La batalla de Iwo Jima

Pose, Alberto Miguel
ITBA
Mordor 399
Buenos Aires, Argentina
apose@alu.itba.edu.ar

Catalano, Juan Ignacio
ITBA
Madero 399
Buenos Aires, Argentina
jcatalan@alu.itba.edu.ar

Palombo, Martín
ITBA
Madero 399
Buenos Aires, Argentina
mpalombo@alu.itba.edu.ar

Vázquez, Santiago Luis
ITBA
Madero 399
Buenos Aires, Argentina
savazque@alu.itba.edu.ar

ABSTRACT

En el presente artículo se modela un combate guerra-guerra, considerando las fuerzas como medida del poderío de ambas partes y analizando el modelo construído para obtener conclusiones mediante su observación. De dicho análisis se desprende que el uso del modelo planteado resulta adecuado para simular esta batalla, obteniendose resultados similares a los reales. También se analiza el comportamiento del sistema, mediante la observación del modelo, variando las funciones de refuerzos enviados a la batalla. Además se realiza una deducción analítica que concluye en una interesante descripción de la relación de efectividad de combate entre ambas fuerzas. CAMBIAR

1. INTRODUCCIÓN

El 16 de febrero de 1945, durante la segunda guerra mundial, se libra la batalla de Iwo Jima en la isla de nombre homónimo. Siend sin duda uno de los acontecimientos bélicos más sangrientos y lamentables de la historia. La ubicación geográfica estratégica de dicha isla otorga gran importancia histórica a esta batalla y es por ello que nos interesa nos interesa estudiarla como un sistema, modelándola y pudiendo extraer conclusiones a partir de dicho modelo. Se pretende verificar el modelo utilizado, computando y analizando los resultados obtenidos de la simulación y variando parámetros del mismo. Se pueden encontrar antecedentes a este trabajo, como por ejemplo el llevado acabo por Christine Lind titulado "Verifying Lanchester's Combat Model Battle of Iwo Jima".

En la siguiente sección se presenta el modelo utilizado para realizar dicha simulación. En la tercer sección se adapta el modelo genérico, previamente mostrado, al caso particular de la batalla de Iwo Jima. En la sección cuatro se presenta un resultado matemático-físico cuya importancia se explica en la misma sección. En la sección cinco se presentan los resultados obtenidos a partir de la simulación. En la sexta sección se modela nuevamente la batalla pero utilizando distintas funciones de refuerzo para las fuerzas militares estadounidenses. Por último, en la sección siete se agrupan las conclusiones obtenidas durante la realización del trabajo.

2. "LA MEJOR VICTORIA ES VENCER SIN COMBATIR"

Para modelar este sistema se consideran las dos fuerzas militares representadas por $(x^1(t), x^2(t))$ siendo la primera correspondiente a Estados Unidos y la segunda al Imperio de Japón. La medida de estas variables representa el poderío de ambas partes del combate. El vector definido como:

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t))^T \tag{1}$$

representa el vector de estado, es decir, el poderío de ambas partes en el instante t. El espacio de estados se considera como la cantidad de unidades de combate, considerando todo tipo de ellas (individuos, equipos, recursos, etc). Como es de esperarse, las entradas al sistema estan dadas por los refuerzos enviados por cada uno de los países.

Hasta aquí, la representación del modelo de combate. Pero en particular, nos referimos a un combate de tipo guerra-guerra, es decir, convencional. En este caso, las pérdidas en combate están solamenten dadas por el tamaño de la fuerza contraria, con lo cual nuestro modelo queda descripto de la siguiente manera:

$$\dot{x}^1(t) = -ax^1(t) - c_{21}x^2(t) \tag{2}$$

$$\dot{x}^2(t) = -bx^2(t) - c_{12}x^1(t) \tag{3}$$

Siendo a y b constantes positivas que representan las tasas unitarias de pérdidas operativas. Teniendo también c_{12}, c_{21} constantes positivas que representan las tasas de efectividad de ataque de la fuerza 1 sobre la 2 y de la fuerza 2 sobre la 1 respectivamente.

