_1, & q_2, & \cdots & q_n) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.2.7}$$

En appliquant la loi des dérivées partielles sur l'équation ci-dessus, nous trouvons:

$$dX = \begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ \vdots \\ dX_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial f_1}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \cdot dq_n \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \cdot dq_n \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial f_m}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \cdot dq_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2.2.8}$$

Cette équation peut également être écrite sous la forme matricielle suivante:

---

disposition du robot dans l'espace. Ainsi, l'espace opérationnel peut être composé par l'association des positions et orientations de plusieurs sorties convenablement choisies sur la structure (par exemple dans le cas d'un robot redondant). Ceci donnerait lieu à une dimension de l'espace opérationnel m pouvant excéder 6.

<u>Robot redondant</u>: *robot pour lequel la dimension de l'espace opérationnel excède celle des actionneurs.*

$$dX = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{2.2.9}$$

Ou aussi,

$$dX = J_A \cdot dq \qquad \textbf{2.2.10}$$

$J_A(q)$ est appelée **matrice Jacobienne analytique** du robot.

Cette matrice dépend de la position articulaire q du robot et du système de représentation choisi pour les orientations:

$$J_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q_1} & \frac{\partial f_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \qquad \textbf{2.2.11}$$

En divisant chaque membre de l'équation par dt, nous obtenons

$$\dot{X} = J_A \cdot \dot{q} \qquad \textbf{2.2.12}$$

Exemple 2 :
Soit l'exemple précédent d'un robot rotatif plan à 2 ddl,

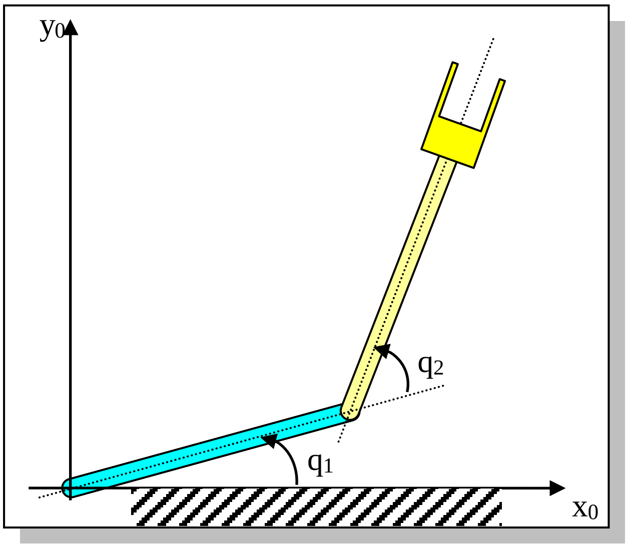

Figure 2.2.1, Robot plan à 2 ddl

La transformation de coordonnées directe (modèle géométrique) de ce manipulateur est donnée par:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(q_1, q_2) \\ f_2(q_1, q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

En appliquant la loi des dérivées partielles:

$$J_A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Et
$$\underline{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}}$$

<u>Remarques :</u>
- Le Jacobien analytique nécessite la disponibilité du modèle géométrique et le choix d'un mode de représentation de (ou des orientations) de l'organe terminal.
- Le Jacobien analytique n'est pas unique car dépend du choix des orientations.

2.2.3 Singularités d'un robot

Le terme « singularité » fait penser à un comportement ou un état non souhaitable, peut être dangereux. Ce comportement singulier du robot est ainsi non généralisé sur le volume de travail du robot mais a lieu dans des situations bien terminées.

Alors, qu'est ce bien cette singularité ?
En mathématique nous parlons de matrice singulière quand le déterminant de cette dernière est nulle et qu'elle devient non inversible (Le système d'équations associé n'a ainsi pas de solutions).

Nous savons que :

$$\dot{X} = J \cdot \dot{q}$$

La cinématique inverse est ainsi donnée par,

$$\dot{q} = J^{-1} \cdot \dot{X}$$

L'existence de cette cinématique inverse,i.e l'existence de la combinaison des vitesses articulaires qui donne lieu à la vitesse opérationnelle donnée, dépend de la singularité de cette matrice Jacobienne.
Lorsque <u>*det(J) = 0*</u>, cette dernière n'est pas inversible et le robot est en singularité. La résolution de l'équation précédente selon la variable articulaire permet de maîtriser les situations singulières.
Savoir où se trouvent les singularités dans le volume de travail est important car:
- A la position singulière,
  - Si c'est un robot sériel, le robot perd un (ou plusieurs) degrés de liberté

  - Si c'est un robot parallèle, le robot gagne un (ou plusieurs) degrés de liberté devenant non rigide.
- La transformation de coordonnées inverse possède parfois un nombre infini de solutions.
- A proximité d'une singularité, de petites vitesses dans l'espace cartésien peuvent conduire à de très grandes vitesses dans les articulations donc induit des difficultés à réaliser de tels mouvements.

<u>On peut généralement classifier les singularités en 2 groupes:</u>

- les singularités de bord du volume de travail,
- les singularités internes: Elles arrivent généralement lorsque deux axes ou plus s'alignent. Ceci pose souvent un problème lors de la génération de trajectoire.

<u>Exemple</u>

Nous reprenons l'exemple du robot planaire à deux degrés de liberté. L'inversion de la matrice Jacobienne de l'exemple du robot rotatif plan à 2ddl nous donne:

$$J^{-1} = \frac{1}{l_1 l_2 \sin q_2}\begin{bmatrix} l_2\cos(q_1+q_2) & l_2\sin(q_1+q_2) \\ -l_1\cos q_1 - l_2\cos(q_1+q_2) & -l_1\sin q_1 - l_2\sin(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

Cette matrice est singulière si son déterminant est nul, c'est-à-dire si

$$l_1 l_2 \sin(q_2) = 0\,,$$

ou pour:

$$q_2 = k \cdot \pi\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ces singularités correspondent aux 2 cas représentés sur la figure ci dessous.

