Probleem 1: Beskou die aanvangswaardeprobleem

$$\frac{dy}{dt} = y + t, \qquad y(0) = 1.$$

(a) Los die probleem analities op.

(b) Los die probleem numeries op, op die interval $0 \le t \le 1$. Gebruik 'n **sakrekenaar** en Euler se metode met staplengte $h = 1/4$ (Oefening vir toetse en eksamens). Tabelleer die resultate soos volg

t	Numeriese oplossing	Werklike oplossing	Fout
0.25			
0.50			
0.75			
1.00			

(c) Skryf 'n MATLAB-program wat Euler se metode implementeer, vir arbitrêre staplengtes h, op die interval $0 \le t \le 1$. Toets die program deur die waardes bereken in deel (b) te bevestig. Los nou ook die probleem op met staplengte $h = 0.1$, en tabelleer die resultate soos in deel (b), natuurlik vir $t = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1$.

(d) Gebruik MATLAB se ingeboude program `ode45` om die probleem op te los, op die interval $0 \le t \le 1$. Tabelleer die resultate soos in deel (c). Watter resultate is meer akkuraat, dié van deel (c) of dié van deel (d)?

Wenk: `ode45` word soos volg gebruik

```
>> f = inline('t+y');
>> [t,y] = ode45(f,[0 1],[1]);
>> plot(t,y)
```

Tik `help ode45` om meer te leer.

Probleem 2: In hierdie oefening ondersoek ons die verskynsel van onstabiliteit in die numeriese oplossing van aanvangswaardeprobleme. Beskou die probleem

$$\frac{dy}{dt} = -6ty + t, \qquad 0 \le t \le 10,$$

met aanvangsvoorwaarde $y(0) = 0$. Die analitiese oplossing is (herlei self, vir oefening)

$$y = \tfrac{1}{6}\left(1 - e^{-3t^2}\right),$$

wat gebruik kan word om die numeriese metode te kontroleer.

(a) Toon aan dat die DV 'n ewewigstoestand $y = \frac{1}{6}$ het. (Oefening vir die eksamen!)

(b) Gebruik nou Euler se metode om hierdie probleem op te los, met staplengte $h = 0.1$. Stip die numeriese oplossing saam met die analitiese oplossing op dieselfde assestelsel. (Dit sal nodig wees om die skaal op die y-as te beperk met iets soos `axis([0 10 0 0.2])`. Word die korrekte ewewigstoestand bereik? Loer ook na die numeriese waardes. Wat het verkeerd geloop?

(c) 'n Volledige verklaring van die onstabiliteit word in TW324 gegee.[1] 'n Goeie leidraad van wat verkeerd geloop het kan egter soos volg verkry word. Gebruik `dfield6.m` om die rigtingsveld van die DV te stip, op $(t, y) \in [0, 10] \times [0, 0.2]$. Kies nou die Euler metode met `Options -> Solver -> Euler` en maak seker dat die staplengte op 0.1 gestel is. Gebruik dan `Options -> Plot several solutions` om die oplossingskromme wat ooreenstem met $y(0) = 0$ te stip. Probeer nou om jou eie teorie van die meganisme van die onstabiliteit te formuleer.

(d) Verander jou Euler program om die aanvangswaardeprobleem ook met die trapesiumreël

$$y_{j+1} = y_j + \tfrac{1}{2}h\Big(f(t_j, y_j) + f(t_{j+1}, y_{j+1})\Big)$$

op te los. **Let op:** aangesien die regterkant $f(t, y) = -6ty + t$ *lineêr* in y is, kan die trapesiumreël eksplisiet geïmplementeer word. Word die korrekte ewewigstoestand bereik? Is daar enige teken van die onstabiliteit?

(e) Ons keer terug na die Euler metode. In Afdeling 3.4 van die notas is bewys dat Euler se metode konvergeer na die eksakte oplossing in die limiet $h \longrightarrow 0$. Hoe is hierdie resultaat versoenbaar met die onstabiliteit wat in deel (b) waargeneem is? Om jou te help, stip oplossings soos in deel (b), maar gebruik staplengtes $h = 0.08$ en $h = 0.05$.

(f) Gebruik MATLAB se ingeboude numeriese metode vir aanvangswaardeprobleme, `ode45.m` om die DV op te los. Dit is 'n Runge-Kutta metode (sien p. 93 in die notas), met **aanpasbare** tydstap h. Tik help `ode45` in MATLAB om meer te leer. Stip die oplossing en handig die grafiek in. Word die korrekte ewewigstoestand dié keer bereik?

Probleem 3: Elke sagteware pakket het spesiale oplossers vir stram DVs. In MATLAB word hulle met die letter `s` onderskei, soos in `ode15s.m`.

Los die aanvangswaardeprobleem van Probleem 2 op met beide `ode45.m` en `ode15s.m`. (Lg. word net soos eg. gebruik.) Stip die oplossing as 'n funksie van die tyd op $0 \leq t \leq 10$. Zoem in op die ewewigsoplossing (d.w.s., naby $t = 10$). Watter van `ode45.m` of `ode15s.m` se oplossings vertoon die beste?

[1]Die verskynsel in Probleem 2(b) word *stramheid (stiffness)* genoem. 'n Mens sou verwag dat namate die ewewigstoestand bereik word mens kan wegkom met 'n groter waarde van h, aangesien die oplossing al gladder word. Inderwaarheid is die omgekeerde waar: hoe nader die oplossing aan die ewewigstoestand kom, hoe kleiner moet h word. In die berekening van Probleem 2(b) oorskry die waarde van h 'n sekere drempelwaarde, en die metode raak onstabiel. Let op dat die verskynsel nie 'n gevolg van die rekenaar se afrondingsfoute is nie—dieselfde verskynsel sou waargeneem word in eksakte rekenkunde. Die verskynsel van stramheid is nie eie aan Euler se metode nie—probeer gerus die gemodifiseerde Euler of een van die Runge-Kutta metodes en jy sal dieselfde onstabiliteit waarneem. Om die probleem te omseil moet daar van implisiete metodes gebruik gemaak word, waarvan die trapesiumreël van deel (d) een voorbeeld is.