■ = föreläsning
■ = Kommentar

Tss-föreläsning 15/10

DFT

index k
"Används för att stega igenom frekvenzdomänen"

Index n = insignal
"kan vara samplade värden från en kontinuelig signal eller diskret i sin natur"

Mer om DFT

Samband mellan k, ω och Ω

Börja med en kontinueligsignal
$x(t) = \sin(\omega t)$
Signalen samplas (sampel-intervall T)
Vi får en diskret signal.

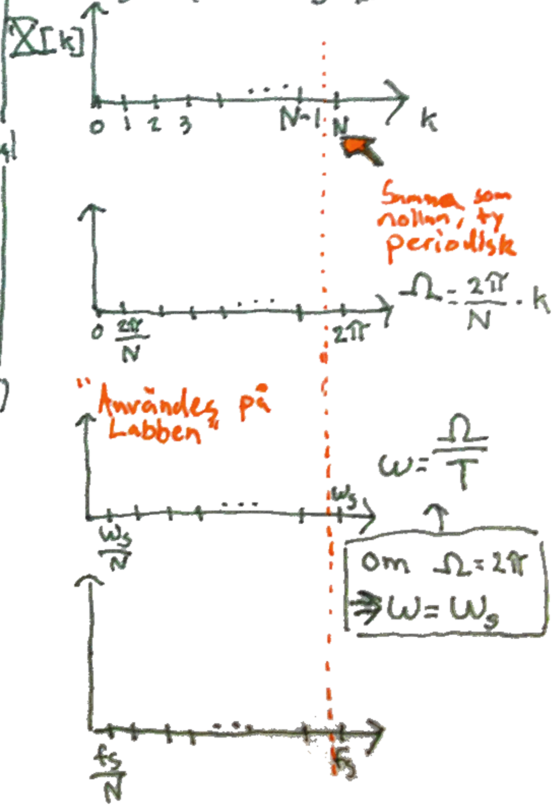
$$x[n] = \sin(\omega n T) = \sin(n\omega T) = \underbrace{\{\omega T = \Omega\}}_{} = \sin(n\Omega)$$

$$\boxed{\omega T = \Omega}$$

Enheter:

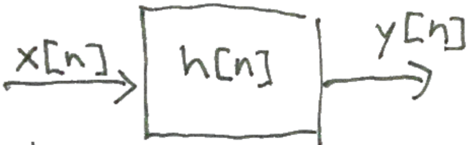
ω : [rad/s]
T : [sek]
Ω : [rad] eller [rad/sampel]

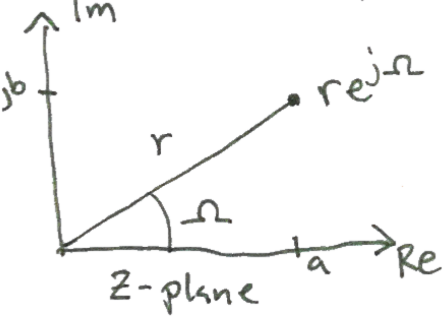
DFT's "frekvensaxel"



Diskreta signaler och system. (z-transform)

Låt $x[n] = z^n$ vara insignal till ett diskret LTI-system med impulssvar $h[n]$





Faltningssumma ger

$$y[n] = h[n] * x[n] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k] =$$

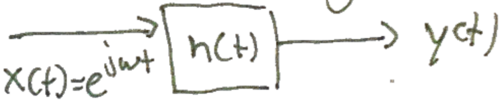
$$\sum_{-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{n-k} =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{n} \cdot z^{-k} =$$

$$= z^{n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot z^{-k}}_{H(z) = \mathcal{Z}\{h[n]\}}$$

$H(z)$ är här z-transformen av den diskreta signalen $h[n]$

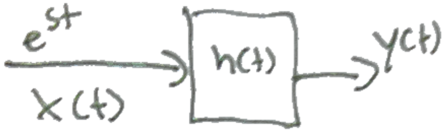
Jämför kontinuerligt fall



Faltningsintegralen gav

$$y(t) = e^{j\omega t} \cdot \underbrace{H(j\omega)}_{F\{h(t)\}}$$

Vidare



Faltningsintegralen ger

$$y(t) = e^{st} \cdot \underbrace{H(s)}_{\mathcal{L}\{h(t)\}}$$

Laplacetransform

<u>Defenition:</u> Z-transformen av den diskreta signalen (talföljden) $x[n]$ är

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

Dubbelsidig z-transform

Om undre summationsindex $n=0$ har vi en <u>enkelsidig</u> z-transform

z är en komplex variabel

$z = a + jb = re^{j\Omega}$ (se tidigare sida för z-planet)

$|z| = r$

$\arg\{z\} = \Omega$

$$z^n = (re^{j\Omega})^n = r^n e^{j\Omega n} =$$
$$= r^n(\cos(\Omega n) + j\sin(\Omega n))$$

Antag $x[n]$ en kausal signal

$$X(z) = X(re^{j\Omega}) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x[n]r^{-n})e^{-j\Omega n}$$

För att summan skall konvergera (z-transf. existera) måste

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n]r^{-n}e^{-j\Omega n}| < \infty$$

som kan ledas till

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n] \cdot r^{-n}| < \infty$$

De värden på z som gör att $X(z)$ konvigerar kallas konvergens region (ROC)

Notera endast beloppet. $|Z| = r$ spelar roll för konvergens.

Om $X(z)$ konvergerar för $r = r_0$ så konvergerar det även för $r > r_0$

ROC: område utanför en cirkel med centrum i origo.

Låt $r = 1$, då blir $z = e^{j\Omega}$
$r = 1$ motsvarar en cirkel med radien 1 (alla z-värden) på enhetscirkeln.

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(e^{j\Omega})$$ Detta är DTFT för en diskret signal, $x[n]$

DTFT motsvarar z-transf. utvärderad på enhetscirkeln i z-planet.

Jämför: kontinuerligt fall, koppling mellan Laplacetf. och fouriertransf.

Fouriertransf. $X(j\omega)$, motsvarar Laplacetransf. utvärderad på Im-axeln i s-planet (vi sätter ju $s = j\omega$).