INSTRUKSIES:

(a) Huiswerke moet met die aanvang van die tutoriaalperiode op Vrydae ingehandig word. Geen elektroniese huiswerke word aanvaar nie en geen huiswerke sal laat ingeneem word nie. In die praktyk beteken dit dat jy moet mik om teen Donderdagaand klaar te wees om toe te laat vir moontlike probleme met drukkers, skerms wat vries, en so aan.

(b) Samewerking op hierdie huiswerke word beperk tot die uitruil van enkele idees en wenke. Die uitruil van data, grafieke, rekenaarprogramme of die besonderhede van wiskundige berekenings is nie toelaatbaar nie. Wat jy inhandig moet jou eie werk wees.

Probleem 1: In Huiswerk 10, Probleem 3, is die volgende integraal beskou

$$I = \int_1^3 \sqrt{1+x^3}\,dx.$$

VRAAG: Hoeveel intervalle is nodig om te verseker dat die absolute fout in die trapesiumreël benadering nie groter is as 10^{-4} nie? (In HW10 het ons gevind dat die foutformule op p. 123 in BF voorspel dat 95 intervalle gebruik moet word.)

(a) Herhaal die probleem, maar gebruik hierdie keer die Euler-Maclaurin foutafskatting

$$I - T_n \approx -\frac{h^2}{12}\Big(f'(b) - f'(a)\Big).$$

(b) Herhaal die probleem, maar gebruik hierdie keer die empiriese foutskatting. Dws, aanvaar dat

$$I - T_n \approx Ch^2,$$

bereken T_4 en T_8 met `trap.m` (op die Webblad), en verkry hieruit 'n skatting vir C.

(c) Eksperimenteer met `trap.m` om vas te stel hoeveel intervalle in werklikheid nodig is. Watter foutskatting was die naaste aan die kol? (Die werklike waarde van die integraal is $I = 6.229959387883646\ldots$.)

(d) Herhaal die probleem, maar gebruik die Simpsonreël en die empiriese benadering geskets in deel (b). Verklein in hierdie geval die fout-toleransie na 10^{-10}. Eksperimenteer met `simpson.m` (op die Webblad) om te toets hoeveel intervalle in werklikheid nodig is.

Probleem 2: (omblaai)

Probleem 2: In Probleem 12, p. 128, BF, word gevra dat die omtrek van die ellips

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

bereken word. Doen dit soos volg:

(a) Toon aan dat die ellips geparametriseer kan word deur

$$x = 3\cos t, \quad y = 2\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

(b) Gebruik die formule vir booglengte van 'n parametriese kromme,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}\, dt,$$

asook simmetrie en trigonometriese identiteite, om aan te toon dat die omtrek van die ellips gegee word deur

$$s = 8\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \tfrac{5}{4}\sin^2 t}\, dt.$$

(Moenie probeer om met die hand te integreer nie—dit kan nie gedoen word nie.)

(c) Stip die integrand van deel (b) mbv MATLAB. Watter eienskap het die funksie wat dit geskik maak vir die trapesiumreël?

(d) Gebruik `trap.m` om die integraal te benader met verskillende aantal intervalle. Vergelyk met die werklike omtrek $s = 15.86543958929059\ldots$. Bevestig dat die trapesiumreël inderdaad vinniger as normaalweg konvergeer.

Probleem 3: Beskou weer die integraal van Probleem 1, nl

$$I = \int_1^3 \sqrt{1 + x^3}\, dx \quad (= 6.229959387883646\ldots)$$

(a) Benader die integraal met die twee- en driepunt Gauss reëls (sakrekenaar). Bereken ook die absolute fout in elke benadering.

(b) Laai die funksie `gauss.m` van die Webblad af. Gebruik dit om u antwoorde van deel (a) te kontroleer.

(c) Gebruik nou `gauss.m` om n-punt benaderings tot die integraal te bereken vir $n = 4, 5, \ldots, 10$. Lys die benaderings sowel as die absolute foute in 'n tabel.

(d) Gebruik die inligting van Probleme 1(d) en 3(c) om die effektiwiteit van die Gauss- en Simpsonreëls te vergelyk. (Meet effektiwiteit as die aantal funksie evaluerings wat 'n integrasie-reël moet uitvoer om 'n gegewe akkuraatheid te bereik.)