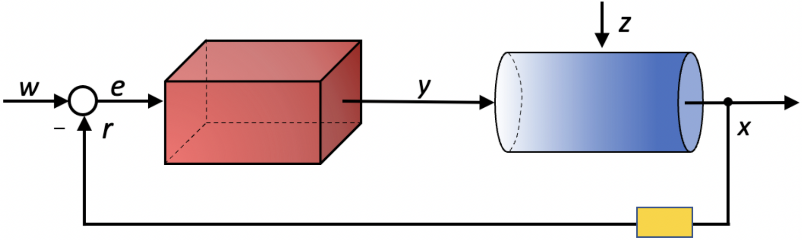
6 Regelstrecken



Inhalt

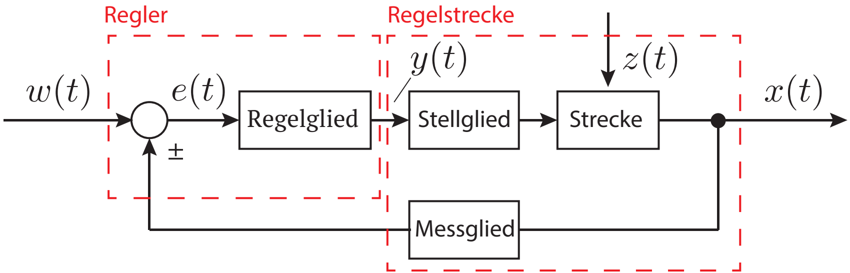
Die Regelstrecke

Definition:

- Nach DIN IEC 60050-351 ist die Regelstrecke diejenige Funktionseinheit, die entsprechend der Regelungsaufgabe beeinflusst wird
- Eingangsgröße der Regelstrecke ist die Summe aus der Stellgröße $y(t)$ und der Störgröße $z(t)$.
- Ausgangsgröße ist die Regelgröße $x(t)$

Signale und Komponenten der Regelstrecke

- Die Regelstrecke kann als dynamisches System aus einer Kette von meist unbekannten Einzelsystemen bestehen
- Das Stellglied kann Bestandteil der Regelstrecke, des Reglers oder ein eigenständiges Gerät sein



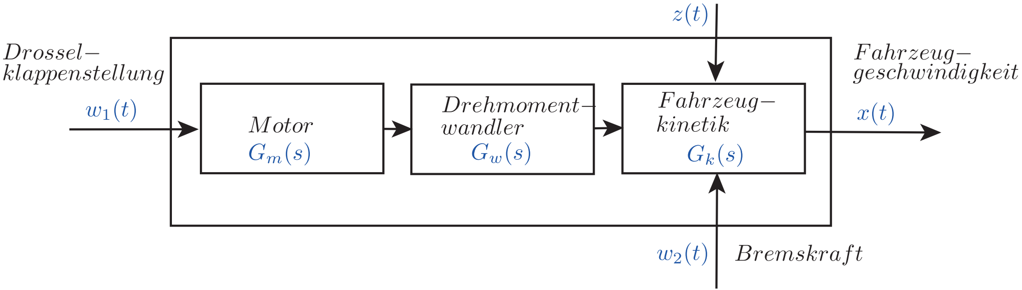
Signale und Komponenten der Regelstrecke

- Mathematisch wird die Regelstrecke als Übertragungssystem definiert
- Sie kann aus einem oder aus mehreren Übertragungssystemen und aus SISO- und MIMO-Systeme[1] bestehen
- Die Übertragungssysteme können lineares und nichtlineares Verhalten aufweisen

[1] SISO (engl. Single Input, Single Output), MIMO (Multiple Input Multiple Output) - Eingrößen- und Mehrgrößensysteme

Beispiel - Fahrzeugmodell zur Fahrzeuglängsregelung

- innerhalb der einzelnen Blöcke werden äußerst komplexe Vorgänge nachgebildet!
- dazu später mehr

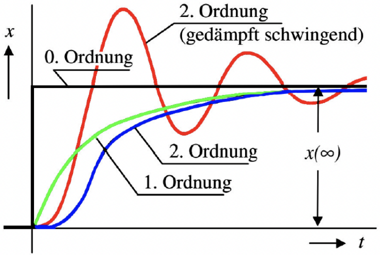


Streckenidentifikation

- Um den Regler für anspruchsvolle Regelaufgaben auslegen zu können, ist es nötig, die Regelstrecke zu identifizieren
- Informationen über die Regelstrecken können mit Verfahren der Identifikation ermittelt werden
  - Erstellung eines mathematischen Modells der Regelstrecke, das möglichst genau das zeitliche Verhalten der Regelstrecke wiedergeben soll
  - Experimentelle Identifizierungsmethode - anregen durch ein geeignetes Testsignal und das Ausgangssignal aufzeichnen

