

# Eenvoudige harmoniese ossillator met lineêr-snelheids-afhanklike damping en harmoniese dwangkrag.

## Teoretiese model

As uitbreiding van die simulatie vir 'n meganiese een-dimensionele ossillator, bestaande uit 'n massa **m**, geheg aan 'n veer met veerkonstante **k**, gaan ons nou ook die effek van lineêr snelheids-afhanklike damping beskou en die sisteem dan ook onderwerp aan 'n harmoniese tyd-variërende dwangkrag van verstelbare amplitude en dwang-hoekfrekwensie. Neem aan dat die elastiese herstelkrag wat die veer op die massa uitoefen, indien dit 'n oombliklike verplasing **x** vanaf ewilibrum besit, Hooke se wet gehoorsaam en gegee word deur

$$\vec{F}_{\text{herstel}} = -k\vec{x}$$

Neem tweedens aan dat die lineêr snelheids-afhanklike dempingskrag gegee word deur

$$\vec{F}_{\text{damping}} = -c \frac{d\vec{x}}{dt}$$

en derdens dat die harmoniese dwangkrag beskryf word deur

$$\vec{F}_{\text{dwang}} = \vec{F}_0 \cos(\omega_d t)$$

Newton se bewegingsvergelyking lewer dus

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{resultierend}} = \vec{F}_{\text{herstel}} + \vec{F}_{\text{damping}} + \vec{F}_{\text{dwang}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_d t)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x - \frac{c}{m}v + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_d t) = f(x, v, t)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + \frac{F_0}{m} \cos(\omega_d t) = f(x, v, t)$$

In die simulatie moet ons voorsiening maak vir die toekenning van waardes aan die volgende parameters

- die massa **m** > 0
- die veerkonstante **k** > 0 (die herstelkrag per eenheid verplasing vanaf ewewig). Ons sou ook die ossillator nie-lineêr kan laat optree deur bv. 'n nie-lineêre afhanklikheid van die verplasing vanaf ewewig in die veerkrag in te voer.
- die dempingskonstante **c** > 0 (dit verteenwoordig die dempingskrag per eenheid snelheid). Nie-lineêre gedrag kan ook verkry word deur die damping op 'n nie-lineêre wyse van die snelheid afhanklik te maak.
- die amplitude van die dwangkrag **F<sub>0</sub>** > 0. Die feit dat daar geen voorsiening gemaak is vir 'n beginfasehoek anders as zero vir die harmoniese dwangkrag nie, veronderstel dat die tyd oorsprong reeds gesinkroniseerd is met 'n positiewe piek van die dwangkrag. Voorsiening vir verstelbaarheid van die dwangkrag se beginfasehoek is egter triviaal om te implementeer.
- die hoekfrekwensie van die dwangkrag **ω<sub>d</sub>** > 0

- die begin verplasing  $x_0$
- die begin snelheid  $v_0$
- die tyd inkrement  $dt$  wat in die numeriese benadering gebruik word
- die totale tydsduur waaroor die simulase bereken moet word.

Omdat ons reeds gevind het dat die vierde orde Runge-Kutta benaderingstegniek, onder identiese tyd inkrement grootte, die akkuraatste resultate gee van die vier tegnieke (Euler, Euler-Cromer, tweede orde Runge-Kutta en vierde orde Runge-Kutta) waarna ons gekyk het, sal ons by voorkeur daarmee werk. Ook het ons van te vore gevind dat tyd inkrement groottes wat nagenoeg 100 keer kleiner is as die periode van die sisteem se ossillasies betroubare resultate lewer, dus sal ons dit as waarde vir die tydstappe **dt** kies.

