Banzai Totsugeki

Pose, Alberto Miguel
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina
apose@alu.itba.edu.ar

Catalano, Juan Ignacio
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina
jcatalan@alu.itba.edu.ar

Palombo, Martín
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina
mpalombo@alu.itba.edu.ar

Vázquez, Santiago Luis
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina
savazque@alu.itba.edu.ar

RESUMEN

En el presente artículo modelamos y analizamos un combate guerra-guerra. De dicho análisis observamos que el uso del modelo planteado resulta adecuado para simular esta batalla, y obtenemos resultados similares a los sucedidos. También analizamos el comportamiento del sistema, mediante la observación del modelo, variando las funciones de refuerzos enviados a la batalla. Además realizamos una deducción analítica que concluye en una interesante descripción de la relación de efectividad de combate entre ambas fuerzas militares.

1. INTRODUCCIÓN

El 16 de febrero de 1945, durante la Segunda Guerra Mundial, se libra la batalla de Iwo Jima en la isla de nombre homónimo. Siendo sin duda uno de los acontecimientos bélicos más sangrientos y lamentables de la historia. La ubicación geográfica estratégica de dicha isla otorga gran importancia histórica a esta batalla y es por ello que nos interesa nos interesa estudiarla como un sistema, modelándola y pudiendo extraer conclusiones a partir de dicho modelo. Pretendemos verificar el modelo utilizado, computando y analizando los resultados obtenidos de la simulación y variando parámetros del mismo. Podemos encontrar antecedentes a este trabajo, como por ejemplo el llevado acabo por Christine Lind titulado "Verifying Lanchester's Combat Model Battle of Iwo Jima".

En la sección 2 presentamos el modelo utilizado para realizar dicha simulación. En la sección 3 adaptamos el modelo genérico, previamente mostrado, al caso particular de la batalla de Iwo Jima. En la sección 4 se presenta un resultado matemático-físico cuya importancia se explica en la misma sección. En la sección 5 se presentan los resultados obtenidos a partir de la simulación. En la sección 6 modelamos nuevamente la batalla pero utilizando distintas funciones de refuerzo para las fuerzas militares estadounidenses. Por último, en la sección **??** agrupamos las conclusiones obtenidas durante la realización del trabajo.

2. "LA MEJOR VICTORIA ES VENCER SIN COMBATIR"

Para modelar este sistema consideramos las dos fuerzas militares representadas por $(x^1(t), x^2(t))$ siendo la primera correspondiente a Estados Unidos y la segunda al Imperio de Japón. La medida de estas variables representa el poderío de ambas partes del combate. El vector definido por (1)

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t))^T \tag{1}$$

representa el vector de estado, es decir, el poderío de ambas partes en el instante t. Consideramos el espacio de estados como la cantidad de unidades de combate, considerando todo tipo de ellas (individuos, equipos, recursos, etc). Como es de esperarse, las entradas al sistema estan dadas por los refuerzos enviados por cada uno de los países.

Hasta aquí, la representación del modelo de combate. Pero en particular, nos referimos a un combate de tipo guerra-guerra, es decir, convencional. En este caso, las pérdidas en combate están solamenten dadas por el tamaño de la fuerza contraria, con lo cual nuestro modelo queda descripto de la siguiente manera:

$$\dot{x}^1(t) = -ax^1(t) - \alpha x^2(t) \tag{2}$$

$$\dot{x}^2(t) = -bx^2(t) - \beta x^1(t) \tag{3}$$

Siendo a y b constantes positivas que representan las tasas unitarias de pérdidas operativas. Teniendo también α, β constantes positivas que representan las tasas de efectividad de ataque de la fuerza 1 sobre la 2 y de la fuerza 2 sobre la 1 respectivamente.

3. RECORDANDO LA HISTORIA

En esta sección utilizamos una adaptación del modelo presentado anteriormente para simular el sistema dado por el combate entre Japón y Estados Unidos de América, en la ciudad de Iwo Jima en febrero de 1945. Inicialmente Japón cuenta con una fuerza de 21500 unidades atrincheradas en el lugar, mientras que su enemigo incialmente no dispone de unidades en Iwo Jima y envía refuerzos siguiendo el siguiente régimen:

$$f(t) = \begin{cases} 54000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 6000 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t < 5 \\ 13000 & 5 \leq t < 6 \\ 0 & t \geq 6 \end{cases} \tag{4}$$

Siendo f la función que describe la llegada de refuerzos de los Estados Unidos. Como consideramos que Japón no envía refuerzos durante este combate, el modelo resulta descripto por:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= -\alpha x^2 + f(t) && (5) \\ \dot{x}^2 &= -\beta x^1 && (6) \end{aligned}$$

4. PODER K

El primer resultado obtenido, es meramente analítico y lo presentamos en esta sección. A partir de una demostración matemática obtenemos una relación entre las fuerzas de combate y una constante (constante de integración) que determina y controla dicho nexo.

