Versamelings: basiese konsepte

- Versamelings is nuttig om komplekse datastrukture te beskryf
- $3 \in \{2,3,5\}$ en $7 \notin \{2,3,5\}$
- Geen duplikate nie: $\{2, \boxed{2}, 3, 5\}$
- Elemente kan meer kompleks wees:

  $\{(1,a),\ (1,b),\ (2,a)\}$
- Bekende versamelings:
  - Die heelgetalle $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
  - Die natuurlike getalle $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Notasie om versamelings kompak te beskryf

- Voorbeeld: die versameling $\{0,1,4,9,16\}$ kan ook beskryf word as: $\{n : \mathbb{N} \mid n < 5 \bullet n^2\}$
- Betekenis van verskillende velde:

$$\{\underbrace{n : \mathbb{N}}_{A} \mid \underbrace{n < 5}_{P} \bullet \underbrace{n^2}_{T}\}$$

- A: Aanduiding van universum waaruit elemente gekies word ("signature")
- P: Predikaat (verdere beperking op elemente wat gekies word)
- T: Termbeskrywing (hoe elke element gevorm word)

Toepassings op programme

- 'n Vektor is verklaar in 'n Oberon-program as VAR x: ARRAY 10 OF INTEGER. Die waardes wat die indeks i mag aanneem kan beskryf word as:

$$\{i : \mathbb{N} \mid i < 10 \bullet i\}$$

- ASCII-voorstellings van karakters vorm 'n versameling CHAR:

  $CHAR = \{c : Char;\quad n : \mathbb{N} \mid n < 128 \bullet (c, n)\}$

  Hoe kan die syfers (kodes 48 tot 57) beskryf word?

- Verkorte notasie (vir eenvoudige gevalle):

  $\{n : \mathbb{N} \mid n > 1 \land n < 5\}$ (Die "$\bullet$"-deel kan weggelaat word as daar nie verwarring kan wees nie)
- Kardinaliteit: die aantal elemente in 'n versameling

  $\#\{a,b,c\} = 3$

  $\#\varnothing = 0$
- Leë versamelings en subversamelings:

  $\{n : \mathbb{N} \mid n > 10 \land n < 3\} = \varnothing$

  $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4,5\}$

  $\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$

Magsversamelings

- $\mathbb{P}X$ is die versameling van alle subversamelings van X
- Beskryf $\mathbb{P}\{a, b\}$
- Wat is die waarde van die volgende predikate?
  1. $\{1, 2\} \in \mathbb{P}\mathbb{N}$
  2. $0 \in \mathbb{P}\mathbb{N}$
  3. $\varnothing \in \mathbb{P}\mathbb{N}$
  4. $\{0\} \notin \mathbb{P}\mathbb{N}$

Toepassing

'n Lêerstelsel stoor elke lêer as 'n aantal blokke op skyf. Elke blok is ewe groot en het 'n unieke nommer. Die stelsel hou tred van watter blokke aan elke lêer behoort. Die blokke wat aan 'n sekere lêer behoort, kan beskryf word as 'n versameling "blocks".

- Beskryf die versameling "blocks"
- Wat is die waarde van "blocks" as die lêer geen data bevat nie?

Operatore op versamelings

- Die tipe van 'n versameling is die tipe van sy elemente
- Gelykheid (tipes van operande moet versamelings wees van identiese tipes)

  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$
- Kan die gelykheidsoperator gedefinieer word in terme van predikaatlogika?
- Vereniging (tipes van operande moet versamelings wees van identiese tipes)

  $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- Interseksie (tipes van operande moet versamelings wees van identiese tipes)

  $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$

Definisies

- $A \cup B \equiv \{a : T \mid a \in A \vee a \in B\}$
- $A \cap B \equiv \{a : T \mid a \in A \wedge a \in B\}$
- $A = B \equiv (\forall a : A \bullet a \in B) \wedge (\forall b : B \bullet b \in A)$
- $A \subseteq B \equiv (\forall a : A \bullet a \in B)$
- $A \subset B \equiv (\forall a : A \bullet a \in B) \wedge \neg(B = A)$
- $A \backslash B \equiv \{a : A \mid a \notin B\}$

Kruisproduk

- Aanvaar dat $A = \{a, b, c\}$ en $B = \{0, 1\}$

  Dan is $A \times B =$

  $\{(a, 0),\ (a, 1),\ (b, 0),\ (b, 1),\ (c, 0),\ (c, 1)\}$

- Orde is belangrik: $A \times B$ is nie dieselfde as $B \times A$ nie

- Die tipes van A en B hoef nie dieselfde te wees nie

Afleidingsreëls

- $\frac{x \in A,\ x \in B}{x \in A \cup B}$

- $\frac{x \in A}{x \in A \cup B}$

- $\frac{x \in A,\ A \subset B}{\{x\} \subset B}$

- $\frac{A \subset B,\ B \subset C}{A \subset C}$

- $\frac{A = B,\ B = C}{A = C}$

1. Bewys dat $A \cup B = B \cup A$

   $A \cup B$

   $= \{x : T \mid x \in A \vee x \in B\}$ [def $\cup$]

