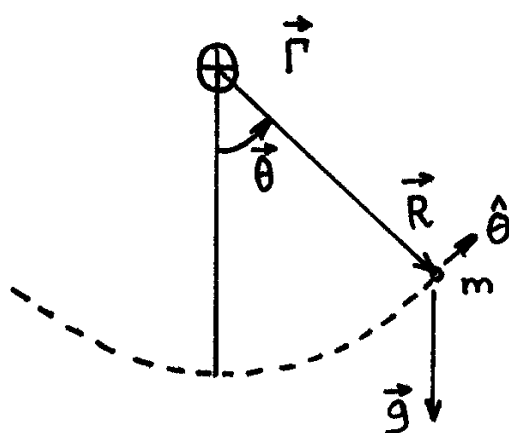


Pendulum simulatie met damping en harmoniese dwangkrag

As verdere toepassing van die numeriese tegnieke vir die oplos van gewone tweede orde differensiaalvergelykings gaan ons die probleem van 'n pendulum wat in 'n gravitasieveld kan ossilleer, bestudeer. Ons kan dit aanvanklik as 'n eenvoudige wiskundige pendulum modelleer en dan latere verfynings van die model aanbring. Sodanige eenvoudige pendulum kan ons beskou asof dit bestaan uit 'n puntmassa m geheg aan 'n onrekbare lyn van lengte R met ignoreerbare massa. Die ander entpunt van die lyn is star geheg aan die ondersteuningspunt en sydelingse beweging van die pendulum is beperk tot 'n enkele vertikale platvlak, terwyl die hele sisteem in 'n konstante en uniforme gravitasieveld waarin die konstante versnelling \vec{g} heers, teenwoordig is. Die pendulum besit 'n stabiele ewewigsposisie waar die massa op sy laagste posisie geleë is.



As enkele vryheidsgraad waarmee ons die sisteem se gedrag beskryf, gebruik ons die verplasingshoek θ , vir die sydelingse ossillasies in die vertikale plat vlak en kies die ewilibrumposisie as die zero daarvan. Die gravitasiekrag veroorsaak 'n draaimoment $\vec{\Gamma} = \vec{R} \times m\vec{g}$ wat in die figuur sal neig om dit kloksgewys te laat terugdraai na sy ewilibrumposisie. Volgens Newton

se tweede wet vir rotasie-beweging vir 'n sisteem met traagheidsmomentum I geld

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma_{\text{resultierend}} = -mgR \sin \theta \quad (1.1)$$

terwyl die traagheidsmoment van sodanige puntmassa m om 'n rotasie-as-lengte R gegee word deur $I = mR^2$. Hieruit kry ons die gewone tweede orde differensiaal-vergelyking

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{R} \sin \theta \quad (1.2)$$

waarin ω die hoeksnelheid van die ossillasie verteenwoordig.

Verdere verfynings wat ons aan die model kan aanbring, is:

- Beskou dit as 'n fisiese pendulum waarin die massa verspreid oor die volume van 'n starre voorwerp voorkom. Dit veroorsaak bloot dat die traagheidsmoment 'n ander, waarskynlik onbekende, funksie van R kan wees, en solank die radius van rotasie en massa verspreiding konstant bly, sal die traagheidsmoment ook konstant bly.
- Beskou die effek van damping. Een moontlike model vir die damping is dat dit lineêr hoeksnelheids-afhanklik sal wees en altyd teen die rigting van die

hoeksnelheid gerig sal wees. $\Gamma_{\text{damping}} = -c \frac{d\theta}{dt}$

- Ons kan ook die pendulum laat aandryf deur 'n eksterne tyd-harmoniese draaimoment $\Gamma_d = \Gamma_0 \cos(\omega_d t)$

Die differensiaalvergelyking wat die pendulum se gedrag beheer, kan dus die volgende vorm besit

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{mgR}{I} \sin\theta - \frac{c}{I} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\Gamma_0}{I} \cos(\omega_d t) \quad (1.3)$$

In die simulatie moet ons voorsiening maak vir die toekenning van waardes aan die volgende parameters:

- die massa $m > 0$
- die radius van rotasie $R > 0$
- die gravitasieversnelling g , wat ons as 'n globale konstante deur die simulatie se prosedures kan verklaar.
- die traagheidsmoment $I > 0$
- die dempingskonstante $c \geq 0$
- die amplitude van die dwang-draaimoment $\Gamma_0 \geq 0$
- die dwang hoekfrekwensie ω_d
- die begin hoekverplasing θ_0
- die begin hoeksnelheid ω_0
- die tydinkrement dt wat in die numeriese simulatie gebruik gaan word
- die totale tydsduur waaroor die simulatie bereken moet word.

Weer eens kan ons van die vierde orde Runge-Kutta tegniek gebruik maak om die simulatie numeries te bereken. Verder gaan ek ook die tydinkrement as 'n honderdste van die periode van die natuurlike periode van 'n ongedempte vrye pendulum wat met klein hoeke ossilleer, kies. As ek twyfel of die numeriese resultate geloofbaar is, sal ek die tydinkremente 'n faktor tien kleiner kies en kyk of dit enige beduidende verskil maak.

Klein amplitude benadering

Wanneer die pendulum met klein amplitudes ossilleer, kan mens die benadering maak dat die term bevattende die herstel-draaimoment geliniariseer kan word deur die $\sin\theta$ faktor te vervang met θ in radiale. Dit gee 'n gewone, lineêre, tweede orde, nie-homogene differensiaal-vergelyking

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgR}{I} \theta - \frac{c}{I} \omega + \frac{\Gamma_0}{I} \sin(\omega_d t)$$

waarvan ons die analitiese oplossings ken in terme van die komplementêre funksie vir die oorgangsverskynsel en die partikuliere integraal vir die reëlmatige ossillasies. Indien die pendulum met **zero damping** en **zero dwangkrag** vanuit ekwilibrium vrygelaat word, voer dit 'n EHB uit met konstante hoekfrekwensie ω_0 , frekwensie ν , en periode τ , gegee deur

$$\omega_0 = \sqrt{mgR/I} \quad \nu = \frac{\sqrt{mgR/I}}{2\pi} \quad \tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgR}} \quad (1.4)$$

of vir 'n eenvoudige matematiese pendulum die bekende resultaat dat die periode direk eweredig is aan die vierkantswortel van die pendulum-lengte en omgekeerd eweredig is aan die vierkantswortel van die gravitasie versnelling, maar onafhanklik van die massa.