### ***Vrye gedempte ossillator***

Deur die dwangkrag se amplitude  $F_0$  op zero te stel, kan ons die gedrag van 'n vrye ossillator met of sonder damping simuleer. Uit die teorie (soos behandel in die F212 kursus) is ons bewus dat die sisteem oor-gedemp, of krities-gedemp of onder-gedemp kan optree wanneer dit vanuit ekwilibrium verplaas word en vry gelaat word om te ossilleer. Die verdeling tussen dempingstipes vind plaas by die punt waar  $c = 2\sqrt{mk}$ . Die sisteem is oor-gedemp indien  $c > 2\sqrt{mk}$  en onder-gedemp wanneer  $c < 2\sqrt{mk}$ , terwyl krities gedempte gedrag as die balanspunt tussen laasgenoemde twee tipes voorkom. In die eerste simulase word die numeriese benadering m.b.v die vierde orde Runge-Kutta metode bereken wanneer ons die waarde van die dempingskonstante **c**, varieer oor die interval van waardes gegee deur [4.0; 3.5; 3.0; 2.5; 2.0; 1.5; 1.0; 0.9; 0.8; 0.7; 0.6; 0.5; 0.4; 0.3; 0.2; 0.1] \* **c<sub>krities</sub>**.

Die Matlab program stappe vir die simulاسie lyk as volg : (Alle eenhede word veronderstel om in dieselfde eenhede-stelsel te wees)

```

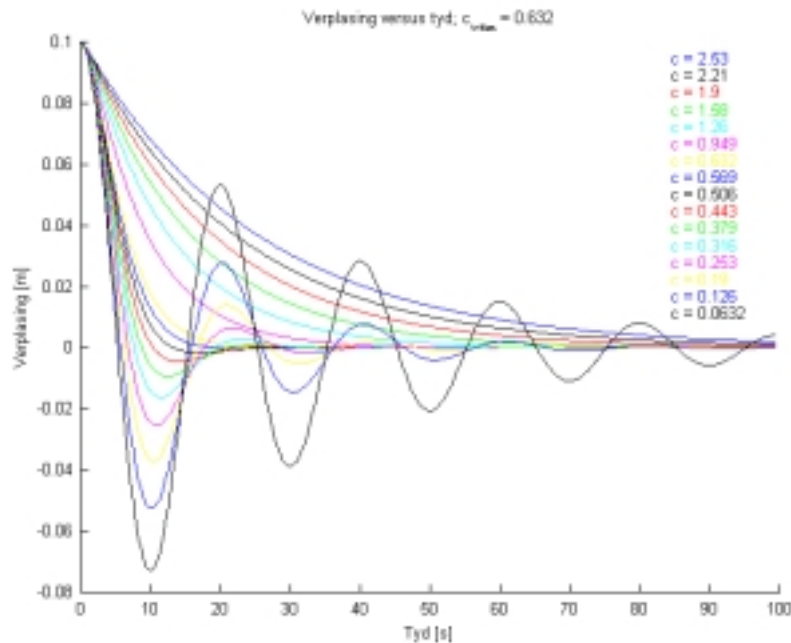
m = 1; % massa
k = 0.1; % veerkonstante
c = 0.01; % dempingskonstante
F0 = 0.0; % dwangkrag amplitude
omega_d = sqrt(k/m)*1.1; % dwangkrag se hoekfrekwensie
x0 = 0.1; % begin verplasing
v0=0; % begin snelheid
dt = 2*pi*sqrt(m/k)/100; % tyd inkrement
aantal_siklusse = 5; % totale berekeningsduur
krities=2*sqrt(m*k); % c-waarde vir kritiese demping
c_range=[4:-0.5:1 , 0.9:-0.1:0.1].*krities;
kleur=['b-'; 'k-'; 'r-'; 'g-'; 'c-'; 'm-'; 'y-'; 'b-'; 'k-'; 'r-'; 'g-';
'c-'; 'm-'; 'y-'; 'b-'; 'k-'; 'r-'; 'g-'; 'c-'; 'm-'; 'y-'; 'b-'; 'k-'; 'r-';
'; 'g-'; 'c-'; 'm-'; 'y-'];
whitebg('w');
figure % open 'n nuwe grafiek sonder om voriges te oorskryf
hold on;
for i=1:length(c_range),
    c=c_range(i);
    % bereken die verplasing, snelheid en energie
    [x, v, KE, PE, E, F, t] = RK4(m, k, c, F0, omega_d, x0, v0, dt,
aantal_siklusse);
    % plot die oombliklike verplasing, snelheid en energie vir die 4e orde
    Runge-Kutta benadering
    plot(t, x, kleur(i));
    text(0.85*max(t),max(x)*(1-i/18),['c = '
num2str(c,3)], 'color',kleur(i));
end;
title(['Verplasing versus tyd; c_k_r_i_t_i_e_s = ' Num2str(krities,3)]);
xlabel('Tyd [s]');
ylabel('Verplasing [m]');
hold off;

