Inleiding

Laat $f(x)$ 'n funksie wees, gedefinieer op die interval $[a,b]$. Beskou $n+1$ punte $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ in $[a,b]$, en laat $p_n(x)$ die polinoom van graad n wees wat $f(x)$ in hierdie punte interpoleer, d.w.s.,

$$p_n(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ons stel belang in die grootte van die fout $f(x) - p_n(x)$ by enige x in $[a,b]$.

Die basiese foutafskatting word gegee op p. 70 in Burden & Faires (of Stelling 2 op p. 315 in Kincaid & Cheney). As ons die polinoom $\omega_n(x)$ soos volg definieer,

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

kan die foutformule uitgedruk word as

Basiese Foutskatting

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{1}$$

Die getal ξ_x hang van x af, en dit lê tussen die kleinste en grootste waardes van $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en x. (Ons neem aan dat die funksie f glad genoeg is dat die $(n+1)$-ste afgeleide regs bestaan.)

As ons die fout wil begrens by 'n spesifieke waarde van x, sê $x = x_*$, stel ons hierdie waarde in (1) in:

$$f(x_*) - p_n(x_*) = \frac{\omega_n(x_*)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_{x_*}).$$

Die term $\omega_n(x_*)$ kan eksplisiet bereken word, en al wat dus oorbly is om die term $f^{(n+1)}(x)$ te begrens op $[x_0, x_n]$. Hiervoor kan die gewone tegnieke van differensiasie gebruik word.

Om egter die maksimum fout te begrens by *enige* x in $[a,b]$, neem ons absolute waardes

$$|f(x) - p_n(x)| = \tfrac{1}{(n+1)!} |\omega_n(x)| |f^{(n+1)}(\xi_x)|$$

en beskou die maksima van die twee terme regs afsonderlik

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \tfrac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_n(x)| \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Dus

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \ \leq C_n \, M_n, \tag{2}$$

waar ons C_n en M_n gedefinieer het as

$$C_n = \tfrac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq x \leq b} |\omega_n(x)|, \qquad M_n = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|. \tag{3}$$

Let Op: Die faktor C_n hang van die verspreiding van die punte af, en die faktor M_n hang van die funksie af.

Vir sekere puntverspreidings is dit moontlik om die faktor C_n te skat. Ons doen dit hier vir gelykverspreide punte, Chebyshev punte, en arbitrêre verspreidings van punte.

Gelykverspreide Punte

Laat $h = (b-a)/n$, en definieer

$$x_k = a + kh, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Let op dat die x_k gelykverspreide punte is met spasiëring h, en $x_0 = a$ en $x_n = b$.

Vir $n = 1$ en $n = 2$ is dit maklik om $|\omega_n(x)|$ te begrens met differensiasie. Die berekenings word in die klas gedoen en die resultate is

$$\max_{x_0 \le x \le x_1} |(x-x_0)(x-x_1)| = \tfrac{1}{4}h^2,$$

vir lineêre interpolasie ($n = 1$), en

$$\max_{x_0 \le x \le x_2} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| = \frac{2}{3\sqrt{3}}h^3,$$

vir kwadratiese interpolasie ($n = 2$).

Deur hierdie twee vergelyking in (2)–(3) te stel volg

Lineêre Interpolasie

$$\max_{x_0 \le x \le x_1} |f(x) - p_1(x)| \le \tfrac{1}{8}h^2 M_1, \quad \text{waar} \quad M_1 = \max_{x_0 \le x \le x_1} |f^{(2)}(x)|.$$

Paraboliese Interpolasie

$$\max_{x_0 \le x \le x_2} |f(x) - p_2(x)| \le \frac{1}{9\sqrt{3}}h^3 M_2, \quad \text{waar} \quad M_2 = \max_{x_0 \le x \le x_2} |f^{(3)}(x)|.$$

Met 'n bietjie meer moeite kan die kubiese foutgrens op dieselfde manier bereken word. Hier moet ons onderskei tussen x in die middelste interval, of x in die buiteste twee intervalle. Die grense op $|\omega_3(x)|$ is soos volg

$$\max_{x_1 \le x \le x_2} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| = \tfrac{9}{16}h^4,$$

vir x in die middelste interval $[x_1, x_2]$, en

$$\max_{x_0 \le x \le x_3} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)| = h^4,$$

vir x in die hele interval $[x_0, x_3]$. Deur hierdie twee resultate in (2)–(3) te stel volg

Kubiese Interpolasie (slegs middelste interval)

$$\max_{x_1 \le x \le x_2} |f(x) - p_3(x)| \le \tfrac{3}{128}h^4 M_3, \quad \text{waar} \quad M_3 = \max_{x_0 \le x \le x_3} |f^{(4)}(x)|.$$

