Inleiding: Ons definieer hier die orde van konvergensie van 'n numeriese metode vir die oplossing van $f(x) = 0$, met wortel $x = p$. Laat e_n die absolute fout op stap n voorstel, d.w.s., $e_n = x_n - p$. Gestel

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^\alpha} = C, \tag{1}$$

met $C \neq 0$, $C \neq \infty$. Dan sê ons die *orde van konvergensie* is α, en die *foutkonstante* is C. Ons klassifiseer soos volg:

$\alpha = 1$	lineêre konvergensie
$1 < \alpha < 2$	super-lineêre konvergensie
$\alpha = 2$	kwadratiese konvergensie
$2 < \alpha < 3$	super-kwadratiese konvergensie
$\alpha = 3$	kubiese konvergensie, ens.

Probleem 1 (*Die doel van hierdie oefening is om die orde van konvergensie van die Newton en secant metodes eksperimenteel te bepaal. In die klas het ons dit teoreties gedoen, en gevind dat $\alpha = 2$ en $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618\ldots$ vir Newton en secant respektiewelik.*)

(a) Gestel ons pas 'n numeriese metode toe op $f(x) = 0$, waarvan die eksakte wortel p bekend is. Dan kan die eksakte foute, e_n, op elke iterasie-stap n bereken word. Uit die definisie (1) hierbo het ons

$$|e_{n+1}| \approx C|e_n|^\alpha, \qquad |e_n| \approx C|e_{n-1}|^\alpha,$$

met C en α dus die enigste onbekendes. Elimineer vir C, en bepaal sodoende 'n formule vir α in terme van e_{n-1}, e_n, en e_{n+1}.

(b) Beskou die vergelyking

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0,$$

met eksakte wortel $p = 1$. As hierdie vergelyking met die Newton en secant metodes opgelos word, word die benaderings in die tabel hieronder verkry. Gebruik nou jou formule van deel (a) om benaderings tot die orde van konvergensie, α, te bereken.

n	Newton	Secant
0	1.10000000000000	1.20000000000000
1	1.00905349794239	1.10000000000000
2	1.00008122713623	1.01722846441948
3	1.00000000659731	1.00162372469600
4	1.00000000000000	1.00002771102126
5	1.00000000000000	1.00000004495792

Probleem 2 Die vierkantswortel van 'n getal $a > 0$ kan bereken word deur die volgende vergelyking op te los met byvoorbeeld Newton se metode

$$x^2 - a = 0.$$

(a) Toon aan dat hierdie idee aanleiding gee tot die iterasie

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

wat ook as Heron se metode bekend staan.

(b) Implementeer Heron se metode om $\sqrt{100}$ te bereken, met $x_0 = 11$. Skryf soveel syfers neer as wat jou sakrekenaar jou toelaat om te sien. Onderstreep alle korrekte syfers (na afronding). Verdubbel die aantal korrekte syfers soos wat mens sou verwag?

(c) Toon aan, deur die definisie (1) hierbo te gebruik, dat Heron se metode kwadraties konvergeer. Bepaal ook die foutkonstante.

Probleem 3 (*In hierdie probleem leer ons dat Newton se metode soms stadiger as normaalweg konvergeer.*) Beskou vir hierdie doel die vergelyking

$$\cos^2(x-1) = 2x - x^2,$$

wat die eksakte wortel $x = 1$ het (bevestig!).

(a) Los hierdie vergelyking op met Newton se metode, met aanvanklike skatting $x_0 = 1.1$. Gebruik toleransies $\epsilon = 10^{-5}$ en $\epsilon = 10^{-10}$ en bepaal eksperimenteel hoeveel stappe die metode neem om te konvergeer.

(b) Bereken die multiplisiteit van die wortel $x = 1$ en verduidelik waarom die konvergensie van Newton se metode nie so vinnig as normaalweg geskied nie.

Probleem 4 Halley se metode word veral gebruik om veelvuldige wortels van $f(x) = 0$ te bereken. Dit word gegee deur

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)f(x_n)}{[f'(x_n)f'(x_n) - [f''(x_n)f(x_n)]}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(a) Pas Halley se metode toe op die vergelyking van Vraag 3.

(b) Bereken die orde van konvergensie eksperimenteel.

(c) Herlei Halley se metode.