Exemplo 2: (Distância entre cidades)

A matriz abaixo mostra a distância entre as cidades de Guarapuava, Curitiba, Cascavel e Foz do Iguaçu (distâncias em Km).

	Guarapuava	Curitiba	Cascavel	Foz do Iguaçu
Guarapuava	0	259	250	389
Curitiba	259	0	498	637
Cascavel	250	498	0	143
Foz do Iguaçu	389	637	143	0

EXERCÍCIOS

1) Indique explicitamente os elementos da matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$ tal que $a_{ij} = i - j$.

2) Construa as seguintes matrizes:

   $A = (a_{ij})_{3x3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}$

   $B = (b_{ij})_{3x3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ \ i + j = 4 \\ 0, & se\ i + j\ \neq 4 \end{cases}$

3) Construa a matriz A de ordem 3 por 2 definida pela lei $a_{ij} = \begin{cases} 1\, se\, i = j\ e \\ i^2\ se\, i \neq j \end{cases}$.

4) Dada uma matriz A $_{m\,x\,n}$ e as operações:
   a. +/A, que transforma a matriz A numa outra matriz A' $_{m\,x\,1}$ em que cada elemento da única coluna de A' é obtido somando-se os elementos da linha correspondente de A.
   b. + ł A, que transforma a matriz A $_{m\,x\,n}$ numa outra matriz A" $_{1\,x\,n}$ em que cada elemento da única linha de A" é obtido somando-se os elementos da coluna correspondente de A.

   Nessas condições, se A for a matriz identidade de ordem p, calcule a expressão +/(+ ł A).

5) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, determinar o traço de A.

6) Escreva a transposta da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

7) Determine o traço da matriz A de ordem 3 definida por $a_{ij} = i + j + 2$.

Álgebra Matricial

Igualdade de Matrizes: Duas matrizes $A_{m\,x\,n} = [a_{ij}]_{m\,x\,n}$ e $B_{r\,x\,s} = [b_{ij}]_{r\,x\,s}$ são iguais, ou seja, A = B, se elas têm o mesmo número de linhas (m = r) e colunas (n = s) e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

Exemplo: $$\begin{bmatrix} 2^2 & \ln 1 & sen90^\circ \\ 3 & 0 & \sqrt{9} \\ \cos 90^\circ & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Adição de Matrizes: A soma de duas matrizes m x n, A = $[\ a_{ij}\ ]$ e B = $[\ b_{ij}\ ]$, é uma matriz C = $[\ c_{ij}\ ]$ também m x n, tal que: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Em outras palavras, C é obtida somando-se os elementos correspondentes de A e de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{ij} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} \end{bmatrix}$$

OBS: **1)** *A soma de duas matrizes A e B está definida apenas quando A e B são do mesmo tamanho.*

2) A **diferença A - B** *de duas matrizes de ordem m x n, é uma matriz C tal que:* $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Exemplo (Produção): Um fabricante de determinado produto produz três modelos, A, B e C. Cada modelo é manufaturado parcialmente na fábrica F_1 em Formosa e depois terminado na fábrica F_2 em São Paulo. O custo total de cada produto é a soma do custo de produção com o custo de transporte. Então, os custos em cada fábrica (em reais) podem ser descritos pelas matrizes 3 x 2 F_1 e F_2:

$$F_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Custo de Produção} & \text{Custo de Transporte} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 32 & 40 \\ 50 & 80 \\ 70 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{array}$$

$$F_2 = \begin{array}{cc} \text{Custo de Produção} & \text{Custo de Transporte} \end{array}$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 50 \\ 130 & 20 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{array}$$

A matriz $F_1 + F_2$ fornece os custos totais de produção e de transporte para cada produto. Os custos totais de produção e de transporte para o modelo C do produto são, respectivamente, R$ 200,00 e R$ 40,00.

