MATRIZES

Introdução

Muitas vezes, nas diversas Ciências, as informações são organizadas em linhas e colunas, formando agrupamentos retangulares denominados “matrizes”. Com frequência, essas matrizes aparecem como tabelas de dados numéricos que surgem em observações físicas, mas também ocorrem em vários contextos matemáticos. Por exemplo, toda a informação necessária para resolver um sistema de equações tal como: $\begin{cases} 5x + y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ está encorpada na matriz $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ e que a solução do sistema pode ser obtido efetuando operações apropriadas nessa matriz. Isso é particularmente importante no desenvolvimento de programas de computador para resolver sistemas de equações lineares, porque os computadores são muito bons para manipular tabelas de informações numéricas. Contudo, as matrizes não são simplesmente uma ferramenta de notação para resolver sistemas de equações; elas também podem ser vistas como objetos matemáticos de vida própria, existindo uma teoria rica e importante associada a elas, que tem uma grande variedade de aplicações práticas. A seguir nosso estudo de matrizes.

Matriz: Chamamos de matriz a uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

Exemplos:

(1) Considere a tabela abaixo:

	Altura (metros)	Peso (quilos)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Ao abstrairmos os significados das linhas e colunas, obtemos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

(2) Os elementos de uma matriz podem ser números, funções, etc., como nas matrizes abaixo:

$$\begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ \sqrt{x} & 2 \\ x+1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 5 & senx & -2 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ e^3 \\ 3x \end{bmatrix}$$

Definição de Matriz: Chama-se ***matriz de ordem m por n*** a um quadro de m x n elementos (números, polinômios, funções, etc), dispostos em m linhas e n colunas.

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{mxn}$$

onde a_{ij} é o elemento característico da matriz, com *i* representando a linha e *j,* a coluna.

Notação: Matrizes podem ser denotadas por:

$M = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$ ou $M = (a_{ij})_{m\,x\,n}$ ou $M = \|a_{ij}\|_{m\,x\,n}$.

Definições básicas sobre matrizes

- **Ordem:** Se a matriz A tem m linhas e n colunas, dizemos que a ordem da matriz é m x n. Assim, se uma matriz A tiver 3 linhas e 4 colunas, escreve-se simplesmente $A_{(3,4)}$ e diz-se matriz de ordem 3 por 4.
- **Posição de um elemento:** Na matriz a posição de cada elemento a_{ij} = a(i,j) é indicada pelo par ordenado (i,j).
- **Diagonal Principal:** A *diagonal principal* de uma matriz quadrada de ordem n, é indicada pelos elementos da forma a(i,j) onde i = j. Assim, a *diagonal principal* é formada pelos elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}.
- **Traço da matriz:** denomina-se traço da matriz $A = [a_{ij}]_{nxn}$, a soma $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$ dos elementos da diagonal principal de A, o qual indica-se por tr(A), ou seja, tr(A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$$

- **Diagonal Secundária:** Numa matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n, os elementos a_{ij}, em que i + j = n + 1, constituem a *diagonal secundária*. Assim, a diagonal secundária é formada pelos elementos $a_{1\ n}$, $a_{2\ n-1}$, $a_{3\ n-2}$, ..., $a_{n\ 1}$.

Tipos Especiais de Matrizes

Seja A_{mxn} uma matriz com *m* linhas e *n* colunas. Alguns tipos importantes de matrizes são os seguintes:

Matriz Quadrada: é aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas (m = n). A ordem da matriz quadrada é n x n, ou simplesmente n.

Matriz Retangular: é aquela na qual m $\neq$ n. A ordem de uma matriz retangular é dada por m x n.

Matriz-Coluna: A matriz de ordem n por 1 (n x 1) é uma *matriz-coluna.*

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

OBS: A matriz-coluna de ordem n por 1 pode representar as componentes (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) de um vetor V do espaço vetorial E de dimensão n. Por esse motivo essa matriz é denominada *vetor-coluna.*

Matriz-Linha: A matriz de ordem 1 por n (1 x n) é uma *matriz-linha*.

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \ldots \quad a_n]$$

OBS: A matriz-linha é denominada *vetor-linha.*

Matriz Nula ou Matriz Zero: é aquela que possui todos os elementos iguais a zero, ou seja, $a_{ij} = 0, \ \forall i, j$.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal: é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0, \ \forall \ i \neq j.$, ou seja, matriz diagonal é a que tem todos os elementos nulos fora da diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Matriz Escalar: A matriz diagonal que tem os elementos a_{ij} iguais entre si para i = j é uma *matriz escalar*.

$$E = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}, a \in \Re$$

Exemplo: A = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Matriz Identidade ou Matriz Unidade: é uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal são iguais a 1, ou seja, $a_{ij} = 1, \forall i = j$ e $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. Ou seja, a matriz identidade tem os elementos da diagonal principal iguais a 1 e zero fora da diagonal principal. Indica-se a matriz identidade por I_d ou I_n ou simplesmente por I.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular Superior: A matriz quadrada A = [a_{ij}], que tem os elementos a_{ij} = 0 para i > j, é uma *matriz triangular superior.*

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior: A matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, que tem os elementos $a_{ij} = 0$ para i < j, é uma *matriz triangular inferior.*

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Transposta: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$, a matriz transposta de A é definida como $A^T = [b_{ij}]_{n\,x\,m}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}\ \forall\, i, j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} \qquad A^T = A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{i2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1j} & a_{2j} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Transposição de Matrizes: Se k é um escalar e A e B são matrizes, então:

(i) $(A^T)^T = A$

(ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(iii) $(kA)^T = kA^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Matriz Simétrica: Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é simétrica se $A^T = A$. Isto é, A é simétrica se é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{se } a_{ij} = a_{ji}$$

Exemplo: $A = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 5 & 3 & 8 \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

OBS: 1) Se A = [a_{ij}] é uma matriz simétrica, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$.

2) O produto de uma matriz quadrada A pela sua transposta A^T é uma matriz simétrica.

Matriz Anti-Simétrica: Uma matriz quadrada A = [a_{ij}] é anti-simétrica se A^T = - A.

OBS: *Se A = [a_{ij}] é uma matriz anti-simétrica, os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal são opostos e os elementos da diagonal principal são nulos.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -7 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{bmatrix}; \quad -A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRIZ NORMAL: Uma matriz quadrada A de ordem n é dita **normal** quando comuta com sua matriz transposta, isto é, $A.A^T = A^T.A$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DE MATRIZES

As matrizes são muito utilizadas para apresentação de dados, tendo em vista que facilitam a interpretação desses dados, mesmo para pessoas leigas em matemática. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: (Produção)

Suponha que um fabricante tem quatro fábricas, cada uma das quais manufatura três produtos. Se denotarmos por a_{ij} a quantidade do produto i manufaturada na fábrica j em 1 semana, então a produção semanal do fabricante é dada pela matriz 3 x 4.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \text{Fábrica 1} & \text{Fábrica 2} & \text{Fábrica 3} & \text{Fábrica 4} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Produto 1} \\ \text{Produto 2} \\ \text{Produto 3} \end{array} & \begin{bmatrix} 560 & 360 & 380 & 0 \\ 340 & 450 & 420 & 80 \\ 280 & 270 & 210 & 380 \end{bmatrix} \end{array}$$