   $= \{x : T \mid x \in B \vee x \in A\}$ [comm $\vee$]

   $= B \cup A$ [def $\cup$]

2. Bewys dat $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Bewys dat $A \cap \varnothing = \varnothing$

Spesifikasie: ylmatrikse

- Matriks X met elemente uit $\mathbb{N}$, maar meeste elemente $= 0$

- Bespaar geheue (as matrikse groot is) deur slegs elemente te stoor wat nie 0 is nie

- $Row = \{i : \mathbb{N} \mid i < nrows\}$

- $Col = \{i : \mathbb{N} \mid i < ncols\}$

- $M = \{r : Row;\ c : Col;\ v : \mathbb{N} \mid (r, c, v)\}$

- $(\exists\, r : Row;\ c : Col;\ v : \mathbb{N} \mid (r, c, v) \in M) \Rightarrow X[i, j] = v)$

- $\neg(\exists\, r : Row;\ c : Col;\ v : \mathbb{N} \mid (r, c, v) \in M) \Rightarrow X[i, j] = 0)$

Implementering: ylmatrikse

- M is 'n versameling: orde onbelangrik
- Ongeordende lys van rekords, elk met velde r, c en v (stadig)
- Vektor van lyste (ordening beteken vinniger opsoek, maar stadiger invoeging)
- Hutstabel

Relasies

- $A \leftrightarrow B$
- Beskryf 'n verhouding tussen verwante objekte
- Afbeelding van versameling A op versameling B
- Versameling van geordende pare
- Subversameling van $A \times B$
- $\{a, b : \mathbb{N} \mid a + b = 4 \bullet (x, y)\}$

  $\{(0, 4),\ (1, 3),\ (2, 2),\ (3, 1),\ (4, 0)\}$
- Notasie: $(x, y) \in R$, of $xR\,y$

- Definisieversameling van R ($dom R$)
  - versameling van *linker* elemente van alle pare
- Waardeversameling van R ($ran R$)
  - versameling van *regter* elemente van alle pare
- Inverse relasie (R^{-1})
  - versameling van alle pare met elemente omgeruil

Komposisie van relasies

- Notasie: $A \fatsemi B$
- Indien $A = \{(a, 0), (b, 1)\}$ en $B = \{(0, f), (1, t)\}$ dan is

  $A \fatsemi B = \{(a, f),\ (b, t)\}$
- Sommige programme kan gemodelleer word as relasies:
  - toevoer PROGRAM afvoer
  - toevoer PROG1 $\fatsemi$ PROG2 afvoer
  - Party programme is omkeerbaar
  - *zip* en zip^{-1} (of unzip)
  - Wat doen $zip \fatsemi zip^{-1}$?

Identiteitsrelasie

- $id\ Y = \{y : Y \bullet (y, y)\}$
- Voorbeeld: $id\{a, b\} = \{(a, a),\ (b, b)\}$
- Nuttig tydens komposisie van relasies:
  - Modules wat sekere veranderlikes bywerk word as volg beskryf:
    $updates =$
    $\{(m1, x),\ (m2, y),\ (m2, x),\ (m3, z)\}$
  - Wat beskryf die volgende?
    $\mathrm{ran}((updates \fatsemi updates^{-1}) \setminus id\ \mathrm{dom}\ updates)$

Beperkings op relasies

- Beperking op die definisieversameling
  $\{a, b\} \lhd \{(a, 1),\ (b, 2),\ (c, 3)\} = \{(a, 1),\ (b, 2)\}$
- Beperking op die waardeversameling ($\rhd$)
  $\{(a, 1),\ (b, 2),\ (c, 3)\} \rhd \{3\} = \{(c, 3)\}$
- $S \lhd R = (id\ S) \fatsemi R$
- $R \lhd T = R \fatsemi (id\ T)$

Toepassing van beperkings op relasies

RW242 en RW314 deel dieselfde lêerstelsel. Die twee groepe studente word beskryf deur die versamelings $RW242$ en $RW314$. Die wagwoord wat geassosieer is met elke student word beskryf deur die relasie

$Passwd = \{(john, geheim),\ (marie, eiram),\ \ldots\}$

- Die versameling studente wat albei kursusse neem is $RW242 \cap RW314$
- Die versameling wagwoorde van die RW242-studente word beskryf deur
  $\mathrm{ran}(RW242 \lhd Passwd)$

Negatiewe beperkings-operatore

- $\{a, c\} ⩤ \{(a, 1),\ (b, 2),\ (c, 3)\} = \{(b, 2)\}$
- $\{(a, 1),\ (b, 2),\ (c, 3)\} ⩥ \{2, 3\} = \{(a, 1)\}$
- Negatiewe beperkings operatore kan gedefinieer word in terme van die gewone beperkings-operatore.

