INSTRUKSIES:

(a) Huiswerke moet met die aanvang van die tutoriaalperiode op Vrydae ingehandig word. Geen elektroniese huiswerke word aanvaar nie en geen huiswerke sal laat ingeneem word nie. In die praktyk beteken dit dat jy moet mik om teen Donderdagaand klaar te wees om toe te laat vir moontlike probleme met drukkers, skerms wat vries, en so aan.

(b) Samewerking op hierdie huiswerke word beperk tot die uitruil van enkele idees en wenke. Die uitruil van data, grafieke, rekenaarprogramme of die besonderhede van wiskundige berekenings is nie toelaatbaar nie. Wat jy inhandig moet jou eie werk wees.

Probleem 1: Beskou die formule vir die basiese Simpson reël, p. 117 in Burden & Faires. Die vierde afgeleide in die foutterm suggereer dat Simpson se reël eksak is ook vir kubiese polinome, hoewel die metode natuurlik dmv paraboliese interpolasie herlei word. Bewys nou direk (dws, sonder om van die gegewe foutterm gebruik te maak) dat Simpson se reël alle kubiese polinome eksak integreer. *Wenk:* Dit is slegs nodig $f(x) = x^3$ te beskou (hoekom?)

Probleem 2: In hierdie probleem gebruik ons die metode van *onbepaalde koëffisënte* om 'n paar basiese kwadratuur-formules te herlei. Ons beperk die bespreking tot integrale op $[-1, 1]$, dws, ons beskou

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Verder gaan ons tweepunt benaderings hiervan ondersoek, naamlik

$$I(f) \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1), \tag{1}$$

waar x_0, x_1 die knooppunte genoem word, en w_0, w_1 die gewigte.

(a) Laat $x_0 = -1$ en $x_1 = 1$ en bepaal w_0 en w_1 deur te vereis dat die formule (1) die funksies $f = x^0$, $f = x^1$ eksak integreer. Verkry ook 'n foutterm, deur te aanvaar dat die fout van die vorm $Cf''(\xi)$ is, en die konstante C te bepaal deur die formule (1) op $f = x^2$ toe te pas. (Jy behoort sodoende die basiese Trapesiumreël met foutterm te herlei het; vergelyk dus jou antwoord met die formule op p. 115 in Burden & Faires, met $[a, b] = [-1, 1]$.)

(b) Herhaal deel (a), maar gebruik die Chebyshev-punte, $x_0 = -1/\sqrt{2}$, $x_1 = 1/\sqrt{2}$, as knooppunte. Hoe vergelyk die foutkonstante C met die konstante van deel (a)? Te verwagte? Teken 'n prentjie om aan te toon dat hierdie reël as 'n gewysigde trapesiumreël gesien kan word.

(c) Herhaal deel (a), maar gebruik die sg. Legendre-punte, $x_0 = -1/\sqrt{3}$, $x_1 = 1/\sqrt{3}$, as knooppunte. Jy sal vind dat die foutformule aangepas moet word.

(d) Watter een van die metodes hierbo beskou jy as die mees akkurate?

Probleem 3: (omblaai)

Probleem 3: Beskou die integraal (met eksakte waarde in hakies)

$$I = \int_1^3 \sqrt{1+x^3}\,dx \quad (= 6.229959387883646\ldots)$$

(a) Benader die integraal met die saamgestelde trapesiumreël, met 4 intervalle (sakrekenaar). Bereken ook die absolute fout in die benadering.

(b) Herhaal deel (a), maar gebruik die saamgestelde Middelpuntreël.

(c) Herhaal deel (a), maar gebruik die saamgestelde Simpsonreël.

(d) Gestel die werklike waarde van I was nie bekend nie. Begrens die fout in die trapesiumreël benadering van deel (a), deur die foutformule op p. 123 (Burden & Faires) te gebruik. Is die werklike fout binne die teoretiese foutgrens? *Wenke:* Toon aan (met die hand) dat

$$f''(x) = -9/4\,\frac{x^4}{(1+x^3)^{3/2}} + 3\,\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}.$$

Skets $f''(x)$ met MATLAB, om aan te toon dat dit 'n positiewe en streng dalende funksie is op $[1,3]$.

(e) Gebruik die foutskatting van deel (d) om 'n beraming te maak van hoeveel intervalle in die trapesiumreël gebruik moet word om te verseker dat die absolute fout in die benadering nie groter is as 10^{-4} nie. (Die werklike aantal is $n \geq 71$.)