Kubiese Interpolasie (hele interval)

$$\max_{x_0 \le x \le x_3} |f(x) - p_3(x)| \le \tfrac{1}{24}h^4 M_3, \quad \text{waar} \quad M_3 = \max_{x_0 \le x \le x_3} |f^{(4)}(x)|.$$

Vir $n \geq 4$ is dit nie meer maklik om die maksimum waarde van $|\omega_n(x)|$ met differensiasie te bereken nie. 'n Minder kragtige maar meer algemene tegniek kan gebruik word om aan te toon dat vir alle $n = 1, 2, \ldots$

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| \leq n!\, h^{n+1}.$$

(Die bewys hiervan word as oefening oorgelaat.) Deur in (2)–(3) te stel volg

Polinoominterpolasie van algemene graad n (gelykverspreide punte)

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f(x) - p_n(x)| \leq \tfrac{1}{n+1} h^{n+1} M_n, \quad \text{waar} \quad M_n = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Daar moet egter onthou word dat lg. foutskatting nie so skerp is as die voriges nie. Dit kan bevestig word deur $n = 1$, $n = 2$ en $n = 3$ in hierdie uitdrukking te stel en te vergelyk met die foutgrense vir lineêre, kwadratiese en kubiese interpolasie hierbo.

Chebyshev Punte

Die puntverspreiding wat vir enige n die waarde van C_n minimeer is die Chebyshev punte; sien die teorie op p. 359–361 in Burden & Faires (of p. 317–318 in Kincaid & Cheney). As $[a, b] = [-1, 1]$, is die optimale punte die nulpunte van $T_{n+1}(x)$, naamlik

$$x_k = \cos\Big(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\Big), \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Vir hierdie punte geld

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_n} |(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)| = 2^{-n},$$

en saam met (2)–(3) volg

Polinoominterpolasie by Chebyshev punte in $[-1, 1]$

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_n(x)| \leq \tfrac{1}{2^n (n+1)!} M_n, \quad \text{waar} \quad M_n = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|.$$

(Hierdie formule is op p. 361 in BF, of Stelling 5, p. 318, in KC.)

As die interval $[a, b]$ is i.p.v. $[-1, 1]$, voer ons 'n nuwe veranderlike t in deur

$$t = \tfrac{1}{2}\Big((b - a)\, x + (b + a)\Big).$$

Let op:

$$x \in [-1, 1] \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \in [a, b].$$

Die optimale punte op $[a, b]$ word dus gegee deur

$$t_k = \tfrac{1}{2}\Big((b - a)\cos\Big(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\Big) + (b + a)\Big), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Arbitrêre Punte

As daar geen aanname oor die verspreiding van punte gemaak word nie is die beste wat mens kan doen die volgende kru foutgrens. Gestel $a \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leq b$ en x is ook in $[a, b]$. Dan volg

$$|x - x_k| \leq b - a$$

vir alle $k = 0, 1, \ldots n$, en dus

$$\max_{a \leq x \leq b} |(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)| \leq (b - a)^{n+1}.$$

Deur in (2)–(3) te stel volg

Polinoominterpolasie van algemene graad n (arbitrêre punte)

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \leq \tfrac{1}{(n+1)!}(b - a)^{n+1} M_n, \quad \text{waar} \quad M_n = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Oefeninge

1. Beskou die sg. *foutfunksie* ("error function")

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Die integraal kan nie analities bepaal word nie, en die funksie word dikwels met interpolasie en ander benaderingsmetodes bereken. Gegee die funksiewaardes

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \qquad \operatorname{erf}(0.5) = 0.5205,$$

gebruik lineêre interpolasie om erf(0.25) te skat, en begrens die fout in die skatting.

2. Herhaal Probleem 1 met kwadratiese interpolasie, as $\operatorname{erf}(1) = 0.8427$ gegee word.

3. Beskou weer die foutfunksie van Probleem 1. Gestel 'n tabel van funksiewaardes van $\operatorname{erf}(x)$ op $[0, 1]$ moet opgestel word sodat die funksie benader kan word met polinoominterpolasie. Hoeveel inskrywings moet só 'n tabel hê as (a) lineêre interpolasie, (b) kwadratiese interpolasie enige plek in die tabel 'n absolute fout moet lewer nie groter nie as 10^{-6}?

4. Gestel die funksie $f(x) = e^x$ word in die gelykverspreide punte $x_k = -1 + 2k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$ geïnterpoleer met 'n polinoom van graad n, sê $p_n(x)$. Toon aan dat

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - p_n(x)| \to 0, \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

5. Werk die prosedure van Probleem 4 ook vir Runge se funksie? Bespreek met verwysing na die Runge ossillasies wat eksperimenteel waargeneem is. *Wenk:* Aanvaar sonder bewys

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad \Longrightarrow \quad M_n = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \leq 5^{n+1}(n+1)!$$

6. Geld die resultaat van Probleem 4 ook vir 'n arbitrêre verspreiding van punte?