

Eenvoudige harmoniese ossillator m.b.v. Euler, Euler-Cromer, tweede orde en vierde orde Runge-Kutta tegnieke.

As eerste toepassing van die numeriese oplossingstegnieke vir gewone tweede orde differensiaalvergelykings beskou ons 'n meganiese ossillator bestaande uit 'n massa **m** aan 'n veer met veerkonstante **k**, wat een-dimensioneel rondom sy ewilibrum posisie wat ons as oorsprong kies, kan ossilleer. Dui die verplasing vanaf ewewig aan deur die afhanklike veranderlike **x** en neem aan dat dit sulke klein amplitude ossillasie uitvoer dat dit nie die elastisiteitsgrens oorskrei nie. Die elastiese herstelkrag wat die veer daarop uitoefen, word gegee deur

$$F_{\text{herstel}} = -kx$$

Neem eenvoudigheidshalwe aan dit is die enigste krag daarop, m.a.w. ignoreer aanvanklik damping en laat dit 'n ongedwonge sisteem wees. Die elastiese herstelkrag van die veer is dan die resultante krag. Volgens Newton se tweede wet is die tempo van momentum-verandering gelyk aan die resulterende krag daarop

$$\frac{dp}{dt} = F$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x = -\omega_0^2 x$$

Dit is die definiërende vergelyking vir 'n EHB, waarvoor die analitiese oplossing gegee word deur

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

met die natuurlike hoekfrekwensie en periode respektiewelik gegee deur

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \tau = 2\pi \sqrt{m/k}$$

Vir die numeriese oplossingstegniek kan ons dit skryf as twee gekoppelde gewone eerste orde differensiaalvergelykings

$$\frac{dv}{dt} = f(x) = -\omega_0^2 x$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

met die beginkondisie (x_0, v_0, t_0) . Die amplitude en begin-fasehoek van die analitiese oplossing kan ons uit hierdie beginkondisies bepaal as

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$x_0 = A \cos \phi$$

$$v = -\omega A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v_0 = -\omega A \sin \phi$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-v_0/\omega}{x_0} \right) \quad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2}$$

Beginkondisies

```
function [m, k, x0, v0, dt, aantal_siklusse] = initial();
% initial vra die gebruiker vir die massa [m], die veerkonstante
%[k],
% die beginverplasing [x0], die beginsnelheid [v0], die tyd
%inkrement [dt]
% en die aantal siklusse waaroor die berekeninge gedoen moet word.
% Vir gebruik indien data per aanvraag ingetik moet word
% m=input('Die massa van die sisteem [kg] ? ');
% k=input('Die veerkonstante [N/m] ? ');
% x0=input('Die beginverplasing [m] ?');
% v0=input('Die beginsnelheid [m/s] ?');
% dt=input('Tyd inkrement ? ');
% aantal_siklusse=input('Aantal siklusse waaroor bereken moet word
% ? ');
% Vir gebruik vir herhaaldelike identiese data invoer
m = 1;
k = 0.1;
x0 = 0.01;
v0=0;
dt = 2*pi*sqrt(m/k)/100;
aantal_siklusse = 5;
```

Tydinkrement grootte is sodanig gekies dat daar 100 tydintervalle per natuurlike ossillasieperiode sal wees. Die skikking bevattende die diskrete versameling tydstoppe word gegee deur **t** volgens:

```
% die hoekfrekwensie en periode van die EHB
omega = sqrt(k/m); tau = 2 * pi / omega;
t=0:dt:tau*aantal_siklusse; % tyd vektor
```

Analitiese oplossing

```
function [x, v, KE, PE, E] = analities(m, k, x0, v0, t);
omega=sqrt(k/m); % hoekfrekwensie
phi=atan2(-v0/omega,x0); % beginfasehoek
Amplitude=sqrt(x0^2+(v0/omega)^2); % Amplitude
x=Amplitude*cos(omega*t+phi); % verplasing vektor
v=-Amplitude*omega*sin(omega*t+phi); % snelheid vektor
[KE, PE, E]=energie(m, k, x, v);
```