- Tous les points situés sur les cercles de rayon l_1+l_2 et l_1+l_2 sont des points singuliers de ce manipulateur.
  -> Elles se situent sur les bords du volume de travail du robot.
  -> Sur ces singularités, le robot perd un degré de liberté.

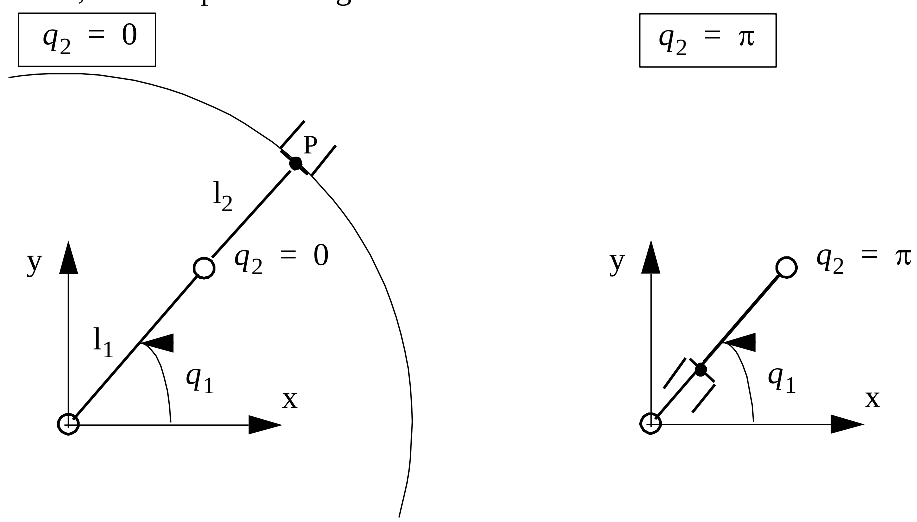

Figure 2.2.2, Singularités du robot planaire à deux degrés de liberté

Il y a perte d'un ddl car le préhenseur ne peut bouger que selon l'arc de cercle au lieu de pouvoir bouger librement selon les deux axes x et y.

2.2.4 Utilités du Jacobien

Le Jacobien possède diverses utilités. Nous savons néanmoins qu'il permet de relier les vitesses opérationnelles et articulaires et variations articulaires aux variations opérationnelles. Soient,

$$\dot{X} = J_A \cdot \dot{q} \quad \text{et} \quad dX = J_A \cdot dq$$

Nous pouvons ainsi résumer les utilités du Jacobien comme suit :

- Reliant les vitesses articulaires aux opérationnelle, il peut donner une information importante sur les vitesses nominales des moteurs à choisir.
- Il est aussi appelé matrice de sensibilité car permet de connaître la sensibilité au niveau de a sortie connaissant celle des articulations (moteurs+transmission locale),
- Permet de connaître et maîtriser ainsi les singularités du robot. Il est aussi appelé matrice de stabilité.
- Permet d'intégrer numériquement le modèle géométrique directe (ie. par l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson) pour obtenir le modèle géométrique inverse (ou vice-versa) .
- Peut être utilisé en contrôle dans plusieurs schémas de commande.

Bibliographie

[1] Sciavicco, L., Siciliano, B., Modelling and control of robot manipulators, Springer, 1996.
[2] Craig, J. J., Introduction to robotics, Adison-Wesley, 1989.
[3] Craig, J. J., Introduction to robotics, , Prentce Hall, 2005.
[4] Dombre, E.,Khalil, W., Modélisation et commande des robots, Ed. Hermes, 1988.
[5] Tsai, L., W., Robot Analysis, John Wiley and Sons, 1999.

2.2.5 Annexe-

2.2.5.1 Vecteurs vitesses d'un corps rigide

Il faut 6 paramètres pour connaître la position d'un corps rigide dans l'espace. Trois paramètres représentent les coordonnées translationnelles de son centre de gravité et trois paramètres représentent son orientation dans l'espace.

Quelques exemples de mouvements de corps solides :

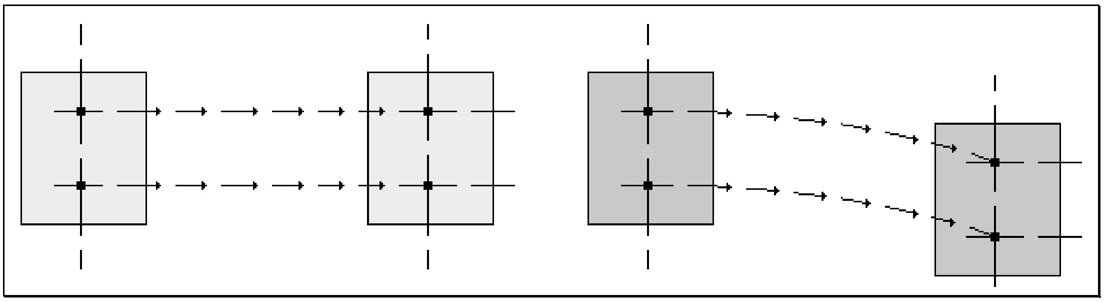

Figure 2.2.3, mouvements translationnels d'un corps rigide

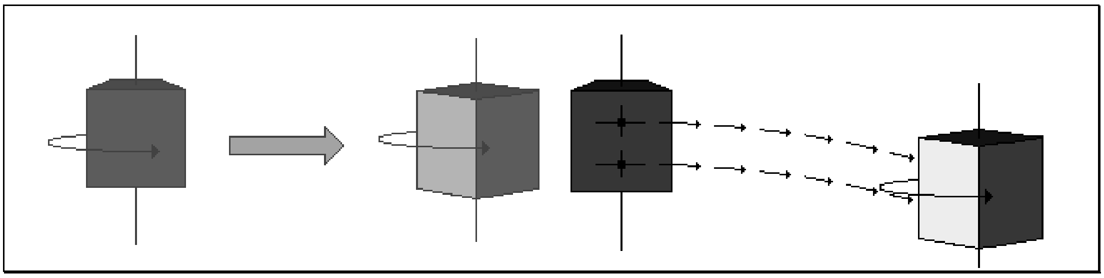

Figure 2.2.4, rotation autour d'un axe d'un corps rigide (à gauche), combinée à une translation (à droite)