$$v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{g/R} \quad \tau = 2\pi \sqrt{R/g}$$

Indien ons eerder die korrekte $\sin \theta$ formulering in die herstel-draaimoment behou, is die beweging nie meer 'n EHB nie, en is die analitiese oplossing vir **die periode van die vrye ongedempte pendulum** veel meer gekompliseerd in terme van *elliptiese integrale van die eerste soort* en word as 'n magsreeks gegee deur

$$\tau = 2\pi \sqrt{I/mgR} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha_{maks} / 2 + \frac{9}{64} \left[\sin^2 \alpha_{maks} / 2 \right]^2 + \dots \right. \quad (1.5)$$

waarin α_{maks} die amplitude van die ossillasie voorstel. (Vir 'n beskrywing van die nie-lineêre vrye ongedempte pendulum met eindige grootte amplitude ossillasies raadplaag die boek : *Classical Dynamics of Particles and Systems*, JB Marion & ST Thornton, p.143.) Vir klein waardes van die ossillasie se amplitude konvergeer die reeks baie vinnig, maar vir groot amplitudes waarvoor

$\alpha_{maks} \rightarrow \pi$ sodat $\sin^2 \frac{\alpha_{maks}}{2} \rightarrow 1$ is 'n groot aantal terme nodig.

Een van die verskille tussen die resultate vir 'n lineêre en 'n nie-lineêre vrye ongedempte pendulum waarna ons kan kyk, is hoedanig hul periode afhanklik is van amplitude.

Beginkondisies

'n Eenvoudige wiskundige pendulum van massa 1 (kg) en pendulumlengte 1 (m) met zero damping en zero dwangkrag (amplitude gewys) is gekies in die simulatie met 'n tydinkrement van 1/100 ste van die natuurlike periode $\tau = 2\pi \sqrt{I/mgR}$ en die gedrag

daarvan oor vyf periodes gesimuleer m.b.v. die vierde orde Runge-Kutta tegniek wanneer dit agtereenvolgens vanuit rus vanaf verskillende grootte aanvangs hoekverplasinge vrygelaat is. Die beginkondisies in die Matlab program lyk as volg:

```
function [m, R, I, x0, v0, x1, v1, dt, aantal_siklusse, c, F0,
omega_d] = initial();
global g;
m = 1;
R = 1;
g = 9.8;
I = m*R^2*1.0;
c = 0.0;
F0 = 0.0;
omega_d = sqrt(m*g*R/I)*1;
x0 = 170*pi/180; x1 = x0;
v0=0; v1 =v0;
period=2*pi*sqrt(I/(m*g*R));
dt = period/100;
aantal_siklusse = 5;
```

Hoofprogram

In die hoofprogram word die beginwaardes van die parameters geïnisiëer en dan word daar vir 'n versameling begin hoekverplasingwaardes deur 'n lus geloop, waarin die

simulasie bereken word vir beide die gevalle waar die gravitasie-geassosieerde herstel-draaimoment die faktor $\sin \theta$ (vir die nie-lineêre pendulum) asook die klein-amplitude benadering met die faktor θ (vir die lineêre pendulum) wat i.p.v. $\sin \theta$ gebruik word. Vir elke simulasie word die zero-kruisingspunte gesoek en die gemiddelde periode bepaal. Buite die lus word die verandering van periode met ossillasie amplitude dan geplot.

```
% Hoofprogram om die gedrag van 'n pendulum te bereken en te plot
% Die 4e orde Runge-Kutta benadering word vir 'n gedempte gedrewe
pendulum gebruik
% die funksie 'initial' vra die gebruiker vir waardes vir:
% 1. die massa van die sisteem [m]
% 2. die radius van die MM vanaf die rotasiepunt [R]
% 3. die traagheidsmoment van die sisteem [I]
% 4. die beginhoekverplasing [x0]
% 5. die beginhoeksnelheid [v0]
% 6. die tydinkrement [dt]
% 7. die aantal siklusse waaroor die berekening gedoen moet word
[aantal_siklusse]
% 8. die dempingskonstante [c] (dempingskrag / hoeksnelheid)
% 9. die harmoniese dwangdraaimoment se amplitude [F0]
% 10. die harmoniese dwangkrag se hoekfrekwensie [omega_d]
clear all;
global g;
[m, R, I, x0, v0, x1, v1, dt, aantal_siklusse, c, F0, omega_d,
eerste_indeks] = initial;
% bereken die verplasing, snelheid en energie
thetas=[20 17.5 15 12.5 10 7.5 5 2.5 1]*pi/180; % skikking van
amplitudes
for i=1:length(thetas),
    x0=thetas(i);
    [x, v, KE, PE, E, F, t] = RK4_sin_theta(m, R, I, x0, v0, dt,
aantal_siklusse, c, F0, omega_d, eerste_indeks, fase);
    [period1(i),rsdt1(i)]= findzeros(x,dt);
    [X1, V1, KE1, PE1, E1, F, t] = RK4_theta(m, R, I, x0, v0, dt,
aantal_siklusse, c, F0, omega_d, eerste_indeks, fase);
    [period2(i),rstd2(i)]= findzeros(X1,dt); % bepaal periode uit
zero kruisings
end;
plot_periode(thetas,period1,period2); % plot periode vs
amplitude
```