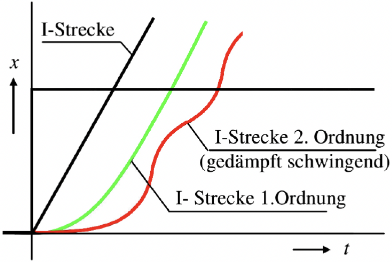
Proportionale Regelstrecken

- Nach einem Sprungeingang geht die Ausgangsgröße nach Abklingen eines Einschwingvorgangs gegen einen stationärer Endwert x_∞, welcher zum Eingangssprung **proportional** ist, daher auch *P-Strecken* genannt
- Im stationären Zustand ($t \longrightarrow \infty$), die Ausgangsgröße x ist dann konstant, es findet keine zeitliche Änderung von x mehr statt



Integrierende Regelstrecken

- Dies sind Strecken, bei denen ein integrierendes Verhalten auftritt, wie z. B. beim Befüllen eines Behälters und der Bewegung von Massen
- Nach einem Sprungeingang strebt die Ausgangsgröße nach Abklingen eines Einschwingvorgangs aufgrund der **Integrationswirkung** gegen unendlich, daher auch *I-Strecken* genannt



Spezielle Formen von Strecken

- Zu den speziellen Formen von Regelstrecken zählt man z.B. Regelstrecken mit **Totzeit**, mit **Allpassverhalten** oder mit **differenzierendem Verhalten**

Proportionale Strecken ohne Verzögerung (P-Glied)

- Strecken bzw. Übertragungsglieder, bei denen ein direkter proportionaler Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße $w(t)$ und der Ausgangsgröße $x(t)$ gegeben ist
- Mathematische Beschreibung:
  - Differentialgleichung (trivial):

$$a_0 \cdot x(t) = b_0 \cdot w(t)$$

  - Übertragungsfunktion:

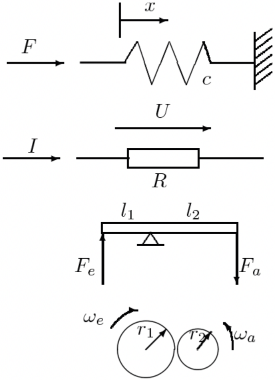
$$G(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{b_0}{a_0} = K_S$$

  - Frequenzgang:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{X(\mathrm{j}\omega)}{W(\mathrm{j}\omega)} = \frac{b_0}{a_0} = K_S$$

Proportionale Strecken ohne Verzögerung (P-Glied)

- Technische Beispiele



Feder: $x = \frac{1}{c} \cdot F$

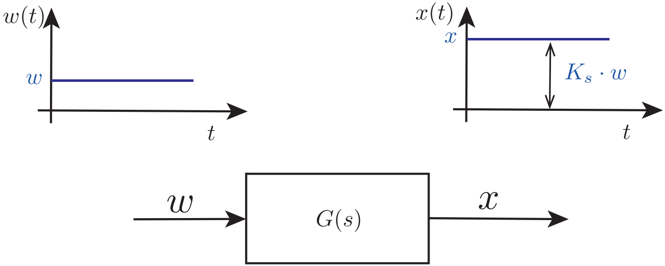
Ohmscher Widerstand: $U = R \cdot I$

Hebel: $F_a = \frac{l_1}{l_2} \cdot F_e$

Getriebe: $\omega_a = \frac{r_1}{r_2} \cdot \omega_e$

Proportionale Strecken ohne Verzögerung (P-Glied)

- Sprungantwort eines P-Glieds



Proportionale Strecken mit Verzögerung (PT$_1$-Glied)

- Strecken bzw. Übertragungsglieder,reagieren nicht mehr sofort auf ein Eingangssignal, sondern mit einer gewissen Verzögerung
- Mathematische Beschreibung:
  - Differentialgleichung:

$$a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_0 \cdot w \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad T_S \cdot \dot{x} + x = K_S \cdot w$$

  - Übertragungsfunktion:

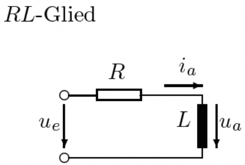
$$G(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{K_S}{1 + T_s \cdot s}$$

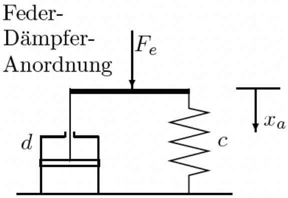
  - Frequenzgang:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{X(\mathrm{j}\omega)}{W(\mathrm{j}\omega)} = \frac{K_S}{1 + T_s \cdot j\omega}$$

Proportionale Strecken mit Verzögerung (PT_1-Glied)

- Technische Beispiele

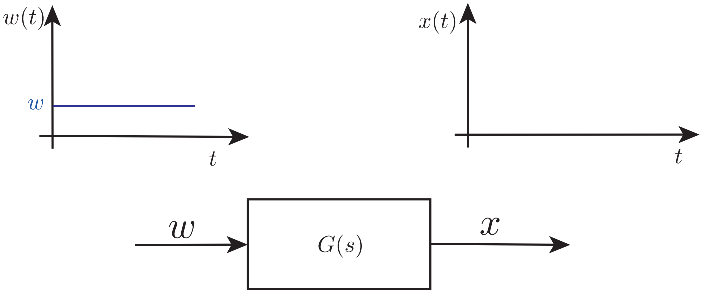




RL-Glied	$(L/R) \cdot \dot{i}_a + i_a$	$=$	u_e/R
Feder-Dämpfer	$d \cdot \dot{x}_a + c \cdot x_a$	$=$	F_e