Comme il a été introduit au paragraphe précédent, il y a différentes manières de représenter la rotation d'un corps rigide. A titre d'exemples, peuvent être utilisés les configurations des angles d'Euler, les angles RPW (roll, pitch et yaw ou en français tangage, roulis et lacet), les quaternions ou d'autres.

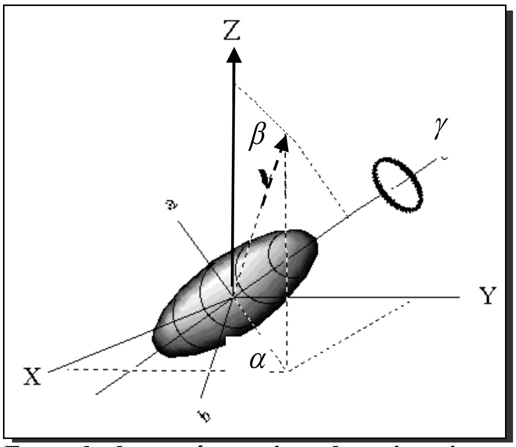

Figure 2.2.5, Exemple de représentations de trois orientations d'Euler

A chaque orientation instantanée est associée une vitesse instantanée correspondant à la variation dans le temps de cette orientation. Le vecteur vitesse instantané défini dans le repère {X,Y,Z} a la même direction que l'axe de rotation du corps rigide en mouvement. Le sens de ce vecteur vitesse correspond au sens de serrage d'une vis (voir Figure 2.2.6).

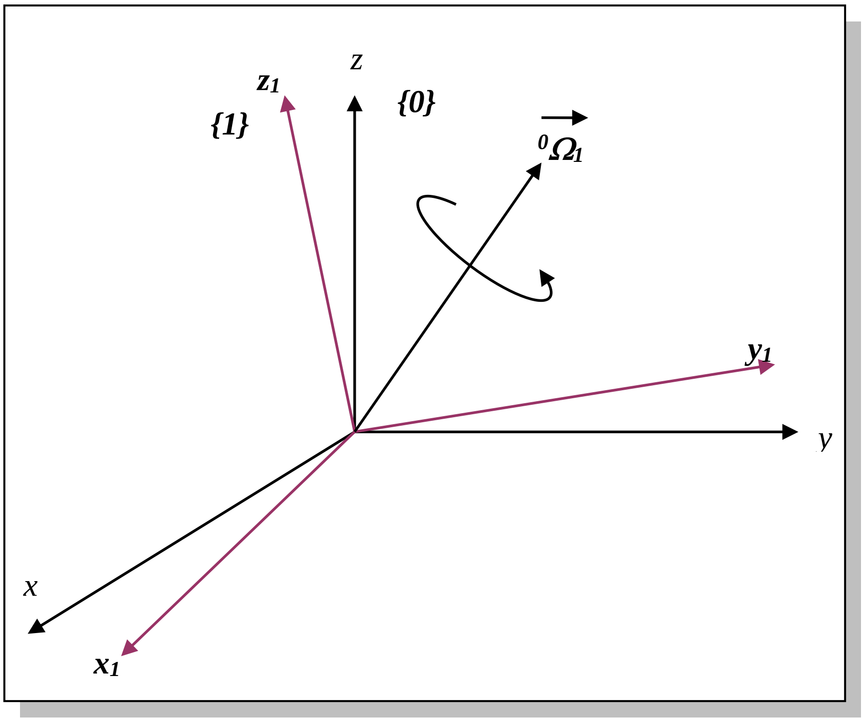

Figure 2.2.6, Rotation d'un corps rigide attaché au repère {1} par rapport à {0} avec la vitesse $^0\vec{\Omega}_1$

Soient deux repères *{0}* et *{1}*. *{0}* désigne le repère fixé à la base et *{1}* désigne le repère fixé à un objet tournant autour de *{0}* avec une vitesse $^0\vec{\Omega}_1$. $^0\vec{\Omega}_1$ correspond au vecteur vitesse de rotation instantané de *{1}* par rapport à *{0}*. Son sens et son module varient dans le temps. Ainsi, ses composantes cartésiennes dans le repère *{0}* varient aussi dans le temps. L'axe de rotation est instantané et, contrairement à la vitesse linéaire, ne peut pas être intégré pour retrouver l'orientation du corps à partir de la valeur initiale de l'orientation. Ceci est à l'origine d'une difficulté importante pour la description cinématique du corps solide.