3. RECORDANDO LA HISTORIA

En esta sección se utiliza una adaptación del modelo presentado anteriormente para simular el sistema dado por el combate entre Japón y Estados Unidos de América, en la ciudad de Iwo Jima en febrero de 1945. Inicialmente Japón cuenta con una fuerza de 21500 unidades atrincheradas en el lugar, mientras que su enemigo incialmente no dispone de unidades en Iwo Jima y envía refuerzos siguiendo el siguiente régimen:

$$f(t) = \begin{cases} 54000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 6000 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t < 5 \\ 13000 & 5 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases} \tag{4}$$

Siendo f la función que describe la llegada de refuerzos de los Estados Unidos. Como se considera que Japón no envía refuerzos durante este combate, el modelo resulta descripto por:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -\alpha x^2 + f(t) && (5) \\ \dot{x}^2 &= -\beta x^1 && (6) \end{aligned}$$

4. PODER K

El primer resultado obtenido, es meramente analítico y es presentado en esta sección. A partir de una demostración matemática obtenemos una relación entre las fuerzas de combate y una constante (constante de integración) que determina y controla dicho nexo.

Tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha y && (7) \\ \dot{y} &= -\beta x && (8) \end{aligned}$$

Explicitando, obtenemos la expresión

$$\dot{x} = -\alpha y \tag{9}$$

Como sabemos que $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = -\alpha y \tag{10}$$

Reemplazando con la ecuación 7 resulta

$$-\frac{\partial x}{\partial y}\beta x = -\alpha y \tag{11}$$

Reemplazando adecuadamente los diferenciales tenemos

$$-\beta \int x dx + C = -\alpha \int y dy + D \tag{12}$$

Siendo C y D constantes de integración. Podemos considerar $D - C = k$. De lo cual deducimos

$$\alpha \frac{y^2}{2} - \beta \frac{x^2}{2} = k \tag{13}$$

Considerando $K = 2k$ se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\alpha y^2 - \beta x^2 = K \tag{14}$$

Como se puede observar claramente, se obtiene una relación entre ambas fuerzas de combate, regida por una constante a la cual denominamos K. Esta constante resulta muy interesante para analizar. Es por ello que analizamos los tres casos de posibles rangos de valores de K, explicando su resultado en el comportamiento del sistema.

Caso 1. Si $K > 0$ la fuerza descripta por y resulta claramente mayor a la descripta por x, resultando en una inclincación hacia la victoria del primero.

Caso 2. Si $K < 0$ ocurre lo opuesto a lo descritpo en el punto anterior.

Caso 3. El caso que encontramos más interesante es cuando $K = 0$. En este, la relación entre ambas fuerzas describe una recta. Dicha recta determina el grado de efectividad de las unidades militares de una fuerza sobre la otra. Una vez fijada la pendiente, se puede establecer qué cantidad de unidades son necesarias de una fuerza, ante la presencia de determinada cantidad de unidades enemigas. Esto puede servir también para calcular y analizar estadísticas de efectividad de las unidades en combate contra determinado contrincante.

5. REVIVIENDO LA HISTORIA

Para poder realizar un análisis de lo acontecido en la batalla, se ejecutó la simulación para obtener las trayectorias correspondientes a ambas fuerzas. En la Figura 1 se pueden ver dichas trayectorias. De este podemos observar como, si bien inicialmente las fuerzas militares del Japón eran ampliamente superiores, el hecho de no disponer de refuerzos, como en el caso estadounidense, llevó a una rápida extinción del poderío militar presente en la zona. Por parte de los Estados Unidos, se vé como si bien su fuerza fue decreyendo a un ritmo similar a la japonesa, la mayor presencia militar llevó a que finalmente se note una clara preponderancia de este país en el conflicto. También podemos observar un decaimiento lineal en el caso de las fuerzas japonesas, en contraparte con uno más exponencial (aunque bastante suavizado) por parte de las estadounidenses.

