INSTRUKSIES:

(a) Huiswerke moet met die aanvang van die tutoriaalperiode op Vrydae ingehandig word. Geen elektroniese huiswerke word aanvaar nie en geen huiswerke sal laat ingeneem word nie. In die praktyk beteken dit dat jy moet mik om teen Donderdagaand klaar te wees om toe te laat vir moontlike probleme met drukkers, skerms wat vries, en so aan.

(b) Samewerking op hierdie huiswerke word beperk tot die uitruil van enkele idees en wenke. Die uitruil van data, grafieke, rekenaarprogramme of die besonderhede van wiskundige berekenings is nie toelaatbaar nie. Wat jy inhandig moet jou eie werk wees.

Inleiding: Ons definieer hier die orde van konvergensie van 'n numeriese metode vir die oplossing van $f(x) = 0$, met wortel $x = p$. Laat e_n die absolute fout op stap n voorstel, d.w.s., $e_n = x_n - p$. Gestel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = C, \tag{1}$$

met $C \neq 0$, $C \neq \infty$. Dan sê ons die *orde van konvergensie* is α, en die *foutkonstante* is C. Ons klassifiseer soos volg:

$\alpha = 1$	lineêre konvergensie
$1 < \alpha < 2$	super-lineêre konvergensie
$\alpha = 2$	kwadratiese konvergensie
$2 < \alpha < 3$	super-kwadratiese konvergensie
$\alpha = 3$	kubiese konvergensie, ens.

Probleem 1 (*Die doel van hierdie oefening is om die orde van konvergensie van die Newton en secant metodes eksperimenteel te bepaal. In die klas het ons dit teoreties gedoen, en gevind dat $\alpha = 2$ en $\alpha = (1+\sqrt{5})/2 = 1.618\ldots$ vir Newton en secant respektiewelik.*)

(a) Gestel ons pas 'n numeriese metode toe op $f(x) = 0$, waarvan die eksakte wortel p bekend is. Dan kan die eksakte foute, e_n, op elke iterasie-stap n bereken word. Uit die definisie (1) hierbo het ons

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^\alpha, \qquad |e_n| \approx C|e_{n-1}|^\alpha,$$

met C en α dus die enigste onbekendes. Elimineer vir C, en bepaal sodoende 'n formule vir α in terme van e_{n-1}, e_n, en e_{n+1}.

(b) Beskou die vergelyking

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0,$$

met eksakte wortel $p = 1$. As hierdie vergelyking met die Newton en secant metodes opgelos word, word die benaderings in die tabel hieronder verkry. Gebruik nou jou formule van deel (a) om benaderings tot die orde van konvergensie, α, te bereken.

n	Newton	Secant
0	1.10000000000000	1.20000000000000
1	1.00905349794239	1.10000000000000
2	1.00008122713623	1.01722846441948
3	1.00000000659731	1.00162372469600
4	1.00000000000000	1.00002771102126
5	1.00000000000000	1.00000004495792

Probleem 2 Die vierkantswortel van 'n getal $a > 0$ kan bereken word deur die volgende vergelyking op te los met byvoorbeeld Newton se metode

$$x^2 - a = 0.$$

(a) Toon aan dat hierdie idee aanleiding gee tot die iterasie

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

wat ook as Heron se metode bekend staan.

(b) Implementeer Heron se metode om $\sqrt{100}$ te bereken, met $x_0 = 11$. Skryf soveel syfers neer as wat jou sakrekenaar jou toelaat om te sien. Onderstreep alle korrekte syfers (na afronding). Verdubbel die aantal korrekte syfers soos wat mens sou verwag?

(c) Toon aan, deur die definisie (1) hierbo te gebruik, dat Heron se metode kwadraties konvergeer. Bepaal ook die foutkonstante.

Probleem 3 Halley se metode vir die oplos van $f(x) = 0$ lui soos volg

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{[f'(x_n)/f(x_n)] - [f''(x_n)/2f'(x_n)]}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Pas Halley se metode toe op die vergelyking van Probleem 2 om 'n iterasie soortgelyk aan Probleem 2(a) vir die berekening van $\sqrt{a}$ te herlei.

(b) Herhaal Probleem 2(b) met Halley se metode. Hoe vergelyk die spoed van konvergensie met Heron se metode?

(c) Herhaal Probleem 2(c) met Halley se metode. Wat is die orde van konvergensie?

(d) Watter metode vir die berekening van die vierkantswortel is die mees effektiewe, Heron of Halley? Meet effektiwiteit as die totale aantal bewerkings ($+$, $-$, $*$, $/$) wat benodig word om 'n gegewe akkuraatheid te bereik.

(e) **Bonuspunte:** Herlei Halley se metode. Wenke sal tydens die tutoriaalsessie gegee word.