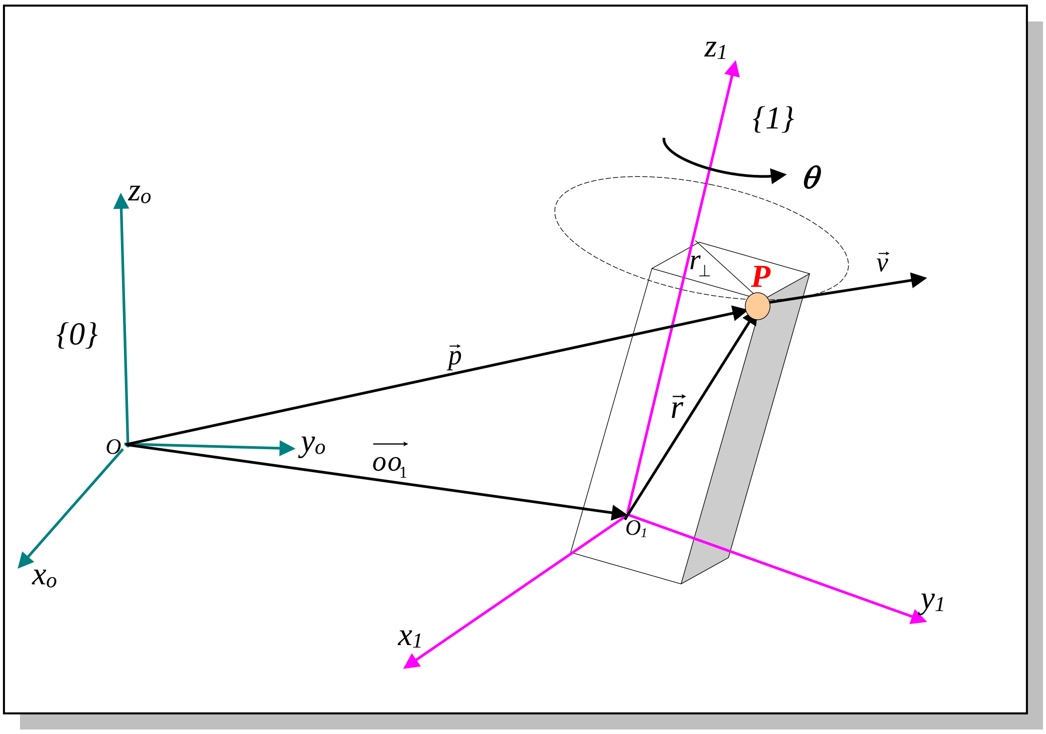

Figure 2.2.7, mouvement combiné d'un corps rigide {1} par rapport au repère de base {0}

La figure ci-dessus représente le mouvement combiné de translation et de rotation d'un corps rigide (relié à son repère {1}) par rapport au repère de base {0}.

La question à laquelle nous allons répondre est :
→ *Quel est le mouvement résultant de ce corps rigide exprimé dans le repère de base ?*

Soient :

- $\{x_1, y_1, z_1\}$, le repère mobile fixé au corps en mouvement,
- $\vec{p}$, le vecteur reliant un point *P* du corps solide au centre du repère de base {0},
- $\overrightarrow{oo_1}$, le vecteur translation du repère fixé au corps rigide {1} par rapport au repère de base {0},
- $\vec{r}$ vecteur position d'un point *P* du solide dans son repère {1},
- $r_\perp$ est a distance entre le point *P* et l'axe z_1,

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que le vecteur position $\vec{r}$ du point *P* du corps rigide (Figure 2.2.7) exprimé dans le repère {1} peut être décrit par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \overrightarrow{OO_1} + R_1 \cdot \vec{r} \qquad \textbf{2.2.13}$$

$\vec{r}$ étant exprimé dans le repère {1} et R_1 est la matrice de rotation du repère {1} par rapport à {0}.
Ainsi, pour connaître la vitesse du point *P* dans le repère de base {0}, il suffirait de dériver l'équation (2.2.4) dans le temps. Ceci donnerait :

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1} + \frac{d}{dt}R_1 \cdot \vec{r} + R_1 \cdot \frac{d}{dt}\vec{r} \qquad \textbf{2.2.14}$$

La dérivée de la matrice de rotation peut être réécrite sous la forme suivante [Sciavicco 96]:

$$\frac{d}{dt}R_1 \cdot \vec{r} = \vec{\omega}_1 \wedge R_1 \cdot \vec{r} = \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge R_1 \cdot \vec{r} \qquad \textbf{2.2.15}$$

$\omega_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1$ est le vecteur vitesse instantané de la rotation du repère {1} exprimé dans le repère {0}. Le vecteur vitesse résultant s'exprime finalement comme suit :

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1} + R_1 \cdot \frac{d}{dt}\vec{r} + \vec{\omega}_1 \wedge R_1 \cdot \vec{r} \qquad \textbf{2.2.16}$$

Ou encore si le point P est fixe dans son repère {1}, il obéït à la loi de mouvement suivante :

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1} + \vec{\omega}_1 \wedge R_1 \cdot \vec{r} \qquad \textbf{2.2.17}$$

Parenthèse :
Cette relation peut être interprétée d'une manière intuitive. Un point quelconque *P* du corps rigide (voir mouvement combiné d'un corps rigide {1} par rapport au repère de base {0}(Figure 2.2.7) tournant avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ décrit un cercle de rayon $r_\perp$ autour de l'axe z_1. La vitesse linéaire qui en résulte est tangentielle et a pour module $\|v\| = r_\perp \dot{\theta}$. Ceci correspond au produit vectoriel de $\dot{\theta}\vec{z}_1$ et de $\vec{r}$.

Soit,
$$\vec{v} = \dot{\theta}(\vec{z}_1 \wedge \vec{r}_\perp) \qquad \textbf{2.2.18}$$

2.2.5.2 Jacobien géométrique

Une méthode de déduire le Jacobien est de le construire d'une manière vectorielle. Ce Jacobien est ainsi appelé ***Jacobien géométrique*** ou parfois ***Jacobien de base***. Il ne dépend pas du mode de représentation des orientations de l'organe terminal et il est ainsi unique.

Le vecteur de vitesse de rotation $\vec{\omega}$ considéré dans ce cas est exprimé dans le repère de base avec ces trois composantes $\{\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\}$.

- ω_x, est la composante du vecteur rotation selon l'axe *x*.
- ω_y, est la composante du vecteur rotation selon l'axe *y*.
- ω_z, est la composante du vecteur rotation selon l'axe *z*.

