Trabajo Práctico N°1
Modelización de Sistemas Simples

1. *Sistema de calentamiento*

   Se desea diseñar una estrategia para el calefaccionamiento para un edificio. Para eso es necesario modelar la variación de temperatura del interior T como función del tiempo. Considerar un sistema dinámico continuo determinista, es decir modelable mediante una ecuación diferencial.

   La temperatura interior del edificio puede variar a un ritmo:

   $$\frac{dT}{dt} = k(T_{\text{out}} - T) + k_u(T^* - T) \tag{1}$$

   siendo T_{out} la temperatura exterior del edificio, T^* la temperatura fijada por un sistema de aire acondicionado, k y k_u constantes de enfriamiento. Si la temperatura T^* se fija de modo que $k(\bar{T}_{\text{out}} - T_D) + k_u(T^* - T_D) = 0$ para una temperatura interior deseada T_D, siendo $\bar{T}_{\text{out}}$ la temperatura media diaria exterior, entonces la ecuación 1 puede escribirse:

   $$\frac{dT}{dt} = k(T_{\text{out}} - \bar{T}_{\text{out}}) + (k + k_u)(T_D - T) \tag{2}$$

   La variación diurna de la temperatura para esa época del año se modela según:

   $$T_{\text{out}}(t) = 10 - 6\cos\frac{2\pi t}{24} \tag{3}$$

   donde la lemperatura se mide en grados celsius y el tiempo t en horas. La temperatura deseada en el interior del edificio es $T_D = 20°\text{C}$.

   Un modelo más realista es:

   $$\frac{dT}{dt} = k(T_{\text{out}} - T) + u \tag{4}$$

   donde la función u cumple

   $$u = \begin{cases} 4°\text{Ch}^{-1}, & \text{si} \quad T < T_D \\ -1°\text{Ch}^{-1}, & \text{si} \quad T > T_D + 1 \end{cases} \tag{5}$$

   y para temperaturas entre T_D y $T_D + 1$ no hay calefacción ni enfriamiento artificial.

   Interesa comparar ambos modelos durante 48 horas de operación.

   (a) Interpretar cada uno de los términos de la ecuación 1 y demostrar la expresión 2.

   (b) Considerando el modelo dado por la ecuación diferencial 1 (o 2), se conoce el valor del parámetro $k_u = 0.70°\text{hora}^{-1}$, pero el valor de k es desconocido.
   Para k variando $k = 0.250.5, 1, 2, 5, 10, 15$ y $20°\text{hora}^{-1}$,

      i. Simular la temperatura del sistema, graficando $T(t)$ en función de t, para los distintos valores de k, en un mismo gráfico, junto a la temperatura exterior $T_{\text{out}}(t)$.

      ii. Graficar la amplitud de la temperatura en función de k, para los valores propuestos.

Comparar estos resultados con la temperatura deseada $T_D = 20°\mathrm{C}$. Extraiga alguna conclusión al respecto. Es posible evitar las oscilaciones? Qué otros rasgos se observan?

(c) Considerar el modelo 4, para $k = 0.25°\mathrm{C}\,\mathrm{hora}^{-1}$. Comparar este modelo con el anterir para el mismo valor de k. En un mismo gráfico "plotear" las temperaturas que resultan de ambos modelos y la temperatura exterior. Explicar cúal de las dos estrategias es la más "confortable".

(d) Le energía consumida en calefaccionar el edificio durante 48 horas, es $E_1 = \int_0^{48} k_u|T^* - T|\ dt$ para el modelo dador por 1 y $E_2 = \int_0^{48} |u|\ dt$ para el modelo dado por 4. Cuál de las dos estrategias consume menos energía?

2. *Modelo de gestión de inventario*

Una fábrica de autopartes produce piezas que son depositadas en una almacen con capacidad ilimitada de almacenamiento. Indicando con $x(t)$ la cantidad de productos almacenados en el instante t, resulta que el estado del sistema $x \in \mathcal{X}$ es discreto, de modo que el espacio de estado es $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$. Los productos llegan al almacén los cuales son depositados. Por otra parte, un camión se encarga de entregar los productos a clientes, cada vez que llega al depósito.

La actividad *llegada* de productos al depósito constituye una de las entradas del sistema y es:

$$u^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si llega un producto en el instante } t \\ 0, & \text{si no llega ningún producto en el instante } t \end{cases} \tag{6}$$

Además, otra de las funciones de entrada es la correspondiente a la actividad *partida* corresponde al hecho de la llegada del camión al deósito. Dicha función es:

$$u^2(t) = \begin{cases} 1, & \text{si llega el camión en el instante } t \\ 0, & \text{si no llega el camión en el instante } t \end{cases} \tag{7}$$

Para fijar la dinámica de este sistema, se realizan las siguientes hipótesis:

i. La carga del camión es instantánea. Esto significa que cuando el camión llega, inmediatamente parte llevandose un solo producto.
ii. El tiempo de entrega del camión es constante.
iii. Nunca hay una llegada y una partida simultaneamente.