Propriedades da Adição: Dadas as matrizes A, B, C e D de mesma ordem m x n, temos:

(i) A + B = B + A (comutativa)

(ii) A + (B + C) = (A + B) + C (associativa)

(iii) A + 0 = A, onde 0 é a **matriz nula** m x n ou **elemento neutro para a soma de matrizes.**

(iv) Para cada matriz A, existe uma única matriz D tal que A + D = 0. Denota-se D por –A, assim: A + (-A) = 0. A matriz –A é chamada de **matriz inversa aditiva** ou **negativa de A.**

Multiplicação por escalar: Dado um número real k (escalar) e uma matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$, chama-se ***produto k.A*** a matriz $k.\ A = [ka_{ij}]_{mxn}$. Isto significa que multiplicar um matriz A por um escalar k é construir uma matriz kA formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1j} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{ij} \end{bmatrix}$$

$\lambda \in \Re$

Exemplo: $7.\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -21 \\ 28 & 35 \end{bmatrix}$

Propriedades da multiplicação por escalar : Dadas matrizes A e B de mesma ordem m x n e números reais r e s , temos:

(i) r (A + B) = rA + rB

(ii) (r + s)A = rA + sA

(iii) r (sA) = (rs)A

(iv) A(rB) = r(AB) = (rA)B

(v) 0.A = 0

(vi) -1.A = -A

(vii) 1.A = A.1 = A

Multiplicação de Matrizes: Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e a matriz $B = [b_{jk}]_{nxp}$. Definimos o produto das matrizes A e B como uma outra matriz $C = A.B$, definida por:

$$C = [c_{ik}]_{mxp} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k} + \cdots + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk}$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e todo $k \in \{1, 2, \dots, p\}$.

Observe que na expressão $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$, os "subscritos externos" em cada termo ab da soma são sempre i e j, enquanto os "subscritos internos" são sempre iguais e variam de 1 a n.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mn} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} \end{bmatrix}_{nj} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \ldots & \cdots & \ldots \\ \ldots & & \cdots & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ldots & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \ldots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & \ldots \end{bmatrix}_{mj}$$

Observações:

(i) somente podemos multiplicar duas matrizes se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda.

(ii) o elemento c_{ij} é obtido multiplicando os elementos da linha i da primeira matriz pelos elementos da coluna j da segunda matriz, e somando esses produtos.

$$A_{mxp} \times B_{pxn} = (A \times B)_{mxn}$$

Exemplos:

1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(-1)+(5)(4) & (3)(0)+(5)(7) \\ (4)(-1)+(6)(4) & (4)(0)+(6)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 35 \\ 20 & 42 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(5)+(3)(9) \\ (2)(5)+(8)(9) \\ (4)(5)+(0)(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}$

Propriedades do Produto de Matrizes: Se A, B, C e I têm os tamanhos apropriados, então:

(i) Em geral, AB $\neq$ BA.

Exemplo: Se A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, então:

AB = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e BA = $\begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

(ii) AI = IA = A

(iii) A(B+C) = AB + AC (distributividade à esquerda)

(iv) (A + B)C = AC + BC (distributividade à direita)

(v) (AB)C = A(BC) (associatividade)

(vi) $(AB)^T = B^T A^T$

(vii) 0.A = 0 e A.0 = 0, onde 0 é matriz nula.

Observações Importantes:

1) A multiplicação de matrizes **não é comutativa**, isto é, existem matrizes A e B tais que AB $\neq$ BA.

2) Na multiplicação de matrizes **não vale a lei do anulamento** do produto, isto é, podemos ter A.B = 0 mesmo com A $\neq$ 0 e B $\neq$ 0.

Lembrete: ***lei do anulamento***: dados dois números reais a e b, se o produto deles é igual a zero, isto é, se $a.b = 0$, então se conclui que pelo menos um deles é zero, ou seja, tem-se $a = 0$ ou $b = 0$.

Exemplo: Considerem-se as matrizes não nulas

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

tem-se:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) \\ 1\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa é uma característica da nulidade do produto de matrizes, que pode ser posta de duas formas equivalentes:

- se $AB = 0$, isso não implica que $A = 0$ ou $B = 0$;
- mesmo que $A \neq 0$ e $B \neq 0$, pode ocorrer que $AB = 0$.

3) Não **vale também a simplificação ou não vale a lei do cancelamento do produto**, isto é, podemos ter AB = AC, mesmo com A $\neq$ 0 e B $\neq$ C.

Na multiplicação de matrizes não vale a lei do cancelamento do produto. Considerando-se dois números reais a e b, se $2\cdot a = 2\cdot b$, então se pode dividir ambos os membros da igualdade por 2 e conclui-se que $a = b$. De modo mais geral, se $c\cdot a = c\cdot b$ e se $c \neq 0$, então se pode dividir ambos os membros por c e conclui-se que $a = b$. Essa é a chamada lei do cancelamento.