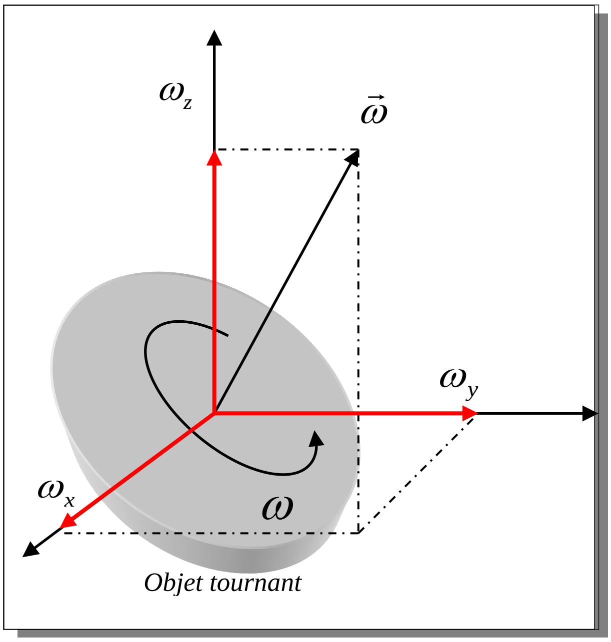

Figure 2.2.8, composantes vectorielles d'une rotation

Construction de la matrice Jacobienne géométrique

La matrice Jacobienne géométrique est construite d'une manière vectorielle. Considérons une succession de liaisons d'un robot sériel donné comme à la figure ci-dessous. Cette chaîne cinématique est ouverte et met en liaison plusieurs actionneurs linéaires et rotatifs.

La vitesse du corps de liaison ***i*** par rapport au corps précédent ***i-1*** dépend du type d'articulation ***i***. Si l'articulation est de type prismatique alors cette vitesse est linéaire et elle est décrite par un vecteur $\vec{v}_i$. Pour une articulation rotoïde, cette vitesse est décrite par un vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}_i$. Ces vecteurs sont liés à la vitesse de l'articulation $\dot{q}_i$ par :

$$\begin{cases} \vec{v}_i = \varepsilon_i \dot{q}_i \vec{z}_i \\ \vec{\omega}_i = (1-\varepsilon_i)\dot{q}_i \vec{z}_i \end{cases}$$

Avec,
$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \textit{pour une articulation rotoïde} \\ 1 & \textit{pour une articulation prismatique} \end{cases}$$

$\vec{z}_i$ donne la direction du mouvement selon l'articulation (serrage d'une vis si articulation rotoïde).

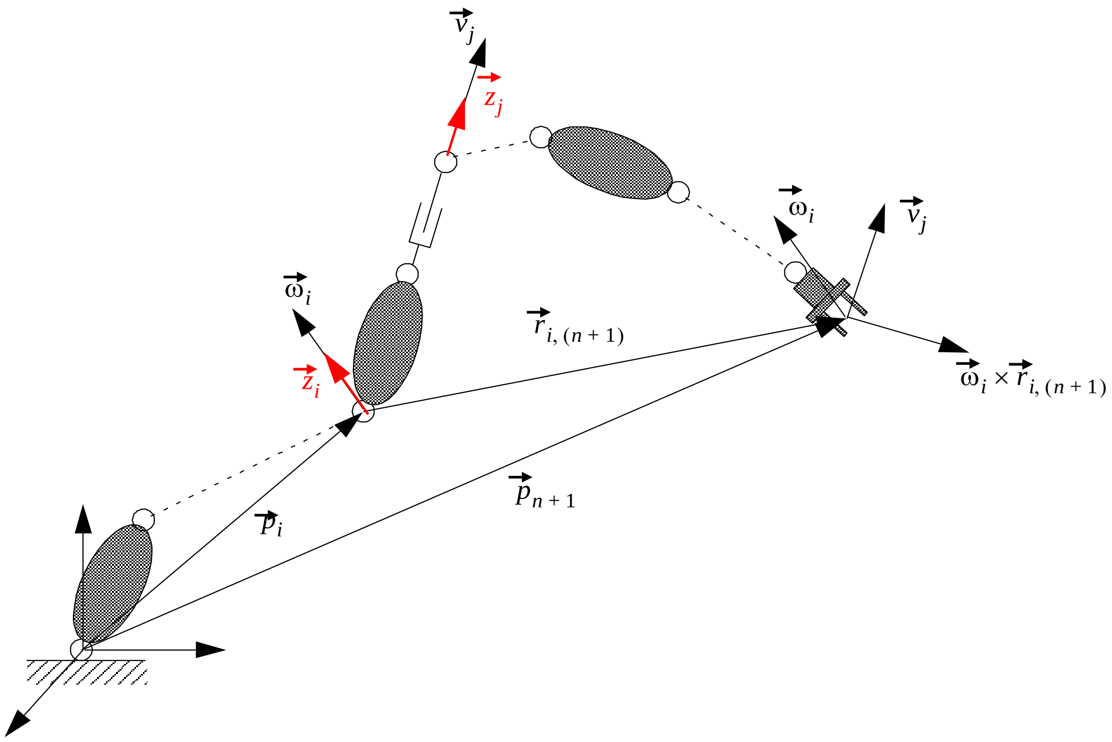

Figure 2.2.9, Chaîne cinématique ouverte et propagation de la vitesse

<u>Qu'en est il de la contribution du mouvement d'une articulation sur l'organe terminal ?</u>

Une articulation prismatique ***i*** contribue directement par une vitesse linéaire $\vec{v}_i$. Par contre, une articulation rotoïde ***i*** tournant avec une vitesse rotative $\vec{\omega}_i$ donne lieu au niveau de l'organe terminal non seulement à une vitesse de rotation $\vec{\omega}_i$ mais aussi à une vitesse translationnelle $\vec{\omega}_i \wedge \vec{r}_{i,n+1}$ (équation 2.2.9). $\vec{r}_{i,n+1}$ est le vecteur liant l'origine du repère lié à l'articulation ***i*** à l'origine du repère lié à l'organe terminal.
Ainsi, la vitesse de l'organe terminal est obtenue en sommant toutes les contributions de chacune des articulations.

