Probleem 1:

Neville se metode: Ons evalueer $p_4(\frac{1}{2})$ om sodoende $\sqrt{3} = 3^{1/2}$ te benader.

$$\begin{array}{cccccc}
x & y = 3^x & & & & \\
 & & & & & \\
-2 & 1/9 & & & & \\
 & & 2/3 & & & \\
-1 & 1/3 & & 3/2 & & \\
 & & 4/3 & & 16/9 & \\
0 & 1 & & 11/6 & & 41/24 \\
 & & 2 & & 5/3 & \\
1 & 3 & & 3/2 & & \\
 & & 0 & & & \\
2 & 9 & & & &
\end{array}$$

Dus $p_4(\frac{1}{2}) = \frac{41}{24} = 1.708\dot{3}$, oftewel $\sqrt{3} \approx 1.708\dot{3}$. Die werklike waarde van $\sqrt{3}$ is $1.73205\ldots$, met ander woorde ons benadering lewer slegs twee korrekte beduidende syfers. Hierdie metode is baie werk vir min akkuraatheid. Heron of Halley is dus baie meer effektief.

Probleem 2:

Metode 1: Newton se formule:

$$\begin{array}{ccccc}
-1 & 1 & & & \\
 & & 2 & & \\
0 & 3 & & -3/2 & \\
 & & -1 & & (a/6+3/2)/4 \\
1 & 2 & & a/6 & \\
 & & (a-2)/2 & & \\
3 & a & & &
\end{array}$$

Die koëffisiënt van x^3 is dus $\frac{a/6+3/2}{4}$, en vir hierdie term om te verdwyn (sodat ons met 'n parabool oorbly), moet

$$\frac{a}{6} + \frac{3}{2} = 0 \implies a = -9.$$

Dan $p_2(x) \;=\; 1 + 2(x+1) - \frac{3}{2}(x+1)x \;=\; -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3.$

Metode 2: Lagrange se formule:

$$p_3(x) \;=\; \frac{x(x-1)(x-3)}{(-1)(-2)(-4)}\cdot 1+\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{1\cdot(-1)(-3)}\cdot 3+\frac{(x+1)x(x-3)}{2\cdot 1\cdot(-2)}\cdot 2+\frac{(x+1)x(x-1)}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot a$$

Ons wil weer eens hê dat die koëffisiënt van x^3 nul moet wees, dus

$$-\frac{1}{8}+1-\frac{1}{2}+\frac{a}{24} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad a \;=\; -9.$$

Metode 3: Ons pas 'n parabool deur die eerste 3 datapunte, met bv. Newton se metode:

$$\begin{array}{cccc}
-1 & 1 & & \\
 & & 2 & \\
0 & 3 & & -3/2 \\
 & & -1 & \\
1 & 2 & &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow p_2(x) \;=\; 1+2(x+1)-\frac{3}{2}(x+1)x \;=\; -\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3.$$

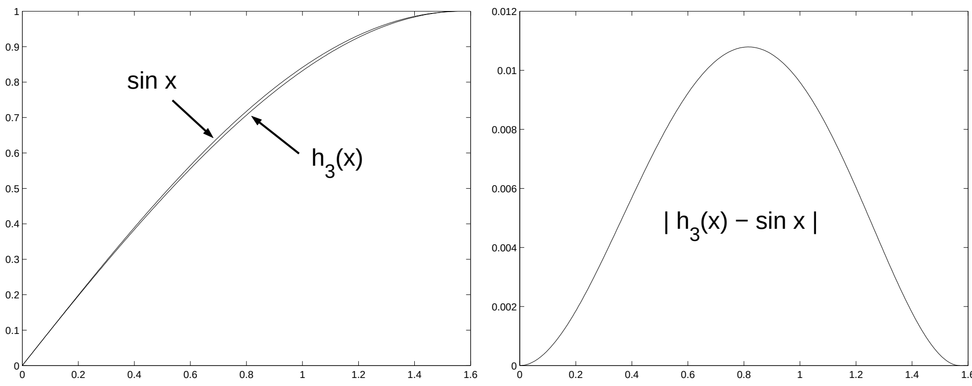
Ons verkry nou a deur die punt $(3,a)$ in bostaande vergelyking te stel,

$$p_2(3) \;=\; a \quad\Longrightarrow\quad a=-\frac{3}{2}(3)^2+\frac{1}{2}(3)+3 \;=\; -9.$$

Probleem 3:

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & & & \\
 & & 1 & & \\
0 & 0 & & \frac{2/\pi-1}{\pi/2} & \\
 & & 2/\pi & & \dfrac{\frac{-2}{\pi}-\frac{2}{\pi}+1}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} \\
\pi/2 & 1 & & \frac{-2/\pi}{\pi/2} & \\
 & & 0 & & \\
\pi/2 & 1 & & &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow\quad h_3(x) \;=\; 0 \;+\; 1\cdot x \;+\; \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)x^2 \;+\; \frac{4}{\pi^2}\left(1-\frac{4}{\pi}\right)x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$



(a) Funksie en benadering   (b) Absolute fout

Die grafiek hierbo suggereer dat die maksimum fout op $[0, \pi/2]$ ongeveer 0.01 is.