Vierde orde Runge-Kutta benaderings program

Die berekenings benadering vir die geval waarin die faktor $\sin \theta$ in die herstel draaimoment gebruik word lyk as volg:

```
function [x, v, KE, PE, E, F, t] = RK4_sin_theta(m, R, I, x0, v0,
dt, aantal_siklusse, c, F0, omega_d, eerste_indeks, fase);
global g;
omega_0 = sqrt(m*g*R/I); tau = 2 * pi / omega_0;           % die
hoekfrekwensie en periode van die EHB
t=0:dt:tau*aantal_siklusse;                                % tyd vektor
faktor1 = -m*g*R/I*dt;
faktor2 = -c/I*dt;
faktor3 = F0/I*dt;
faktor4 = omega_d*dt;
x(1)=x0;
v(1) =v0;
for i=2:length(t),
    x1 = v(i-1) * dt;
    v1 = faktor1 * sin(x(i-1)) + faktor2 * v(i-1) + faktor3 *
cos(faktor4 * (i-1));
    x2 = (v(i-1) + v1/2) * dt;
    v2 = faktor1 * sin(x(i-1) + x1/2) + faktor2 * (v(i-1) + v1/2)
+ faktor3 * cos(faktor4 * (i-1/2));
    x3 = (v(i-1) + v2/2) * dt;
    v3 = faktor1 * sin(x(i-1) + x2/2) + faktor2 * (v(i-1) + v2/2)
+ faktor3 * cos(faktor4 * (i-1/2));
    x4 = (v(i-1) + v3) * dt;
    v4 = faktor1 * sin(x(i-1) + x3) + faktor2 * (v(i-1) + v3) +
faktor3 * cos(faktor4 * i);
    x(i) = x(i-1) + x1/6 + x2/3 + x3/3 + x4/6;
    v(i) = v(i-1) + v1/6 + v2/3 + v3/3 + v4/6;
end;
[KE, PE, E]=energie(m, I, x, v);
F=F0*cos(omega_d*t);
```

Die roetine vir die klein-amplitude benadering waarin $\sin \theta \approx \theta$ gestel word, lyk soortgelyk en verskil slegs in die vier program stappe waarin die sin-funksie in rooi hierbo aangedui is.

Periode bepaling

Die periode word bepaal deur gebruikmaking van die tydsduur tussen twee opeenvolgende zero-kruisingsposisies van die hoekverplasing veranderlike (in die volgende prosedure aangedui met die skikking \mathbf{x}). Die zerokruisings self word gesoek op grond van die eienskap dat twee naasliggende waardes in die hoekverplasing skikking teenoorgestelde tekens moet besit of een van hulle moet zero wees. Twee tydelike skikkings $\mathbf{x1}$ en $\mathbf{x2}$ wat afbeeldings van die hoekverplasing skikking \mathbf{x} is, maar waarvan die indekse vir dieselfde hoekverplasing waarde relatief met een indeks-posisie t.o.v. mekaar verskuif is, word gevorm. Skalaar-vermenigvuldiging van dié twee afbeeldings en toets vir elemente met 'n nie-positiewe produk lewer dus die indekse waar die zero kruisings plaasvind. Vir 'n meer akkurate bepaling van die tydstip wanneer die zero-kruising presies sou plaasvind, word daar lineêr geïnterpoleer tussen die twee naasliggende hoekverplasings-punte aan weerskante van die zerokruising. Die tydsverskil tussen twee opeenvolgende zero-kruisingspunte is

gelyk aan 'n halwe periode. Hieruit kan 'n aantal metings van die periode, sy gemiddelde waarde asook sy persentasie relatiewe standaardafwyking gemaak word. Die programstappe vir die prosedure waarin die periode bepaal word, lyk as volg:

```
function [period,rstd]= findzeros(x,dt);
x1=[x(1) x];
x2=[x, x(length(x))];
xzeros=find(x1.*x2 <= 0);
for i=1:length(xzeros),
    t(i)=-x(xzeros(i)-1)*dt/(x(xzeros(i))-x(xzeros(i)-1))+(xzeros(i)-1)*dt;
end;
periods=diff(t)*2;
period=mean(periods);
rstd=std(periods)/period*100;
```

Grafiese resultaat

Die resultate van die numeriese benaderings word in die volgende figuur getoon. Die analitiese resultaat vir die periode, gepas volgens die analitiese vergelyking

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgR}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha_{maks}}{2} + \frac{9}{64} \left[\sin^2 \frac{\alpha_{maks}}{2} \right]^2 + \dots \right\}$$

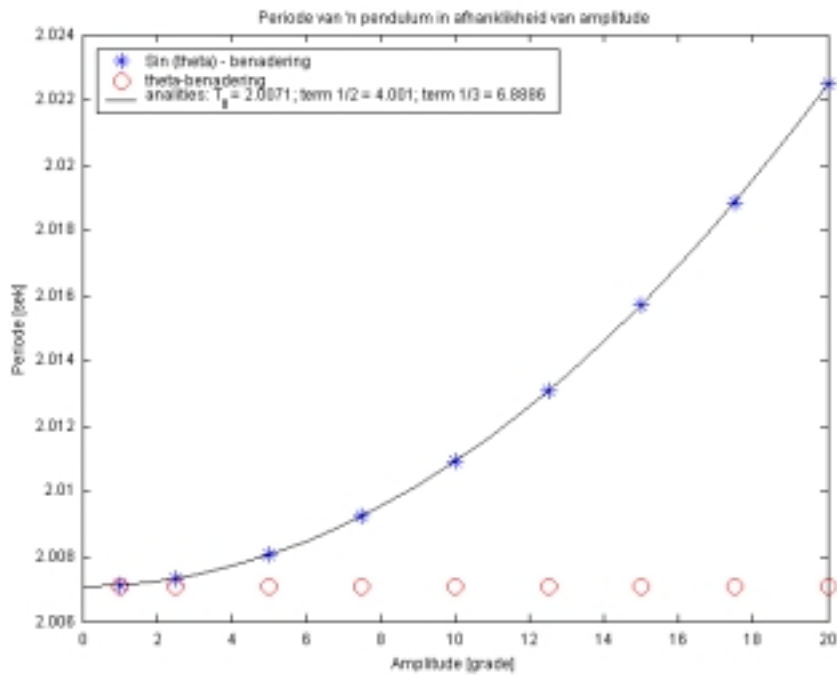
se vorm, word met die soliede lyn aangetoon waarin 'n tweede orde polinoom in $\sin^2 \frac{\alpha_{maks}}{2}$ as die onafhanklike en die numeries berekende periodes as afhanklike veranderlike gebruik is. Die waarde op die grafiek aangedui met T_0 toon die polinoom-passing se waarde van die eerste term in die reeks, wat naamlik ooreen

behoort te stem met $2\pi \sqrt{\frac{I}{mgR}} = 2.007$ vir hierdie bepaalde stel parameters. Die

waarde van die verhouding van die eerste term tot die tweede (analities = 4) en die verhouding van die eerste term tot die derde (analities = 7.111) kan vergelyk word met die numeries verkreeë waardes.