Nous pouvons alors écrire :

La vitesse linéaire résultante, $\vec{v} = \sum_1^n \left(\varepsilon_i \vec{z}_i + (1-\varepsilon_i)\vec{z}_i \wedge \vec{r}_{i,n+1}\right) \cdot \dot{q}_i$ **2.2.19**

La vitesse rotative résultante, $\vec{\omega} = \sum_1^n (1-\varepsilon_i)\vec{z}_i \dot{q}_i$ **2.2.20**

La Jacobienne géométrique est alors immédiatement déduite.

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J(q) \cdot \dot{q}$$

Compte tenu des équations précédentes, elle possède la forme générale suivante :

$$J/q) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \vec{z}_1 + (1-\varepsilon_1)\vec{z}_1 \wedge \vec{r}_{1,n+1} & \cdots & \varepsilon_n \vec{z}_n + (1-\varepsilon_n)\vec{z}_n \wedge \vec{r}_{n,n+1} \\ (1-\varepsilon_1)\vec{z}_1 & \cdots & (1-\varepsilon_n)\vec{z}_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{2.2.21}$$

En remplaçant $\vec{r}_{i,n+1} = \vec{p}_{n+1} - \vec{p}_i$, avec $\vec{p}_i$ est le vecteur reliant le centre de repère de base au centre du repère lié à l'articulation i.

Nous obtenons :

$$J(q) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \vec{z}_1 + (1-\varepsilon_1)\vec{z}_1 \wedge (\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_1) & \cdots & \varepsilon_n \vec{z}_n + (1-\varepsilon_n)\vec{z}_n \wedge (\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_n) \\ (1-\varepsilon_1)\vec{z}_1 & \cdots & (1-\varepsilon_n)\vec{z}_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{2.2.22}$$

$$J(q) = \begin{bmatrix} R_1(\varepsilon_1 \vec{z}_0 + (1-\varepsilon_1)\hat{z} \cdot \vec{r}_{1,n+1}) & \cdots & R_n(\varepsilon_n \vec{z}_0 + (1-\varepsilon_n)\hat{z} \cdot \vec{r}_{n,n+1}) \\ (1-\varepsilon_1)R_1\vec{z}_0 & \cdots & (1-\varepsilon_n)R_1\vec{z}_0 \end{bmatrix} \qquad \textbf{2.2.23}$$

Avec $z_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

Et $\hat{z} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

L'introduction de la nouvelle variable $\hat{z}$ permet de réécrire le produit vectoriel $\vec{z}_0 \wedge \vec{r}_{n,n+1}$ en un produit matriciel $\hat{z} \cdot \vec{r}_{i,n+1}$.

Cette matrice Jacobienne peut également être décomposée en deux parties, la première mettant en évidence la translation J_P, l'autre J_O mettant en évidence la rotation de l'organe terminal. Chacune de ces composantes est de dimension 3.n La matrice Jacobienne est ainsi écrite sous la forme suivante.

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_P(q) \\ J_O(q) \end{bmatrix}$$

Nous écrivons alors,

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_{P1}(q) & \cdots & J_{Pn}(q) \\ J_{O1}(q) & \cdots & J_{On}(q) \end{bmatrix}$$

Avec les colonnes de la matrices définies comme précédemment, ie.

$$\begin{bmatrix} J_{pi}(q) \\ J_{Oi}(q) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \vec{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} & \textit{pour une articulation prismatique} \\ \begin{bmatrix} \vec{z}_i \wedge (\vec{p}_{n+1} - \vec{p}_i) \\ \vec{z}_i \end{bmatrix} & \textit{pour une articulation rotoïde} \end{cases} \qquad \textbf{2.2.24}$$

Remarque :

La méthode de construction de la Jacobienne géométrique traitée dans ce paragraphe n'est pas valable pour les robots parallèles. Effectivement, dans cette méthode vectorielle nous avons supposé que la chaîne cinématique était ouverte et qu'une pure translation au niveau d'une articulation prismatique induisait une pure translation au niveau de la sortie. Dans le cas d'un robot parallèle cette hypothèse n'est pas forcément valable en raison de la fermeture de la boucle cinématique. Ainsi, une translation induit facilement une rotation (Voir Figure 2.2.10). Pour plus de détail voir sur la méthode vectorielle dédié aux robots parallèles voir [Craig, 89].

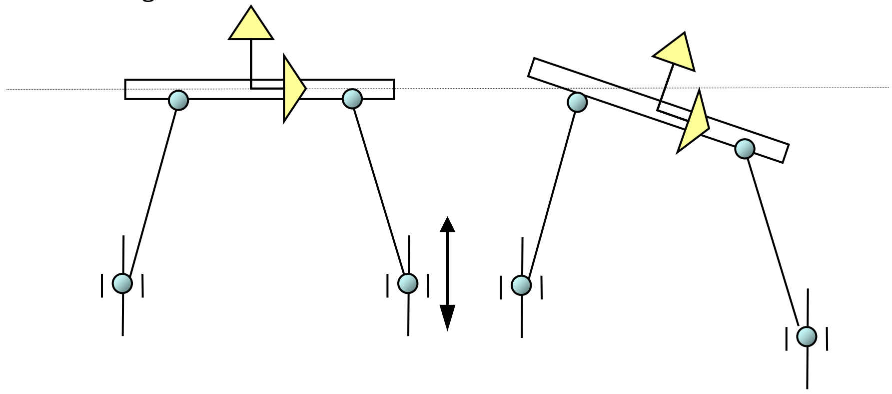

Figure 2.2.10, translation pure sur une structure parallèle à 2 ddl

Exemple 1:

Soit le robot plan rotatif à 2 ddl suivant :

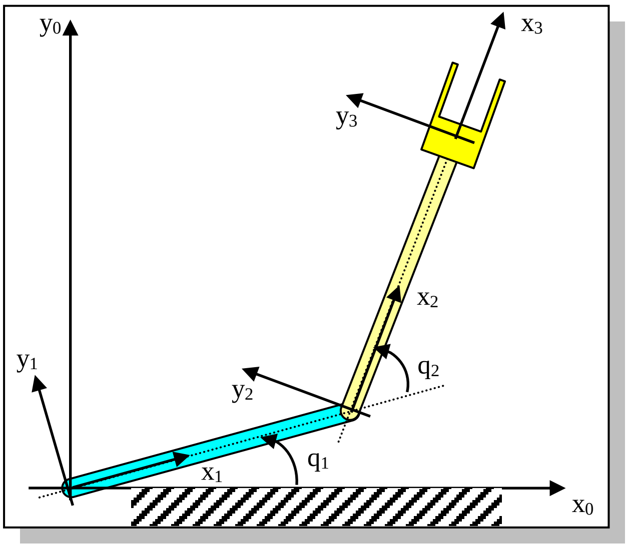

Figure 2.2.11, robot planaire à 2 ddl pour calcul de Jacobien géométrique

Nous considérerons que chaque lien i est de longueur l_i.

La matrice Jacobienne s'écrira :

$$J = \begin{bmatrix} \vec{z}_1 \wedge (\vec{p}_3 - \vec{p}_1) & \vec{z}_2 \wedge (\vec{p}_3 - \vec{p}_2) \\ \vec{z}_1 & \vec{z}_2 \end{bmatrix}$$

Puisque,

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(q_1) \\ l_1 \sin(q_1) \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteurs de liaison depuis la base à la 1ère et la 2ème articulation.

$\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ l_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur de liaison depuis la base à l'organe terminal.

$\vec{z}_1 = \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, car le robot est planaire

Alors,

$$J = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il faut remarquer que dans ce cas le robot est de dimension 2 et que nous nous intéressons uniquement aux translations. La Jacobienne mettant en évidence uniquement les translations s'écrit:

$$J_P = \begin{pmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La seule rotation mise en évidence dans la définition du Jacobien (6X2) est celle de l'orientation du repère fixé à l'organe terminal par rapport au repère de base.
$\omega_z = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$, i.e. composition des deux rotations des deux articulations 1 et 2, décrit la vitesse de rotation de l'organe terminal autour de l'axe de base z_0.

Exercice :
Trouver le Jacobien pour le robot 3ddl plan (Figure 2.2.12). Considérez que chaque lien est de longueur l_i.
Supposer

- l1= l2 =l3 = 350 mm,
- la résolution du capteur est de 0.005 degrés,
- la précision du réglage est de 0.02 degrés,

Quelles sont les vitesses maximales obtenues au niveau des moteurs ?
Quelles sont les précisions obtenues au niveau du préhenseur ?
Attention faire la distinction entre précision et résolution !!!

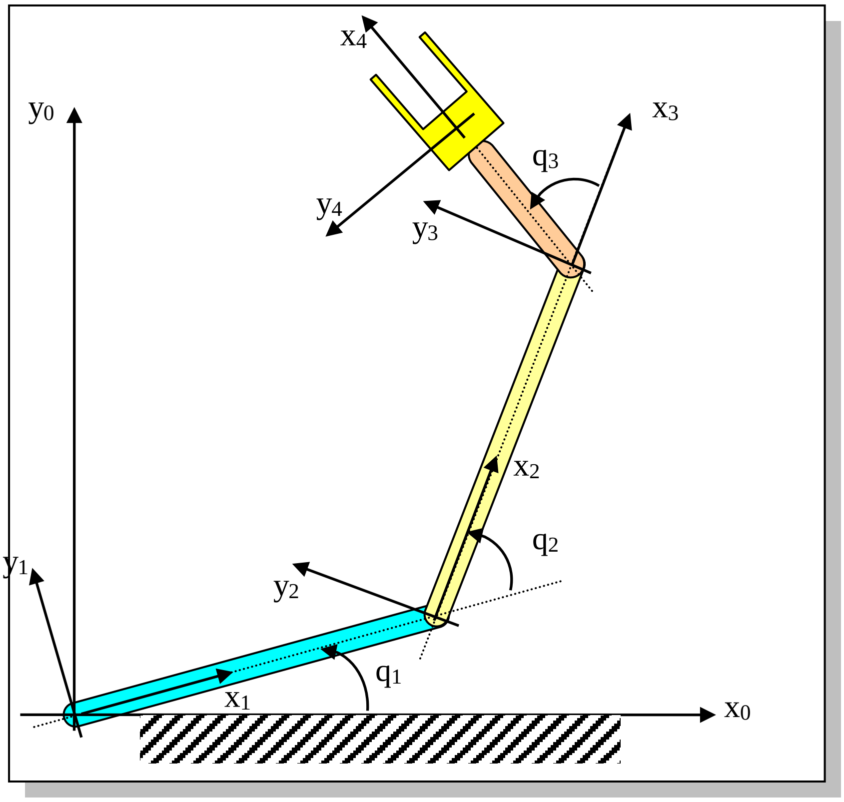

Figure 2.2.12, robot planaire 3ddl.