Probleem 4:

Ons het

$$\begin{aligned}
s_0(x) &= 1 + Bx + 2x^2 - 2x^3 \\
s_0'(x) &= B + 4x - 6x^2 \\
s_0''(x) &= 4 - 12x
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 \\
s_1'(x) &= b - 8(x-1) + 21(x-1)^2 \\
s_1''(x) &= -8 + 42(x-1).
\end{aligned}$$

Vir kontinuïteit by $x = 1$ volg dit dat $s_0(1) = s_1(1)$, dit wil sê

$$1 + B + 2 - 2 \;=\; 1 \quad\Longrightarrow\quad B \;=\; 0.$$

Vir kontinuïteit van die afgeleide by $x = 1$ volg dit dat $s_0'(1) = s_1'(1)$, dit wil sê

$$B + 4 - 6 \;=\; b \quad\Longrightarrow\quad b \;=\; -2.$$

Nou, aangesien die latfunksie geklem is, volg dit dat $f'(0) = s_0'(0) = B = 0$.
En netso ook dat $f'(2) = s_1'(2) = b - 8 + 21 = -2 - 8 + 21 = 11$.

Probleem 5:

(a)

Ons bereken eers $\int_0^1 (S''(x))^2\,\mathrm{d}x$:

$$S_0 = 3x - 4x^3, \quad S_0' = 3 - 12x^2, \quad S_0'' = -24x.$$

$$S_1 = 1 - 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^3, \quad S_1' = -12\left(x - \frac{1}{2}\right) + 12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$S_1'' = -12 + 24\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (S_0'')^2\,\mathrm{d}x \;=\; 24^2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\mathrm{d}x \;=\; \frac{24^2}{3}\frac{1}{2^3} \;=\; 24.$$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 (S_1'')^2\,\mathrm{d}x \;&=\; \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(144 - 576(x-\frac{1}{2}) + 576(x-\frac{1}{2})^2\right)\mathrm{d}x \\ &=\; \frac{144}{2} - \frac{576}{2}(x-\frac{1}{2})^2\Big|_{\frac{1}{2}}^1 + \frac{576}{3}(x-\frac{1}{2})^3\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\ &=\; \frac{144}{2} - \frac{576}{23} + \frac{576}{3\cdot 2^3} \;=\; 24.\end{aligned}$$

Dus

$$\int_0^1 (S''(x))^2\,\mathrm{d}x \;=\; 24 + 24 \;=\; 48.$$

Nou bereken ons $\int_0^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x$:

$$f = \sin\pi x, \quad f' = \pi\cos\pi x, \quad f'' = -\pi^2\sin\pi x.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x \;&=\; \pi^4\int_0^1 \sin^2\pi x\;\mathrm{d}x \\ &=\; \pi^4\int_0^1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi x\right)\mathrm{d}x \\ &=\; \frac{\pi^4}{2} \;\approx\; 48.7045\ldots\end{aligned}$$

Dus

$$\underbrace{\int_0^1 (S''(x))^2\,\mathrm{d}x}_{48} \;\leq\; \underbrace{\int_0^1 (f''(x))^2\,\mathrm{d}x}_{48.7045...}.$$

(b)

Ons verkry die kwadratiese interpolant met behulp van Newton se deelverskiltabel (Lagrange sal ook werk):

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & & \\ & & 2 & \\ 1/2 & 1 & & -4 \\ & & -2 & \\ 1 & 0 & & \end{array}$$

$$p_2(x) = 2x - 4x(x - \frac{1}{2}), \quad p_2'(x) = 2 - 4(x + x - \frac{1}{2}), \quad p_2''(x) = -8.$$

$$\int_0^1 \left(p_2''(x)\right)^2 \mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 64 \;\mathrm{d}x \;=\; 64.$$

Weer eens is die stelling geldig:

$$\underbrace{\int_0^1 \left(S''(x)\right)^2 \mathrm{d}x}_{48} \;\leq\; \underbrace{\int_0^1 \left(p_2''(x)\right)^2 \mathrm{d}x}_{64}.$$