INSTRUKSIES:

(a) Huiswerke moet met die aanvang van die tutoriaalperiode op Vrydae ingehandig word. Geen elektroniese huiswerke word aanvaar nie en geen huiswerke sal laat ingeneem word nie. In die praktyk beteken dit dat jy moet mik om teen Donderdagaand klaar te wees om toe te laat vir moontlike probleme met drukkers, skerms wat vries, en so aan.

(b) Samewerking op hierdie huiswerke word beperk tot die uitruil van enkele idees en wenke. Die uitruil van data, grafieke, rekenaarprogramme of die besonderhede van wiskundige berekenings is nie toelaatbaar nie. Wat jy inhandig moet jou eie werk wees.

(c) In die probleme hieronder word dit van jou verwag om 'n paar van die MATLAB programme op die CD van die handboek te gebruik. Verdere instruksies sal tydens die tutoriaalsessie gegee word.

Probleem 1 (*In hierdie probleem herlei ons 'n praktiese probleem na 'n nie-lineêre vergelyking, wat met 'n numeriese metode opgelos word.*) Doen Probleem 10 op p. 61 in Burden & Faires. (Hieronder gereproduseer vir jou gerief.) Gebruik *bisect21.m* om die vergelyking mee op te los. Motiveer jou keuse van aanvanklike skattings en stoppingstoleransie uit die fisiese probleem.

Probleem 2 (*In hierdie probleem ondersoek ons watter metode vir die oplos van vergelykings die mees effektiewe is.*) Beskou vir hierdie doel die modelvergelyking wat in die klas gebruik is, naamlik

$$e^x = 4x.$$

Gestel ons stel belang in die wortel wat in $[0, 1]$ geleë is.

(a) Gebruik halvering (*bisect21.m*), Regula-Falsi (*falpos23.m*), secant (*secant22.m*), en Newton se metode (*newton24.m*) om die vergelyking mee op te los. Gebruik $x_0 = 0$ as aanvanklike skatting vir Newton se metode, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ as aanvanklike skattings vir die secant-metode, en $[0, 1]$ as aanvanklike interval vir die halvering en Regula-Falsi metodes. Bepaal eksperimenteel die **aantal stappe** wat elk van hierdie metodes neem om te konvergeer tot toleransies $\epsilon = 10^{-5}$ en $\epsilon = 10^{-10}$. Som jou bevindings op in tabelvorm.

(b) Op grond van jou resultate in deel (a), rangskik die vier metodes in orde van spoed van konvergensie.

(c) 'n Ander maatstaf vir die effektiwiteit van hierdie metodes is die aantal funksie evaluerings wat uitgevoer word om 'n gegewe akkuraatheid te bereik. (In die praktyk kan 'n enkele evaluering van f 'n uur of meer duur!) Onthou dat Newton se metode twee funksie evaluerings per iterasie uitvoer, terwyl die ander metodes slegs een funksie evaluering doen. Op grond van hierdie kriterium, herrangskik nou die vier metodes in orde van effektiwiteit.

Probleem 3 (*In hierdie probleem leer ons dat Newton se metode soms stadiger as normaalweg konvergeer.*) Beskou vir hierdie doel die vergelyking

$$\cos^2(x-1) = 2x - x^2,$$

wat die eksakte wortel $x = 1$ het (bevestig!).

(a) Los hierdie vergelyking op met Newton se metode (*newton24.m*), met aanvanklike skatting $x_0 = 1.1$. Gebruik toleransies $\epsilon = 10^{-5}$ en $\epsilon = 10^{-10}$ en bepaal eksperimenteel hoeveel stappe die metode neem om te konvergeer. Hoe vergelyk hierdie aantal stappe met die aantal in die tabel van Probleem 2(a)?

(b) Verklaar waarom die konvergensie van Newton se metode nie so vinnig as normaalweg geskied nie, deur te verwys na die foutformule op p. 48 in Burden & Faires.

(c) Is hierdie probleem eie aan Newton se metode? Probeer ook die secant, halvering en Regula-Falsi metodes op hierdie probleem toepas. Rapporteer jou bevindings.

(d) Die program *newton24.m* gebruik die volgende stoppingstoets

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon.$$

Gebruik die berekenings van deel (a) om te ondersoek of hierdie stoppingstoets wel die verlangde akkuraatheid lewer. Met ander woorde, is die volgende 'n geldige aanname?

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad |x_{n+1} - p| < \epsilon.$$

Hier is p die eksakte wortel.