```

Die kode wat vir die vierde orde Runge-Kutta tegniek gebruik word, lyk as volg:

```
function [x, v, KE, PE, E, F, t] = RK4(m, k, c, F0, omega_d, x0, v0, dt,
aantal_siklusse);
omega_0 = sqrt(k/m); tau = 2 * pi / omega_0;           % die hoekfrekwensie
en periode van die EHB
t=0:dt:tau*aantal_siklusse;                             % tyd vektor
faktor1 = -k/m*dt;
faktor2 = -c/m*dt;
faktor3 = F0/m*dt;
faktor4 = omega_d*dt;
x(1)=x0;
v(1) =v0;
for i=2:length(t),
    x1 = v(i-1) * dt;
    v1 = faktor1 * x(i-1) + faktor2 * v(i-1) + faktor3 * cos(faktor4 * (i-
1));
    x2 = (v(i-1) + v1/2) * dt;
    v2 = faktor1 * (x(i-1) + x1/2) + faktor2 * (v(i-1) + v1/2) + faktor3 *
cos(faktor4 * (i-1/2));
    x3 = (v(i-1) + v2/2) * dt;
    v3 = faktor1 * (x(i-1) + x2/2) + faktor2 * (v(i-1) + v2/2) + faktor3 *
cos(faktor4 * (i-1/2));
    x4 = (v(i-1) + v3) * dt;
    v4 = faktor1 * (x(i-1) + x3) + faktor2 * (v(i-1) + v3) + faktor3 *
cos(faktor4 * i);
    x(i) = x(i-1) + x1/6 + x2/3 + x3/3 + x4/6;
    v(i) = v(i-1) + v1/6 + v2/3 + v3/3 + v4/6;
end;
[KE, PE, E]=energie(m, k, x, v);
```

Grafies lyk die resultate van die numeriese simulatie as volg:



Hierdie resultate lyk kwalitatief heeltemal aanvaarbaar. Soos die dempingskonstante **c**, kleiner gemaak word, keer die sisteem vinniger terug na ewilibrum en onderkant die waarde korresponderend met kritiese demping begin dit inderdaad ossilleer. Boonop met stadiger afname van die ossillasies se ekstreme draaipunte, soos wat die

waarde van  $c$  afneem. Die analities verwagte hoekfrekwensie van die onder-gedempte ossillator word gegee deur

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

Met afname in  $c$  behoort die hoekfrekwensie  $\omega_1$ , van die onder-gedempte ossillator

toe te neem, aangesien daar 'n al kleiner term  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2$  afgetrek word. Dus behoort die

periode ook al korter te word soos die dempingskonstante afneem. Die grafiese resultate is in ooreenstemming hiermee. Hoewel ons geen direkte kwantitatiewe vergelyking tussen die numeries gesimuleerde en die analities korrekte gedrag van die sisteem gemaak het nie, lyk die resultate van die simulase volkome geloofbaar. Aspekte van ooreenstemming met die analities bekende eienskappe van 'n gedempte vrye ossillator wat mens sou kon toets, is onder andere die volgende:

- Die verloop van die verplasing  $x$  en snelheid  $v$  met tyd vir oor-gedempte, krities-gedempte en onder-gedempte gevalle.
- Passing van die amplitude omhullende funksies vir die onder-gedempte gedrag en bepaling van die leeftyd  $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{c}{2m}$ .
- Verloop van die kinetiese -, potensiële - en totale energie.
- Die Q-waarde van die ossillator  $Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}{2\gamma} = \frac{\sqrt{\omega_1^2 - \gamma^2}}{2\gamma}$

### ***Gedempte, harmonies-gedrewe ossillator***

Die kode vir die vierde orde Runge-Kutta benaderingstegniek in bostaande afdeling is reeds sodanig dat dit voorsiening maak vir 'n harmonies-gedrewe kragkomponent. Deur bloot die dwangkrag se amplitude verskillend van zero te verstel, kan die sisteem se gedrag ondersoek word.

