Probleem 1 Beskou die volgende data

x	-2	-1	0	1	3
y	0	0	1	2	4

(a) Gebruik elk van die volgende drie metodes om 'n benadering tot $y(2)$ d.m.v. polinoom-interpolasie te bereken. *Let Wel:* (i) en (ii) is bedoel vir handberekening, en (iii) is vir MATLAB.

(i) Lagrange

(ii) Newton

(iii) `polyfit` (ingeboude funksie in MATLAB, tik `help polyfit` om meer te leer)

(b) Is dit toevallig dat al drie metodes van deel (a) dieselfde resultaat lewer? Bespreek.

Probleem 2 In hierdie probleem ondersoek ons die volgende situasie: Gestel 'n funksie $f(x)$ word op die interval $[-1, 1]$ geïnterpoleer in die $n + 1$ gelykverspreide punte

$$x_k = -1 + 2k/n, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

met 'n polinoom van graad n, sê $p_n(x)$. Dit wil sê

$$p_n(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Vraag: Is dit waar dat $p_n(x) \to f(x)$ by elke punt x in $[-1, 1]$ as $n \to \infty$?

Ondersoek soos volg:

(a) Laat

$$f(x) = e^x, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Vir elk van $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$, en $n = 8$: bereken $p_n(x)$ met behulp van `polyfit`, stip beide $f(x)$ en $p_n(x)$ op $[-1, 1]$, en stip ook die fout $f(x) - p_n(x)$ op $[-1, 1]$. Zoem in op lg. grafiek om die waarde van

$$E_n = \max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p_n(x)|$$

te skat, en lys die geskatte waardes van E_2, E_4, E_6 en E_8 in 'n tabel. Deur na jou tabel te verwys, spekuleer nou oor die antwoord op die **Vraag** hierbo.

(b) Herhaal deel (a) vir die funksie

$$f(x) = \frac{1}{1 + k^2 x^2}, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Ondersoek wat gebeur vir verskillende waardes van k en n.

Nota: Die (verrassende?) verskynsel wat in deel (b) waargeneem is staan as die **Runge** verskynsel bekend.

Probleem 3 *Brent* se metode vir die oplos van $f(x) = 0$ werk soos volg: Gestel funksiewaardes

$$(x_{n-2}, f(x_{n-2})), \quad (x_{n-1}, f(x_{n-1})), \quad (x_n, f(x_n)),$$

is bekend. Pas nou 'n *inverse parabool* van die vorm

$$x = a\,y^2 + b\,y + c$$

aan die data. Kies die volgende benadering as die waarde van x waar hierdie parabool die x-as sny, d.w.s., $y = 0 \implies$

$$x_{n+1} = c.$$

(a) Pas hierdie idee toe op die vergelyking

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

(met eksakte wortel $p = 1$). Gebruik aanvanklike skattings

$$x_0 = 1.3, \quad x_1 = 1.2, \quad x_2 = 1.1.$$

Gebruik sommer MATLAB se ingeboude funksie `polyfit` om die paraboliese interpolasie te doen. Lys die benaderings x_0, x_1, …, x_6 in 'n tabel.

(b) Gebruik die tabel van deel (a) om 'n skatting van die *orde van konvergensie* van Brent se metode te bereken.