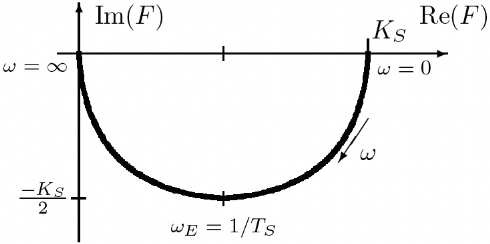
Proportionale Strecken mit Verzögerung (PT$_1$-Glied)

- Sprungantwort eines PT$_1$-Glieds?



Proportionale Strecken mit Verzögerung (PT_1-Glied)

- Ortskurve des PT_1-Gliedes ist ein Halbkreis mit dem Mittelpunkt $(K_S/2; 0)$ und dem Radius $K_S/2$



Schwingungsfähige PT$_2$-Strecken

- Strecken bzw. Übertragungsglieder, die nach einem Sprungeingang nicht aperiodisch gegen ihren stationären Endwert gehen
- Mathematische Beschreibung:
  - Differentialgleichung:

$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 w(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{a_2}{a_0}s^2X(s) + \frac{a_1}{a_0}sX(s) + X(s) = \frac{b_0}{a_0}W(s)$$

  - Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{K_S}{1 + T_1 \cdot s + T_2^2 \cdot s^2} = \frac{K_S \cdot \omega_0^2}{\omega_0^2 + 2D\omega_0 \cdot s + s^2}$$

  - Frequenzgang:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{K_S}{1 + T_1 \mathrm{j}\omega + T_2^2 \cdot (\mathrm{j}\omega)^2}$$

Schwingungsfähige PT$_2$-Strecken

- Wir führen hierfür folgende Abkürzungen ein
  - Kennkreisfrequenz ω_0 und Dämpfungsgrad D:

$$\omega_0 = \frac{1}{T_2} \quad \text{und} \quad D = \frac{T_1}{2T_2}$$

  - Übertragungsbeiwert K_s:

$$K_s = \frac{b_0}{a_0}$$

  - Abklingkonstante δ:

$$\delta(= D\,\omega_0) = \frac{T_1}{2T_2^2}$$

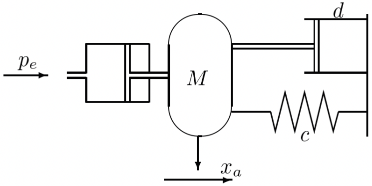
  - Abklingkonstante ω_e:

$$\omega_e = \begin{cases} \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2} \end{cases}$$

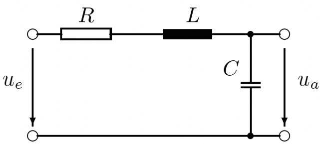
Schwingungsfähige PT_2-Strecken

- Technische Beispiele

Feder-Masse-Schwinger



RLC-Schwingkreis

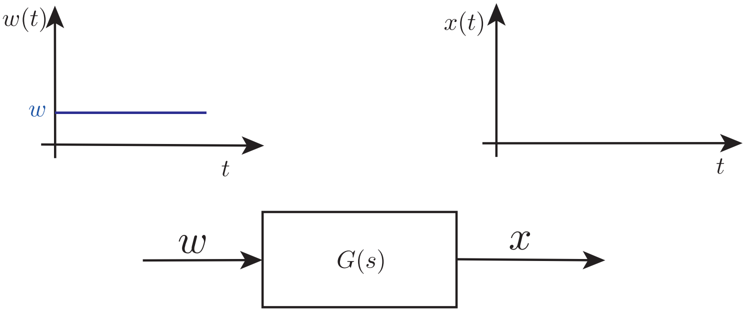


Feder-Masse-Schwinger $\quad M \cdot \ddot{x}_a + d \cdot \dot{x}_a + c \cdot x_a = A \cdot p_e$

RLC-Schwingkreis $\quad LC \cdot \ddot{u}_a + RC \cdot \dot{u}_a + u_a = u_e$

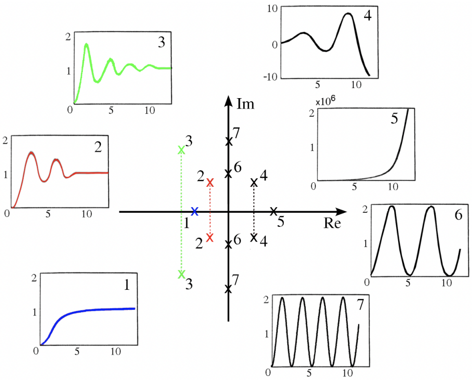
Schwingungsfähige PT$_2$-Strecken

- Sprungantwort eines PT$_2$-Glieds?