En base a lo dicho, las transiciones de estado del sistema se dán según las siguientes leyes:

α. Si en t, resulta $u^1(t) = 1$ y $u^2(t) = 0$, *llega* un producto, entonces $x(t)$ sufre un salto de $+1$.

β. Si en t, resulta $u^1(t) = 0$ y $u^2(t) = 1$, el camión está presente en el instante t, se carga con un solo producto, instantaneamente y ese producto *parte*. De esta forma ocurre:
   i. Si $x(t) > 0$, entonces $x(t)$ sufre un salto en -1.
   ii. Si $x(t) = 0$, entonces $x(t)$ el estado no cambia.

γ. Si en t, resulta $u^1(t) = 0$ y $u^2(t) = 0$, no hay ningún cambio de estado en el instante t.

Se desea simular el sistema durante una semana de operación. El tiempo de entrega del camión es de dos horas, por lo tanto, el camión cada $T_C = 4$ horas lleag al depósito. La producción se desarrolla en todos los turnos, esto significa que la fábrica produce 7×24. Los instantes t en los cuales $u^1(t) = 1$ forman una secuencia que se denomina *schedule de llegadas* y la secuencia de tiempos t para los cuales $u^2(t) = 1$, se llama *schedule de partidas*. Inicialmente hay un stock de 10 unidades almacenadas y el tiempo comienza a computarse a partir de la llegada de un producto al depósito.

(a) Simular el sistema (a mano) durante 24 horas, sabiendo que el schedule de llegadas viene dado por $\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 18,\ 20,\ 22,\ 24,\ 26\}$ mientras que el camión opera en los t: $\{1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25\}$. Mostrar los resultados de esta simulación usando:

i. Construir una tabla con los valores de $x(t)$ para todo t en el que ocurre algún evento (llegada o partida), es decir con este formato:

t	Tipo de evento	$x(t)$
0	`llegada`	10
$\vdots$		

ii. Graficar $x(t)$ versus t para todo $t \in [0, 24\text{horas}]$ (Debe ser una gráfica escalonada por tramos).

iii. Computar la cantidad promedio de unidades depositadas en 24 horas, es decir

$$< x >= \frac{1}{24} \int_0^{24} x(t)\, dt = \frac{1}{24} \sum_{k=0}^{N} x_k \Delta t_k$$

siendo N la cantidad de intervalos en los cuales x sufre variación de ± 1.

(b) Considerar que los tiempos de entre llegada de productos al depósito son aleatorios, uniformemente distribuidos entre 1 hora y 3 horas (esto se designan como que los intervalos entre arribos es 2 ± 1 hora). Con un generador de numeros psedoaleatorios, simular los tiempos de llegadas y contestar las mismas preguntas que en el item anterior

3. *Modelo de combate convencional*
Considerar dos fuerzas en combate convencional. La magnitud de ambas fuerzas pueden ser medidas por la cantidad de efectivos, o de armamentos, o de equipo bélico, etc.

La velocidad de variación de una fuerza puede considerarse como:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Velocidad de variación} \\ \text{de la fuerza} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Tasa de} \\ \text{refuerzos} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Tasa de pérdidas} \\ \text{en combate} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Tasa de pérdidas} \\ \text{operativas} \end{array} \right\} \quad (8)$$

Suponiendo dos fuerzas de magnitudes x e y, el objetivo es establecer un modelo de sistema en el cual pueda predecirse las cantidades $x(t)$ e $y(t)$ en el instante t.

La tasa de pérdidas en combate, puede suponerse proporcional al tamaño de la fuerza enemiga, mientras que la tasa de pérdidas operativas puede modelarse proporcional a la fuerza propia. Esta última es debido a errores de gestión y/o administración de recursos que se ven magnificados conforme más grande es el ejercito que debe operarse.

Por lo tanto, si $f(t)$ y $g(t)$ son las tasas de refuerzos de las fuerzas x e y respectivamente, entonces el modelo de combate convencional está dado por:

$$\dot{x} = -ax - \alpha y + f(t) \quad (9)$$
$$\dot{y} = -by - \beta x + g(t) \quad (10)$$

siendo a y b las tasa unitarias de pérdidas operativas y α y β los *coeficientes de efectividad en combate de la fuerza enemiga*.

(a) Suponiendo despreciables las tasas de pérdidas operativas y que no hay refuerzos en ambas fuerzas, demostrar que existe una constante K tal que:

$$\alpha x^2 - \beta y^2 = K \quad (11)$$

Indicar de quén depende el valor de K. Decir que ocurre con el combate si $K > 0$, $K <=$ o $K = 0$. Graficar, cualitativamente las curvas en el *espacio de fases* x, y.

