Probleem 1:

(a)

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^\alpha \tag{0.0.1}$$
$$|e_n| \approx C|e_{n-1}|^\alpha \tag{0.0.2}$$

Deel (0.0.1) deur (0.0.2):

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx \left(\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|}\right)^\alpha$$

Neem die log aan weerskante:

$$\log \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx \alpha \log \frac{|e_n|}{|e_{n-1}|} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx \frac{\log |e_{n+1}|/|e_n|}{\log |e_n|/|e_{n-1}|}.$$

(b) Vir Newton se metode, kies $n = 2$. Dan

$$|e_1| \approx 0.905 \times 10^{-2}, \quad |e_2| \approx 0.812 \times 10^{-4}, \quad |e_3| \approx 0.660 \times 10^{-8}.$$

Dus $\alpha \approx 2$, wat klop met die teorie.

Vir die secant metode, kies $n = 4$. Dan

$$|e_3| \approx 0.162 \times 10^{-2}, \quad |e_4| \approx 0.277 \times 10^{-4}, \quad |e_5| \approx 0.450 \times 10^{-7}.$$

Dus $\alpha \approx 1.58$, wat redelik klop met die teorie ($\alpha = 1.618\ldots$).

Probleem 2

(a) Newton se metode:

$$f(x) = x^2 - a, \quad f'(x) = 2x$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\
&= x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\frac{a}{x_n} \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).
\end{aligned} \tag{0.0.3}
$$

(b) Vir $a = 100$ het ons $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{100}{x_n}\right)$:

n	x_n	aantal korrekte syfers
0	$\underline{1}1.00000000000000$	1
1	$\underline{10.0}4545454545455$	3
2	$\underline{10.000}10283833813$	5
3	$\underline{10.00000000}052878$	10
4	$\underline{10.00000000000000}$	volle akkuraatheid

Dit lyk asof die aantal korrekte syfers wel min of meer verdubbel van stap tot stap soos wat mens sou verwag.

(c) Trek $\sqrt{a}$ aan weerskante van (0.0.3) af:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} \\
&= \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a\right) \\
&= \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2
\end{aligned}
$$

Laat $e_n = x_n - \sqrt{a}$ (die absolute fout op stap n). Dan

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= \frac{1}{2x_n}e_n^2 \\
\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} &= \frac{1}{2|x_n|} \\
\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} &= \frac{1}{2\sqrt{a}}.
\end{aligned}
$$

Dus is die orde van konvergensie $\alpha = 2$, wat dui op kwadratiese konvergensie, en die foutkonstante $C = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Probleem 3

(a) Deur herhaaldelik Newton se metode toe te pas sien ons dat die metode vir beide $\epsilon = 10^{-5}$ en $\epsilon = 10^{-10}$ eers na 25 stappe konvergeer. Dit is duidelik dat Newton se metode baie stadiger as gewoonlik konvergeer in hierdie geval.

(b) Die multiplisiteit van die wortel $x = 1$ kan bepaal word deur $f(x) = \cos^2(x-1) - 2x + x^2$ uit te brei as 'n Taylor reeks.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2(x-1) - 2x + x^2 \\
&= \left[1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{4!} - \text{(hoër orde terme)}\right]^2 - 2x + x^2 \\
&= 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{(x-1)^2}{2} + \text{(hoër orde terme)} - 2x + x^2 \\
& \quad \text{faktoriseer nou } x^2 - 2x + 1 \text{ en } \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{(x-1)^2}{2} + \ldots \\
\therefore f(x) &= (x-1)^2\text{(hoër orde terme)} + (x-1)^2 \\
&= (x-1)^2[\text{(hoër orde terme)} + 1]
\end{aligned}
$$

Hierdie resultaat wys dan dat daar twee wortels by $x = 1$ lê.

Die eksakte wortel is $x = 1$. Die funksie wat ons gebruik vir Newton se metode is

$$f(x) = \cos^2(x-1) - 2x + x^2.$$

Hierdie funksie se afgeleide word gegee deur

$$f'(x) = -2\sin(x-1)\cos(x-1) - 2 + 2x.$$

Hierdie afgeleide, geëvalueer by die wortel $x = 1$, is $f'(1) = 0$. Die wortel $x = 1$ is dus 'n herhaalde wortel. Die term $f'(p_n)$ in die noemer van die foutformule vir Newton se metode streef dus na 0, sodat die foutformule nie geld nie. (Die verskynsel word ook bespreek in Example 3, p.49, Burden & Faires.)

Probleem 4

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2(x-1) - 2x + x^2 \\
f'(x) &= 2[x - \sin(x-1)\cos(x-1) - 1] \\
f''(x) &= 2[1 + \sin^2(x-1) - \cos^2(x-1)] \\
&= 4\sin^2(x-1)
\end{aligned}$$

Halley:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n - \frac{f'(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \\
&= \ldots
\end{aligned}$$

Die MATLAB kode wat hierdie vergelyking implementeer is soos volg.

```
% Voorgestelde oplossing vir Vraag 4b van Tutoriaal 2 2005.

format long e
tol = 1e-10;                                      % Tolleransie
F = inline('cos(x-1)^2 + x^2 - 2*x');             % Die oorspronklike funksie
DF = inline('2*(x - sin(x-1)*cos(x-1) - 1)');     % Die afgeleide van die funksie
DDF = inline('4*(sin(x-1)^2)');                   % Die tweede afgeleide

del = 1;                                          % Inisialiseer die eerste term
x = 2;                                            % Aanvanklike skatting
X = [x];

while abs(del) > tol
    del = ( DF(x)*F(x) )/( DF(x)^2 - F(x)*DDF(x) )
    x = x - del;
    X = [X x];                                    % Die antwoorde le in X na konvergen
end
```

(b) Bereken deur presies die selfde metode toe te pas as in probleem 1b.

(c) Halley se metode word herlei deur Newton se metode toe te pas op $\frac{f(x)}{f'(x)}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } F(r) &= \frac{f(x)}{f'(x)} \\
\text{Newton: } x_{n+1} &= x_n - \frac{F(r)}{F'(r)} \\
&= x_n - \left[\frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{\frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2}}\right] \\
&= x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \cdot \frac{f'(x)^2}{f'(x)^2 - f(x)f''(x)} \\
&= x_n - \frac{f'(x)f(x)}{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}
\end{aligned}
$$