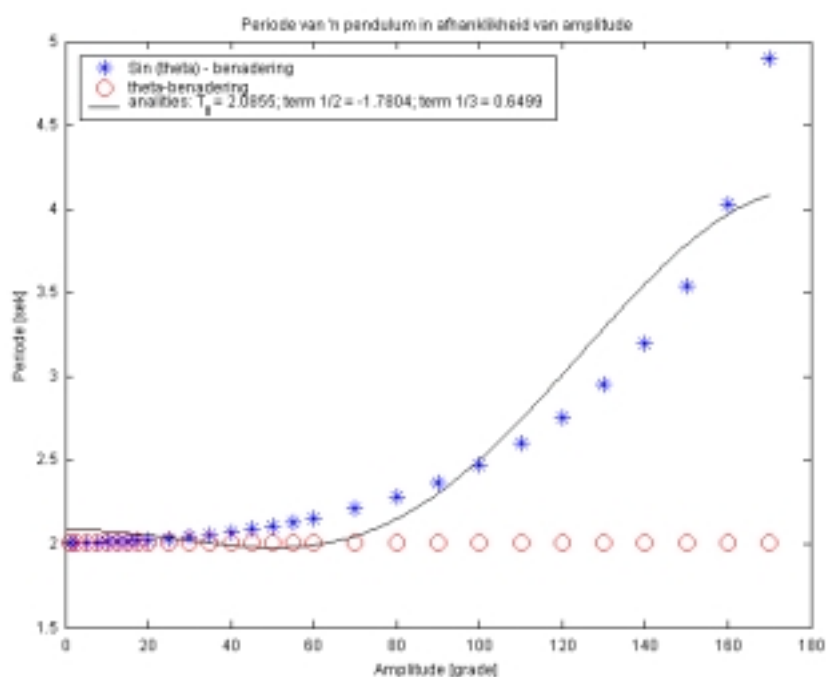
Die Matlab programstappe vir die polinoompassing en grafiek lyk as volg:

```
function [] = plot_periode(thetas,period1,period2);
figure;
[P,S]=polyfit(sin(thetas/2).^2,period1,2);
indep=0:1:thetas(1)*180/pi;
Period_fit=polyval(P,sin(indep/2/180*pi).^2);
plot(thetas/pi*180,period1,'b*',thetas/pi*180,period2,'ro',indep,Period_fit,'k-');
title('Periode van 'n pendulum in afhanklikheid van amplitude');
xlabel('Amplitude [grade]');
ylabel('Periode [sek]');
legend('Sin (theta) - benadering', 'theta-benadering', ['analities: T_0 = ' num2str(P(length(P))) '; term 1/2 = ', num2str(P(length(P))/P(length(P)-1)), '; term 1/3 = ', num2str(P(length(P))/P(length(P)-2))], 2);
saveas(gcf,['periode_3'],'png')
```



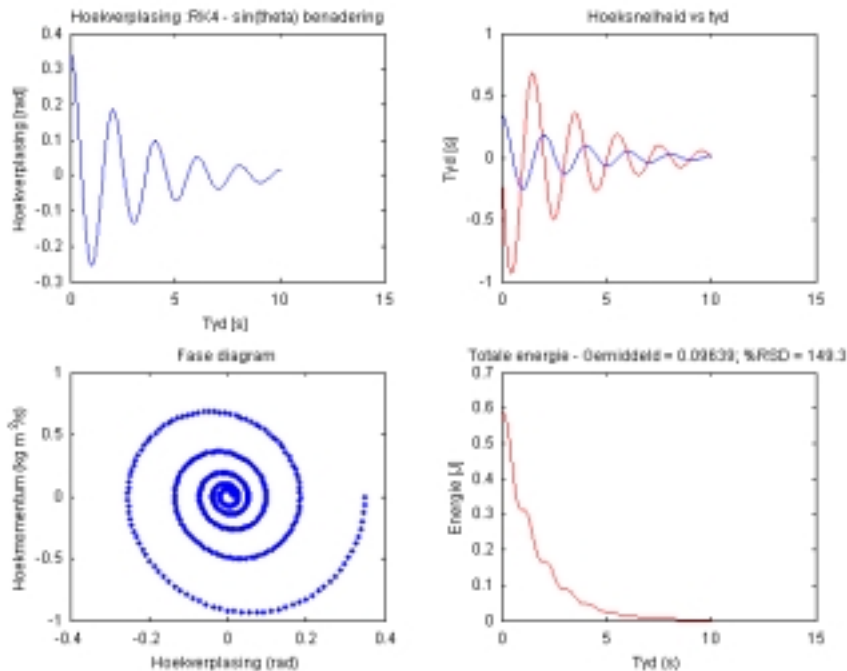
Besonder goeie ooreenstemming tussen die analitiese en polinoom gepaste resultate van die vierde orde Runge-Kutta tegniek met die $\sin \theta$ faktor word verkry. Uit die grafiek blyk ook duidelik dat die liniariserings-benadering waarin $\sin \theta \approx \theta$ gestel word reeds by 'n 20° amplitude 'n beduidend foutiewe resultaat (-0.76%) vir die periode sal lewer.

Indien die amplitude egter baie groot raak ($\sim 120^\circ$), het mens baie meer terme as net drie nodig in die reeks vir die analitiese uitdrukking vir die periode en kry mens swak passing tussen die benaderde term-beperkte analitiese uitdrukking en die numeries berekende Runge-Kutta waardes soos in die volgende figuur getoon. 'n Polinoom van veel hoër orde as twee in $\sin^2 \alpha_{maks} / 2$ is nou nodig om die numeriese resultate korrek te kan pas by die geskikte analitiese uitdrukking.



