Probleem 1:

(a)

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^\alpha \tag{1}$$
$$|e_n| \approx C|e_{n-1}|^\alpha \tag{2}$$

Deel (1) deur (2):

$$\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx \left(\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|}\right)^\alpha$$

Neem die log aan weerskante:

$$\log\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} \approx \alpha \log\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \approx \frac{\log|e_{n+1}|/|e_n|}{\log|e_n|/|e_{n-1}|}.$$

(b)

Vir Newton se metode, kies $n = 2$. Dan

$$|e_1| \approx 0.905 \times 10^{-2}, \quad |e_2| \approx 0.812 \times 10^{-4}, \quad |e_3| \approx 0.660 \times 10^{-8}.$$

Dus $\alpha \approx 2$, wat klop met die teorie.

Vir die secant metode, kies $n = 4$. Dan

$$|e_3| \approx 0.162 \times 10^{-2}, \quad |e_4| \approx 0.277 \times 10^{-4}, \quad |e_5| \approx 0.450 \times 10^{-7}.$$

Dus $\alpha \approx 1.58$, wat redelik klop met die teorie ($\alpha = 1.618\ldots$).

Probleem 2:

(a)
Newton se metode:

$$f(x) = x^2 - a, \quad f'(x) = 2x$$

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \\
&= x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\frac{a}{x_n} \\
x_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right). \qquad (3)
\end{aligned}
$$

(b)
Vir $a = 100$ het ons $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{100}{x_n}\right)$:

n	x_n	aantal korrekte syfers
0	$\underline{1}1.00000000000000$	1
1	$\underline{10.0}4545454545455$	3
2	$\underline{10.000}10283833813$	5
3	$\underline{10.00000000}052878$	10
4	$\underline{10.00000000000000}$	volle akkuraatheid

Dit lyk asof die aantal korrekte syfers wel min of meer verdubbel van stap tot stap soos wat mens sou verwag.

(c)
Trek $\sqrt{a}$ aan weerskante van (3) af:

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} \\
&= \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - 2\sqrt{a}x_n + a\right) \\
&= \frac{1}{2x_n}\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2
\end{aligned}
$$

Laat $e_n = x_n - \sqrt{a}$ (die absolute fout op stap n). Dan

$$
\begin{aligned}
e_{n+1} &= \frac{1}{2x_n}e_n^2 \\
\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} &= \frac{1}{2|x_n|} \\
\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} &= \frac{1}{2\sqrt{a}}.
\end{aligned}
$$

Dus is die orde van konvergensie $\alpha = 2$, wat dui op kwadratiese konvergensie, en die foutkonstante $C = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Probleem 3:

(a)

$$f(x) = x^2 - a, \quad f'(x) = 2x, \quad f''(x) = 2, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2 - a}, \quad \frac{f''(x)}{2f'(x)} = \frac{1}{2x}$$

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{f''(x)}{2f'(x)} &= \frac{2x}{x^2 - a} - \frac{1}{2x} \\ &= \frac{(2x)^2 - (x^2 - a)}{2x(x^2 - a)} \\ &= \frac{3x^2 + a}{2x(x^2 - a)} \end{aligned}$$

Halley se metode:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{2x_n(x_n^2 - a)}{3x_n^2 + a} \\ &= \frac{x_n^3 + 3ax_n}{3x_n^2 + a} \end{aligned} \tag{4}$$

(b)
Vir $a = 100$ het ons $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 300x_n}{3x_n^2 + 100}$:

n	x_n	aantal korrekte syfers
0	$\underline{1}1.00000000000000$	1
1	$\underline{10.00}215982721382$	4
2	$\underline{10.0000000000}2518$	12
3	$\underline{10.00000000000000}$	volle akkuraatheid

Die konvergensie is vinniger as Heron se metode. Dit lyk asof die aantal korrekte syfers verdriedubbel van stap tot stap.

(c)
Trek $\sqrt{a}$ aan weerskante van (4) af:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{x_n^3 + 3ax_n}{3x_n^2 + a} - \sqrt{a} \\ &= \frac{x_n^3 - 3\sqrt{a}x_n^2 + 3ax_n - a\sqrt{a}}{3x_n^2 + a} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_n - \sqrt{a})^3}{3x_n^2 + a}$$

Laat $e_n = x_n - \sqrt{a}$ (die absolute fout op stap n). Dan

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= \frac{e_n^3}{3x_n^2 + a} \\
\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} &= \frac{1}{3x_n^2 + a} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} &= \frac{1}{4a}.
\end{aligned}$$

Dus is die orde van konvergensie $\alpha = 3$, wat dui op kubiese konvergensie, en die foutkonstante $C = \frac{1}{4a}$.

(d)
Heron se metode benodig een $+$ en twee $/$ (of een $+$, een $\times$ en een $/$) per iterasie, d.w.s. drie bewerkings in totaal.

Halley se metode, as ons dit in die vorm

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a}$$

implementeer, benodig twee $\times$ en een $+$ vir die teller (ons kan $3a$ vooraf bereken en stoor), en twee $\times$ en een $+$ vir die noemer, plus een $/$ vir teller $\div$ noemer. Dit is 7 bewerkings in totaal per iterasie, wat met een verminder kan word as ons bereid is om x_n^2 te stoor en beide in die teller en noemer te gebruik.

Halley voer dus tweemaal die aantal bewerkings per stap uit in vergelyking met Heron. Ons moet dus twee stappe van Heron vergelyk met een stap van Halley. In twee stappe van Heron vervierdubbel die aantal korrekte syfers, en in een stap van Halley verdriedubbel dit. Heron blyk dus meer effektief te wees.