TW324 Kwartaaltoets 1 2004

Probleem 1:

$$p(x) = 1 + x(-2 + x(3 + x(-4 + x\cdot 5)))$$

$$p(2) = \underbrace{1 + 2\underbrace{(-2 + 2\underbrace{(3 + 2\underbrace{(-4 + \underbrace{2\cdot 5}_{10})}_{6})}_{15})}_{28}}_{57}$$

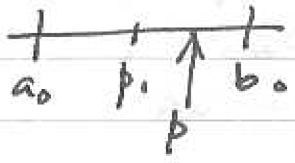
$$p(2) = 57 \longrightarrow$$

Probleem 2:

Aangesien $\sin x \approx x$ as $x \approx 0$ sal die berekening van $1+\sin x$ onderhewig wees aan smering vir klein waardes van x. Die kode sal dus nie 'n akkurate antwoord lewer nie.

[Trouens, sodra $\sin x \approx 2.2 \times 10^{-16}$ en kleiner, sal $1 + \sin x = 1$ in MATLAB, en dus lewer die kode uiteindelik 1 as benadering en nie die korrekte waarde van $e^2 = 7.39\ldots$ nie.]

Probleem 3:



$$|p_1 - p| \le \frac{b_0 - a_0}{2}$$

Netso $\quad |p_2 - p_1| \leq \dfrac{b_1 - a_1}{2} = \dfrac{b_0 - a_0}{2^2}$

en in die algemeen

$$|p_n - p| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

As $a_0 = -2$, $b_0 = +2$ wil ons dus hê dat

$$\frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{4}{2^n} \leq 10^{-10}$$

$$\Longrightarrow \qquad 2^n \geq 4 \cdot 10^{10}$$

$$n \geq \frac{\ln 4 \cdot 10^{10}}{\ln 2}$$

$$= 35.22\ldots$$

Dus 36 stappe $\longrightarrow$

Probleem 4:

(a) Aangesien $q^2 \gg p^3$, en $q < 0$, vind die kansellasie hier plaas

$$v = \left(\sqrt{p^3 + q^2} + q\right)^{1/3}$$

(b) Aangesien $p^3 \gg q^2$ is $u \approx v$ en dus vind die kansellasie hier plaas

$$x_1 = u - v.$$

(c) Aangesien v kansellasiefoute bevat, maar u akkuraat is, wil ons die formule herskryf in terme van u. Nou

$$u^3v^3 = \left(\sqrt{p^3+q^2} - q\right)\left(\sqrt{p^3+q^2} + q\right)$$
$$= p^3 + q^2 - q^2 = p^3$$
$$\Rightarrow \quad uv = p \quad \Rightarrow \quad v = p/u.$$

In die MATLAB kode, vervang ons dus die lyn waar v bereken word met

```
>> v = p/u;
```

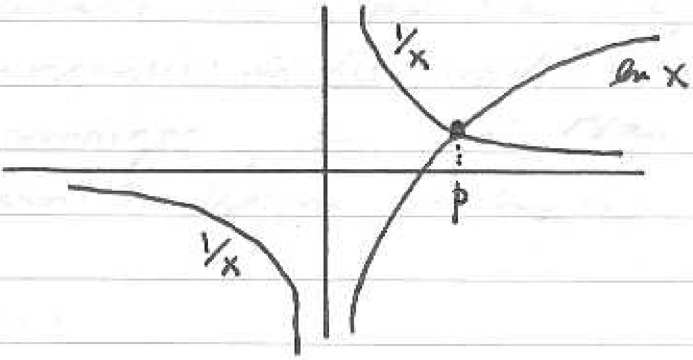
(d) Gebruik die werk op die voorblad

$$u - v = \frac{u^3 - v^3}{u^2+uv+v^2} = \frac{-2q}{u^2+uv+v^2}$$

In die MATLAB kode, vervang die lyn waar x_1 bereken word met

```
>> x1 = (-2*q)/(u^2 + u*v + v^2);
```

Probleem 5: (a) Skryf die vergelyking as $\ln x = 1/x$ en skets linker- en regterkant op dieselfde assestelsel:



Die skets suggereer slegs een reële wortel $x = p > 0$, soos aangedui.

(b) Laat $f(x) = x \ln x - 1$. Dan

$$f_0 = f(1) = 1 \ln 1 - 1 = -1$$
$$f_1 = f(2) = 2 \ln 2 - 1 = 0.38629\ldots$$

$$x_2 = x_1 - f_1 \frac{x_1 - x_0}{f_1 - f_0} = 1.7213\ldots$$

$$f_2 = f(x_2) = -0.065123\ldots$$

(enigste f evaluering hierdie stap)

$$x_3 = x_2 - f_2 \frac{x_2 - x_1}{f_2 - f_1} = 1.7615\ldots$$

(c) Aangesien f_0 en f_1 van teken verskil, en só ook f_1 en f_2, sal Regula-F tot op hierdie stadium presies dieselfde benaderings as die secant metode lewer.