Schwingungsfähige PT_2-Strecken

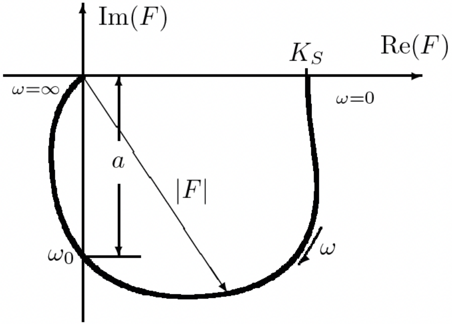
- Sprungantwort und PN-Diagramm eines PT_2-Glieds für verschiedenen Dämpfungen D



Technology
Arts Sciences
TH Köln

Schwingungsfähige PT_2-Strecken

- Ortskurve des PT_2-Gliedes als Beispiel, wobei $a = \frac{K_S}{2D}$



Integrierende Strecken ohne Verzögerung (I-Glied)

- die Ausgangsgröße strebt keinem stationären Endwert zu, sie steigt stattdessen aufgrund der Integratorwirkung ständig an
- Mathematische Beschreibung:
  - Differentialgleichung:

$$a_1 \cdot \dot{x}(t) = b_0 \cdot w(t) \quad \text{bzw.} \quad x(t) = \frac{b_0}{a_1} \cdot \int_0^t w(\tau)\mathrm{d}\tau = K_{IS} \cdot \int_0^t w(\tau)\mathrm{d}\tau$$

  - Übertragungsfunktion:

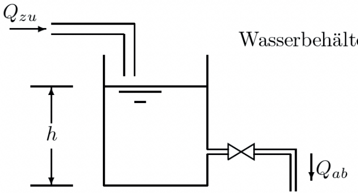
$$G(s) = \frac{K_{IS}}{s}$$

  - Frequenzgang:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{K_{IS}}{\mathrm{j}\omega} = -\mathrm{j} \cdot \frac{K_{IS}}{\omega}$$

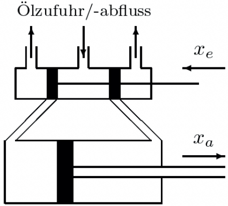
Integrierende Strecken ohne Verzögerung (I-Glied)

- Technische Beispiele



Wasserbehälter

Hydraulischer Stellzylinder

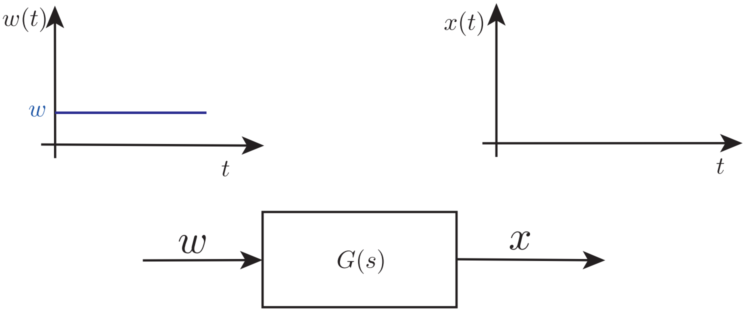


$$h(t) = \frac{1}{A} \cdot \int (Q_{zu}(\tau) - Q_{ab}(\tau))\mathrm{d}\tau$$ Wasserbehälter

$$x_a(t) = K_I \cdot \int x_e(\tau)\mathrm{d}\tau$$ Stellzylinder

Integrierende Strecken ohne Verzögerung (I-Glied)

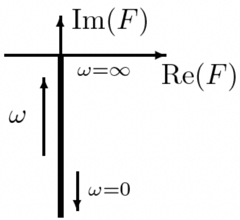
- Sprungantwort eines I-Glieds?



Technology Arts Sciences
TH Köln

Integrierende Strecken ohne Verzögerung (I-Glied)

- Ortskurve eines I-Glieds



Integrierende Strecken mit Verzögerung (IT_1-Glied)

- integrierende Strecken mit Verzögerungsstrecken erster Ordnung (in Reihe geschaltet)
- Mathematische Beschreibung:
  - Differentialgleichung:

$$T_1\dot{x}(t) + x(t) = K_I \int_0^t w(\tau)d\tau$$

  - Übertragungsfunktion:

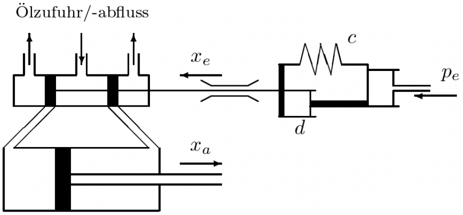
$$G(s) = \frac{K_{IS}}{s \cdot (1 + T_1 \cdot s)}$$

  - Frequenzgang:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{K_{IS}}{\mathrm{j}\omega - T_1\omega^2}$$

Integrierende Strecken mit Verzögerung (IT_1-Glied)