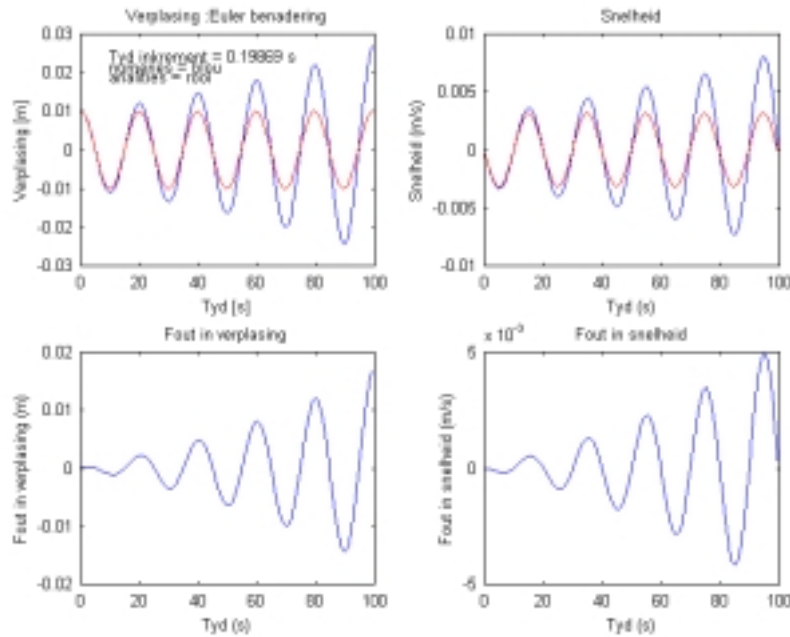
Die energie word bereken volgens

```
function [KE, PE, E]=energie(m, k, x, v);
KE=1/2*m*v.^2;
PE=1/2*k*x.^2;
E=KE + PE;
```

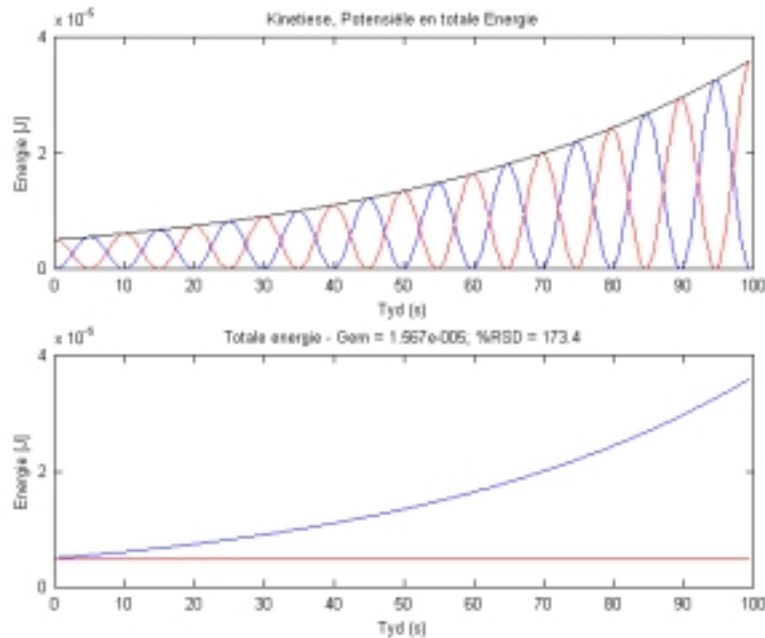
Euler benadering

```
function [x, v, KE, PE, E] = Euler(m, k, x0, v0, t, dt);  
% Bereken die verplasing en snelheid m.b.v. die Euler benadering  
x(1)=x0;  
v(1)=v0;  
faktor = -k/m*dt;  
for i=2:length(t),  
    v(i)=v(i-1) + x(i-1)*faktor;           % Euler benadering  
    x(i)=x(i-1) + v(i-1)*dt;  
end;  
[KE, PE, E]=energie(m, k, x, v);
```