(b) Una de las batallas más violentas de la Segunda guerra Mundial fue la desarrollada en la isla de Iwo Jima, en el Pacífico, 600 millas al sur de Tokio, en febrero de 1945. Las fuezas del Imperio Japonés estaban atrincheradas en la isla con 21500 efectivos. Inicialmente, no había ningún efectivo de las fuerzas norteamericanas en Iwo Jima. Estas fueron llegando bajo oleadas mediante la siguiente política de refuerzos:

$$f(t) = \begin{cases} 54000 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 6000 & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t < 5 \\ 13000 & 5 \leq t < 6 \\ 0 & t \leq 6 \end{cases} \quad (12)$$

Por lo tanto, si x es la fuerza norteamericana e y la japonesa, el modelo de combate es:

$$\dot{x} = -\alpha y + f(t) \quad (13)$$
$$\dot{y} = -\beta x \quad (14)$$

A posteriori del combate pudo estimarse que $\alpha = 0.0544\,\text{dia}^{-1}$ y $\beta = 0.0106\,\text{dia}^{-1}$. Simular el combate de Iwo Jima y compararlo con el resultado obtenido, sabiendo que en la tabla 1, se dán los valores de las fuerzas norteamericanas durante la batalla.

Tabla 1: Fuerzas norteamericanas

Tiempo	Fuerzas USA
7	66000
9	62000
12	58500
19	56200
24	54000

Para eso graficar $x(t)$ e $y(t)$ versus t y graficar $x(t)$ y las fuerzas nortemericanas reales en un mismo grafico. Estimar cuanto dura la batalla.

(c) Ensayar dos políticas distintas de refuerzos para USA.

4. *Modelo de Presa-Predador*

Un grupo de empresas pesqueras que explotan cierta zona sobre la plataforma continental, pescan la especie *Salmón de Mar* (*Pseudopercis semifasciata*), la cual es capturada desde una latitud correspondiente a la desembocadura del Río Coloradao, hasta el Golfo de San Julián.

El *Tiburón Pintarrojo* (*Haleaeulurus bivius*) es una de las cincuenta especies que habitan la Plataforma Continenetal Argentina. Está distribuido especialmente entre la latitudes $-45°$ a $-30°$, y hasta una profundidad de 150 brazas. Dicha especie preda al Salmón de Mar. No osbtante se desconocen sus propiedades bióticas.

A partir de mediciones de individuos de ambas especies en cierta región de la plataforma continental, durante aproximadamente 10 años, se obtuvo el registro almacenado en el archivo `sstp01_p4.ale`, el cual es mostrado en la figura 1.

Adoptando un modelo dinámico determinista de *Lokta-Volterra-Ancona*, de la forma:

$$\dot{x} = \lambda x - axy \tag{15}$$
$$\dot{y} = bxy - \mu y \tag{16}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ representan las poblaciones de la especie presa y predador, respectivamente. Las constantes λ, μ representan las tasas de crecimento poblacional de presas y predadores respectivamente, en asuencia de sus contrapartes. Las constantes positivas a y b representan las tasas de encuentros perjudiciales para las presas y beneficiosos para los predadores.

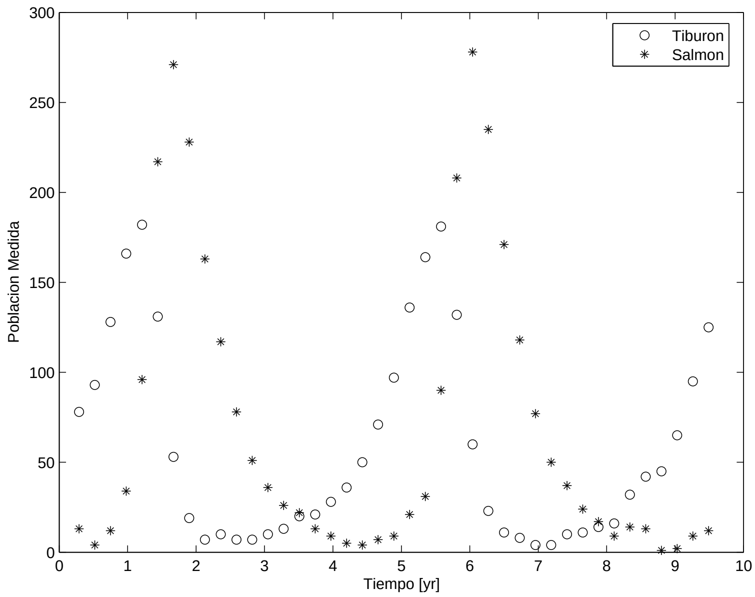

Figure 1: Mediciones realizadas de las poblaciones de Salmón de Mar y Tiburón Pintarrojo

(a) Sabiendo que $a = 0.02\text{yr}^{-1}$, $b = 0.035\text{yr}^{-1}$ y $\lambda = 1.5\text{yr}^{-1}$, usar el modelo de *Lokta-Volterra-Ancona* para estimar el valor del parámetro b.

HINT: Utilizar las curvas en el espacio de fases $x - y$.
Computar las poblaciones de equilibrio. Linealizar el modelo, suponiendo pequños apartamiento de la población de equilibrio.

(b) Mediante simulaciones, se desea saber como depende el desfasaje φ con el parametro a. Obtener $\varphi = \varphi(a)$.

(c) Analizar como varía el período como función de μ y como función de λ.