Vrye gedempte pendulum

Soortgelyk as wat vir die lineêre ossillator gedoen is, kan die gedrag van die vrye pendulum met verskillende dampingskondisies ondersoek word en die verskynsels van oor-gedempte, krities-gedempte, en onder-gedempte gedrag waargeneem word met die waarde $c = 2\sqrt{mgRI}$ as die balanspunt waar kritiese damping voorkom, terwyl by kleiner waardes van c onder-damping en by groter waardes daarvan oor-gedempte gedrag voorkom.



Aspekte wat mens sou kon ondersoek vir die graad van ooreenstemming met die analities bekende gedrag van 'n vrye gedempte pendulum, is onder andere die volgende:

- Die verloop van die hoekverplasing θ en die hoeksnelheid ω met tyd vir oor-gedempte, krities-gedempte, en onder-gedempte gevalle.
- Passing van die amplitude omhullende funksies vir die onder-gedempte gedrag en bepaling van die leeftyd $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{c}{2I}$
- Verloop van die kinetiese -, potensiele- en totale meganiese energie.
- Die Q-waarde van die ossillator met $Q \approx \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}{2\gamma}$

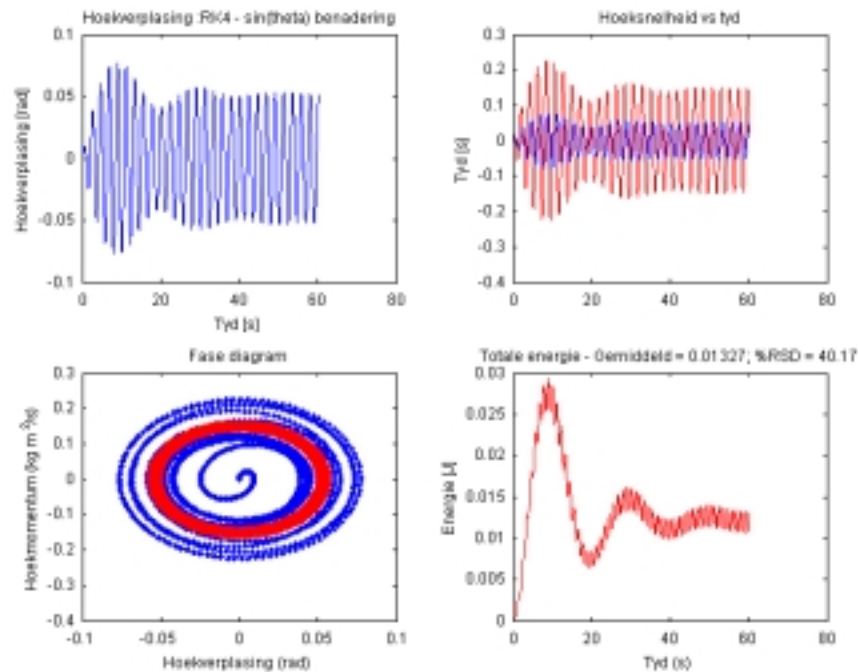
Gedempte, harmonies-gedrewe pendulum

Die respons van die harmonies-gedrewe pendulum kan soortgelyk gesimuleer word as wat dit gedoen is vir die eenvoudige lineêre ossillator. Weer eens neem mens waar dat daar 'n oorgangsverskynsel en 'n reëlmatige ossillasie bestaan wat met mekaar interfereer om 'n swewing te vorm (indien hul frekwensies verskillend is) en wat met verloop van tyd wegsterf om uiteindelik net die stasionêre gedrag agter te laat. Die reëlmatige ossillasies vind plaas met 'n amplitude wat 'n gekompliseerde funksie van onder andere die dwanghoekfrekwensie is,

$$A = \frac{\Gamma_0/I}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + 4\gamma^2\omega_d^2}}$$

en is agter in fase ten opsigte van die harmoniese dwangkrag met 'n fase-verskil wat ook afhanklik is van die dwangfrekwensie.

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{-2\gamma\omega_d}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \right)$$



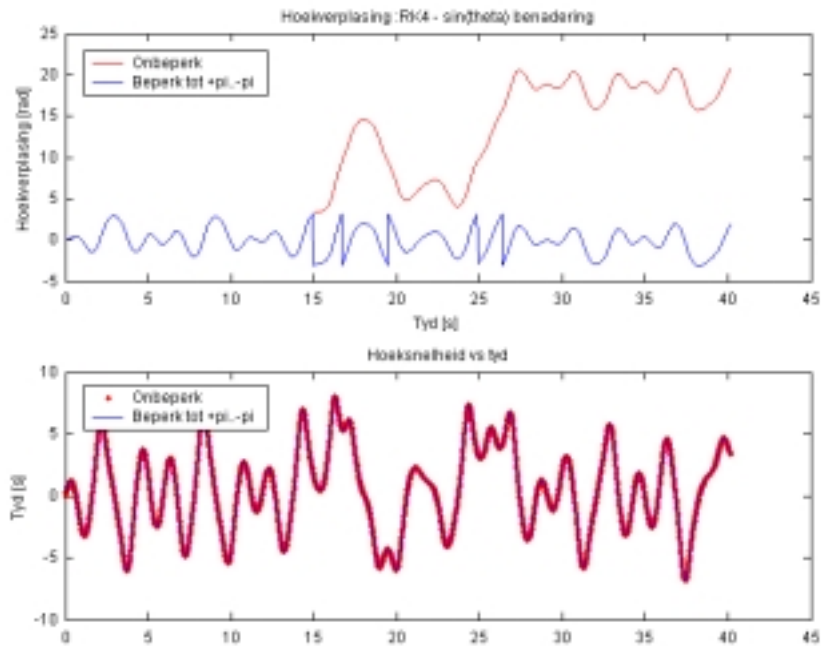
Aspekte wat mens in hierdie deel van die projek sou kon ondersoek, is die resonansgedrag van die pendulum met beide die amplitude van stasionêre ossillasies en die faseverskil se afhanklikheid van dwangfrekwensie.