Die resultate van die Euler benadering lyk as volg



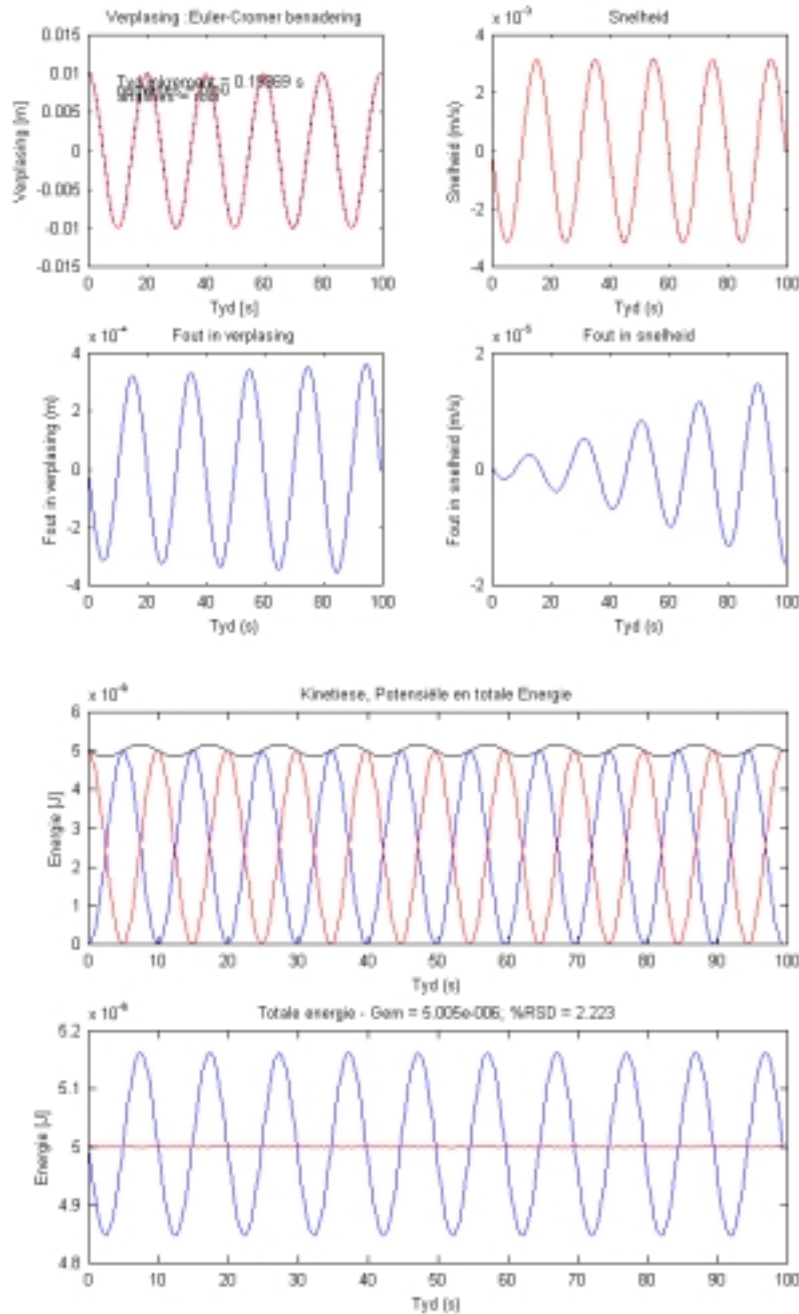
Hieruit blyk dat die Euler benaderingstegniek swak resultate lewer in die geval van 'n harmonies herhalende funksie, aangesien die ossillasies met elke siklus al groter groei. Die foute bly eensydig akkumuleer en na vyf siklusse is die amplitude alreeds bykans 100% groter as wat dit analities behoort te wees. Die toename blyk ook soos mens sal verwag uit die energieverlope, soos in die volgende figuur getoon.