Para o produto de matrizes, não vale a lei do cancelamento, isto é:

se $AC = BC$, nem sempre se tem $A = B$.

Exemplo: considerando-se as matrizes quadradas de ordem 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tem-se:}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 22 & 11 \end{pmatrix} \text{ e } BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}.$$

O exemplo mostra que $AC = BC$ não implica que $A = B$. Posto de outra forma: tem-se $AC = BC$, com $C \neq 0_{2\times 2}$, e, no entanto, tem-se que $A \neq B$.

Conclui-se, assim, que na multiplicação de matrizes, não vale a lei do cancelamento.

Matrizes em blocos

Uma matriz pode ser **particionada** ou **subdividida** em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas. Por exemplo, as seguintes são três partições possíveis de uma matriz 3 x 4 arbitrária A: a primeira é uma partição de A em quatro ***submatrizes*** $A_{11}, A_{12},\ A_{21}\ e\ A_{22}$; a segunda é uma partição de A em seus vetores $r_1, r_2\ e\ r_3$; a terceira é uma partição de A em seus vetores coluna $c_1, c_2, c_3\ e\ c_4$.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

Outras formas de multiplicar matrizes

Multiplicação matricial por colunas e linhas: a partição de matrizes em blocos tem muitas utilidades, uma das quais sendo encontrar uma linha ou coluna específica de um produto matricial AB sem calcular todo o produto. Mais especificamente, as fórmulas seguintes, mostram como vetores coluna individuais de AB podem ser obtidos particionando B em vetores colunas e como vetores linhas individuais de AB podem ser obtidos particionando A em vetores linha.

$$AB = A[b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n] = [Ab_1 \quad Ab_2 \quad \dots \quad Ab_n]$$

(AB calculado coluna a coluna)

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a_1 B \\ a_2 B \\ \vdots \\ a_m B \end{bmatrix}$$

(AB calculado linha a linha)

Exemplo: Considere as matrizes

Em palavras, essas fórmulas afirmam que:

- *j-ésimo* vetor coluna de AB = A.[*j-ésimo* vetor coluna de B]

- *i-ésimo* vetor linha de AB = [*i-ésimo* vetor linha de A].B

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, assim:

a) o produto AB obtido entrada por entrada é $AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$;

b) o segundo vetor coluna de AB pode ser obtido calculando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) o primeiro vetor linha de AB pode ser obtido calculando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}$$

Produto matricial como combinação linear

Definição: Se $a_1, a_2, \dots, a_n$ são vetores em $\mathcal{R}^n$ e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são escalares, então uma soma da forma $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n$ é dita uma **combinação linear** dos vetores $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Para ver como o produto de matrizes pode ser visto como uma combinação linear, sejam A uma matriz $m \, x \, n$ e $\boldsymbol{x}$ um vetor coluna $n \, x \, 1$, digamos,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então:

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Isso prova o teorema seguinte:

Teorema: *Sejam A uma matriz m x n e **x** um vetor coluna n x 1. Então o produto A**x** pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A em que os coeficientes são as entradas de **x**.*

Exemplo: A matriz produto $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$

pode ser escrita como a combinação linear dos vetores coluna

$$2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Outro exemplo: colunas de um produto matricial como combinações lineares

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Pelo teorema acima, o *j-ésimo* vetor coluna de AB pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A em que os coeficientes da combinação linear são as entradas da *j-ésima* coluna de B. As contas são as seguintes:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Potências de Matriz:

Quando A e B forem duas matrizes n x n, o produto delas também será uma matriz n x n. Um caso especial ocorre quando A = B. Faz sentido definir $A^2 = A.A$ e, em geral, definir A^k como

$$A^k = \underbrace{A.A.\ldots.A}_{k\ fatores}$$ sendo k um **inteiro positivo.**

Assim, $A^1 = A,$ e é conveniente definir $A^0 = I_n$.

Exemplos:

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

a) $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 42 \\ 84 & 83 \end{bmatrix}$

Com base nesse exemplo podem também definir A^k, como $A^k = A^{k-1}.A$.

Propriedades da Potência de Matrizes: Sejam A e B matrizes quadradas com o mesmo tamanho, r e s números inteiros não negativos. Então:,

(i) $A^r . A^s = A^{r+s}$

(ii) $(A^r)^s = A^{rs}$

(iii) Se AB = BA, então $(AB)^r = A^r . B^r$.

