Probleem 1 Verwys na die formule vir die fout in polinoominterpolasie soos in die klas afgelei is. Vir die spesiale geval $f(x) = 1/x$ en twee interpolasie punte, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, bereken $\xi(x)$ eksplisiet as 'n funksie van x. Bevestig ook dat as x in $[1, 2]$ is, dan is $\xi(x)$ ook in $[1, 2]$, soos die stelling beweer. Kan jy $\xi(x)$ eksplisiet as 'n funksie van x skryf vir 'n willekeurige aantal interpolasie punte?

Probleem 2 Beskou die funksie

$$f(x) = \int_0^x e^{\cos t}\, dt$$

wat die volgende waardes aanneem

x	$\pi/4$	$\pi/2$
$f(x)$	1.93973	3.10438

(a) Gebruik lineêre interpolasie om $f(1)$ te benader en begrens die fout in jou benadering.

(b) Wat is die maksimum fout wat gemaak kan word as lineêre interpolasie gebruik word om $f(x)$ te benader by *enige* x in $[\pi/4, \pi/2]$? *Wenk:* In die klas is aangetoon dat

$$\max_{x_0 \le x \le x_1} |f(x) - p_1(x)| \le \tfrac{1}{8} h^2 M_1, \quad \text{waar} \quad M_1 = \max_{x_0 \le x \le x_1} |f^{(2)}(x)|.$$

(c) Verkry 'n derde datapunt deur inspeksie en voeg dit by die waardes in die tabel. Gebruik dan paraboliese interpolasie om $f(1)$ te benader en begrens die fout in jou benadering. (Hier, en in deel (d) hieronder, is dit toelaatbaar om die derde afgeleide met MATLAB te stip om sodoende die ekstreme waardes daarvan te bepaal.)

(d) Herhaal deel (b) vir paraboliese interpolasie. *Wenk:*

$$\max_{x_0 \le x \le x_2} |f(x) - p_2(x)| \le \tfrac{1}{9\sqrt{3}} h^3 M_2, \quad \text{waar} \quad M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_2} |f^{(3)}(x)|.$$

Probleem 3

(a) Vir 'n interval $[a, b]$, definieer $h = (b - a)/n$ vir enige heelgetal $n \geq 1$. Definieer gelykverspreide punte deur

$$x_j = a + jh, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

en beskou die polinoom

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Toon aan dat

$$|\omega_n(x)| \leq n!\, h^{n+1}, \qquad a \leq x \leq b.$$

Wenk: Kies 'n willekeurige x in $[x_0, x_n]$ en gestel dit lê in die interval $[x_\ell, x_{\ell+1}]$. Toon aan dat

$$|\omega_n(x)| = (x - x_0)\ldots(x - x_\ell)(x_{\ell+1} - x)\ldots(x_n - x).$$

Begrens nou die faktore regs deur veelvoude van h.

(b) Gebruik die resultaat van deel (a) saam met die foutformule om 'n foutafskatting soortgelyk aan die foutskattings in Probleem 2(b) en 2(d) neer te skryf, maar geldig vir enige n.

(c) Skryf die foutskatting van deel (b) neer vir $n = 1$ en $n = 2$. Is hierdie formules identies aan die foutskattings van Probleem 2(b) en 2(d). Waarom nie?

(d) Gestel $[a, b] = [-1, 1]$. Skryf die foutskatting van deel (b) in die vorm

$$\max_{|x|\leq 1} |f(x) - p_n(x)| \leq C_n \max_{|x|\leq 1} \frac{|f^{(n+1)}\xi(x)|}{(n+1)!}.$$

Bereken die waarde van C_n vir gelykverspreide– en Chebyshev punte m.b.v. Matlab. Lys die twee waardes van C_n in 'n tabel, vir $n = 5, 10, 15$. Watter C_n is die kleinste, dié van gelykverspreide punte of dié van Chebyshev punte? Is dit in ooreenstemming met die teorie?

Probleem 4 Beskou die funksie

$$f(x) = \sin \pi x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Beskou ook $n + 1$ interpolasie punte x_j, met

$$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1.$$

Gestel $f(x)$ word op hierdie rooster geïnterpoleer met 'n polinoom van graad n, sê $p_n(x)$.

Vraag: Sal $p_n(x) \to f(x)$ by elke punt x in $[-1, 1]$ as $n \to \infty$? M.a.w., sal polinoominterpolasie puntsgewys in die interval konvergeer? Ondersoek vir (a) gelykverspreide punte x_j, (b) Chebyshev punte, en (c) 'n arbitrêre verspreiding van punte x_j.