Euler-Cromer benadering

```
function [x, v, KE, PE, E] = Euler_Cromer(m, k, x0, v0, t, dt);
% Bereken die verplasing en snelheid m.b.v. die Euler-Cromer
%benadering
x(1)=x0;
v(1)=v0;
faktor = -k/m*dt;
for i=2:length(t),
    v(i)=v(i-1) + x(i-1)*faktor;           % Euler-Cromer benadering
    x(i)=x(i-1) + v(i)*dt;
end;
[KE, PE, E]=energie(m, k, x, v);
```

Hierin word die nuwe snelheid wat eerste bereken is, gebruik om die nuwe x-koördinaat bereken. Die resultate daarvan lyk soos in die volgende figuur. Daaruit blyk dat die ossillasies oor die langtermyn baie meer stabiel is as vir die Euler tegniek. Dit blyk ook uit die energie grafieke. Die numeriese benadering se totale energie ossilleer teen dubbel die natuurlike frekwensie van die sisteem, maar die % relatiewe standaard afwyking het gedaal tot 2,2%, wat beduidend beter is as die van die Euler tegniek.



Tweede orde Runge Kutta tegniek

Volgens die tweede orde Runge-Kutta tegniek word die x-koördinaat en v- koördinaat by die helfte van die tydintervalwaarde respektiewelik gegee deur

$$x_{half} = x_{i-1} + v_{i-1} \frac{\Delta t}{2}$$

$$v_{half} = v_{i-1} + f_{i-1} \frac{\Delta t}{2} = v_{i-1} - \frac{k}{m} x_{i-1} \frac{\Delta t}{2}$$

Gebruik van hierdie twee hellings en ekstrapolasie vanaf die begin punt $(x_{i-1}, v_{i-1}, t_{i-1})$

na 'n end punt vir die posisie en snelheids-koördinate na verloop van 'n tydinkrement Δt lewer vir die x - koördinaat die waarde

$$\begin{aligned}x_i &= x_{i-1} + v_{half} \Delta t \\&= x_{i-1} + \left(v_{i-1} - \frac{k}{m} x_{i-1} \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t \\&= x_{i-1} \left(1 - \frac{k}{m} \frac{\Delta t^2}{2} \right) + v_{i-1} \Delta t\end{aligned}$$