Probleem 6:

Die linkerkantste kolom lyk soos die tipiese kwadratiese konvergensie van Newton se metode (fout $\simeq 10^{-2} \to 10^{-4} \to 10^{-7} \to 10^{-14}$ dws kwadreer min of meer van stap tot stap.) Die konvergensie in die middelste kolom lyk vinniger, en dié van die regterkantste kolom stadiger.

Verklaring:

$$f = x^3 - 7, \quad f' = 3x^2, \quad f'' = 6x$$

$$f'(3^{1/3}) = 3 \cdot 3^{2/3} \neq 0, \quad f''(3^{1/3}) = 6 \cdot 3^{1/3} \neq 0.$$

Dus verwag ons die tipiese kwadratiese konvergensie van Newton se metode.

$$g = x^2 - 3/x, \quad g' = 2x + 3/x^2, \quad g'' = 2 - 6/x^3$$

$$g'(3^{1/3}) = 2 \cdot 3^{1/3} + \frac{3}{3^{2/3}} \neq 0$$

$$g''(3^{1/3}) = 2 - \frac{6}{(3^{1/3})^3} = 2 - 2 = 0$$

Die feit dat $g''(p) = 0$ verklaar die vinniger konvergensie (inderdaad <u>kubiese</u> konvergensie).

$$h = x^6 - 6x^3 + 9 = (x^3 - 3)^2$$

$$h' = 3(x^3 - 3)(3x^2)$$

$$h'(3^{1/3}) = 3(3-3)(3 \cdot 3^{2/3}) = 0$$

Die feit dat $h'(p) = 0$ verklaar die stadiger konvergensie (inderdaad <u>lineêre</u> konvergensie).

<u>Probleem 7:</u> Trek $\sqrt{a}$ weerskante af

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2a}(3ax_n - x_n^2) - \sqrt{a}$$

$$= -\frac{x_n^3 - 3ax_n + 2a^{3/2}}{2a}$$

$$= -\frac{(x_n-\sqrt{a})(x_n^2+\sqrt{a}\,x_n-2\sqrt{a})}{2a}$$

$$= -\frac{(x_n-\sqrt{a})(x_n-\sqrt{a})(x_n+2\sqrt{a})}{2a}$$

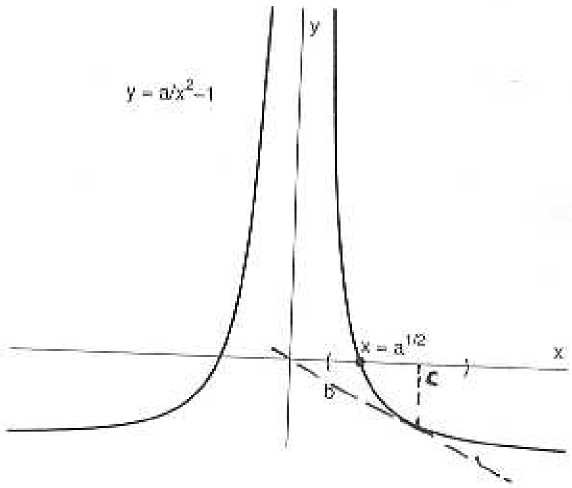
$$\Rightarrow \quad \frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^2} = -\frac{x_n+2\sqrt{a}}{2a}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (x_n\to\sqrt{a})}} \left|\frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^{2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n+2\sqrt{a}}{2a}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Dus $\alpha = 2$, $C = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}$ $\rightarrow$

Problem 7: Aangesien $f''(x) > 0$ vir alle x in $(0, \sqrt{a})$ (grafiek konkaaf na bo) sal Newton se metode konvergeer vir alle x_0 in $(0, \sqrt{a})$. Dus $b = 0$. Die waarde van c word bepaal deur die feit dat 'n raaklyn by $x = c$ deur die oorsprong moet gaan (soos in die figuur $\rightarrow$)



Dus $$f'(c) = \frac{f(c)-0}{c-0}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2a}{c^3} = \frac{a/c^2 - 1}{c}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{2a}{c^2} = \frac{a}{c^2} - 1 \Rightarrow c^2 = 3a$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{3a}.$$

<u>Alternatief:</u> Vir $x_0 > 0$ wil ons hê dat $x_1 > 0$. (So nie konvergeer die iterasie dalk na $-\sqrt{a}$.)

$$x_1 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2a}\left(3ax_0 - x_0^3\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0\left(3a - x_0^2\right) > 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 < \sqrt{3a} = c.$$

(b) Ja, die figuur toon een moontlikheid vir $x_0 < 0$. (Navorsingsvraag: Vind <u>alle</u> intervalle (b,c) waarbinne Newton se metode na $\sqrt{a}$ konvergeer!)