Aufgabe 2

a) Sei n die Anzahl der am Projekt beteiligten Studenten. Der Sachverhalt kann dann mit einem Koalitionsspiel V = (N, v) mit N = {1,2, …, n} und der charakteristischen Funktion

$$v: 2^N \to \mathbb{N}, S \subseteq N \mapsto \begin{cases} 0, & falls\ |S| < 1\ oder\ |S| > 3 \\ 4, & falls\ |S| = 2 \\ 6, & falls\ |S| = 3 \end{cases}$$

Ein möglicher Auszahlungsvektor im Kern ist x = (2, 2, …, 2)^T ∈ $\mathbb{N}^N$. Für alle Teilmengen S von N entspricht die Summe der x_i mit i aus S dann nämlich 2*|S|. Da v(S) stets kleiner oder gleich als 2*|S| ist, ist die Kernbedingung erfüllt, also ist x im Kern enthalten.

b) **<u>gesucht:</u>** Shapley-Wert des Beispiels
<u>Lösung:</u>

$$\Phi_i(V) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N\setminus\{i\}} |S|!\,(|N|-|S|-1)!\,[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

$$= \frac{1}{|N|!}\,[\sum_{\substack{S \subseteq N\setminus\{i\} \\ |S|=0}} 1 \cdot (|N|-1)!\,[0-0] + \sum_{\substack{S \subseteq N\setminus\{i\} \\ |S|=1}} 1 \cdot (|N|-2)!\,[4-0]$$

$$+ \sum_{\substack{S \subseteq N\setminus\{i\} \\ |S|=2}} 2 \cdot (|N|-3)!\,[6-4]$$

$$+ \sum_{\substack{S \subseteq N\setminus\{i\} \\ |S|=3}} 6 \cdot (|N|-4)!\,[0-6]$$

$$+ \sum_{\substack{S \subseteq N\setminus\{i\} \\ |S|>3}} |S|! \cdot (|N|-|S|-1)!\,[0-0]\,]$$

$$= \frac{1}{|N|!}[\,4 \cdot (|N|-1)(|N|-2)! + 4 \cdot \binom{|N|-1}{2}(|N|-3)! - 36$$

$$\cdot \binom{|N|-1}{3}(|N|-4)!\,]$$

$$= \frac{1}{|N|!}[\,4 \cdot (|N|-1)! + \frac{4}{2} \cdot (|N|-1)! - \frac{36}{6} \cdot (|N|-1)!] =$$

= $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$