Probleem 1: Stirling se formule lui dat[1]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \qquad n \to \infty.$$

Vir elk van die volgende waardes van n, bereken die absolute sowel as die relatiewe foute in die benadering. Watter maatstaf, absolute of relatiewe fout, is die beste indikator van die akkuraatheid van die benadering? Bereken ook die hoeveelheid $t = -\log_{10}$ Rel. Fout, en kyk of dit klop met die duimreël wat sê dat t rofweg die aantal korrekte beduidende syfers in die benadering weergee.

(a) $n = 10$ (b) $n = 30$

Probleem 2: Bestudeer *Example 1*, p. 22 in Burden & Faires. Beskou nou die kwadratiese vergelyking

$$x^2 - 2004\,x + 1 = 0.$$

(a) Gebruik MATLAB se funksie `roots` om beide die wortels van die vergelyking te bepaal.[2] Vertoon beide wortels tot volle akkuraatheid met `format long`.

(b) Implementeer die kwadratiese formule

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

in MATLAB, en gebruik dit om beide wortels te bereken. Vertoon tot volle akkuraatheid. Hoe vergelyk die wortels wat hier bereken is met die wortels wat in deel (a) bereken is? Watter is meer akkuraat?

(c) Verduidelik presies waar die verlies aan akkuraatheid in deel (b) plaasgevind het. Deur die prosedure van die handboek te volg, herskryf die kwadratiese formule só dat die verlies aan akkuraatheid vermy word. Bereken die onakkurate wortel van deel (b) nou met die nuwe, verbeterde formule. Is volle akkuraatheid bereik?

[1] Die notasie $a_n \sim b_n$ beteken dat $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 1$.

[2] Tik `help roots` om meer te leer.

Probleem 3: In MATLAB, evalueer die funksie

$$f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

by $x = 10^{-5}$. Skryf alle beduidende syfers neer deur `format long e` te gebruik. Vergelyk nou die berekende waarde met

$$f(10^{-5}) = 3.999999999933333 \times 10^{10}$$

waarvan al die syfers as akkuraat aanvaar kan word. Is die berekende waarde akkuraat tot alle syfers? Indien nie, ondersoek waar die akkuraatheid verlore gegaan het. Vind dan 'n beter formule waarmee die funksies $f(x)$ tot hoër noukeurigheid bereken kan word, en bevestig met MATLAB berekenings.

Probleem 4: Herhaal Probleem 3 vir die funksie $g(x)$, gedefinieer deur

$$g(x) = \left(1 + x^3\right)^{1/2} - 1, \qquad g(10^{-3}) = 4.999999998750000 \times 10^{-10}$$

(evalueer by $x = 10^{-3}$).