  Gegee: R is 'n relasie oor $T_1 \times T_2$, $S \subseteq T_1$ en $T \subseteq T_2$
  - $S ⩤ R = (T_1 \setminus S) \lhd R$
  - $R ⩥ T = R \rhd (T_2 \setminus T)$

$Prys = \{(Shiraz, 34),\ (Pinotage, 38),\ (Riesling, 31)\}$

$Voorraad =$
$\{(Shiraz, 1000),\ (Pinotage, 800),\ (Riesling, 2000)\}$

$Produsent =$
$\{(Shiraz, Hartenberg),\ (Pinotage, Kanonkop),$
$(Riesling, Zonnebloem)\}$

$Rooi = \{Shiraz, Pinotage\}$

$Wit = \{Riesling\}$

Wat word voorgestel deur die volgende?

1. $Rooi \lhd Prys$
2. $Wit \ntriangleleft Prys$
3. $(Produsent \rhd Zonnebloem)^{-1} \mathbin{;} Voorraad$

$\boxed{\text{Opheffings-operator ("override")}}$

Nuttig wanneer een relasie baie dieselfde is as 'n ander, behalwe vir sekere elemente.

Gegee:

$A = \{(a, 1),\ (b, 2),\ (c, 3)\}$ en $B = \{(a, 5)\}$

- $A \oplus B = \{(a, \boxed{5}),\ (b, 2),\ (c, 3)\}$
- $R \oplus S = (\mathrm{dom}\, S \ntriangleleft R) \cup S$
- Datastrukture wat entiteite voorstel wat met mekaar assosieer word, kan voorgestel word as relasies. Die opheffings-operator is handig om nuwe elemente by te voeg of bestaande elemente by te werk.

$R = \{(p, 2),\ (q, 3),\ (r, 4)\}$
$S = \{(1, x),\ (2, y),\ (3, z)\}$

Wat is die waarde van

1. $R \mathbin{;} S$
2. $S^{-1} \mathbin{;} R^{-1}$
3. $R^{-1} \oplus S$
4. $\{1, 2\} \ntriangleleft S$
5. $((S^{-1} \cup R) \rhd \{1, 2\})^{-1}$

Afbeeldings ("image"):

Gegee: R is 'n relasie oor $T_1 \times T_2$ en $S \subseteq T_1$

dan is $R(\!|S|\!) = \{t_2 : T_2 \mid \exists\, t_1 : S \bullet t_1 R\, t_2\}$

Meervoudige komposisie van relasies:

'n Homogene relasie is 'n relasie oor $T \times T$ vir enige tipe T

Indien R 'n homogene relasie is, dan is

- $R^3 = R \mathbin{;} R \mathbin{;} R$ (3-voudige komposisie)
- $R^0 = id\ T$ en $R^n = R \mathbin{;} R^{n-1}$

Gegee: $R = \{(x, y),\ (y, z),\ (a, b)\}$

Bereken R^0, R^2 en R^3

Eienskappe van relasies

- Refleksiwiteit: $a\,R\,a$
- Simmetrie: $a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a$
- Transitiwiteit: $(a\,R\,b \wedge b\,R\,c) \Rightarrow a\,R\,c$

Sluiting van relasies ("closure")

- $R^* = R^0 \cup R^1 \cup \ldots \cup R^n$ (refleksief, transitief)
- $R^+ = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n$ (nie-refleksief, transitief)
- $R^* = R^0 \cup R^+$

Manipulasiereëls vir relasies

- $(R_1 \mathbin{;} R_2)^{-1} = R_2^{-1} \mathbin{;} R_1^{-1}$
- $(R_1 \cup R_2) \mathbin{;} R_3 = (R_1 \cup R_3) \cup (R_2 \cup R_3)$
- $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$
- $R_1 \mathbin{;} (R_2 \mathbin{;} R_3) = (R_1 \mathbin{;} R_2) \mathbin{;} R_3$
- $R_1 \oplus (R_2 \oplus R_3) = (R_1 \oplus R_2) \oplus R_3$
- $R \oplus \varnothing = R$ en $\varnothing \oplus R = R$

Funksies

- Funksie is 'n spesiale soort relasie
- Elke element in definisieversameling is afgebeeld op slegs een element in waardeversameling.
- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ (funksie wat natuurlike getalle afbeeld op natuurlike getalle)
- Watter van die volgende is funksies?