Chaotiese gedrag van die harmonies-gedrewe pendulum

Soos mens die amplitude van die dwangkrag groter maak, word 'n punt bereik waar die pendulum sulke groot hoekverplasing ondergaan dat dit bo-oor die boonste labiele ewewigspunt swaai. Omdat daar geen onderskeid gemaak kan word tussen ossillasies wat een of meer kere bo-oor geswaai het nie, is dit gerade om die hoekverplasing te beskou asof dit beperk is tot die interval $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Die volgende programstappe om dit tot sodanige interval te beperk kan in die numeriese benaderings-tegniek gebruik word en toegepas word op elke nuwe hoekverplasing nadat dit bereken is :

```
% beperk die hoekverplasing tot interval  $\pm\pi$ 
if x(i) > pi,
    x(i) = x(i) - 2*pi;
elseif x(i) < -pi
    x(i) = x(i) + 2*pi;
end;
```

Die effek van sodanige beperking op die hoekverplasing word in die volgende diagram getoon. In die interval beperkte beskrywing word oorgange by die bopunt deur diskrete spronge aangedui.

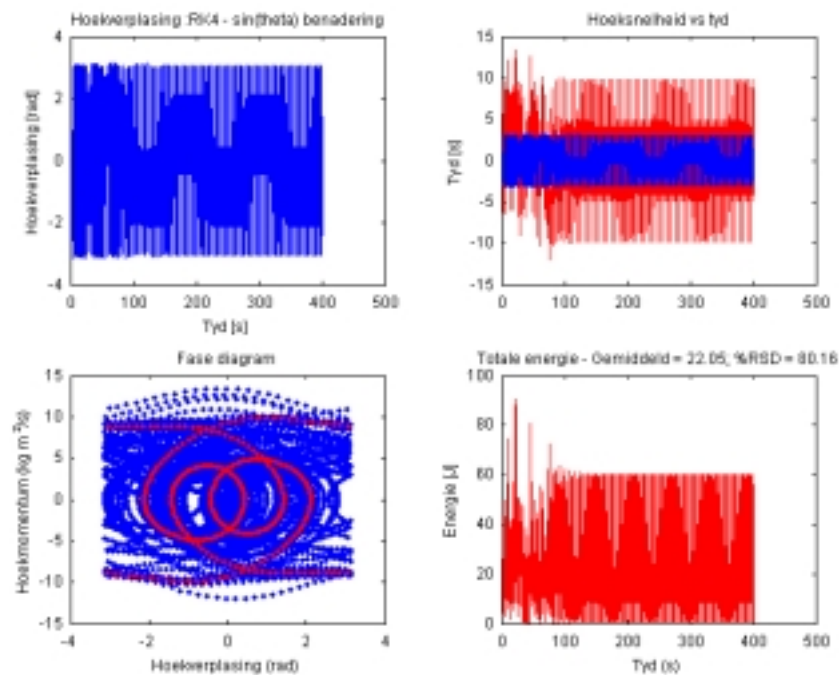


Een van die kenmerk van chaotiese gedrag is dat selfs gering verskillende beginkondisies lei tot totaal verskillende gedrag. Sonder om dit in diepte te ondersoek, het ek net gekyk of ek sodanige gesimuleerde verskynsel kan waarneem. Daarvoor gebruik ek die simulatie van identiese pendula maar stel die begin hoekverplasing van die een op $+1 \times 10^{-10}$ en die ander op -1×10^{-10} radiale. Die beginkondisie was as volg:

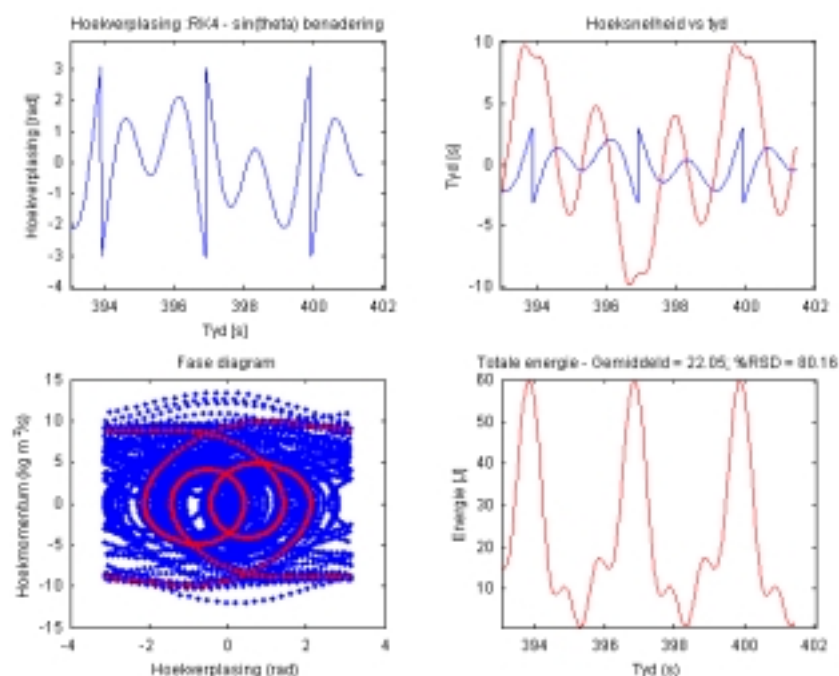
```
function [m, R, I, x0, v0, x1, v1, dt, aantal_siklusse, c, F0,
omega_d, eerste_indeks, period] = initial();
global g;
m = 1;
R = 1;
g = 9.8;
I = m*R^2*1.0;
c = 0.1;
F0 = 15.0;
omega_d = sqrt(m*g*R/I)*1;
x0 = 1e-10; x1 = -x0;
v0=0; v1 =v0;
period=2*pi*sqrt(I/(m*g*R));
dt = period/100;
aantal_siklusse = 200;
aantal_tydkonstantes = 15;
if c > eps,
    wagtyd = 2* I/c* aantal_tydkonstantes;
    eerste_indeks = round(wagtyd/dt) + 1;
else
    eerste_indeks = 1;
end;
```