- Technische Beispiele



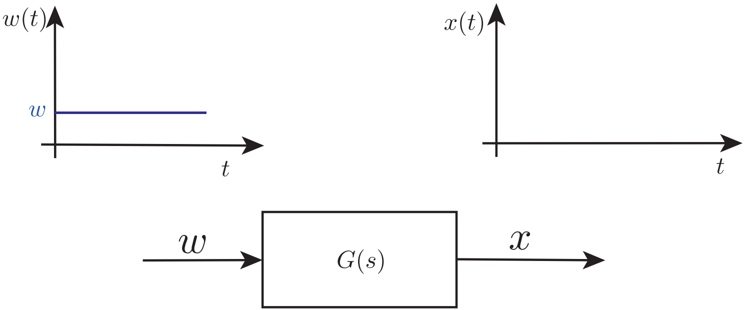
Hydraulischer Stell-zylinder mit Feder-Dämpfer-Ansteuerung

$$K_s d \cdot \ddot{x}_a + K_s c \cdot \dot{x}_a = A \cdot p_e$$

Hydraulischer Zylinder

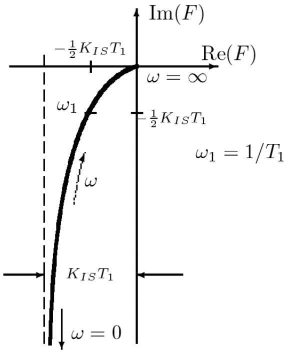
Integrierende Strecken mit Verzögerung (IT_1-Glied)

- Sprungantwort eines IT_1-Glieds?



Integrierende Strecken mit Verzögerung (IT$_1$-Glied)

- Ortskurve eines IT$_1$-Glieds



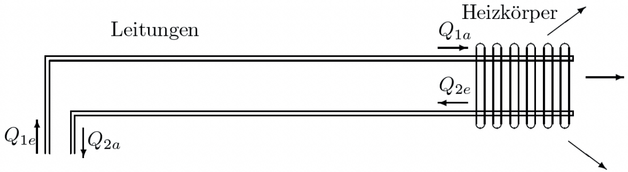
Technology Arts Sciences TH Köln

Strecken mit Totzeit (T_t-Glied)

- bei Anregung des Systems bleibt der Systemausgang für eine gewisse Zeit unverändert, bis eine Reaktion erfolgt
- Mathematische Beschreibung:
  - Zeitgleichung:
    $$x(t) = w(t - T_t)$$
  - Übertragungsfunktion:
    $$G(s) = e^{-sT_t}$$
  - Frequenzgang:
    $$G(j\omega) = e^{-j\omega T_t}$$

Strecken mit Totzeit (T$_t$-Glied)

- Technische Beispiele

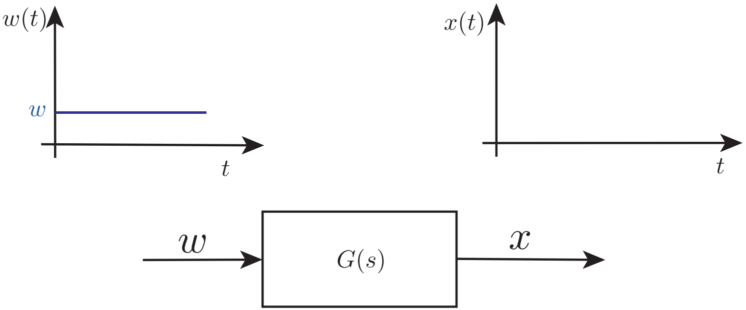


$$Q_{1a}(t) \quad = \quad Q_{1e}(t - T_t) \quad \text{und} \quad Q_{2a}(t) = Q_{2e}(t - T_t) \quad \text{Leitungen der Heizung}$$

Technology Arts Sciences TH Köln

Strecken mit Totzeit (T_t-Glied)

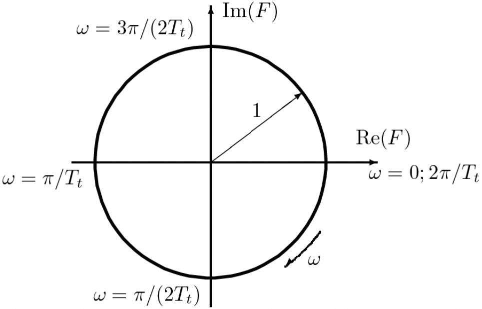
- Sprungantwort eines IT_1-Glieds?