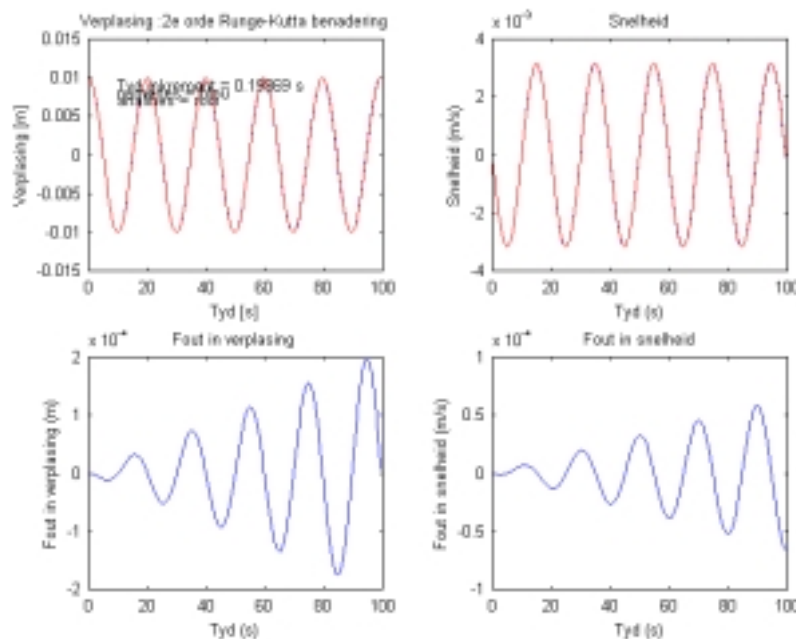
en vir die v - koördinaat die waarde

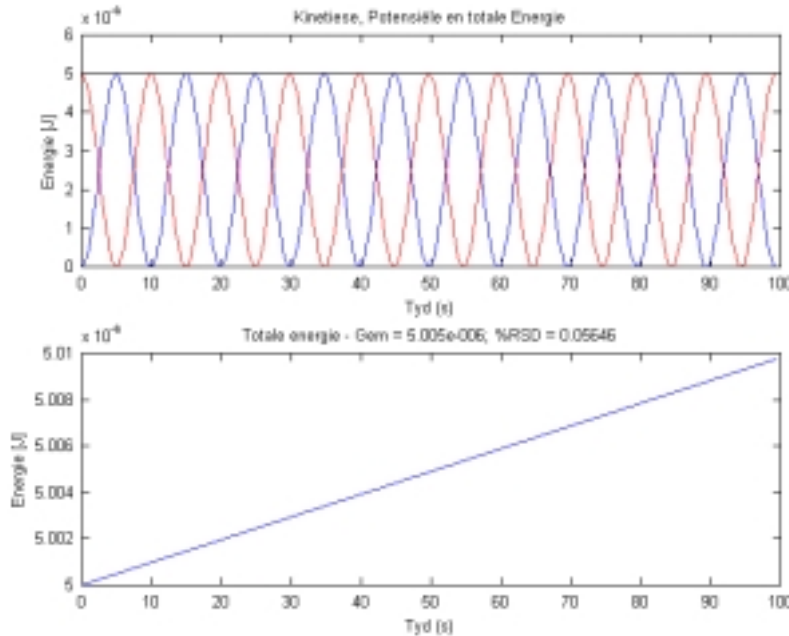
$$\begin{aligned}v_i &= v_{i-1} - \frac{k}{m} x_{half} \Delta t \\&= v_{i-1} - \frac{k}{m} \left(x_{i-1} + v_{i-1} \frac{\Delta t}{2} \right) \Delta t \\&= v_{i-1} \left(1 - \frac{k}{m} \frac{\Delta t^2}{2} \right) + \left(-\frac{k}{m} \Delta t \right) x_{i-1}\end{aligned}$$

Die Matlab prgram stappe vir die tweede orde Runge-Kutta benadering lyk as volg:

```
function [x, v, KE, PE, E] = RK2(m, k, x0, v0, t, dt);
faktor1 = -k/m*dt; faktor2 = 1+faktor1*dt/2;
x(1)=x0;
v(1) =v0;
for i=2:length(t),
    x(i) = x(i-1)*faktor2 + v(i-1)*dt;
    v(i) = v(i-1)*faktor2 + x(i-1)*faktor1;
end;
[KE, PE, E]=energie(m, k, x, v);
```

Met identiese beginkondisies as vir die vorige twee benaderingstegnieke (d.w.s. die Euler en Euler-Cromer tegnieke) is die volgende resultate vir die tweede orde Runge-Kutta tegniek verkry.





Hierdie resultate toon dat die fout kleiner is as vir die voorafgaande twee tegnieke, maar dat die energie egter 'n eensydige toename met verloop van tyd toon. Die % relatiewe standaard afwyking in die totale energie oor vyf siklusse is $5.646 \times 10^{-2} \%$ vergeleke met die 2.223% vir die Euler-Cromer tegniek onder identiese kondisies.

Vierde orde Runge Kutta tegniek

Die algoritme vir die vierde orde Runge-Kutta benaderingstegniek behels

1. 'n Eerste skatting van :

- die verandering in verplasing, sê $dx1$ deur lineêre ekstrapolasie oor 'n tydinkrement Δt vanaf die beginpunt x_{i-1} met helling v_{i-1} aldaar.

$$dx1 = v_{i-1} \Delta t$$

- die verandering in snelheidskomponent, sê $dv1$ deur lineêre ekstrapolasie oor 'n tydinkrement Δt vanaf die begin-spoed v_{i-1} met helling

$$f1 = -\frac{k}{m} x_{i-1} \text{ aldaar.}$$

$$dv1 = f_{i-1} \Delta t = -\frac{k}{m} x_{i-1} \Delta t$$

2. 'n Tweede skatting van :