Die hoofprogram vir sodanige simulاسie lyk as volg:

```
% Hoofprogram om die gedrag van 'n eenvoudige harmoniese ossillator
te bereken en te plot
% Die 4e orde Runge-Kutta benadering word vir 'n gedempte gedrewe
EHB gebruik
% die funksie 'initial' vra die gebruiker vir waardes vir:
% 1. die massa van die sisteem [m]
% 2. die veerkonstante [k]
% 3. die beginverplasing [x0]
% 4. die beginsnelheid [v0]
% 5. die tydinkrement [dt]
% 6. die aantal siklusse waaroor die berekening gedoen moet word
[aantal_siklusse]
% 7. die dempingskonstante [c] (dempingskrag / massa-eenheid /
snelheid)
% 8. die harmoniese dwangkrag se amplitude [F0]
% 9. die harmoniese dwangkrag se hoekfrekwensie (omega_d)
%demp;
[m, k, c, F0, omega_d, x0, v0, dt, aantal_siklusse, eerste_indeks]
= initial;
% bereken die verplasing, snelheid en energie
[x, v, KE, PE, E, F, t] = RK4(m, k, c, F0, omega_d, x0, v0, dt,
aantal_siklusse);
grafiek(m, x, v, KE, PE, E, F, t, dt, '4e orde Runge-Kutta', 1,
eerste_indeks);
```

Die Matlab roetine waarin die parameters se waardes gedefinieer word, lyk as volg:

```
function [m, k, c, F0, omega_d, x0, v0, dt, aantal_siklusse,
eerste_indeks] = initial();
% initial vra die gebruiker vir die massa [m], die veerkonstante
[k],
% die beginverplasing [x0], die beginsnelheid [v0], die tyd
inkrement [dt]
% en die aantal siklusse waaroor die berekeninge gedoen moet word.
% Vir gebruik vir herhaaldelike identiese data invoer
m = 1;
k = 0.1;
c = 0.01;
F0 = 0.1;
omega_d = sqrt(k/m)*1.1;
x0 = 0.0;
v0=0;
dt = 2*pi*sqrt(m/k)/100;
aantal_siklusse = 50;
aantal_tydkonstantes=4; % aantal tydkonstantes om
oorgangsverskynsel te laat uitsterf;
wagtyd=2*m/c*aantal_tydkonstantes;
eerste_indeks=round(wagtyd/dt)+1;
```

Hierin word die dwangkrag se hoekfrekwensie  $\omega_d$  gekies om 10% meer te wees as die natuurlike hoekfrekwensie waarmee die ooreenstemmende vrye ossillator sou ossilleer onder zero dempingskondisies. Verder gebruik die simulاسie die beginkondisies dat die ossillator vanuit rus by sy ewilibrumposisie begin. Daar word

ook 'n verstelbare tyd in terme van 'n aantal amplitude tydkonstantes  $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{c}$ ,

toegelaat, sodat die oorgangs-verskynsel kan wegsterf. Die doel hiervan is om 'n geskikte indeks vir die skikkings vir verplasing  $\mathbf{x}$ , snelheid  $\mathbf{v}$ , tyd  $\mathbf{t}$ , asook al die energieë te spesifiseer waarmee 'n skeiding gemaak kan word vir die tydsduur waartydens die oorgangs-verskynsel ("transient") beduidend optree en die tyd daarna wanneer slegs die reëlmatige ("stationary") gedrag waarneembaar is.

Uit die analitiese oplossing van sodanige sisteem se gedrag verwag ons dat daar aanvanklik swewing sal voorkom tussen die oorgangsverskynsel se gedempte ossillasies (die komplementêre funksie) en reëlmatige ossillasies (die partikuliere integraal) (mits die frekwensies natuurlik verskillend is). Na verloop van voldoende tyd, as die oorgangsverskynsel ignoreerbaar klein geraak het, bly net die reëlmatige ossillasies teen die dwangkrag se frekwensie oor. Hierdie reëlmatige ossillasies se amplitude is o.a. afhanklik van die dwangkrag se hoekfrekwensie  $\omega_d$  en word analities gegee deur die uitdrukking

$$A(\omega_d) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\gamma^2\omega_d^2}}$$