A partir de un modelo sin refuerzos y realizando una integración analítica obtenemos una relación entre las fuerzas de combate y una constante (constante de integración):

Partimos de las ecuaciones (7) y (8)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha y && (7) \\ \dot{y} &= -\beta x && (8) \end{aligned}$$

Como sabemos que $\dot{x} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt}$ podemos reescribir (7) como (9)

$$\frac{dx}{dy}\dot{y} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} = -\alpha y \tag{9}$$

Reemplazando con la ecuación (8) resulta (10)

$$-\frac{dx}{dy}\beta x = -\alpha y \tag{10}$$

Reemplazamos adecuadamente los diferenciales para obtener (11)

$$-\beta \int x dx + C = -\alpha \int y dy + D \tag{11}$$

Siendo C y D constantes de integración. Podemos considerar $D - C = k$. De lo cual deducimos (12)

$$\alpha \frac{y^2}{2} - \beta \frac{x^2}{2} = k \tag{12}$$

Considerando $K = 2k$ se puede reescribir (12) obteniendo finalmente (14)

$$\alpha y^2 - \beta x^2 = K \tag{13}$$

Como podemos observar claramente, obtenemos una relación entre ambas fuerzas de combate, regida por una constante a la cual denominamos K. Esta constante resulta muy interesante para analizar. Es por ello que analizamos los tres casos de posibles rangos de valores de K, explicando su resultado en el comportamiento del sistema.

Caso 1. Si $K > 0$ la fuerza descripta por y resulta claramente mayor a la descripta por x, resultando en una inclincación hacia la victoria del primero.

Caso 2. Si $K < 0$ ocurre lo opuesto a lo descritpo en el punto anterior.

Caso 3. El caso que encontramos más interesante es cuando $K = 0$. En este, la relación entre ambas fuerzas describe una recta. Dicha recta determina el grado de efectividad de las unidades militares de una fuerza sobre la otra. Una vez fijada la pendiente, se puede establecer qué cantidad de unidades son necesarias de una fuerza, ante la presencia de determinada cantidad de unidades enemigas. Esto puede servir también para calcular y analizar estadísticas de efectividad de las unidades en combate contra determinado contrincante.

Considerando $K = 2k$ se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\alpha y^2 - \beta x^2 = K \tag{14}$$

Si fijamos los parámetros del sistema α y β se obtiene una relación entre ambas fuerzas de combate. Esta ecuación representa una familia de hipérbolas cuando $K \neq 0$. Mientras que en el caso de $K = 0$ se obtiene la recta asíntota.

POUS SE ME CONFLICTO FIJATE SI ESTO TIENE QUE MORIR BEGIN MUERTE

■■■< .mine ESTO QUIZAS NO El análisis sólo tiene sentido cuando la cantidad de unidades son positivas. Por lo tanto, limitamos el análisis al primer cuadrante del plano cartesiano como podemos observar en 1 y **??**. ======= El análisis sólo tiene sentido cuando la cantidad de unidades son positivas. Por lo tanto, limitaremos el análisis al primer cuadrante del plano cartesiano como puede observarse en 1 y 2: ■■■> .r39

DESDE ACA CASI SEGURO Esta ecuación representa una familia de hipérbolas cuando $K \neq 0$.

En el caso de $K = 0$ tenemos la recta asíntota a la familia de hipérbolas. Dado los parámetros del sistema α y β

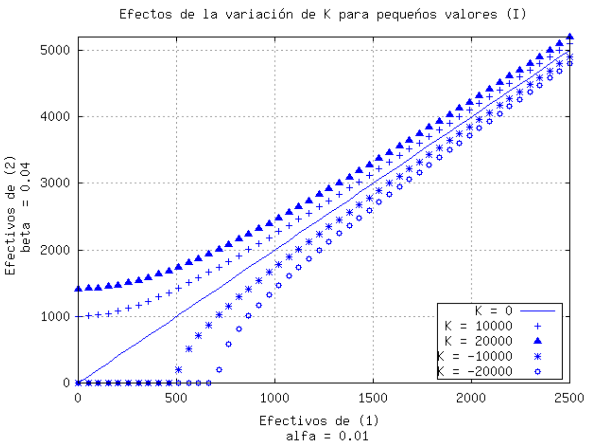

Figura 1: Gráfico obtenido de fijar $\alpha = 0.01$ y $\beta = 0.04$ en la ecuación 14. Se muestra el comportamiento del sistema sin políticas de refuerzos para distintos K.