Technology Arts Sciences TH Köln

Strecken mit Totzeit (T_t-Glied)

- Ortskurve eines T_t-Glieds



Strecken mit differenzierendem Verhalten (DT$_1$-Glied)

- Entspricht einer verzögerten (realen) Differenzierung - Ausgangsgröße reagiert auf die Änderungsgeschwindigkeit der Eingangsgröße
- Mathematische Beschreibung:
  - Zeitgleichung:

$$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_{DS} \cdot \dot{w}$$

  - Übertragungsfunktion:

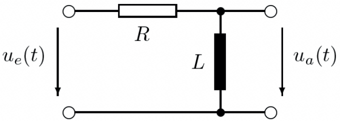
$$G(s) = \frac{K_{DS} \cdot s}{1 + T_1 \cdot s}$$

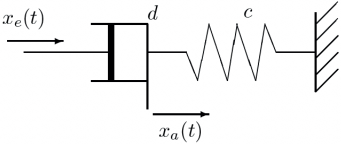
  - Frequenzgang:

$$G(\mathrm{j}\omega) = \frac{K_{DS} \cdot \mathrm{j}\omega}{1 + T_1 \cdot \mathrm{j}\omega}$$

Strecken mit differenzierendem Verhalten (DT$_1$-Glied)

- Technische Beispiele





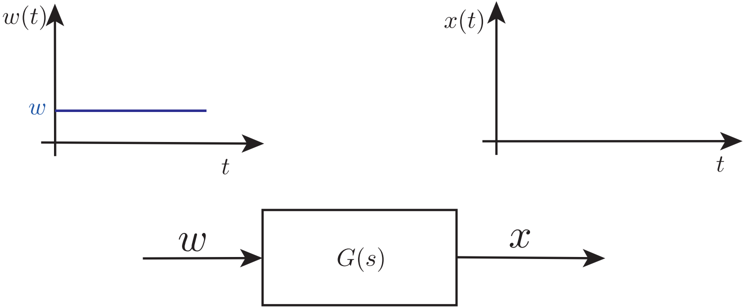
$L \cdot \dot{u}_a + R \cdot u_a = L \cdot \dot{u}_e$ RL-Glied

$d \cdot \dot{x}_a + c \cdot x_a = d \cdot \dot{x}_e$ Feder-Dämpfer-Anordnung.

Technology Arts Sciences TH Köln

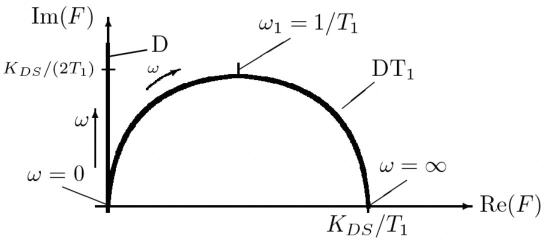
Strecken mit differenzierendem Verhalten (DT_1-Glied)

- Sprungantwort eines DT_1-Glieds?



Strecken mit differenzierendem Verhalten (DT_1-Glied)

- Ortskurve eines DT_1-Glieds



Bewegungsvorgänge von Fahrzeugen

- Bewegungsvorgänge von Fahrzeugen erfordern oft die Beschreibung von Translations- und/oder Rotationsbewegungen
- Die Ordnung der Differentialgleichungen, die diese Vorgänge beschreiben, erhöht sich mit der Anzahl der Freiheitsgrade
- Typische Anwendungen hierfür sind unter anderem:
  - die Regelung der Lage und Geschwindigkeit eines Flugzeugs
  - die aktive Dämpfung von Kraftfahrzeugen (Vertikalbewegung von Rad und Fahrzeug)

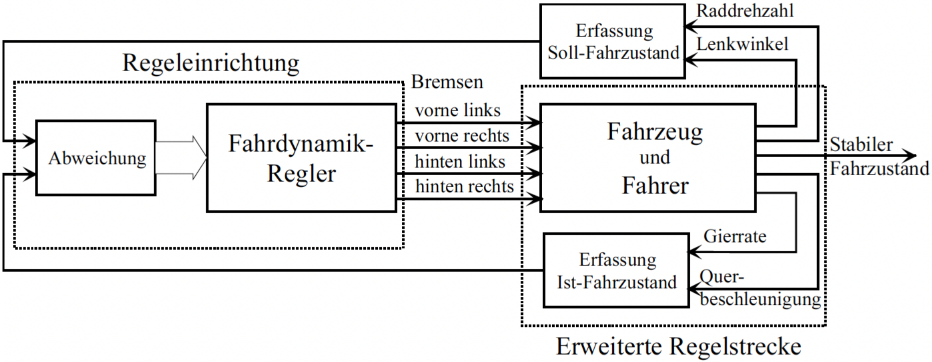
Mathematisches Modell für die Fahrdynamik-Regelung

- Welche Strecken gibt es bei der Fahrdynamik-Regelung?

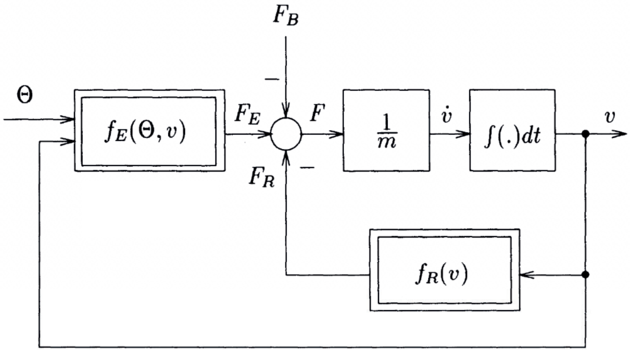
Technology Arts Sciences
TH Köln

Mathematisches Modell für die Fahrdynamik-Regelung

- Welche Strecken gibt es bei der Fahrdynamik-Regelung?

