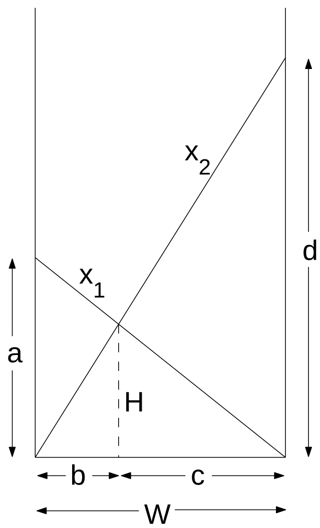
**Probleem 1:**




$$\frac{a}{W} = \frac{H}{c} \Rightarrow c = \frac{HW}{a} \quad \text{en} \quad \frac{d}{W} = \frac{H}{b} \Rightarrow b = \frac{HW}{d}$$

$$b + c = W = \frac{HW}{a} + \frac{HW}{d} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{H} \quad (1)$$

Volgens Pythagoras se Stelling,

$$a^2 + W^2 = x_1^2 \quad \text{en} \quad d^2 + W^2 = x_2^2$$

Stel in (1),

$$\frac{1}{\sqrt{x_1^2 - W^2}} + \frac{1}{\sqrt{x_2^2 - W^2}} = \frac{1}{H}.$$

Ons kan nou die gegewe waardes vir $x_1$, $x_2$ en $H$ in bostaande vergelyking stel, om uiteindelik die volgende nie-lineêre vergelyking te verkry:

$$\frac{1}{\sqrt{400 - W^2}} + \frac{1}{\sqrt{900 - W^2}} = \frac{1}{8}.$$

Ons het dus

$$f(W) = \frac{1}{\sqrt{400 - W^2}} + \frac{1}{\sqrt{900 - W^2}} - \frac{1}{8}. \quad (2)$$

Om nou die wortels van hierdie funksie m.b.v. `bisect21.m` te bepaal, het ons aanvanklike skattings nodig. Uit die fisiese probleem moet die waarde van $W$ positief wees, maar nie langer as die kortste leer nie. Kies dus $[a, b] = [0, 19.99]$ as aanvanklike skatting ($b = 20$ word uitgelaat, want dan is $f$ ongedefinieerd).

Verder het ons seker nie meer as 'n honderdste van 'n voet akkuraatheid nodig nie, so kies die toleransie $10^{-2}$ of $10^{-3}$. Enige toleransie kleiner beteken waarskynlik onnodige werk.

Ons gebruik nou `bisect21.m` in MATLAB om die wortels van (2) te bepaal.

```
>> bisect21
This is the Bisection Method.
Input the function F(x) in terms of x
For example: cos(x)
  1./sqrt(400-x.^2) + 1./sqrt(900-x.^2) - 1/8
Input endpoints A < B on separate lines
 0
 19.99
Input tolerance
 1e-2
Input maximum number of iterations - no decimal point
 20
Select output destination
1. Screen
2. Text file
Enter 1 or 2
 1
Select amount of output
1. Answer only
2. All intermediate approximations
Enter 1 or 2
 2
Bisection Method
  I    P                  F(P)
  1   9.99500000e+000   -3.1921461e-002
  2   1.49925000e+001   -1.0972036e-002
  3   1.74912500e+001    1.9139877e-002
  4   1.62418750e+001    3.3213979e-004
  5   1.56171875e+001   -5.9220958e-003
  6   1.59295313e+001   -2.9733248e-003
  7   1.60857031e+001   -1.3694934e-003
  8   1.61637891e+001   -5.3150792e-004
  9   1.62028320e+001   -1.0297233e-004
 10   1.62223535e+001    1.1375129e-004
 11   1.62125928e+001    5.1826785e-006

Approximate solution P = 16.21259277
with F(P) =   0.00000518
Number of iterations =  11 Tolerance = 1.00000000e-002
```

Dus $W = 16.21$ voet.

**Probleem 2:**

(a)

Aantal stappe om te konvergeer tot toleransies $\epsilon = 10^{-5}$ en $\epsilon = 10^{-10}$:

| | $\epsilon = 10^{-5}$ | $\epsilon = 10^{-10}$ |
|---|---|---|
| Halvering | 17 | 34 |
| Regula-Falsi | 7 | 12 |
| Secant | 6 | 8 |
| Newton | 4 | 5 |

(b)

Op grond van hierdie resultate sien ons die spoed van konvergensie is (van vinnig tot stadig): Newton, Secant, Regula-Falsi, Halvering.

(c)

As ons egter funksie-evaluerings tel, moet ons Newton met 'n faktor 2 penaliseer en dan is die orde (vir $\epsilon = 10^{-10}$): Secant, Newton, Regula-Falsi, Halvering. Vir $\epsilon = 10^{-5}$ ruil Newton en Regula-Falsi plekke.

**Probleem 3:**

(a)

Vir $\epsilon = 10^{-5}$ en $\epsilon = 10^{-10}$ neem Newton se metode in elke geval 25 stappe om te konvergeer (volgens `newton24.m`). Dit vergelyk glad nie goed met die tabel van Probleem 2(a) nie. Duidelik is iets verkeerd.

(b)

Die eksakte wortel is $x = 1$. Die funksie wat ons gebruik vir Newton se metode is

$$f(x) \;=\; \cos^2(x-1) - 2x + x^2.$$

Hierdie funksie se afgeleide word gegee deur

$$f'(x) \;=\; -2\sin(x-1)\cos(x-1) - 2 + 2x.$$

Hierdie afgeleide, geëvalueer by die wortel $x = 1$, is $f'(1) = 0$. Die wortel $x = 1$ is dus 'n herhaalde wortel. Die term $f'(p_n)$ in die noemer van die foutformule vir Newton se metode streef dus na 0, sodat die foutformule nie geld nie. (Die verskynsel word ook bespreek in Example 3, p.49, Burden & Faires.)

(c)

Die secant metode neem net soos Newton talle stappe om te konvergeer. Die halvering en Regula-Falsi metodes kan nie gebruik word nie, want die funksie $f$ is positief in die omgewing van die eksakte wortel $x = 1$ (die grafiek sny nie die $x$-as nie).

(d)

Vir beide $\epsilon = 10^{-5}$ en $\epsilon = 10^{-10}$ konvergeer Newton se metode na 1.0000347607. Die fout is dus

$$|1 - 1.0000347607| \;=\; 3.47607 \times 10^{-5},$$

wat groter is as beide $\epsilon = 10^{-5}$ en $\epsilon = 10^{-10}$. Die stoppingstoets faal dus om die gevraagde akkuraatheid te lewer.