INSTRUKSIES:

(a) Huiswerke moet met die aanvang van die tutoriaalperiode op Vrydae ingehandig word. Geen elektroniese huiswerke word aanvaar nie en geen huiswerke sal laat ingeneem word nie. In die praktyk beteken dit dat jy moet mik om teen Donderdagaand klaar te wees om toe te laat vir moontlike probleme met drukkers, skerms wat vries, en so aan.

(b) Samewerking op hierdie huiswerke word beperk tot die uitruil van enkele idees en wenke. Die uitruil van data, grafieke, rekenaarprogramme of die besonderhede van wiskundige berekenings is nie toelaatbaar nie. Wat jy inhandig moet jou eie werk wees.

Probleem 1 Beskou die volgende data

x	-2	-1	0	1	3
y	0	0	1	2	4

(a) Gebruik elk van die volgende vyf metodes om 'n benadering tot $y(2)$ d.m.v. polinoom-interpolasie te bereken. *Let Wel:* (i), (ii) en (iii) is bedoel vir handberekening, en (iv) en (v) is vir MATLAB.

- (i) Lagrange
- (ii) Neville
- (iii) Newton
- (iv) `neville31` (op die handboek se CD; ook beskibaar op die kursus webblad)
- (v) `polyfit` (ingeboude funksie in MATLAB, tik `help polyfit` om meer te leer)

(b) Is dit toevallig dat al vyf metodes van deel (a) dieselfde resultaat lewer? Bespreek.

Probleem 2 In hierdie probleem ondersoek ons die volgende situasie: Gestel 'n funksie $f(x)$ word op die interval $[-1, 1]$ geïnterpoleer in die $n + 1$ gelykverspreide punte

$$x_k = -1 + 2k/n, \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

met 'n polinoom van graad n, sê $p_n(x)$. Dit wil sê

$$p_n(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Vraag: Is dit waar dat $p_n(x) \to f(x)$ by elke punt x in $[-1, 1]$ as $n \to \infty$?

Ondersoek soos volg:

(a) Laat

$$f(x) = e^x, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Vir elk van $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$, en $n = 8$: bereken $p_n(x)$ met behulp van `polyfit`, stip beide $f(x)$ en $p_n(x)$ op $[-1, 1]$, en stip ook die fout $f(x) - p_n(x)$ op $[-1, 1]$. Zoem in op lg. grafiek om die waarde van

$$E_n = \max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p_n(x)|$$

te skat, en lys die geskatte waardes van E_2, E_4, E_6 en E_8 in 'n tabel. Deur na jou tabel te verwys, spekuleer nou oor die antwoord op die **Vraag** hierbo.

(b) Herhaal deel (a) vir die funksie

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Gebruik groter waardes van n indien nodig.

Nota: Die (verrassende?) verskynsel wat in deel (b) waargeneem is staan as die **Runge** verskynsel bekend.

Probleem 3 *Brent* se metode vir die oplos van $f(x) = 0$ werk soos volg: Gestel funksiewaardes

$$(x_{n-2}, f(x_{n-2})), \quad (x_{n-1}, f(x_{n-1})), \quad (x_n, f(x_n)),$$

is bekend. Pas nou 'n *inverse parabool* van die vorm

$$x = a\,y^2 + b\,y + c$$

aan die data. Kies die volgende benadering as die waarde van x waar hierdie parabool die x-as sny, d.w.s., $y = 0 \implies$

$$x_{n+1} = c.$$

(a) Pas hierdie idee toe op die vergelyking (geneem uit Probleem 1, Huiswerk 4)

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$$

(met eksakte wortel $p = 1$). Gebruik aanvanklike skattings

$$x_0 = 1.3, \quad x_1 = 1.2, \quad x_2 = 1.1.$$

Gebruik sommer MATLAB se ingeboude funksie `polyfit` om die paraboliese interpolasie te doen. Lys die benaderings x_0, x_1, …, x_6 in 'n tabel.

(b) Gebruik die tabel van deel (a) om 'n skatting van die *orde van konvergensie* van Brent se metode te bereken. *Wenk:* Uit Probleem 1, Huiswerk 4,

$$\alpha \approx \frac{\log(|e_{n+1}|/|e_n|)}{\log(|e_n|/|e_{n-1}|)}$$