Aufgabe 1

gegeben: drei Rechner (Agenten N = {A,B,C}) mit wahrheitsgemäßen Angeboten von 5 min (A), 7 min (B) und 12 min (C) à –3 Euro pro Minute, Vickrey-Clarke-Groves-Mechanismus

a) **gesucht:** Auswahlmenge X und wahre Bewertungen v_i mit i = A, B, C

Lösung: Es gibt nur einen Job x, auf den geboten werden kann, also besteht X einfach aus den Zuordnungen dieses Jobs auf jeweils einen der drei Agenten:

$$\boldsymbol{X = \{\, x_1 \colon x \mapsto A,\ \ x_2 \colon x \mapsto B,\ \ x_3 \colon x \mapsto C \,\}}$$

Die wahren Bewertungen entsprechen den tatsächlichen Nutzen. Da die Bearbeitung eines Auftrags Kosten verursacht, sind diese Nutzen alle negativ:

$$\boldsymbol{v_A = -15\text{ €},\qquad v_B = -21\text{ €},\qquad v_C = -36\text{ €}}$$

b) **gesucht:** Anwendung des Vickrey-Clarke-Groves für die dominante Strategie $\hat{v}_i = v_i$ aller Agenten, getroffene Entscheidungen und Bezahlungen für die Agenten

Lösung:

$$\chi(\hat{v}) = \operatorname*{argmax}_{x \in X} \sum_i \hat{v}_i(x) \ = \ \operatorname*{argmax}_{x \in X} \sum_i v_i(x) \ =$$

$$argmax\,\{-15+0+0, 0-21+0, 0+0-36\} = argmax\,\{-15\} = x_1$$

Damit erhält A laut x_1 den Zuschlag und darf den Auftrag x bearbeiten. Für die zu bezahlenden Preise ergibt sich:

$$\begin{aligned}
p_A(\hat{v}) = \sum_{j \neq A} \hat{v}_j\big(\chi(\hat{v}_{-A})\big) - \sum_{j \neq A} \hat{v}_j\big(\chi(\hat{v})\big)& \\
= \hat{v}_B\left(\operatorname*{argmax}_{x=x_2,x_3} \sum_{i=B,C} \hat{v}_i(x)\right) + \hat{v}_C\left(\operatorname*{argmax}_{x=x_2,x_3} \sum_{i=B,C} \hat{v}_i(x)\right)& \\
- \hat{v}_B\left(\operatorname*{argmax}_{x \in X} \sum_{i \in N} \hat{v}_i(x)\right) - \hat{v}_C\left(\operatorname*{argmax}_{x \in X} \sum_{i \in N} \hat{v}_i(x)\right)& \\
= \ \hat{v}_B(argmax\{-21+0{,}0-36\}) + \hat{v}_C(argmax\{-21+0{,}0-36\})& \\
- \ \hat{v}_B(argmax\{-15+0+0, 0-21+0{,}0+0-36\})& \\
+ \hat{v}_C(argmax\{-15+0+0, 0-21+0, 0+0-36\})& \\
= \ \hat{v}_B(x_2) + \hat{v}_C(x_2) - \ \hat{v}_B(x_1) + \hat{v}_C(x_1) = \ -21+0-0-0 =& \\
= \underline{\underline{\boldsymbol{-21}}}&
\end{aligned}$$

$$p_B(\hat{v}) = \sum_{j\neq B} \hat{v}_j\big(\chi(\hat{v}_{-B})\big) - \sum_{j\neq B} \hat{v}_j\big(\chi(\hat{v})\big)$$

$$= \hat{v}_A\left(\underset{x=x_1,x_3}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=A,C} \hat{v}_i(x)\right) + \hat{v}_C\left(\underset{x=x_1,x_3}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=A,C} \hat{v}_i(x)\right)$$

$$- \hat{v}_A\left(\underset{x\in X}{\operatorname{argmax}} \sum_{i\in N} \hat{v}_i(x)\right) - \hat{v}_C\left(\underset{x\in X}{\operatorname{argmax}} \sum_{i\in N} \hat{v}_i(x)\right)$$

$$= \hat{v}_A(argmax\{-15+0,0-36\}) + \hat{v}_C(argmax\{-15+0,0-36\})$$

$$- \hat{v}_A(argmax\{-15+0+0,0-21+0,0+0-36\})$$

$$+ \hat{v}_C(argmax\{-15+0+0,0-21+0,0+0-36\})$$

$$= \hat{v}_A(x_1) + \hat{v}_C(x_1) - \hat{v}_A(x_1) + \hat{v}_C(x_1) = -15+0-(-15)-0 =$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

$$p_C(\hat{v}) = \sum_{j\neq C} \hat{v}_j\big(\chi(\hat{v}_{-C})\big) - \sum_{j\neq C} \hat{v}_j\big(\chi(\hat{v})\big)$$

$$= \hat{v}_A\left(\underset{x=x_1,x_2}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=A,B} \hat{v}_i(x)\right) + \hat{v}_B\left(\underset{x=x_1,x_2}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=A,B} \hat{v}_i(x)\right)$$

$$- \hat{v}_A\left(\underset{x\in X}{\operatorname{argmax}} \sum_{i\in N} \hat{v}_i(x)\right) - \hat{v}_B\left(\underset{x\in X}{\operatorname{argmax}} \sum_{i\in N} \hat{v}_i(x)\right)$$

$$= \hat{v}_A(argmax\{-15+0,0-21\}) + \hat{v}_B(argmax\{-15+0,0-21\})$$

$$- \hat{v}_A(argmax\{-15+0+0,0-21+0,0+0-36\})$$

$$+ \hat{v}_B(argmax\{-15+0+0,0-21+0,0+0-36\})$$

$$= \hat{v}_A(x_1) + \hat{v}_B(x_1) - \hat{v}_A(x_1) + \hat{v}_B(x_1) = -15+0-(-15)-0 =$$

$$= \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Damit muss Rechner A –21 Euro bezahlen, erhält also für die Durchführung des Auftrags 21 Euro – und damit genau das zweithöchste Gebot. B und C haben nichts zu tun, erhalten dementsprechend auch nichts.

c) **<u>Frage:</u>** Was passiert mit den Auszahlungen, wenn ausgewählte Agenten (hier also A) ihre Bewertung verändern?

<u>Antwort:</u> Korrigiert A die Transportzeit nach oben (entspricht höherer Entschädigung und kleinerem v_A), so gilt

- für **-15 € > v_A > -21 €:** Die Bezahlungen p_i bleiben unverändert, der Nutzen $u_A = v_A(x_1) - p_A$ sinkt jedoch auf Grund der höheren Transportzeit
- für **-21€ > v_A:** In diesem Fall ginge der Zuschlag an B, so dass A Nutzen und Bezahlung 0 erhält und B entsprechend dem Angebot von A bezahlt wird (der Nutzen von B wäre dann die Differez zwischen den Angeboten von A und B)

Korrigiert A die Transportzeit nach unten (entspricht niedrigerer Entschädigung und höherem v_A), also **v_A > -15€**, so bleiben die Bezahlungen p_i unverändert, der Nutzen $u_A = v_A(x_1) - p_A$ steigt auf Grund der niedrigeren Transportzeit.