Probleem 1:

Pas 'n polinoom $p_2(x)$ deur die datapunte $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$:

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \\
&= \frac{1}{2h^2}(x-x_1)(x-x_2)f(x_0) - \frac{1}{h^2}(x-x_0)(x-x_2)f(x_1) + \frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1)f(x_2) \\
p_2'(x) &= \frac{1}{2h^2}(x-x_1+x-x_2)f(x_0) - \frac{1}{h^2}(x-x_0+x-x_2)f(x_1) + \frac{1}{2h^2}(x-x_0+x-x_1)f(x_2) \\
p_2'(x_0) &= \frac{1}{2h^2}(-h-2h)f(x_0) - \frac{1}{h^2}(-2h)f(x_1) + \frac{1}{2h^2}(-h)f(x_2) \\
&= -\frac{3}{2h}f(x_0) + \frac{2}{h}f(x_1) - \frac{1}{2h}f(x_2) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

wat ekwivalent is aan die verskilformule bo-aan p.170. Vir die foutterm gebruik ons die formule op p.70 in Burden & Faires,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= p_2(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!}f'''(\xi_x) \\
f'(x) &= p_2'(x) + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right]f'''(\xi_x) + \frac{1}{6}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f'''(\xi_x) \\
f'(x_0) &= p_2'(x_0) + \frac{1}{6}f'''(\xi_x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right]_{x=x_0}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Die eerste term regs is reeds bereken, sien (1). Om die foutterm te kry moet die tweede term bereken word,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right]_{x=x_0} \\
&\qquad = \left[(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1)\right]_{x=x_0} \\
&\qquad = (x_0-x_1)(x_0-x_2) = (-h)(-2h) = 2h^2.
\end{aligned}
$$

Stel in (2),

$$
f'(x_0) = p_2'(x_0) + \frac{1}{3}h^2 f'''(\xi)
$$

wat die formule bo-aan p.170 is.

Probleem 2:

Aanvaar dat ξ onafhanklik van h is (dit is slegs by benadering waar). Dan

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - Ch^2, \tag{3}$$

met $C = \frac{1}{12} f''''(\xi)$ 'n konstante. Met dubbel die aantal staplengte (vervang dus h met $2h$ hierbo),

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0) + f(x_0-2h)}{(2h)^2} - C(2h)^2. \tag{4}$$

Elimineer C, deur (4) by 4 maal (3) af te trek,

$$\begin{aligned} 3f''(x_0) &= 4\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} - \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0) + f(x_0-2h)}{4h^2} \\ f''(x_0) &= \frac{-f(x_0+2h) + 16f(x_0+h) - 30f(x_0) + 16f(x_0-h) - f(x_0-2h)}{12h^2} + E, \end{aligned}$$

met E die foutterm (wat nie hier bereken is nie).

Probleem 3:

Ons volg dieselfde argumente as op p.172. Dan volg die analoog van die formule onderaan die bladsy,

$$\begin{aligned} &f''(x_0) - \frac{\widetilde{f}(x_0+h) - 2\widetilde{f}(x_0) + \widetilde{f}(x_0-h)}{h^2} \\ &\qquad = \frac{e(x_0+h) - 2e(x_0) + e(x_0-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f''''(\xi). \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} &\left| f''(x_0) - \frac{\widetilde{f}(x_0+h) - 2\widetilde{f}(x_0) + \widetilde{f}(x_0-h)}{h^2} \right| \\ &\qquad \le \frac{|e(x_0+h)| + 2|e(x_0)| + |e(x_0-h)|}{h^2} + \frac{h^2}{12}|f''''(\xi)| \;\le\; \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{h^2}{12}M, \end{aligned}$$

waar ons aanvaar dat $|e(x_0 \pm h)| \leq \varepsilon$, $|e(x_0)| \leq \varepsilon$ en $|f''''(x)| \leq M$ in die omgewing van x_0. Laat nou

$$\begin{aligned} E(h) &= \frac{4\varepsilon}{h^2} + \frac{h^2}{12} M \\ E'(h) &= -\frac{8\varepsilon}{h^3} + \frac{h}{6} M \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad h^4 \;=\; \frac{48\varepsilon}{M}. \end{aligned}$$

Die optimale staplengte word dus gegee deur $h_{\text{opt}} = 2\left(\frac{3\varepsilon}{M}\right)^{1/4}$.

Die kleinste waarde van E is dus

$$E_{\min} \;=\; E(h_{\text{opt}}) \;=\; \frac{4\varepsilon}{4\left(\frac{3\varepsilon}{M}\right)^{1/2}} + \frac{4\left(\frac{3\varepsilon}{M}\right)^{1/2} M}{12} \;=\; 2\sqrt{\frac{M\varepsilon}{3}}.$$

Met $M = e^1$ en $\varepsilon = 2.2 \times 10^{-16}$ volg

$$\begin{aligned} h_{\text{opt}} &= 2.5 \times 10^{-4} \\ E_{\min} &= 2.8 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

wat goed vergelyk met die empiriese data in die figuur.

Wat betref die "hellings" in die grafiek: Regs van die optimale punt domineer die afkappingsfout, of te wel

$$\begin{aligned} E &\approx Ch^2 \\ \log E &\approx \log C + 2\log h \end{aligned}$$

wat 'n reguitlyngrafiek met helling 2 impliseer. Dit is versoenbaar met die regter gedeelte van die grafiek met helling rofweg $\frac{8 \text{ eenhede}}{4 \text{ eenhede}} = 2$.

Links van die optimale punt domineer afrondingsfoute, of te wel

$$\begin{aligned} E &\approx \frac{C}{h^2} \\ \log E &\approx \log C - 2\log h \end{aligned}$$

wat 'n reguitlyngrafiek met helling -2 impliseer. Dit is ook versoenbaar met die linkerkantste gedeelte van die grafiek met helling rofweg $\frac{-12 \text{ eenhede}}{6 \text{ eenhede}} = -2$.

Probleem 4: *word in die klas behandel*