Además, podemos verificar el uso del modelo elegido para la simulación. Para ello, comparamos los resultados obtenidos con los datos recolectados a partir del hecho acontecido. Dicha comparación, correspondiente a la fuerza estadounidense, la graficamos en la Figura 2. Podemos observar el desembarco, en la primer etapa, donde vemos claramente como aumenta rápidamente la cantidad de unidades. A su vez, durante los primeros 5 días al recibirse los refuerzos, se puede ver como se producen picos, donde los aumentos estan dados por la llegada de nuevas unidades y las disminuciones más bruscas estan dadas por las bajas producidas durante el asentamiento de las tropas en el área de batalla.

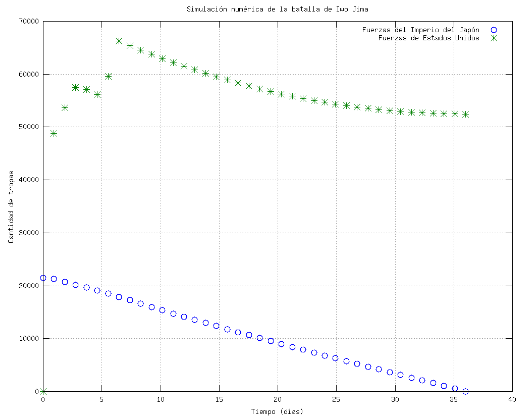

Figure 1: Cantidad de tropas de ambas fuerzas en función del tiempo.

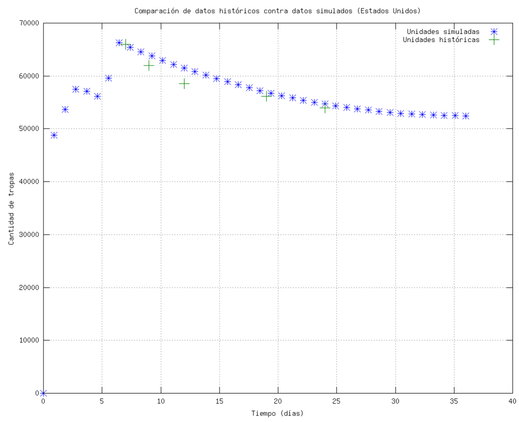

Figure 2: Cantidad de tropas estadounidenses en función del tiempo. Datos correspondientes al hecho y a la simulación.

6. HACIENDO HISTORIA

¿Qué hubiese sucedido si la política de envío de refuerzos de Estados Unidos hubiese sido distinta?. Para responder esta pregunta, veamos como reacciona el sistema al cambiar las políticas de envio de refuerzos estadounidenses.
Se eligieron las tres políticas analizadas en base a la observación de su comportamiento y seleccionando las que nos arrojaron resultados más interesantes para su análisis. Dichas políticas, que denominamos g, h y k son:

$$g(t) = \begin{cases} \lfloor e^{2.5t} \rfloor + 2000 & 0 \leq t \leq 4.6 \\ 0 & t > 4.6 \end{cases} \tag{15}$$

,

$$h(t) = \begin{cases} 54000 - \lfloor 9000t \rfloor & 0 \leq t \leq 6 \\ 0 & t > 6 \end{cases} \tag{16}$$

y

$$k(t) = \begin{cases} 54000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 20 \\ 6000 & 20 \leq t < 21 \\ 0 & 21 \leq t < 35 \\ 13000 & 35 \leq t < 36 \\ 0 & t \geq 36 \end{cases} \tag{17}$$

Notamos que la política de refuerzo k es una variación de la política original, pero extendiendo la cantidad de días entre refuerzos. Si observamos la gráfica presentada en la Figura 3 podemos ver que esta política resulta en un comportamiento del sistema que equipara la cantidad de unidades de una y otra fuerza en cierto punto del tiempo t.

LOS GRAFICOS CAMBIARON TODOS NOSE PORQUE ASIQUE LAS CONCLUSIONES HAY QUE REPLATNEARLAS

AGREGUE UNA POLITICA MAS QUE EL JUGO QUE TIENE (PARA MI) ES VER COMO QUEDAN DOS RECTAS PERO LA PENDIENTE DE LA YANQUI BAJA MUCHO MAS RAPIDO, QUE SI BIEN GANARON SE PUEDE NOTAR LO JUGOSO DE LAS CONSTANTES C12 Y C21.