Matriz Periódica: Dada uma matriz quadrada A, diz-se que A é uma **matriz periódica** se $A^n = A$, sendo $n \geq 2$. Se n é o menor inteiro para o qual $A^n = A$, diz-se que o período de A é $n - 1$.

Matriz Idempotente: Dada uma matriz periódica A, tal que $A^2 = A$, diz-se que A é uma **matriz idempotente.** O período da matriz idempotente é 2 – 1 = 1.

Se $A^2 = A$, então $A^3 = A^4 = A^5 = \cdots = A^n = A$.

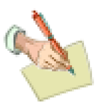
Matriz Nihilpotente: Uma matriz quadrada de ordem n diz-se uma **matriz nihilpotente (ou nilpotente)** se existir um número p, inteiro e positivo, tal que $A^p = 0$, onde 0 representa a matriz nula. O menor número inteiro positivo que verifica a igualdade $A^p = 0$ designa-se por índice de nihilpotência da matriz A.

Se $A^2 = 0$, então $A^3 = A^4 = A^5 = \cdots = A^n = 0$.
Se $A^3 = 0$, então $A^4 = A^5 = A^6 ... = A^n = 0$.

Exemplos:

A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -5 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ é idempotente, uma vez que $A^2 = A$.

B = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ é nihilpotente, uma vez que $B^3 = 0$ (índice 3).



EXERCÍCIOS

1) Determine x e y de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$.

R: x = 1 e y = 0

2) Determine x, y, z e t de modo que se tenha

$$\begin{bmatrix} x^2 & 2x & y \\ 4 & 5 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & 5t & t \end{bmatrix}$$

R: x = 0; y = 3; z = 4; t = 1

3) Se a $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ + b $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ + c $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, determine os valores de a, b e c.

R: a = b = c = 0

4) Se A = $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, determine X em cada uma das equações abaixo:

a) 2X + A = 3B + C

b) X + A = $\frac{1}{2}$(B – C)

c) 3X + A = B - X

d) $\frac{1}{2}$ (X – A – B) = $\frac{1}{3}$ (X – C)

R: a) X = $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 6 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **b) X =** $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{15}{2} \\ -1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$ **c) X =** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ **d) X =** $\begin{bmatrix} 9 & 20 \\ 14 & 27 \end{bmatrix}$

5) Dadas A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$, calcular AB.

R: AB = $\begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix}$

6) Dadas A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, calcular AB.

R: AB = $\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$

7) Resolva a equação matricial X – A – B = C, sendo dadas:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

R: X = $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{12} & \mathbf{11} \end{bmatrix}$

8) Obtenha X tal que: $X + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

R: X = $\begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-7} \end{bmatrix}$

9) Define-se **distância entre duas matrizes** A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}) quadradas e de mesma ordem n pela fórmula: $d(A;B) = máx\ |a_{ij} - b_{ij}|\ i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Calcule a distância entre as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. **R: d(A; B) = 5**

10) Determine os valores de a e b para que a matriz M = $\begin{bmatrix} 3 & 8 & x \\ a^3 & 1 & b^2 \\ x & 121 & 0 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

R: a = 2 e b = $\pm$ 11.

11) A matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 2 & 1 & z \end{bmatrix}$ admite a transposta $A^T = \begin{bmatrix} 1 & x & 2 \\ x-2 & y & 1 \\ 3y & 6-y & z \end{bmatrix}$. Nestas condições, calcule x, y e z. **R: x = 4; y = 1; z = 5**

12) Seja A = $(a_{ij})_{2x2}$, tal que $a_{ij} = i + j$. Determine x, y, z e t para que se tenha

$\begin{pmatrix} x+y & x+z \\ 3x-t & t+z \end{pmatrix}$ = A. **R: x = 2; y = 0; z = 1; t = 3**

13) Sabendo que A = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtenha as matrizes M e N, tais que $\begin{cases} 2M + N = A - B \\ M + 3N = 2A + B \end{cases}$. **R: M =** $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2/5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3/5} \end{pmatrix}$ **e N =** $\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6/5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{6/5} \end{pmatrix}$

14) Determine x, com $x \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz A = $\begin{bmatrix} x^2 - 7x + 13 & 0 \\ x^2 - 3x - 4 & 1 \end{bmatrix}$ seja igual a matriz identidade de ordem 2. **R: x = 4**