Hierin word 'n wagtyd van 15 amplitude tydkonstantes (300 sekondes in hierdie geval) toegelaat vir die oorgangsverskynsel om weg te sterf, sodat die gedrag van die "reëlmatige" ossillasie daarna afsonderlik geplot kan word. Die gedrag van die eerste pendulum word in die volgende grafiek vertoon. In die fasesdiagram stel die rooi

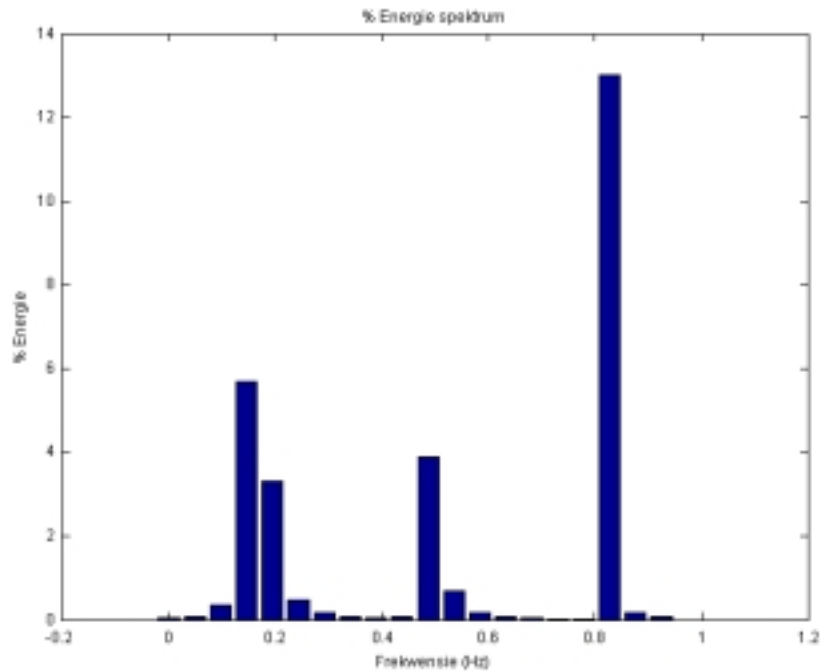
kurwe die trajek in faseruimte voor nadat die wagtyd verstryk het, en die blou kurwe die verloop van die trajek gedurende die voorafgaande tyd.



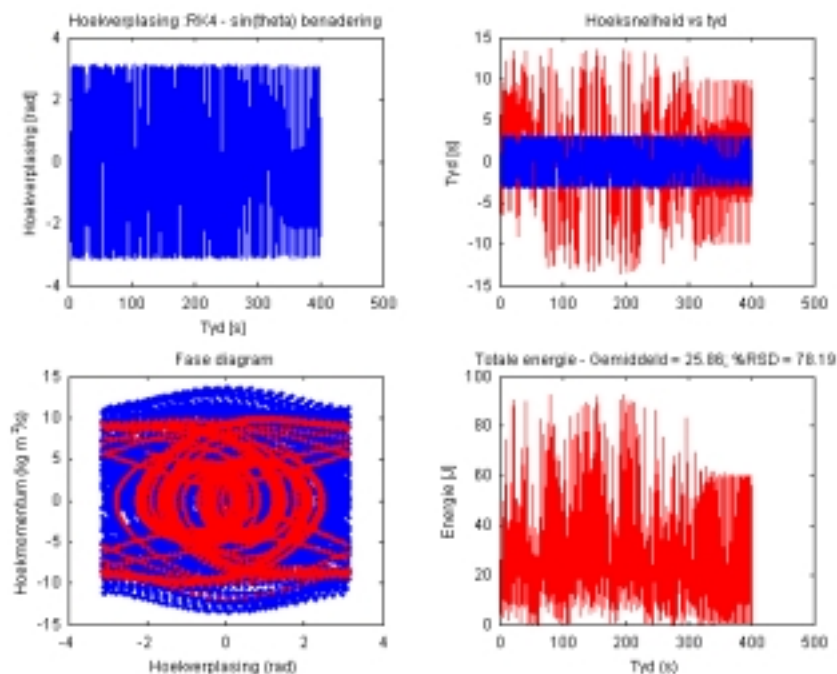
Hieruit blyk dat die pendulum na ongeveer 100 sekondes (5 tydkonstantes) in 'n reëlmatige ossillasië wyse gegaan het, waarin dit beide op 'n kloks- en anti-kloks-gewyse oor die bopunt beweeg. As mens in groter detail kyk na die ossillasies gedurende hierdie tydperk dan lyk dit soos in die volgende figuur.



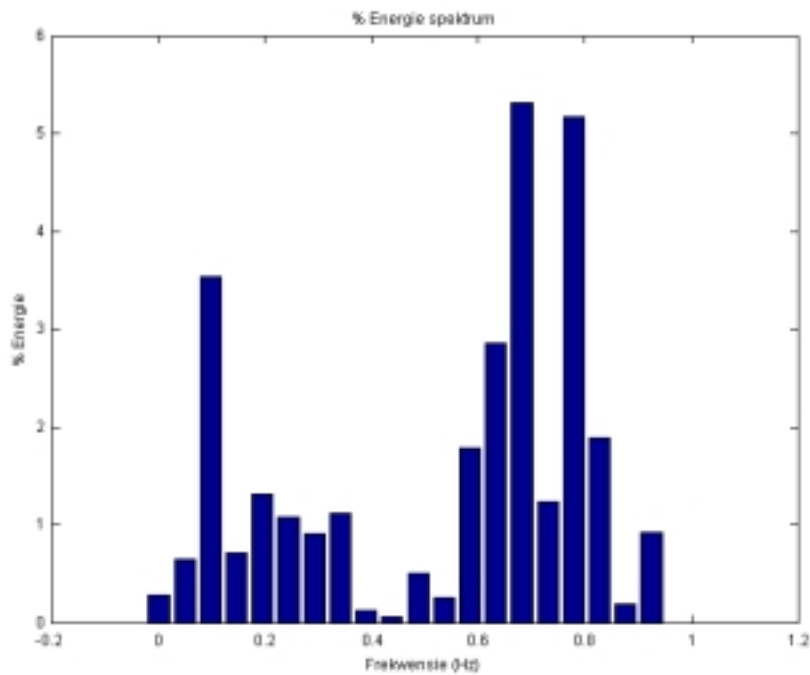
Die pendulum maak dus twee ossillasies na links en swaai dan bo-oor om weer twee ossillasies na regs te maak en terug bo-oor te swaai. As mens 'n analise maak van die energie spektrum van hierdie beweging kry ek die volgende resultaat.