- die verandering in verplasing, sê $dx2$ deur lineêre ekstrapolasie oor 'n tydinkrement Δt vanaf die beginpunt x_{i-1} en met die eerste geskatte spoed in die middel van die tydinterval $v_{i-1} + \frac{dv1}{2}$.

$$dx2 = \left(v_{i-1} + \frac{dv1}{2} \right) \Delta t$$

- die verandering in snelheidskomponent, sê $dv2$ deur lineêre ekstrapolasie oor 'n tydinkrement Δt vanaf die begin-spoed v_{i-1} en met die eerste geskatte versnelling in die middel van die tydinterval

$$\text{as } f_2 = -\frac{k}{m} \left(x_{i-1} + \frac{dx_1}{2} \right) \text{ aldaar.}$$

$$dv_2 = f_2 \Delta t = -\frac{k}{m} \left(x_{i-1} + \frac{dx_1}{2} \right) \Delta t$$

3. 'n Derde skatting van :

- a. die verandering in verplasing, sê dx_3 deur lineêre ekstrapolasie oor 'n tydinkrement Δt vanaf die beginpunt x_{i-1} en met die tweede geskatte

$$\text{spoed in die middel van die tydinterval } v_{i-1} + \frac{dv_2}{2}$$

$$dx_3 = \left(v_{i-1} + \frac{dv_2}{2} \right) \Delta t$$

- b. die verandering in snelheidskomponent, sê dv_3 deur lineêre ekstrapolasie oor 'n tydinkrement Δt vanaf die begin-spoed v_{i-1} en met die tweede geskatte versnelling in die middel van die tydinterval

$$\text{as } f_3 = -\frac{k}{m} \left(x_{i-1} + \frac{dx_2}{2} \right) \text{ aldaar.}$$

$$dv_3 = f_3 \Delta t = -\frac{k}{m} \left(x_{i-1} + \frac{dx_2}{2} \right) \Delta t$$

4. 'n Vierde skatting van

- a. die verandering in verplasing, sê dx_4 deur lineêre ekstrapolasie oor 'n tydinkrement Δt vanaf die beginpunt x_{i-1} en met die derde geskatte spoed aan die einde van die tydinterval $v_{i-1} + dv_3$.

$$dx_4 = (v_{i-1} + dv_3) \Delta t$$

- b. die verandering in snelheidskomponent, sê dv_4 deur lineêre ekstrapolasie oor 'n tydinkrement Δt vanaf die begin-spoed v_{i-1} en met die derde geskatte versnelling aan die einde van die tydinterval

$$\text{as } f_4 = -\frac{k}{m} (x_{i-1} + dx_3) \text{ aldaar.}$$

$$dv_4 = f_4 \Delta t = -\frac{k}{m} (x_{i-1} + dx_3) \Delta t$$

'n Geweegde gemiddelde waarde van die verandering in verplasing en snelheid word dan gebruik om die verplasing en snelheid by die endpoint te breken volgens

$$x_i = x_{i-1} + \frac{1}{6} dx_1 + \frac{1}{3} dx_2 + \frac{1}{3} dx_3 + \frac{1}{6} dx_4$$

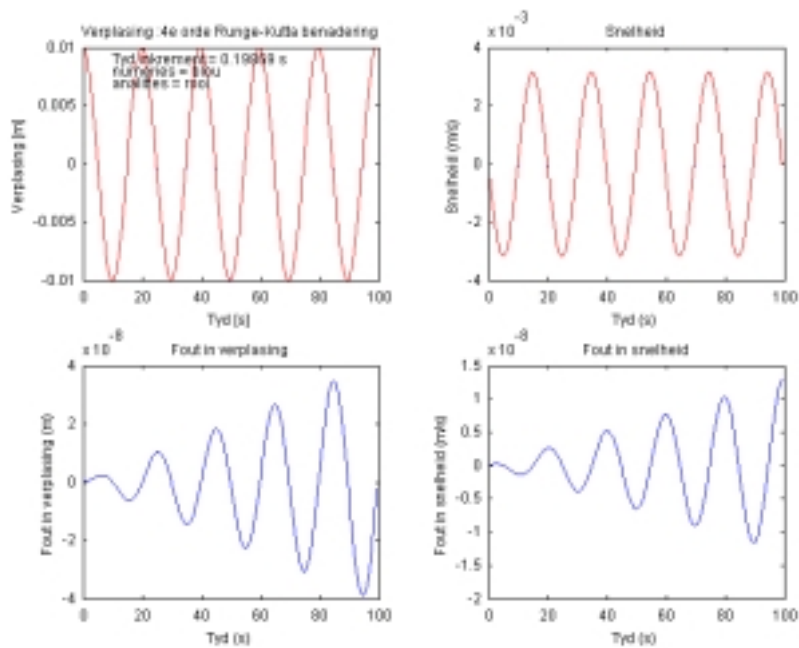
$$v_i = v_{i-1} + \frac{1}{6} dv_1 + \frac{1}{3} dv_2 + \frac{1}{3} dv_3 + \frac{1}{6} dv_4$$