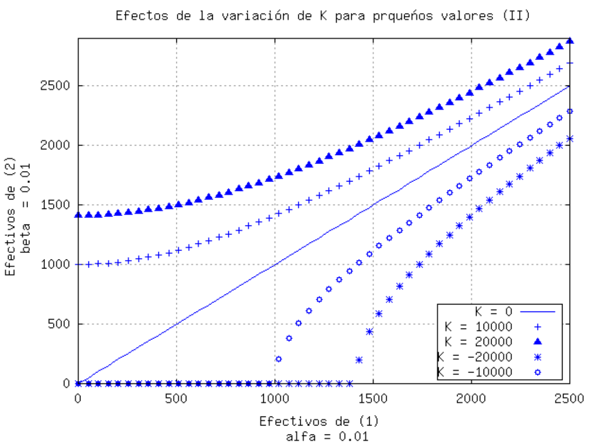

Figura 2: Gráfico obtenido de fijar $\alpha = 0.01$ y $\beta = 0.04$ en la ecuación 14. Se muestra el comportamiento del sistema sin políticas de refuerzos para distintos K.

podemos encontrar la pendiente de esta recta como $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. La interpretación física sería un combate balanceado. Esto **no** quiere decir que se tiene la misma cantidad de efectivos desplegados. La implicancia es que las fuerzas se equipararían en el largo plazo, es decir, que en caso de no contar con una función de refuerzo se terminaría con cero efectivos de ambos lados.

END MUERTE

Caso 1. En el caso donde $K > 0$ corresponden a hipérbolas que comienzan sobre el eje de las ordenadas. En este caso quiere decir que la fuerza representada en el eje Y ganaría el combate de no aumentarse la cantidad de tropas el contricante.

Caso 2. Si $K < 0$ tenemos hipérbolas que comienzan en el eje de las abcisas. Esto es igual que el caso anterior pero resultando vencedor el ejército del eje x.

Caso 3. En $K = 0$ la relación entre los ejércitos describe una recta. Dado los parámetros del sistema α y β podemos encontrar la pendiente como $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$. Dicha recta determina el grado de efectividad de las unidades militares de una fuerza sobre la otra. Una vez fijada la pendiente, se puede establecer qué cantidad de unidades son necesarias de una fuerza, ante la presencia de determinada cantidad de unidades enemigas.

La interpretación física sería un combate balanceado. no quiere decir que se tiene la misma cantidad de efectivos desplegados. Sino que el poderío militar de los dos ejércitos está equilibrado en función de α y β. Es decir, que en caso de no contar con una función de refuerzo se terminaría con cero efectivos de ambos lados.

Volviendo al caso $K \neq 0$, cuanto más cerca estén de la asíntota las hipérbolas son más desgastantes para el ejercito. Esto es decir que aunque sea claramente el vencedor el lado en el que encontramos la hipérbola, el costo ■< .mine podría ser muy alto (en "unidades normalizadas", recordemos que no siempre la pendiente vale 1, correspondiendo 1 efectivo de una fuerza con otro de otra). En cambio cuando estamos lejos de la asíntota quiere decir que estamos ganado "fácil" y sin tantas bajas (esto está estrictamente relacionado con la superioridad numérica). ======= podría ser muy alto. En cambio cuando se está lejos de la asíntota quiere decir que se está ganado sin tantas bajas.