Die faseverskil van die reëlmatige ossillasies ten opsigte van die dwangkrag is ook 'n gekompliseerde funksie van o.a. die dwangkrag hoekfrekwensie  $\omega_d$  en word gegee deur:

$$\phi(\omega_d) = \tan^{-1} \left( \frac{-2\gamma\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \right)$$

Die volgende Matlab programstappe om simulatie resultate grafies te toon, plot die verloop van die verplasing as funksie van tyd, asook die fase-diagram en fase-ellips (na verloop van die wagtyd om die oorgangsverskynsel voldoende te laat uitsterf), asook die verloop van die totale meganiese energie as 'n funksie van tyd. In die fase-diagram word die trajek van die sisteem in momentum-ruimte getoon deurdat die oombliklike verplasing  $\mathbf{x}$  en sy korresponderende momentum  $\mathbf{mv}$  as die koördinaat van 'n punt in x-ruimte en die momentum se x-komponent beskou. 'n Geslote trajek dui op 'n stabiele ossillasiewyse. Die fase-ellips van verplasing versus dwangkrag gee weer die parametriese trajek waarmee die faseverskil tussen dié twee groothede bepaal kan word op soortgelyke wyse as in Eksperiment E1 aangaande die faseverskil in RC en RL wisselstroombane van die tweede jaar prakties. Die oriëntasie van die ellips se hoofas ten opsigte van die horisontale as is 'n visuele maatstaf van die fasehoekverskil.