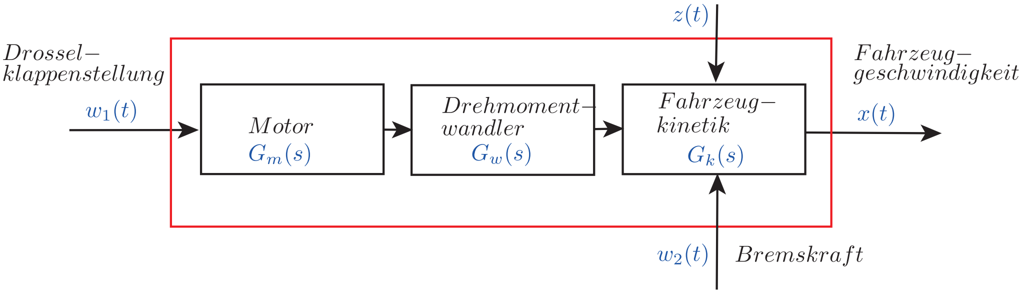


Vereinfachter Signalflussplan des Fahrzeugmodells

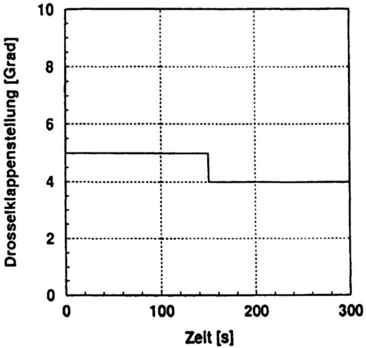


Mathematisches Modell für die Längsdynamik-Regelung

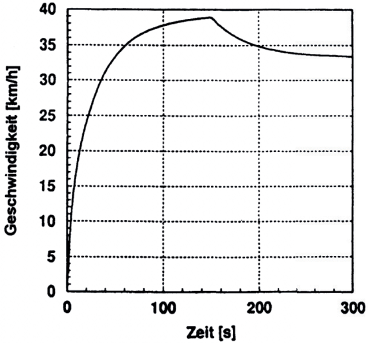
- Die Drosselklappe ist ein Teilsystem (-strecke) der Längsregelung



Streckenidentifikation bei der Längsdynamik



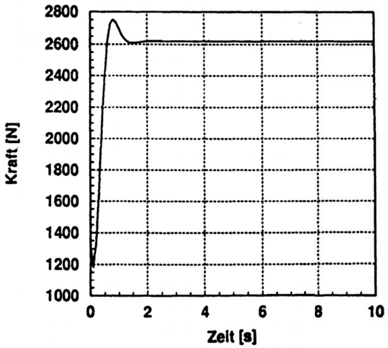
Stellgröße fur die Drosselklappenstellung



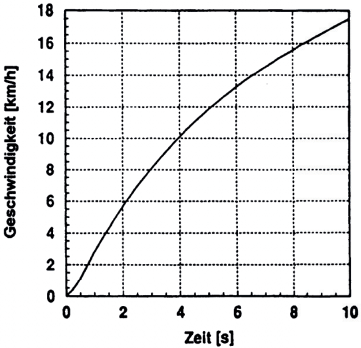
Verhalten der Fahrzeuggeschwindigkeit

Technology Arts Sciences TH Köln

Sprungantwort



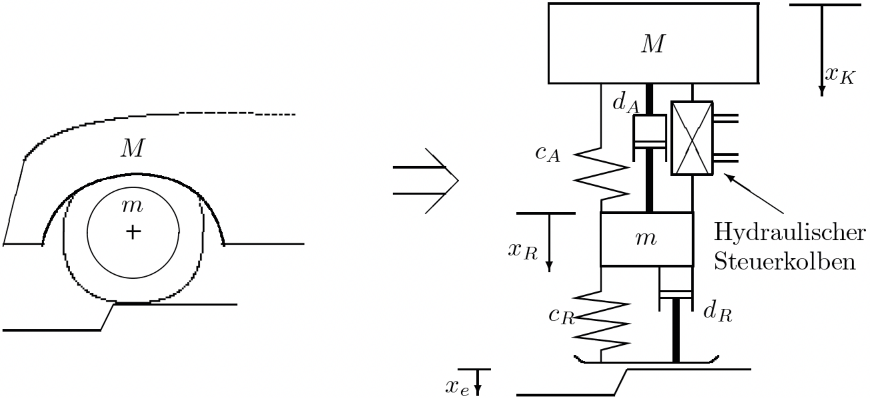
Sprungantwort des Antriebstrangs



Sprungantwort des vollständigen Fahrzmodells

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Ebenes Modell einer aktiven Fahrzeugdämpfung



Wirkende Kräfte im Überblick

Impulssatz des Rades	$m \cdot \ddot{x}_R = F_{cA} + F_{dA} + F_H - F_{cR} - F_{dR}$
Impulssatz der Karosserie	$M \cdot \ddot{x}_K = -F_{cA} - F_{dA} - F_H$
Federkraft des Reifens	$F_{cR} = c_R \cdot (x_R - x_e)$
Federkraft der Aufhängung	$F_{cA} = c_A \cdot (x_K - x_R)$
Dämpfungskraft des Reifens	$F_{dR} = d_R \cdot (\dot{x}_R - \dot{x}_e)$
Dämpfungskraft der Aufhängung	$F_{dA} = d_A \cdot (\dot{x}_K - \dot{x}_R)$.