■< .mine ■> .r39 ======= La forma de alterar esto es por medio de la función de refuerzo. Dado que permite la modificación del K que describe la hipérbola donde transcurre la batalla. ■> .r41

■< .mine ■< .mine La política de refuerzos lo que permite es bajarse o subirse de la hipérbola que representa el combate, de manera de alterar el resultado. Podríamos pensar el sistema sin refuerzos como a lazo abierto, donde el resultado del combate está únicamente determinado por la cantidad de tropas y las tazas de efectividades. Por otra parte, a lazo cerrado sería utilizando la función de refuerzos de manera de alterar el combate para que un lado sea el vencedor en menor cantidad de tiempo o sacrificando menos unidades. ======= La función de refuerzo juega un rol importante en la batalla. Permite la modificación del K que describe la hipérbola donde transcurre la batalla. Esto permite:

1. reducir las bajas al alejarse de la recta asíntótica $K = 0$
2. modificar el resultado de una batalla en caso de

======= ■> .r41 ■> .r39

5. REVIVIENDO LA HISTORIA

Para poder realizar un análisis de lo acontecido en la batalla, ejecutamos la simulación para obtener las trayectorias correspondientes a ambas fuerzas. En la figura 3 se pueden ver dichas trayectorias. De este podemos observar como, si bien inicialmente las fuerzas militares del Japón eran ampliamente superiores, el hecho de no disponer de refuerzos, como en el caso estadounidense, llevó a una rápida extinción del poderío militar presente en la zona. Por parte de los Estados Unidos, vemos como si bien su fuerza fue decreyendo a un ritmo similar a la japonesa, la mayor presencia militar llevó a que finalmente notemos una clara preponderancia de este país en el conflicto. También podemos observar un decaimiento lineal en el caso de las fuerzas

japonesas, en contraparte con uno más exponencial (aunque bastante suavizado) por parte de las estadounidenses.
Además, podemos verificar el uso del modelo elegido para la simulación. Para ello, comparamos los resultados obtenidos con los datos recolectados a partir del hecho acontecido. Dicha comparación, correspondiente a la fuerza estadounidense, la graficamos en la figura 4. Podemos observar el desembarco, en la primer etapa, donde vemos claramente como aumenta rápidamente la cantidad de unidades. A su vez, durante los primeros 5 días al recibirse los refuerzos, podemos ver como se producen picos, donde los aumentos estan dados por la llegada de nuevas unidades y las disminuciones más bruscas estan dadas por las bajas producidas durante el asentamiento de las tropas en el área de batalla.
Otra gráfica realizada es la Figura 5 en donde proyectamos la simulación, graficando las fuerzas militares estadounidenses, en funcion de las japonesas. Como podemos ver, observando el gráfico aproximadamente en el punto 20000 de las ordenadas, encontramos que las fuerzas estadounidenses son cero. Este es el comienzo de la batalla. Luego, podemos ver como con la llegada de refuerzos estadounidenses se va decrementando la cantidad de efectivos japoneses. Además, podemos observar como la función que representa la cantidad de efectivos americanos se aproxima a una de las hipérbolas descriptas en la sección anterior. Esto ocurre a medida que se envían los refuerzos, para culminar en el momento donde ya no hay más envíos. La elección de la constante K fue determinada de forma empírica.

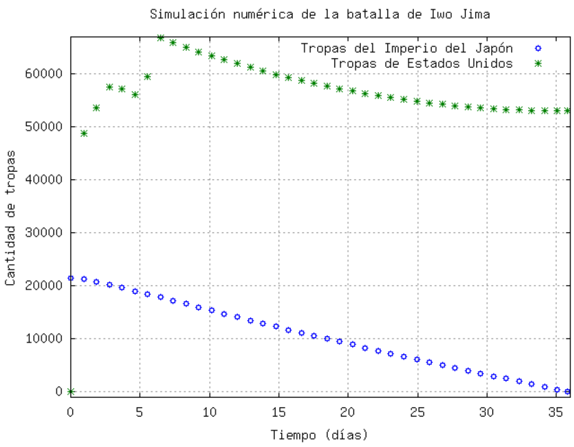

Figura 3: Cantidad de tropas de ambas fuerzas en función del tiempo.

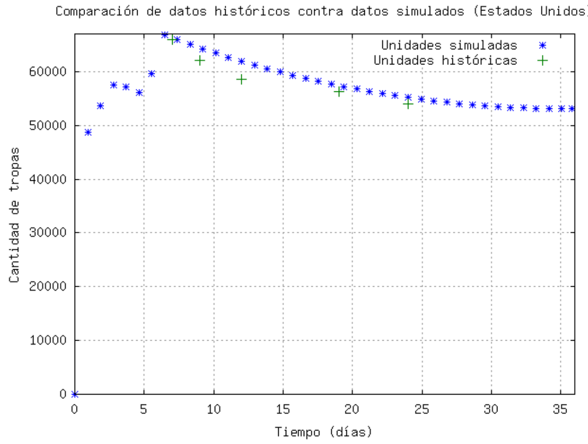

Figura 4: Cantidad de tropas estadounidenses en función del tiempo. Datos correspondientes al hecho y a la simulación.