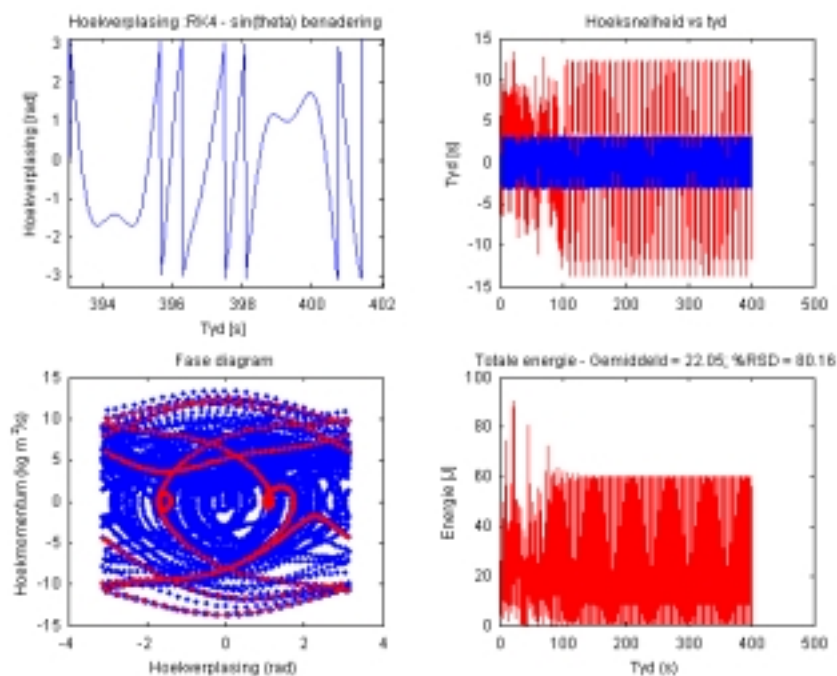
Die ossillasie bestaan dus uit drie frekwensie komponente, terwyl die dwangfrekwensie in hierdie spesifieke geval 0,498 Hz is. Die ander twee komponente is dus nagenoeg dubbel en die helfte van die dwang frekwensie. Vir die ander pendulum waarin slegs die begin hoekverplasing baie effe verskil, vind ek die volgende gedrag.



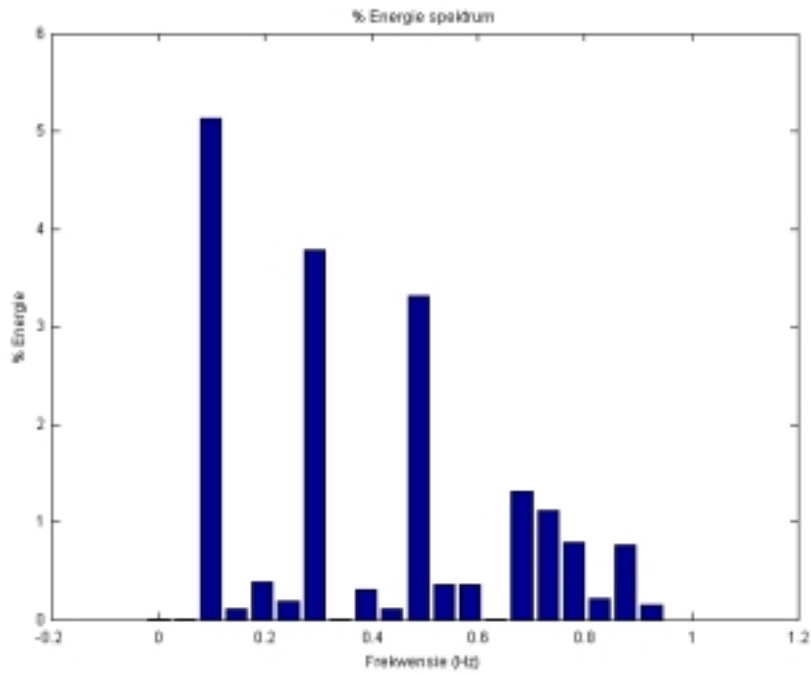
Hiervoor het die pendulum eers na ongeveer 300 sekondes (15 tydkonstantes) tot 'n mate begin stabiliseer, en wel op 'n wyse wat 'n redelike mate van ooreenkoms met dié van die ander pendulum toon. Sy energie spektrum na die wagtyd van 15 tydkonstantes lyk as volg:



Dit is beduidend verskillend van die eerste pendulum s'n. As mens egter die gedrag van die twee pendula met mekaar vergelyk na 300 sekondes toon hulle al beter ooreenkomst met mekaar. Dit mag dus heel waarskynlik wees dat die twee pendula hulle identies sal gedra as ons net 'n nog langer wagtyd toelaat. Dit is weliswaar naby aan so 'n punt van onstabiele gedrag. Wanneer die begin hoekverplasing verander word na -4×10^{-10} radiale word die volgende gedrag gevind:



En met 'n energie spektrum gegee deur:



Sonder om verder hierop in te gaan, sal ek volstaan daarmee deur te sê dat ons nou die nodige numeriese wiskundige gereedskap het om sisteme wat beskryf word deur gewone tweede orde differensiaalvergelykings na hartelus te kan ondersoek.