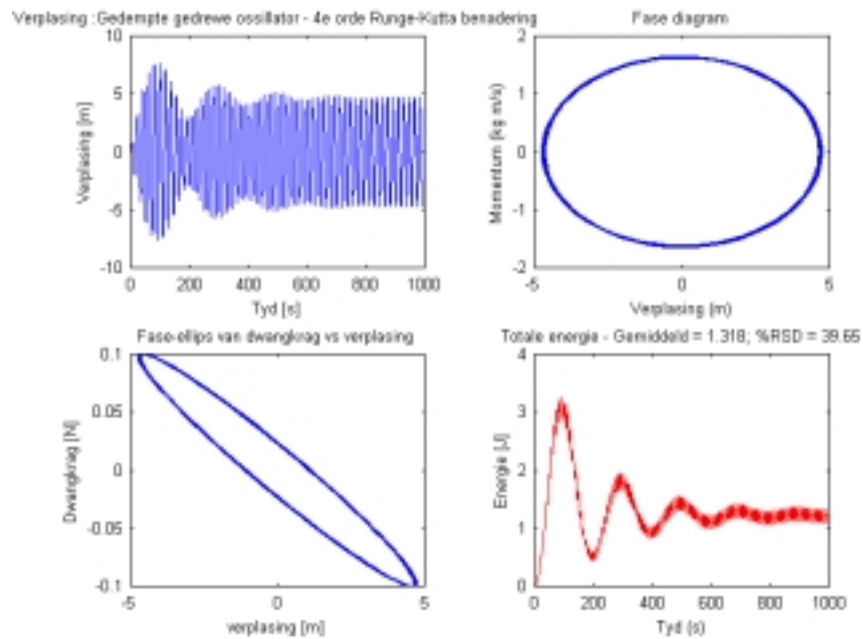
```

function [] = grafiek(m, x, v, KE, PE, E, F, t, dt, naam, indeks,
eerste_indeks);
% funksie om die verplasing en totale energie as 'n funksie van tyd
te plot
whitebg('w');
figure % open 'n nuwe grafiek sonder om voriges te oorskryf
subplot(2,2,1);
plot(t, x(indeks,:), 'b-');
title(['Verplasing : ' naam ' benadering']);
xlabel('Tyd [s]');
ylabel('Verplasing [m]');
%text(10,max(x(indeks,:))*0.9, ['Tyd inkrement = ' num2str(dt) '
s']);
subplot(2,2,2);
plot(x(indeks,eerste_indeks:size(x,2)),
m*v(indeks,eerste_indeks:size(x,2)), 'b-');
title('Fase diagram');
xlabel('Verplasing (m)');
ylabel('Momentum (kg m/s)');
subplot(2,2,3);
plot(x(indeks,eerste_indeks:size(x,2)),
F(indeks,eerste_indeks:size(x,2)), 'b-');
title('Fase-ellips van dwangkrag vs verplasing');
xlabel('verplasing [m]');
ylabel('Dwangkrag [N]');
subplot(2,2,4);
plot(t, E(indeks,:), 'b-',t, E(1,:), 'r-');
title(['Totale energie - Gemiddeld = ' num2str(mean(E(indeks,:)),4)
'; %RSD = ' num2str(std(E(indeks,:))/mean(E(1,:))*100,4)]);
xlabel('Tyd (s)');
ylabel('Energie [J]');

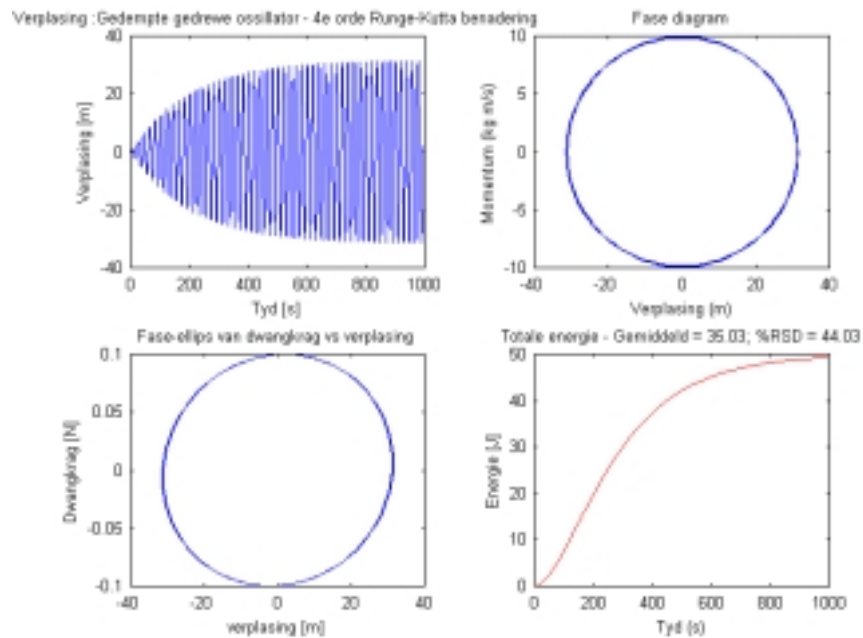
```



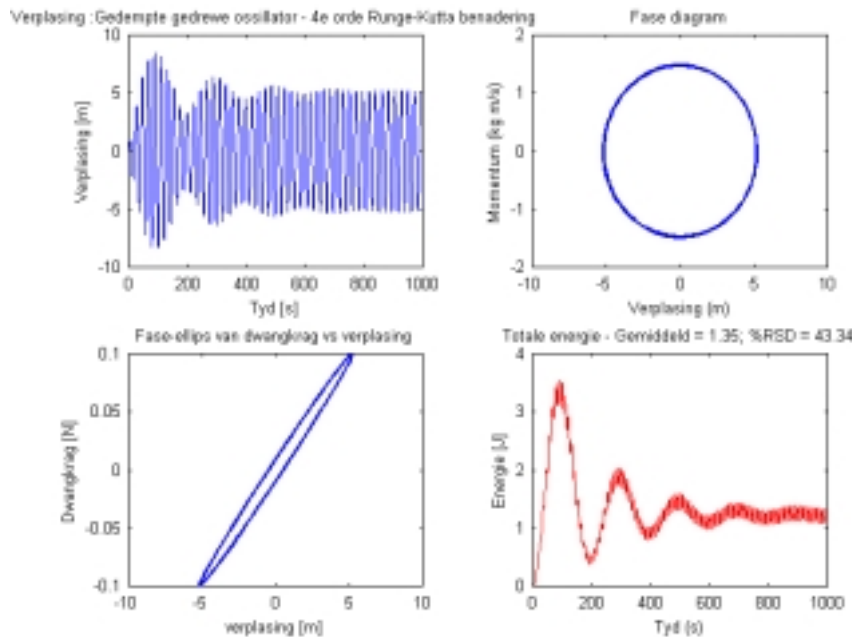
Die grafiese resultate vir 'n dwangkrag hoekfrekwensie wat 10% groter is as die natuurlike hoekfrekwensie  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  lyk as volg:



Vir 'n dwangkrag hoekfrekwensie gelyk aan die natuurlike hoekfrekwensie word die volgende resultate verkry



En vir 'n dwangkrag hoekfrekwensie gelyk aan 90% van die natuurlike hoekfrekwensie die volgende grafieke:



Kwalitatief is die resultate in ooreenstemming met wat ons uit die analitiese oplossings verwag. Swewing kom aanvanklik voor gedurende die tyd wat die oorgangsverskynsel beduidend is en indien die dwangkrag hoekfrekwensie verskillend is van die hoekfrekwensie vir die vrye gedempte ossillator. Daarenteen groei die ossillasies eksponensieël tot sy reëlmatige stasionêre gedrag wanneer die dwangkrag en natuurlike hoekfrekwensie resoneer. Die fase-diagramme toon ook stasionêre trajekte en die fase-ellips en totale meganiese energie verlope is soos te wagte. Die beduidend groter amplitudes van reëlmatige ossillasies by resonans in vergelyking met die  $\pm 10\%$  afwykings in frekwensie is ook soos te wagte. Opsommend kan mens sê dat die numeriese simulatie se resultate in ooreenstemming is met die analitiese oplossings.

In 'n deegliker ondersoek sou mens kon kyk na die kwantitatiewe ooreenstemming van hierdie parameters se numeries gesimuleerde gedrag en die analities bekende oplossings. Mens sou verder bv. die resonanskurwe in terme van die amplitude-kwadraat en fase in afhanklikheid van die dwangfrekwensie kon bepaal asook die ossillator se Q-waarde.

Ondersoek na die potensiele-, kinetiese -, totale gestoorde meganiese energie, verkwiste drywing en drywing gelever aan die ossillator sou ook ondersoek kon word. D.w.s daar is nog 'n magdom ryke fisika aspekte wat in detail in hierdie simulatie ondersoek sou kon word.

## Nie-lineêre ossillator met damping en harmoniese dryfkrag

Ons kan dié ossillator wat ons tot sover gesimuleer het, verander na 'n nie-lineêre ossillator deur bv. die herstelkrag te verander na 'n nie-lineêre afhanklike funksie van die verplasing vanaf ewewig, soos bv.

$$F_{\text{herstel}} = -kx^\alpha \quad \text{met} \quad 0 < \alpha \neq 1$$

In hierdie formulering moet ons net versigtig wees vir nie-heeltallige  $\alpha$ -waardes wat vir ons 'n imaginêre kragkomponent gaan lewer, asook vir ewe  $\alpha$ -waardes, aangesien hulle vir ons 'n herstelkrag na negatiewe x-rigtings gaan lewer, wanneer die x-verplasing self negatief is, m.a.w. die herstelkrag is dan nie altyd gerig na die ekwilibrium posisie nie. 'n Beter formulering vir 'n nie-lineêre herstelkrag wat hierdie twee probleme uitskakel, is een wat sorg dra dat die nie-lineêre magsfunksie altyd 'n onewe funksie van  $x$  is en dat dit eerder die bedrag van  $x$  tot 'n mag verhef. 'n Beter geformuleerde magsfunksie vir die herstelkrag is dus

$$F_{\text{herstel}} = -k \operatorname{sign}(x) |x|^\alpha \quad \text{met} \quad 0 < \alpha \neq 1$$