  1. $\{(a,1), (b,2), (b,3)\}$
  2. $\{(a,1), (b,2), (c,2)\}$
  3. $\{n : \mathbb{N} \mid n > -3 \wedge n < 3 \bullet (n, n^2)\}$

Verskillende soorte funksies

- Parsiële funksies: afbeelding bestaan slegs vir sommige elemente van die versameling waaruit definisieversameling gekies word.

- $\{(0, a), (3, b), (4, c)\}$ is 'n parsiële funksie indien die definisieversameling gekies is uit die natuurlike getalle.

- Parsiële funksies kom algemeen voor in stelselspesifikasies.

- Afbeelding van hotelkamers op persone (wie is in watter kamer) is 'n parsiële funksie:

  – $\mathit{occupied} : \mathit{room} \nrightarrow \mathit{person}$

- Totale funksie: *definisie*versameling gelyk aan die versameling waaruit eerste elemente van pare gekies word. ($\longrightarrow$)

- surjeksie: *waarde*versameling gelyk aan die versameling waaruit tweede elemente van pare gekies word. ($\twoheadrightarrow$, ⤀)

- injeksie: inverse funksie is ook 'n funksie. ($\rightarrowtail$, ⤔)

- bijeksie: beide injektief en surjektief. (⤖)

Voorbeeld: simbooltabel

- Simbooltabel assosieer simbole (soos veranderlike "x") met eienskappe omtrent die simbole (soos hulle adresse).

- modelleer simbooltabel as 'n parsiële funksie:
  $st : VAR \leftrightarrow ADDR$ (relasie)
  $st : \mathbb{P}(VAR \times ADDR)$ (alternatiewe notasie)
  $st : VAR \nrightarrow ADDR$ (dui aan dis 'n parsiële funksie)

- Inverse funksie st^{-1} beeld adresse af op simbole (nuttig tydens ontfouting van program).

Hoër orde funksies

- Tipe van definisieversameling en/of waardeversameling is funksies.

- Simbooltabel wat veranderlikes afbeeld op pare (adres, tipe):
  $st : VAR \nrightarrow (\mathbb{N}, TYPE)$

- Voorbeeld:
  $\{(x, (1024, \mathit{integer}), (y, (1026, \mathit{boolean}))\}$

Lambda uitdrukkings

- λ *verklarings* | *beperkings* $\bullet$ *formaat*
- *beperkings* op eerste element
- *formaat* van tweede element
- Voorbeeld: $\lambda\, m : \mathbb{N} \mid m < 4 \bullet m{+}1$ definieer die funksie $\{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4)\}$
- $succ = \lambda\, n : \mathbb{N} \bullet n + 1$
- Lys die elemente van $\{0\} \lhd (succ \mathbin{;} \{(1, a), (2, b), (3, c)\})$

Reekse ("sequences")

- Die ordening van items is soms belangrik (toue, stapels)
- 'n Reeks is 'n funksie wat elemente van 'n versameling afbeeld op die getalle 1, 2, 3, ... (Nuttig vir ordening van die elemente.)
- Voorbeeld (druktou): $printq = \{(1, fileA), (2, fileB), (3, fileC)\}$
- Spesiale notasie: $\langle fileA, fileB, fileC \rangle$

Operators op reekse

'n Reeks is 'n funksie S wat elemente van $\mathbb{N}_1$ afbeeld op 'n versameling T

- *head(s)*: die eerste element van reeks s: $\lambda\, s : S \mid s \neq \varnothing \bullet s(1)$
- *last(s)*: die laaste element van s: $\lambda\, s : S \mid s \neq \varnothing \bullet s(\#s)$
- *front(s)*: alle elemente van s behalwe die laaste een: $\lambda\, s : S \mid s \neq \varnothing \bullet (1..\#s - 1) \lhd s$
- *tail(s)*: alle elemente van s behalwe die eerste een: $\lambda\, s : S \mid s \neq \varnothing \bullet \{0\} \lhd (succ \mathbin{;} s)$

Katenering ("concatenation")

- $\langle a, b, c \rangle \frown \langle d, e \rangle = \langle a, b, c, d, e \rangle$
- $\langle\rangle \frown s = s$ (kateneer leë reeks met reeks s)
- $s \frown \langle\rangle = s$ (kateneer reeks s met leë reeks)

Spesifikasie van 'n stapel

Stapel bevat elemente van versameling $Item = \{a, b, c\}$ Modelleer stapel as 'n reeks: $stack : \operatorname{seq} Item$

- Bewerking push:
  toevoer: $new?$: Item
  postkondisie: $stack' = \langle new? \rangle \frown stack$

- Bewerking pop:
  afvoer: elem!: Item
  prekondisie: $\#stack > 0$
  postkodisie:
  $elem! = head(stack) \land stack' = tail(stack)$

  alternatief: $\langle elem! \rangle \frown stack' = stack$