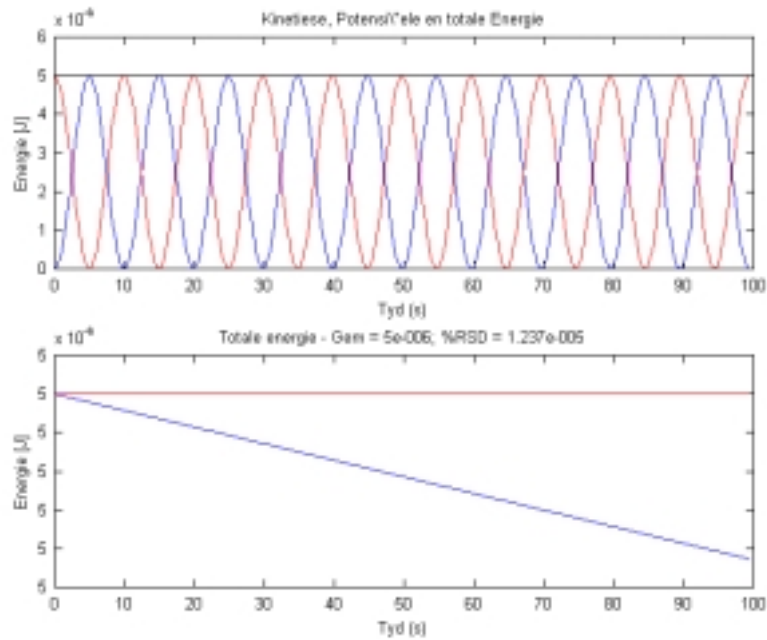

```

function [x, v, KE, PE, E] = RK4(m, k, x0, v0, t, dt);
faktor = -k/m*dt;
x(1)=x0;
v(1) =v0;
for i=2:length(t),
    dx1 = v(i-1) * dt;
    dv1 = faktor * x(i-1);
    dx2 = (v(i-1) + dv1/2) * dt;
    dv2 = faktor * (x(i-1) + dx1/2);
    dx3 = (v(i-1) + dv2/2) * dt;
    dv3 = faktor * (x(i-1) + dx2/2);
    dx4 = (v(i-1) + dv3) * dt;
    dv4 = faktor * (x(i-1) + dx3);
    x(i) = x(i-1) + dx1/6 + dx2/3 + dx3/3 + dx4/6;
    v(i) = v(i-1) + dv1/6 + dv2/3 + dv3/3 + dv4/6;
end;
[KE, PE, E]=energie(m, k, x, v);

```

Die resultate wat die vierde orde Runge-Kutta tegniek produseer vir identiese begin kondisies as vir die vorige benaderingstegnieke lyk as volg:





Hieruit blyk die vierde orde Runge-Kutta benadering onder voldoende vergroting se foute ook sigbaar, maar die % relatiewe standaardafwyking in die totale energie oor vyf siklusse is $1.237 \times 10^{-5} \%$ in vergelyking met die tweede orde Runge-Kutta se $5.646 \times 10^{-2} \%$ en die 2.223% vir die Euler-Cromer tegniek onder identiese kondisies.