# Aufgabe 1

a) gegeben:

| 33 | 16 | 3 | 8 | 18 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | c | d | e |
| b | d | b | e | e | c |
| c | c | d | b | c | b |
| d | e | a | d | b | d |
| e | a | e | a | a | a |

- **Mehrheitswahl**: Jeder wählt seine erste Priorität, wodurch sich folgendes Abstimmungsergebnis ergibt (A gewinnt):

| a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|
| 33 | 16 | 11 (3+8) | 18 | 22 |

- **Mehrheitswahl mit Elimination:** Jeder wählt unter den wählbaren Alternativen seine oberste Priorität. Nach jeder Runde scheidet die schlechteste Alternative aus (E gewinnt):

| a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|
| 33 | 16 | 11 (3+8) | 18 | 22 |

| a | b | d | e |
|---|---|---|---|
| 33 | 19 (16+3) | 18 | 30 (22+8) |

| a | b | e |
|---|---|---|
| 33 | 19 (16+3) | 48 (22+8+18) |

| a | e |
|---|---|
| 36 (33+3) | 64 (22+8+18+16) |

- **Borda:** Jeder Wähler vergibt 4 Punkte an seine erste, 3 Punkte an seine zweite, 2 Punkte an seine dritte und 1 Punkt an seine vierte Priorität (B gewinnt):

| | | |
|---|---|---|
| a | 33*4 + 16*0 + 3*1 + 8*0 + 18*0 + 22*0 | **135** |
| b | 33*3 + 16*4 + 3*3 + 8*2 + 18*1 + 22*2 | **250** |
| c | 33*2 + 16*2 + 3*4 + 8*4 + 18*2 + 22*3 | **244** |
| d | 33*1 + 16*3 + 3*2 + 8*1 + 18*4 + 22*1 | **189** |
| e | 33*0 + 16*1 + 3*0 + 8*3 + 18*3 + 22*4 | **182** |

- **paarweise Elimination mit gewählter Reihenfolge**: Wir lassen die Alternativen lexikografisch gegeneinander antreten (C gewinnt):

| a | b |
|---|---|
| 33 | 67 |

| b | c |
|---|---|
| 49 | 51 |

| c | d |
|---|---|
| 66 | 34 |

| c | e |
|---|---|
| 60 | 40 |

- **Condorcet-Gewinner:** a, b, d und e wurden bereits geschlagen, also kommt nur noch c in Frage. C hat gegen b, d, und e bereits gewonnen und gewinnt gegen a ebenfalls mit 67:33. Folglich ist c ein Condorcet-Gewinner.

b) zu zeigen: Die Nicht-Auferlegung ist eine schwächere Forderung als die Pareto-Effizienz

Beweis: Wir zeigen zunächst „PE ⇒ NA".
Sei W Pareto-effizient. Dann gilt für beliebige $o_1, o_2 \in O$: $o_1 \succ_i o_2 \Rightarrow o_1 \succ_W o_2$ (*).
Sei $\succ$ eine beliebige Präferenzrelation. Setze $\succ_i = \succ$ für alle i. Gilt für beliebige $o_1, o_2$: $o_1 \succ o_2$, so gilt $o_1 \succ_i o_2$ für alle i und nach (*) $o_1 \succ_W o_2$. Damit haben wir ein Präferenzprofil $[\succ] = [\succ_i]_i$ mit $\succ_{\{W([\succ])\}} \equiv \succ$, so dass W nicht-auferlegend ist.

Bleibt noch „NA $\not\Rightarrow$ PE" zu zeigen.
Wähle W als diejenige Wohlfahrtsfunktion, die einfach die Präferenz eines bestimmten Spielers umdreht. W ist nicht-auferlegend, da es zu jeder Präferenzrelation $\succ$ ein Präferenzprofil gibt, für welches $\succ = \succ_{\{W([\succ])\}}$ erreicht wird – nämlich ein Profil, in dem der Spieler, auf den sich W bezieht, die genau umgekehrte Präferenz zu $\succ$ besitzt. Ist jedoch $o_1 \succ_i o_2$ für alle i – insbesondere auch für Spieler i, auf den sich W bezieht –, so gilt nach Definition von W $o_2 \succ_i o_1$ – ein Widerspruch zur Pareto-Effizienz. Dementsprechend folgt die Aussage. □

c) zu zeigen: Borda ist Pareto-effizient
Beweis: Ist $o_1 \succ_i o_2$ für alle i, so bekommt $o_1$ bei jedem i mehr Punkte als $o_2$, so dass $o_1$ insgesamt auch mehr Punkte haben muss. Folglich gilt dann auch $o_1 \succ_{\{W([\succ])\}} o_2$, also ist Borda Pareto-effizient. □

zu zeigen: Borda ist nicht-diktatorisch
Beweis: Wäre Borda diktatorisch, müsste es einen Agenten geben, dessen Präferenzen in allen möglichen Präferenzprofilen die soziale Ordnung bestimmen. Präferiere der angebliche Diktator $o_1$ gegenüber $o_2$. Wir betrachten einen zweiten Wähler und setzen seine Präferenzen so, dass $o_2$ ganz oben und $o_1$ ganz unten in seiner Folge stehen. Dies hat bereits zur Folge, dass der Diktator seine Präferenzen nicht mehr strikt durchsetzen kann. Gibt es noch einen dritten Wähler, setzen wir diesen identisch zum zweiten und der Diktator kann seine Präferenzen gar nicht mehr durchsetzen. Gibt es keinen dritten Wähler, ist der Diktator von der „Stech"-Bedingung abhängig – darf er aber nicht. Folglich ist Borda nicht-diktatorisch. □

zu zeigen: Borda ist nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen
Beweis: Betrachte den Fall dreier Alternativen A, B und C, in dem 3 Personen $A \succ B \succ C$, 2 Personen $C \succ A \succ B$ und 2 Personen $B \succ C \succ A$ als ihre Präferenz haben. Nach Borda gewinnt A mit 8 Punkten gegenüber C mit 6 Punkten (B hätte 7 Punkte). Lassen wir nun die Alternative B weg, sind 3 Personen für $A \succ C$ und 4 Personen für $C \succ A$. Somit gewinnt in diesem Fall C mit 4 Punkten gegenüber A mit 3 Punkten, so dass Borda nicht unabhängig von irrelevanten Alternativen ist. □