

INSTRUKSIES:

- (a) Huiswerke moet met die aanvang van die tutoriaalperiode op Vrydae ingehandig word. Geen elektroniese huiswerke word aanvaar nie en geen huiswerke sal laat ingeneem word nie. In die praktyk beteken dit dat jy moet mik om teen Donderdagaand klaar te wees om toe te laat vir moontlike probleme met drukkers, skrms wat vries, en so aan.
- (b) Samewerking op hierdie huiswerke word beperk tot die uitruil van enkele idees en wenke. Die uitruil van data, grafieke, rekenaarprogramme of die besonderhede van wiskundige berekenings is nie toelaatbaar nie. Wat jy inhandig moet jou eie werk wees.

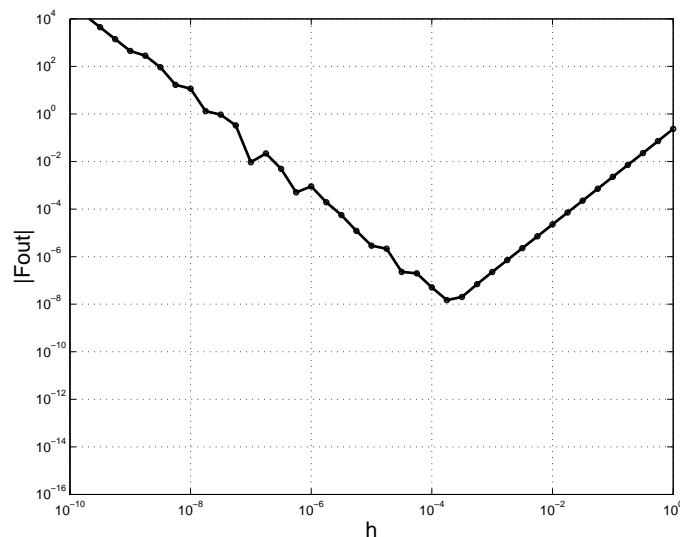
Probleem 1: Herlei die formule bo-aan p. 170 in Burden & Faires met polinoominterpolasie.

Probleem 2: Herlei 'n vyfpunt formule (sonder foutterm) vir die benadering van $f''(x_0)$, deur Richardson ekstrapolasie op die driepunt formule

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12}f''''(\xi), \quad \xi \in [x_0 - h, x_0 + h],$$

toe te pas (lg. formule word gelys op p. 174, Burden & Faires).

Probleem 3: Beskou die verskilformule in Probleem 2. Hierdie formule is gebruik om $f''(1)$ te benader, waar $f(x) = e^x$. Die absolute fout in die benadering word in die grafiek hieronder getoon, as 'n funksie van h . Doen 'n teoretiese modellering van die afrondingsfout soos op p. 172–173 in Burden & Faires. Gebruik die teorie om die optimale h en die minimum fout te voorspel, en vergelyk met die figuur. Bring ook die twee “hellings” in die grafiek in verband met die teoretiese foutmodel. (Die berekenings is in MATLAB gedoen; neem dus $\epsilon = 2^{-52} \approx 2.2 \times 10^{-16}$.)



Probleem 4:

'n Dik silindriese pyp met binne-radius 1 m en buite-radius 2 m word gebruik om kookwater van een tenk na 'n ander te vervoer. Die temperatuur van die water is 100 C en die buiterand van die pyp is by kamertemperatuur, sê 25 C. Wat is die temperatuur by enige posisie binne die pyp?

Die probleem kan soos volg gemodelleer word: Laat $u(r)$ die temperatuur op afstand r vanaf die middel van die pyp voorstel. Dan word die temperatuurverspreiding binne-in die pyp beskryf deur die randwaardeprobleem

$$r \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr} = 0, \quad u(1) = 100, \quad u(2) = 25.$$

(Vir diegene wat al van Laplace se vergelyking gehoor het: hierdie is Laplace se vergelyking in poolkoördinate, van toepassing wanneer 'n probleem silindriese simmetrie het soos hier.)

- (a) Toon aan dat die analitiese oplossing van die randwaardeprobleem gegee word deur

$$u(r) = c_1 \ln r + c_2,$$

waar c_1 en c_2 gevind moet word.

- (b) Bereken ook 'n numeriese oplossing vir die randwaardeprobleem, deur 'n eindige-verskilmetode met staplengte $h = 0.25$ te gebruik. In 'n tabel, vergelyk die numeriese oplossing met die analitiese oplossing van deel (a).

- (c) Herhaal deel (a) en (b) in die geval waar die randvoorwaarde regs vervang word met

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{r=2} = 0.1(25 - u(2)).$$

(Hierdie randvoorwaarde modelleer die situasie waar die buiterand van die pyp geïsoleer word om verlies van energie te voorkom. Die konstante 0.1 hang af van die isoleringsmateriaal.)