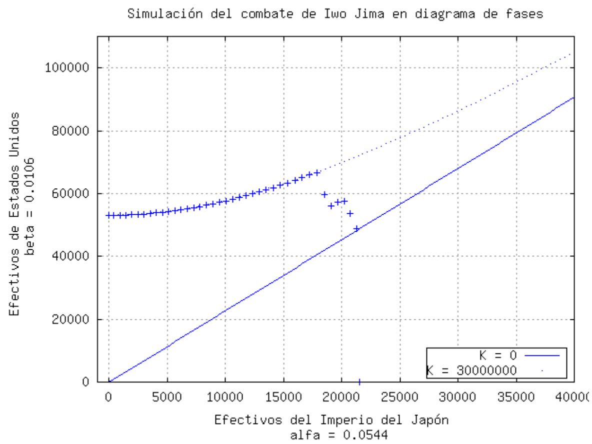

Figura 5: Cantidad de tropas estadounidenses en función de las japonesas.

6. HACIENDO HISTORIA

¿Qué hubiese sucedido si la política de envío de refuerzos de Estados Unidos hubiese sido distinta?. Para responder esta pregunta, veamos como reacciona el sistema al cambiar las políticas de envio de refuerzos estadounidenses.
Elegimos las tres políticas analizadas en base a la observación de su comportamiento y seleccionando las que nos arrojaron resultados más interesantes para su análisis. Dichas políticas, que denominamos g, h y k las podemos observar en las ecuaciones (15), (**??**) y (**??**) respectivamente.

$$g(t) = \begin{cases} 30000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 4 \\ 3000 & 4 \leq t < 5 \\ 0 & 5 \leq t < 7 \\ 1000 & 7 \leq t < 8 \\ 0 & t \geq 8 \end{cases} \tag{15}$$

$$h(t) = \begin{cases} 54000 - \lfloor 9000t \rfloor & 0 \leq t \leq 6 \\ 0 & t > 6 \end{cases} \quad (16)$$

$$k(t) = \begin{cases} 54000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 20 \\ 6000 & 20 \leq t < 21 \\ 0 & 21 \leq t < 35 \\ 13000 & 35 \leq t < 36 \\ 0 & t \geq 36 \end{cases} \quad (17)$$

Notamos que la política de refuerzo k es una variación de la política original, pero extendiendo la cantidad de días entre refuerzos. Si observamos la gráfica presentada en la figura **??** podemos ver que esta política resulta en un comportamiento del sistema que equipara la cantidad de unidades de una y otra fuerza en cierto punto del tiempo t.
Si vemos el resultado de la simulación para la política de refuerzo g, podemos observar que dado este escenario, el ejército estadounidense es derrotado por el japonés. Podemos concluir que si EEUU hubiese este acercamiento, posiblemente el resultado hubiese sido distinto impactando fuertemente en el desarrollo de la Segunda Guerra Mundial.
Por otro lado, si vemos el comportamiento del sistema al elegir h como política de refuerzos, presentado en la figura **??**, podemos ver como la preponderancia de las tropas estadounidenses aumenta y supera ampliamente a la japonesa de una manera mucho más conveniente que la elegida originalmente.
Finalmente, analizamos la política de refuerzo k; siendo ésta una variación a la política original. Si observamos el resultado del combate en la figura **??** vemos que ambas fuerzas decrecen de una manera aproximadamente lineal en el tiempo(en el caso de EEUU, hasta que recibe refuerzos). Lo interesante es que la pendiente de la recta que modela las fuerzas estadounidenses es mucho más abrupta que la japonsa. Ésto implica que el ejército japonés era más eficiente en batalla y sirve para destacar lo importante del papel que juegan las constantes α y β. Mediante el resultado de la siumulación podemos apreciar que los japoneses realmente lucharon hasta el final.

