Selbstorganisierende adaptive Systeme | Übungsblatt 8 | **Gruppe 02**

Aufgabe 1

a) Der Sachverhalt kann mit einem Koalitionsspiel V = (N, v) mit N = {A, B, C, D} und folgender Abbildung v modelliert werden (der Einfachheit halber sei z.B. AB := {A, B}):

X	*Ø*	*A*	*B*	*C*	*D*	*AB*	*AC*	*AD*	*BC*	*BD*	*CD*	*ABC*	*ABD*	*ACD*	*BCD*	*ABCD*
v(x) *in Mio.*	0	0	0	0	0	100	100	100	0	0	0	100	100	100	100	100

Als Shapley-Werte ergeben sich (M steht jeweils kurz für Million/Mega):

- $\Phi_A(v)$ = 1/24 * (1*2*(100M-0) + 1*2*(100M-0) + 1*2*(100M-0) + 2*1*(100M-0) + 2*1*(100M-0) + 2*1*(100M-0) + 6*1*(100M-100M) + 1*6*(0-0)) = 1200 M/24 = **<u>50 Mio.</u>**
- $\Phi_B(v)$ = 1/24 * (1*2*(100M-0) + 1*2*(0-0) + 1*2*(0-0) + 2*1*(100M-100M) + 2*1*(100M-100M) + 2*1*(100M-0) + 6*1*(0-0) + 1*6*(100M-100M)) = 400 M/24 = **<u>16,67 Mio.</u>**
- $\Phi_C(v)$ = 1/24 * (1*2*(100M-0) + 1*2*(0-0) + 1*2*(0-0) + 2*1*(100M-100M) + 2*1*(100M-100M) + 2*1*(100M-0) + 6*1*(0-0) + 1*6*(100M-100M)) = 400 M/24 = **<u>16,67 Mio.</u>**
- $\Phi_D(v)$ = 1/24 * (1*2*(100M-0) + 1*2*(0-0) + 1*2*(0-0) + 2*1*(100M-100M) + 2*1*(100M-100M) + 2*1*(100M-0) + 6*1*(0-0) + 1*6*(100M-100M)) = 400 M/24 = **<u>16,67 Mio.</u>**

Φ ist nicht im Kern, da die Definition desselben für alle x mit v(x) = 100 nicht erfüllt ist (die Summe der Shapley-Werte der beteiligten Agenten ist dann stets unter 100 Mio. – ausgenommen der Koalition ABCD). Damit ist der Shapley-Wert **<u>nicht stabil</u>**.

Die Teilkoalitionen AB, AC, AD, ABC, ABD, ACD und BCD kommen ohne andere Beteiligte aus, so dass die beteiligten Agenten einen besseren Payoff erzielen können als in der großen Koalition.

b) Ohne das Mitteln über alle Permutationen würden wir folgende Werte erhalten:

- $\Phi'_A(v)$ = 1/8 * (100M-0 + 100M-0 + 100M-0 + 100M-0 + 100M-0 + 100M-0 + 100M-100M + 0-0) = 600 M/8 = **<u>75 Mio.</u>**
- $\Phi'_B(v)$ = 1/8 * (100M-0 + 0-0 + 0-0 + 100M-100M + 100M-100M + 100M-0 + 100M-100M + 0-0) = 200 M/8 = **<u>25 Mio.</u>**
- $\Phi'_C(v)$ = 1/8 * (100M-0 + 0-0 + 0-0 + 100M-100M + 100M-100M + 100M-0 + 100M-100M + 0-0) = 200 M/8 = **<u>25 Mio.</u>**
- $\Phi'_D(v)$ = 1/8 * (100M-0 + 0-0 + 0-0 + 100M-100M + 100M-100M + 100M-0 + 100M-100M + 0-0) = 200 M/8 = **<u>25 Mio.</u>**

Damit erhalten wir **<u>$\Phi'_i(v) \neq \Phi_i(v)$</u>** und insbesondere **<u>$\Phi'_i(v) = 1,5 * \Phi_i(v)$.</u>** Dies liegt daran, dass die vorher mit Faktor 6 stark gewichteten letzten beiden Summanden, die den Zugewinn einer Viererkoalition gegenüber einer Dreierkoalition beschreiben, stets Null waren. Da diese beiden „Null-Summanden“ jetzt weniger gewichtet werden (und alle anderen untereinander gleichgewichtet sind), steigt der Funktionswert insgesamt an, so dass die Summe der vier Werte insgesamt über die Auszahlung der Viererkoalition von 100 Millionen steigt.

c) Wir erhalten nun ein Koalitionsspiel (N, v‘) mit folgender Funktion v‘:

X	*Ø*	*A*	*B*	*C*	*D*	*AB*	*AC*	*AD*	*BC*	*BD*	*CD*	*ABC*	*ABD*	*ACD*	*BCD*	*ABCD*
v‘(x) *in Mio.*	0	0	0	0	0	100	100	100	100	0	100	100	100	100	100	100

Für AB und CD ist AB ∩ CD = Ø und v'(ABCD) = 100 < 200 = 100 + 100 = v'(AB) + v'(CD). Dies ist ein Widerspruch zur Definition der Superadditivität, so dass das Spiel (N, v') **nicht superadditiv** ist.

d) Die Minimalkoalitionen sind hier AB, AC, AD, BC und CD. Da der Kern keine Auszahlungen enthalten soll, folgt aus den ersten drei Minimalkoalitionen:

- $x_A(v) + x_B(v) \geq 100$ (I)
- $x_A(v) + x_C(v) \geq 100$ (II)
- $x_A(v) + x_D(v) \geq 100$ (III)

Da x ein Auszahlungsvektor ist, muss zusätzlich gelten:

- $x_A(v) + x_B(v) + x_C(v) + x_D(v) = 100$ (IV)

Damit erhalten wir:

- $100 \leq^{(I)} x_A(v) + x_B(v) =^{(IV)} 100 - x_C(v) - x_D(v) \rightarrow x_C(v) + x_D(v) \leq 0$ (V)
- $100 \leq^{(II)} x_A(v) + x_C(v) =^{(IV)} 100 - x_B(v) - x_D(v) \rightarrow x_B(v) + x_D(v) \leq 0$ (VI)
- $100 \leq^{(III)} x_A(v) + x_D(v) =^{(IV)} 100 - x_B(v) - x_C(v) \rightarrow x_B(v) + x_C(v) \leq 0$ (VII)

Es ist $x_A(v) < 100$, da A sonst Selbst Minimalkoalition wäre (aber v(A) = 0). Da entweder $x_B(v)$, $x_C(v)$ oder $x_D(v)$ nicht positiv sein kann (wären alle positiv, wäre keine der Ungleichungen V, VI und VII erfüllt), kann mindestens eine der Gleichungen I, II und III nicht erfüllt werden.

Somit ist keine Auszahlungsfunktion im Kern möglich.

(q.e.d)