INSTRUKSIES:

(a) Huiswerke moet met die aanvang van die tutoriaalperiode op Vrydae ingehandig word. Geen elektroniese huiswerke word aanvaar nie en geen huiswerke sal laat ingeneem word nie. In die praktyk beteken dit dat jy moet mik om teen Donderdagaand klaar te wees om toe te laat vir moontlike probleme met drukkers, skerms wat vries, en so aan.

(b) Samewerking op hierdie huiswerke word beperk tot die uitruil van enkele idees en wenke. Die uitruil van data, grafieke, rekenaarprogramme of die besonderhede van wiskundige berekenings is nie toelaatbaar nie. Wat jy inhandig moet jou eie werk wees.

Probleem 1 Verwys na die formule vir die fout in polinoominterpolasie soos gegee op p. 70 in Burden & Faires (of Stelling 2 op p. 315 in Kincaid & Cheney.) Vir die spesiale geval $f(x) = 1/x$, $n = 1$, $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, bereken ξ_x eksplisiet as 'n funksie van x. Bevestig ook dat as x in $[1, 2]$ is, dan is ξ_x ook in $[1, 2]$, soos die stelling beweer.

Probleem 2 Beskou die funksie

$$f(x) = \int_0^x e^{\cos t}\, dt$$

wat die volgende waardes aanneem

x	$\pi/4$	$\pi/2$
$f(x)$	1.93973	3.10438

(a) Gebruik lineêre interpolasie om $f(1)$ te benader en begrens die fout in jou benadering.

(b) Wat is die maksimum fout wat gemaak kan word as lineêre interpolasie gebruik word om $f(x)$ te benader by *enige* x in $[\pi/4, \pi/2]$? *Wenk:* In die klas is aangetoon dat

$$\max_{x_0 \le x \le x_1} |f(x) - p_1(x)| \le \tfrac{1}{8} h^2 M_1, \quad \text{waar} \quad M_1 = \max_{x_0 \le x \le x_1} |f^{(2)}(x)|.$$

(c) Verkry 'n derde datapunt deur inspeksie en voeg dit by die waardes in die tabel. Gebruik dan paraboliese interpolasie om $f(1)$ te benader en begrens die fout in jou benadering. (Hier, en in deel (d) hieronder, is dit toelaatbaar om die derde afgeleide met MATLAB te stip om sodoende die ekstreme waardes daarvan te bepaal.)

(d) Herhaal deel (b) vir paraboliese interpolasie. *Wenk:*

$$\max_{x_0 \le x \le x_2} |f(x) - p_2(x)| \le \tfrac{1}{9\sqrt{3}} h^3 M_2, \quad \text{waar} \quad M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_2} |f^{(3)}(x)|.$$

[1] Vanweë die vakansie word hierdie huiswerk nie ingehandig nie. Dit is egter noodsaaklik dat jy hierdie probleme self sal doen as voorbereiding vir die toetse.

Probleem 3

(a) Vir 'n interval $[a, b]$, definieer $h = (b-a)/n$ vir enige heelgetal $n \geq 1$. Definieer gelykverspreide punte deur

$$x_j = a + jh, \qquad j = 0, 1, \ldots, n,$$

en beskou die polinoom

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Toon aan dat

$$|\omega_n(x)| \leq n!\, h^{n+1}, \qquad a \leq x \leq b.$$

Wenk: Kies 'n willekeurige x in $[x_0, x_n]$ en gestel dit lê in die interval $[x_\ell, x_{\ell+1}]$. Toon aan dat

$$|\omega_n(x)| = (x - x_0)\ldots(x - x_\ell)(x_{\ell+1} - x)\ldots(x_n - x).$$

Begrens nou die faktore regs deur veelvoude van h.

(b) Gebruik die resultaat van deel (a) saam met die foutformule op p. 70 in Burden & Faires (Stelling 2 op p. 315 in Kincaid & Cheney) om 'n foutafskatting soortgelyk aan die foutskattings in Probleem 2(b) en 2(d) neer te skryf, maar geldig vir enige n.

(c) Skryf die foutskatting van deel (b) neer vir $n = 1$ en $n = 2$. Is hierdie formules identies aan die foutskattings van Probleem 2(b) en 2(d). Waarom nie?

(d) Gestel $[a, b] = [-1, 1]$. Skryf die foutskatting van deel (b) in die vorm

$$\max_{|x|\leq 1} |f(x) - p_n(x)| \leq C_n \max_{|x|\leq 1} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Vergelyk hierdie foutskatting met die een vir Chebyshev punte soos gegee op p. 361 in Burden & Faires (Stelling 5 p. 318, Kincaid & Cheney.) Lys die twee waardes van C_n in 'n tabel, vir $n = 5, 10, 15$. Watter C_n is die kleinste, dié van gelykverspreide punte of dié van Chebyshev punte? Is dit in ooreenstemming met die teorie?

Probleem 4 Beskou die funksie

$$f(x) = \sin \pi x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Beskou ook $n + 1$ knooppunte x_j, met

$$-1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1.$$

Gestel $f(x)$ word op hierdie rooster geïnterpoleer met 'n polinoom van graad n, sê $p_n(x)$.

Vraag: Sal $p_n(x) \to f(x)$ by elke punt x in $[-1, 1]$ as $n \to \infty$? M.a.w., sal polinoominterpolasie puntsgewys in die interval konvergeer? Ondersoek vir (a) gelykverspreide punte x_j, (b) 'n arbitrêre verspreiding van punte x_j.