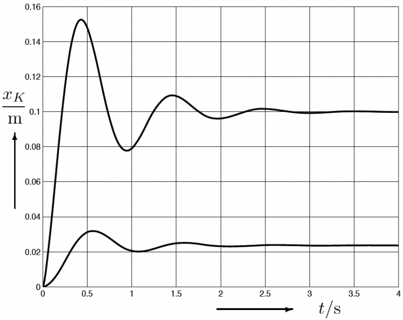
Übertragungsfunktionen für die Karosserieauslenkung und Karosseriebewegung

$$F_1(s) = \frac{X_K(s)}{X_e(s)} = \frac{c_A c_R + (c_A d_R + d_A c_R)s + d_A d_R s^2}{N(s)}$$

$$F_2(s) = \frac{X_K(s)}{F_H(s)} = -\frac{c_R + d_R s + m s^2}{N(s)}$$

Sprungantwort

- Reaktion der Karosserie auf ein Schlagloch (ob. Kurve) sowie auf eine sprungförmige Verstellung der Stellkraft (untere Kurve)



Lernziele dieser Vorlesung

Nach dem Studium dieses Abschnitts können Sie ...

1. Einfache Regelstrecken analysieren und mit Hilfe von Übertragungsfunktion und Frequenzgang beschreiben
2. Die wichtigen Unterscheidungsmerkmale und Kennwerte von Regelstrecken bestimmen
3. Komplexe Regelstrecken, bestehend aus einer Kette von unbekannten Einzelsysteme oder -strecken analysieren und beschreiben

Fragen zur Selbstkontrolle

1. Welche Aufgabe besitzt eine Regelstrecke?
2. Nennen Sie drei Beispiele von Regelstrecken mit und ohne Ausgleich?
3. Was versteht man unter Totzeitverhalten?
4. Welche Art von Strecken weist nach einer Sprunganregung keinen aperiodischen Verlauf auf, d.h. stabilisiert sich nicht gegen einen stationären Endwert?
5. Wie hoch ist die Eckfrequenz einer verzögerten Proportionalstrecke?

Übungsaufgabe 6.1

Ein Feder-Masse-Dämpfer-Schwinger wird durch die folgenden Differentialgleichung beschrieben. Wie lautet die Übertragungsfunktion und Frequenzgang für diese Strecke? Bitte berechnen Sie die Kenngrößen: K_S,T_1,$T_2\omega_0$,D und δ für das System.

$$8\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 2x(t) = 3w(t)$$

Übungsaufgabe 6.2

Zeichnen Sie die Ortskurven (von Hand oder mit Matlab) für folgende Frequenzgänge und tragen Sie die entsprechenden Frequenzmarkierungen ein. Um welche Art von Strecken handelt es sich dabei?

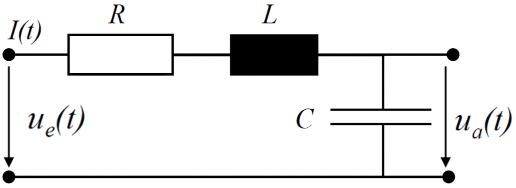
a) $$G(j\omega) = \frac{4}{1 + j\omega}$$

b) $$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega(1 + 2j\omega)}$$

c) $$G(j\omega) = \frac{5}{1 + 5j\omega + 4 \cdot (j\omega)^2}$$

Übungsaufgabe 6.3.1

Gegeben ist die folgende Regelstrecke mit einem Widerstand R, einer Induktivität L und einer Kapazität C. Der Schaltkreis wird mit einer Eingangsspannung von $u_e(t)$ beaufschlagt und es fällt eine Spannung $u_a(t)$ am Ausgang an. Bitte leiten Sie die Differentialgleichung (DGL) her, welche den Zusammenhang zwischen der Eingangsspannung und der Ausgangsspannung des aufgeführten Schaltkreises beschreibt.



Übungsaufgabe 6.3.2

Wie lauten die Übertragungsfunktion und der Frequenzgang des Systems?

Übungsaufgabe 6.3.3

Bestimmen Sie für $R = 2\Omega$, $L = 0{,}5H$ und $C = 4F$ die Zeitkonstanten T_1 und T_2 und berechnen Sie anschließend den Dämpfungsgrad D

Übungsaufgabe 6.3.4

Bitte erstellen Sie ein Bode-Diagramm sowie eine Ortskurve für das System unter Berücksichtigung der folgenden Dämpfungswerte: $D = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}5; 1$.