2.2.5.3 Discussion concernant les deux matrices Jacobienne

Il existe d'autres Jacobiens que ceux que nous avons présentés au cours de ce paragraphe (géométrique et analytique).
Mais, une question se pose :

Avons-nous présenté des Jacobiens ou des méthodes de détermination du Jacobien ?

- Si nous avons présenté des Jacobiens alors en quoi diffèrent ils ?
- Si nous avons présenté des méthodes de détermination, alors le Jacobien est il unique et intrinsèque à chaque robot ?

La réponse correcte est que nous avons fait les deux, i.e. nous avons discuté de deux types de Jacobien et que nous avons présenté deux méthode de détermination du Jacobien.
- Le premier dit géométrique par l'essence même de sa construction vectorielle.
- Le second dit analytique car provient d'une pure dérivation analytique d'un modèle géométrique qui lui-même est analytique.

→ ***Mais quelle est la différence entre les deux ?***
- La première différence est méthodologique (du fait des deux méthodes différentes de détermination).
- La seconde est d'ordre représentative. En effet, le Jacobien analytique obtenu à partir de la dérivation du modèle géométrique nécessite le choix d'une représentation angulaire de la sortie qui provient de la nature même du robot et de ce qu'il fournit comme sorties angulaires. Alors que le Jacobien géométrique utilise directement les

axes du repère de base et fait ainsi intervenir les trois composantes $\{\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\}$ (voir Figure 2.2.8).

→ ***Pouvons nous passer d'une représentation à une autre ?***
Supposons que nous avons à disposition les vitesses de rotation comme étant les dérivées successives des angles d'Euler :

$$\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

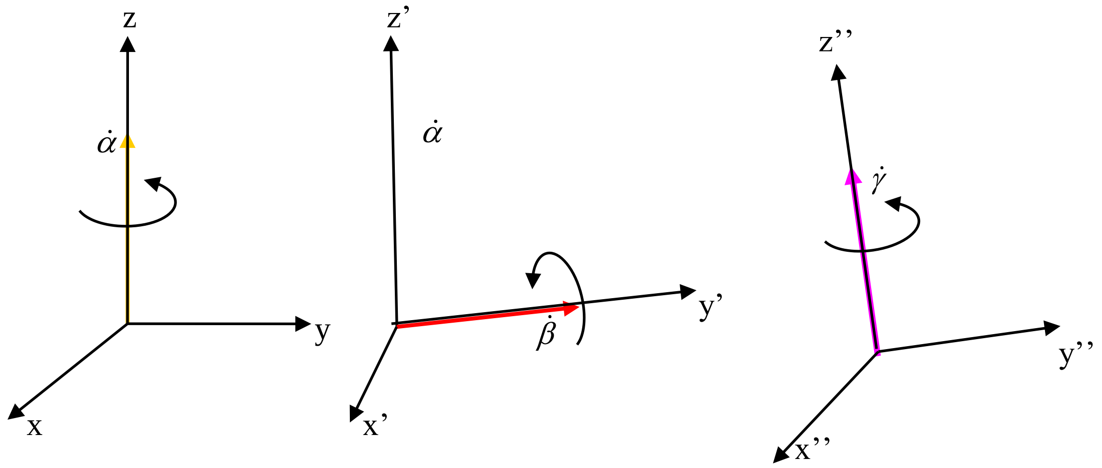

Figure 2.2.13, vitesses rotationnelles pour les angles d'Euler Z'Y'Z'

Nous pouvons alors exprimer chacune des vitesses dans le repère de base après trois orientations successives :

- Comme résultat de la rotation $\dot{\alpha}$: $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\alpha}[0 \quad 0 \quad 1]^T$
- Comme résultat de la rotation $\dot{\beta}$: $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\beta}[-\sin(\alpha) \quad \cos(\alpha) \quad 1]^T$
- Et selon la rotation $\dot{\gamma}$: $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\gamma}[\cos(\alpha)\sin(\beta) \quad \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad \cos(\beta)]^T$

Ainsi nous pouvons écrire la relation entre le vecteur vitesse angulaire ω et le vecteur vitesse angulaire $\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'}$ (tel que défini pour les angles d'Euler précédents) comme suit. :

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -s_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ 0 & c_\alpha & s_\alpha s_\beta \\ 1 & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \mathcal{T}_r(\Theta).\dot{\Theta}_{Z'Y'Z'} \qquad \textbf{2.2.25}$$

Et ainsi, il existe toujours une possibilité de passer de la Jacobienne analytique à la Jacobienne géométrique.

En considérant la translation et la rotation, nous écrirons,

$$J(q) = \mathcal{T}(q).J_a(q) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_p(q) & 0 \\ 0 & \mathcal{T}_r(q) \end{bmatrix}.J_a(q), \qquad \textbf{2.2.26}$$

$\mathcal{T}(q)$ est la matrice de transformation entre les deux représentations.

$\mathcal{T}_{\mathrm{p}}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice de transformation des translations qui vaut l'identité. Ceci vaut uniquement dans le cas où les translations sont représentés dans le même référentiel.

→ ***Que se passe t il dans le cas d'un changement de référentiel?***

De la même manière que nous pouvons passer d'une représentation de la position entre un référentiel et un autre, nous pouvons passer de la représentation du Jacobien entre un choix de coordonnées et un autre. Soit R^u la matrice de rotation entre les deux repères choisis, alors :

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_u \\ \vec{\omega}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^u & 0 \\ 0 & R^u \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{\omega} \end{bmatrix}$$

Qui donnerait :

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_u \\ \vec{\omega}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^u & 0 \\ 0 & R^u \end{bmatrix} \cdot J \cdot \dot{q} = J^u \cdot \dot{q}$$

Avec :

$$J^u = \begin{bmatrix} R^u & 0 \\ 0 & R^u \end{bmatrix} \cdot J$$

J^u représente le Jacobien dans le nouveau repère.