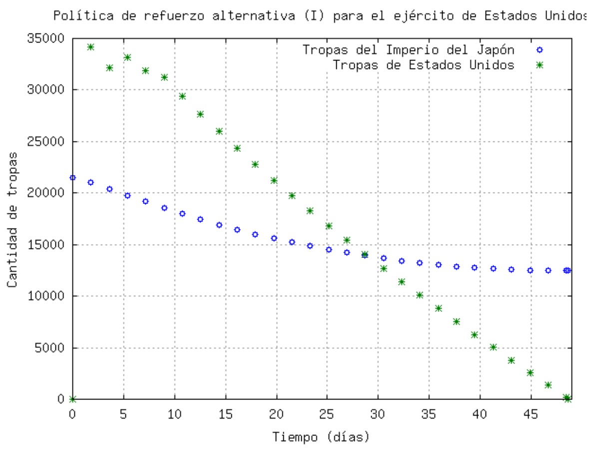

Figura 6: Resultados del combate simulado usando la política de refuerzos alternativa h.

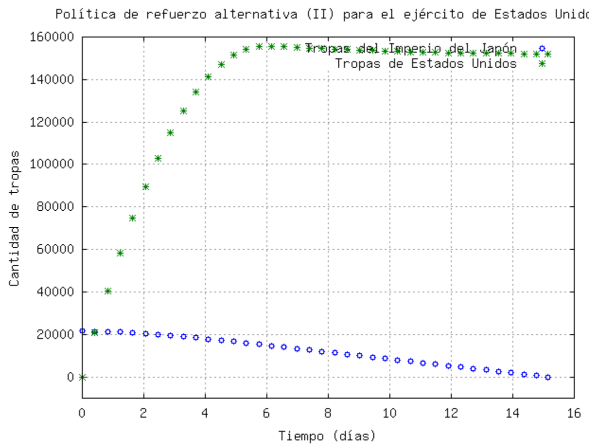

Figura 7: Resultados del combate simulado usando la política de refuerzos alternativa g.

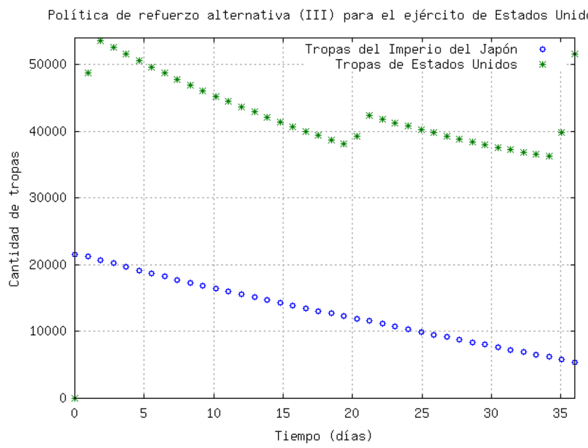

Figura 8: Resultados del combate simulado usando la política de refuerzos alternativa k.

7. CONCLUSIONES Y RESULTADOS

Al realizar este trabajo se pudo verificar el modelo elegido, analizando los resultados para compararlos con los datos recolectados historicamente a partir del hecho acontecido. Como conclusión a los cambios de política de refuerzos realizados, se puede decir que EEUU podría haber considerado una mejor política de refuerzos, aunque requeriría un análisis socio-económico y político más profundo para poder determinar porque realmente no lo hizo.
Puntos interesantes que podemos observar de la primer simulación realizada, son los picos obtenidos al momento de la llegada de refuerzos estadounidenses y las pérdidas iniciales durante la etapa de asentamiento, que se ven claramente en las irregularidades iniciales de la curva graficada.
Dado un sistema sin funciones de refuerzo al incorporarse se puede:

1. reducir las bajas al alejarse de la recta asíntótica $K = 0$
2. modificar el resultado de una batalla al cruzar la recta asintótica

Otra conclusión importante es la relación obtenida entre las fuerzas en combate. Particularmente, resaltar que ante una relación lineal de las fuerzas, es decir, el caso en el que la constante K es igual a 0, la recta descripta nos proporciona bases de trabajo para estimar estadísticas

La política de refuerzos permite variar el K que describe la hipérbola que representa el combate, de manera de alterar el resultado. Podría pensarse el sistema sin refuerzos como a lazo abierto: el resultado del combate está únicamente determinado por la cantidad de tropas y las tazas de efectividades. Por otra parte, a lazo cerrado sería utilizando la función de refuerzos de manera de alterar el combate para que un lado sea el vencedor en menor cantidad de tiempo o sacrificando menos unidades. Un análisis interesante, aunque escapa al trabajo, sería tener dos funciones de refuerzos (una por cada ejército).

El mayor inconveniente para lograr esto es la complicación de establecer a priori tanto α como β. como la efectividad de las unidades militares de cada fuerza, contra las enemigas.