HAY QUE VOLVER A SACAR JUGOSS, ESTARIA BUENO CAMBIAR LA SEGUNDA POR UNA QUE LA COMA USA

Esto muestra que dicha planificación hubiese sido menos conveniente que la que asumió EEUU en ese momento de la historia. Por otro lado, si vemos el comportamiento del sistema al elegir h como política de refuerzos, presentado en la Figura 4, podemos ver como la preponderancia de las tropas estadounidenses aumenta y supera ampliamente a la japonesa de una manera mucho más conveniente que la elegida originalmente.

7. CONCLUSIONES

Al realizar este trabajo se pudo verificar el modelo elegido, analizando los resultados para compararlos con los datos recolectados historicamente a partir del hecho acontecido. Como conclusión a los cambios de política de refuerzos realizados, se puede decir que EEUU podría haber considerado una mejor política de refuerzos, aunque requeriría un análisis socio-económico y político más profundo para poder determinar porque realmente no lo hizo.
Puntos interesantes que se pueden observar de la primer simulación realizada, son los picos obtenidos al momento de la

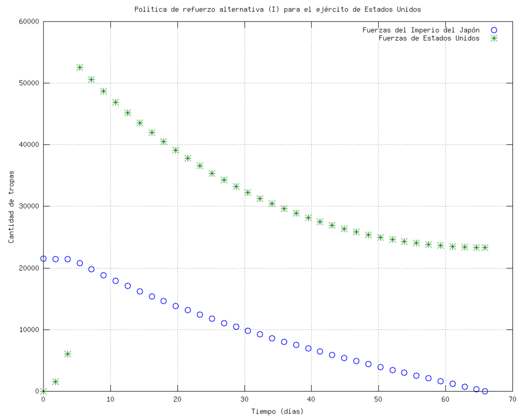

Figure 3: Resultados del combate simulado usando la política de refuerzos alternativa h.

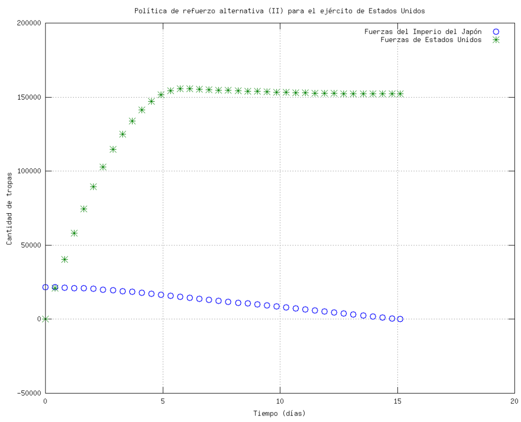

Figure 4: Resultados del combate simulado usando la política de refuerzos alternativa g.

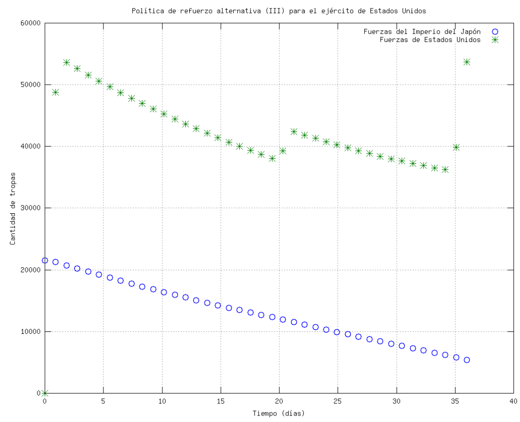

Figure 5: Resultados del combate simulado usando la política de refuerzos alternativa k.

llegada de refuerzos estadounidenses y las pérdidas iniciales durante la etapa de asentamiento, que se ven claramente en las irregularidades iniciales de la curva graficada.
Otra conclusión importante es la relación obtenida entre las fuerzas en combate. Particularmente, resaltar que ante una relación lineal de las fuerzas, es decir, el caso en el que la constante K es igual a 0, la recta descripta nos proporciona bases de trabajo para estimar estadísticas como la efectividad de las unidades militares de cada fuerza, contra las enemigas.