Probleem 1:

(a)

```
function I = simp(f,a,b,n)

h = (b-a)/n;
x = a+[0:n]*h;
I = (h/3)*((f(x(1))+4*sum(f(x(2:2:n)))+2*sum(f(x(3:2:n-1))))+f(x(n+1)));
```

(b)

```
function I = midpt(f,a,b,n)

h = (b-a)/n;
x = a+([0:n-1]+1/2)*h;
I = h*sum(f(x));
```

Probleem 2:

(a)

$$I - I_n = Ch^p \tag{1}$$
$$I - I_{2n} = C\left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^p} \tag{2}$$

Deel (1) deur (2),

$$\frac{I - I_n}{I - I_{2n}} = 2^p,$$

en neem log's aan weerskante,

$$\frac{\log\left((I - I_n)/(I - I_{2n})\right)}{\log 2} = p.$$

(b)

$$\begin{aligned}
I - I_n &= Ch^p && (3)\\
I - I_{2n} &= C\left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^p} && (4)\\
I - I_{4n} &= C\left(\frac{h}{4}\right)^p = \frac{Ch^p}{2^{2p}} && (5)
\end{aligned}$$

Trek (4) van (3) af,

$$I_{2n} - I_n = Ch^p\left(1 - \frac{1}{2^p}\right). \qquad (6)$$

Trek (5) van (4) af,

$$I_{4n} - I_{2n} = Ch^p\frac{1}{2^p}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right). \qquad (7)$$

Deel nou (6) deur (7),

$$\frac{I_{2n} - I_n}{I_{4n} - I_{2n}} = 2^p,$$

en neem log's aan weerskante,

$$\frac{\log\left((I_{2n} - I_n)/(I_{4n} - I_{2n})\right)}{\log 2} = p.$$

Probleem 3:

(a)

Tabel **1T**: Integraal I_1, Trapesiumreël:

n	I_n	$I - I_n$	Orde van konvergensie
10	1.07214558895461	5.2538×10^{-4}	
20	1.07175147986343	1.3127×10^{-4}	2(a) $p = 2.0002$
40	1.07165302456062	3.2812×10^{-5}	2(b) $p = 2.0011$

Tabel **1S**: Integraal I_1, Simpsonreël:

n	I_n	$I - I_n$	Orde van konvergensie
10	1.07161857023995	1.6423×10^{-6}	
20	1.07162011016637	1.0235×10^{-7}	2(a) $p = 4.0010$
40	1.07162020612634	6.3925×10^{-9}	2(b) $p = 4.0043$

Tabel **2T**: Integraal I_2, Trapesiumreël:

n	I_n	$I - I_n$	Orde van konvergensie
10	0.86484223923892	1.8477×10^{-2}	
20	0.87596907199306	7.3503×10^{-3}	2(a) $p = 1.3316$
40	0.88039889143517	2.9205×10^{-3}	2(b) $p = 1.3287$

Tabel **2S**: Integraal I_2, Simpsonreël:

n	I_n	$I - I_n$	Orde van konvergensie
10	0.87412914999979	9.1902×10^{-3}	
20	0.87967801624444	3.6414×10^{-3}	2(a) $p = 1.3345$
40	0.88187549791587	1.4439×10^{-3}	2(b) $p = 1.3363$

Tabel **3T**: Integraal I_3, Trapesiumreël:

n	I_n	$I - I_n$	Orde van konvergensie
10	0.51629899343522	4.4929×10^{-6}	
20	0.51630322815847	2.5821×10^{-7}	2(a) $p = 4.0817$
40	0.51630347111898	1.5250×10^{-8}	2(b) $p = 4.1235$

Tabel **3S**: Integraal I_3, Simpsonreël:

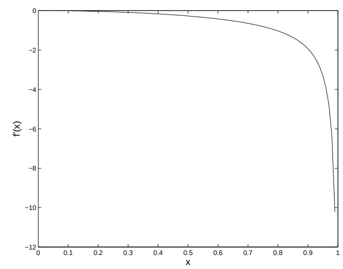
n	I_n	$I - I_n$	Orde van konvergensie
10	0.51631764484615	1.4158×10^{-5}	
20	0.51630463973289	1.1534×10^{-6}	2(a) $p = 4.1330$
40	0.51630355210582	6.5737×10^{-8}	2(b) $p = 3.5798$

(b)

Die teorie voorspel dat vir die Trapesiumreël is $p = 2$, en vir die Simpsonreël is $p = 4$. Ons verkry hierdie waardes (by benadering) in Tabelle **1T**, **1S** en **3S**.

(c)

In Tabel **2T** het ons stadiger konvergensie as normaalweg vir die Trapesiumreël. Die verklaring hiervoor is die volgende. Die integrand het nie twee kontinue afgeleides op $[0, 1]$ soos wat die formule op p. 123 in Burden & Faires vereis nie. Trouens, $f'(x) = -x^2/(1-x^3)^{2/3}$ is ongedefinieerd by $x = 1$, soos wat duidelik blyk uit die grafiek van $f'(x)$ hieronder.



In Tabel **2S** het ons stadiger konvergensie as normaalweg vir die Simpsonreël. Die verklaring hiervoor is soortgelyk aan dié van die Trapesiumreël vir hierdie integrand.

(d)

In Tabel **3T** het ons vinniger konvergensie as normaalweg vir die Trapesiumreël. Die verklaring hiervoor is die volgende. Die integrand se eerste afgeleide word gegee deur $f'(x) = \frac{27}{2}x^2(1-x^3)^{7/2}$, dus $f'(0) = 0 = f'(1)$ (dit is ook sigbaar uit die grafiek van $f(x)$ hieronder). Die eerste term in die Euler-Maclaurin formule verdwyn dus, en die konvergensie is soos h^4 in plaas van h^2. Meer nog, die grafiek hieronder dui aan dat $f(x)$ in die eerste helfte van die interval konkaaf na onder is, en in die twee helfte konkaaf na bo. Die fout wat die Trapesiumreël dus in die eerste helfte maak word uitgekanselleer in die tweede helfte. Vir hierdie integraal lewer die Trapesiumreël dus eintlik beter benaderings as die Simpsonreël (vergelyk met Tabel 3S).