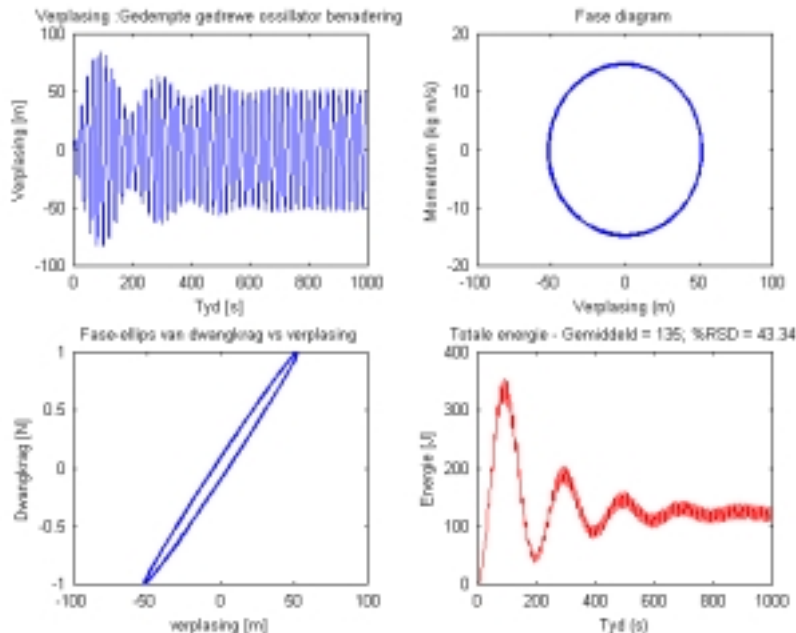
waarin  $\alpha$  nou sonder probleme enige van die positiewe reële getalle kan aanneem.

Die dempingskrag kan op soortgelyke wyse verander word tot 'n nie-lineêre snelheids-afhanklike krag

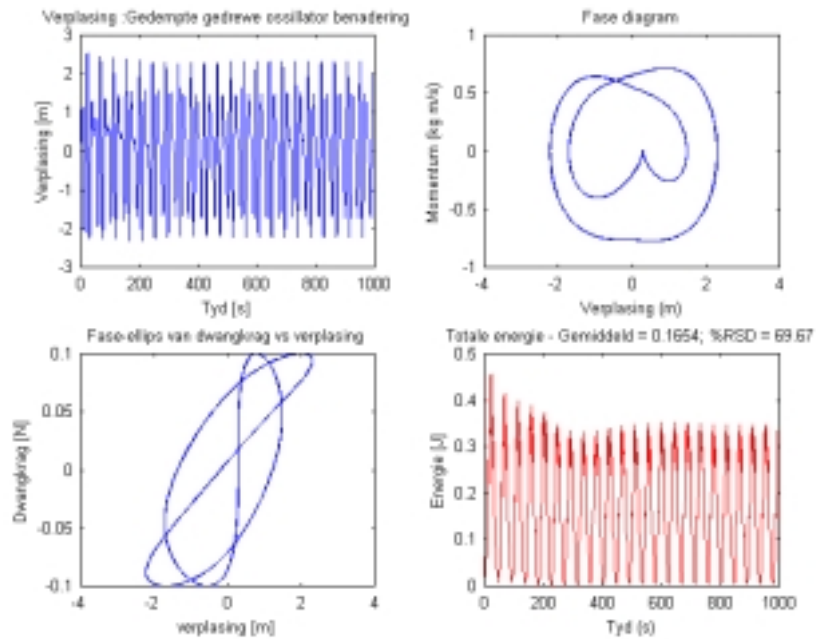
$$F_{\text{demping}} = -k \operatorname{sign}(v) |v|^\beta \quad \text{met} \quad 0 < \beta \neq 1$$

Polinomiese uitdrukkings vir die herstel- en dempings-kragte as funksies van die verplasing en snelheid sou maklik ingevoer kan word deur dieselfde beginsel te gebruik. Om die bestaande Matlab program kodes aan te pas om ook voorsiening te maak vir sodanige potensieël nie-lineêre kragte is triviaal.

Vir 'n lineêre ossillator word die verplasinggedrag lineêr geskaleer met die amplitude van die dempingskrag soos uit die volgende figuur blyk:



In die volgende simulatie word die resultate getoon wanneer die herstelkrag eweredig is aan die kwadraat van die verplasing



Die nie-lineêre respons is ooglopend, hoewel die sisteem nog steeds reëlmatig ossilleer, maar teen ongeveer dubbel die periode met hoër harmonieke daarop gesuperponeer.