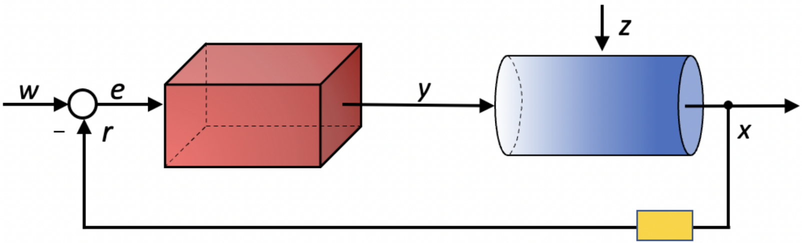
5 Mathematische Modellierung von Regelkreisgliedern 2



Technology Arts Sciences TH Köln

Motivation

- Was hat die Stabilität eines Systems mit Frequenz zu tun?

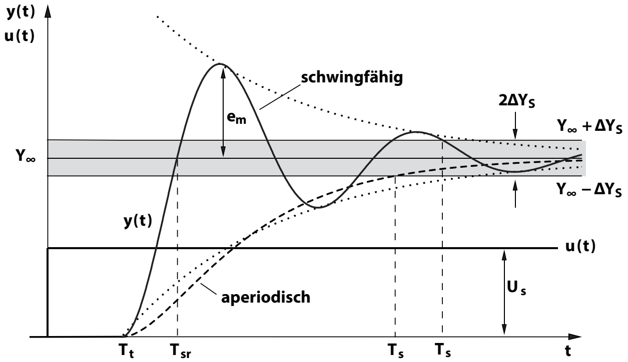
Inhalt

Bewertungskriterien

- Zur Bewertung der Leistungsfähigkeit des geschlossenen Regelkreises benötigt man quantitative Kenngrößen
- Sie dienen sowohl zur Reglerauslegung als auch zur abschließenden Beurteilung des Verhaltens in der Simulation oder im Experiment
- Kriterien existieren im Zeit- und im Bildbereich

Kriterien aus der Sprungantwort

- Ist eine Anregung des geschlossenen Regelkreises mit einem Sprung möglich, so sind zahlreiche Kenngrößen definiert, die man z.B. grafisch ermittelt und die Aussagen über das Systemverhalten ermöglichen.



T_t	Totzeit
T_{sr}	Anschwingzeit
e_m	Überschwingweite
$2\Delta Y_s$	Toleranzbereich
T_s	Einschwingzeit

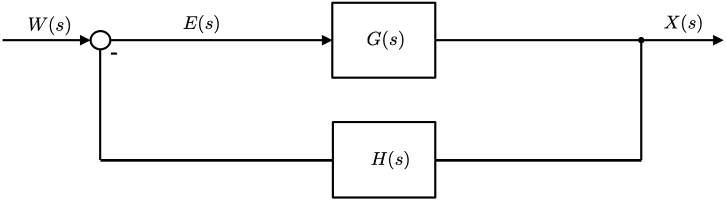
Kriterien aus der Sprungantwort

Kenngröße	Bedeutung
T_t Totzeit	Zeitverzug bis zur Reaktion des Systems
T_sr Anschwingzeit (Anregelzeit)	Zeitpunkt, zu dem erstmals der stationäre Endwert erreicht wird; charakterisiert die Dynamik
e_m Überschwingweite	max. Abweichung vom stationären Endwert nach erstmaligem Erreichen desselben; charakterisiert die Dämpfung (existiert nicht bei aperiodischem Verhalten)
$2\Delta Y_\mathrm{s}$ Toleranzbereich	Zielkorridor um den stationären Endwert
T_s Einschwingzeit (Übergangszeit, Ausregelzeit)	endgültiger Eintritt in den Toleranzbereich (z. B. in das $\pm 5\,\%$-Intervall um den Endwert); Maß für die Dynamik (Schnelligkeit)

Integrale Bewertungskriterien

- Integrale Bewertungskriterien betrachten die Regeldifferenz $e(t) = X_\infty - y(t)$ als Abweichung zwischen dem stationären Endwert X_∞ und dem Istwert der Regelgröße $y(t)$.
- Im Bildbereich lässt sich das mithilfe der folgenden Fehlerfunktion berechnen

$$\frac{E(s)}{W(s)} = \frac{1}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$



Berechnung des stationären Regelfehlers mithilfe des Endwertsatzes

- der Endwertsatz gibt Auskunft über den Wert einer Funktion für $t \to \infty$
- Dabei wird nur die Laplace-transformierte Funktion betrachtet wird

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

- Abschätzung für den Fall - Laufvariablen geht gegen 0 ist immer einfacher im Vergleich zum Fall t geht gegen unendlich

Beispiel: Endwertsatz einer Übertragungsfunktion

- Es gilt für Übertragungssysteme

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot X(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot W(s)$$

- Beispiel: Für das nachfolgende System mit einem Einheitssprung als Eingangssignal soll der Anfangswert des Ausgangssignals berechnet werden

$$G(s) = \frac{4}{s+1} \qquad \sigma(t) \quad \circ\!-\!\bullet \; \frac{1}{s}$$

Beispiel: Endwertsatz einer Übertragungsfunktion

- Anwendung des Endwertsatzes - Übertragungsfunktion und Laplace-Transformierte der Sprungfunktion werden multipliziert

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} x(t) &= \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot W(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{4}{s+1} \cdot \frac{1}{s} = 4\end{aligned}$$

- Wenn die Dynamik abgeklungen ist, die Ausgangsgröße erreicht den Endwert von 4

Übertragungsfunktion - Pole und Nullstellen

- die Lösungen des Zählerpolynoms $X(s)$ bezeichnet man als Nullstellen
- die Lösungen des Nennerpolynoms $W(s)$ als die Pole der Übertragungsfunktion (sehr wichtig)
- Systemeigenschaften, wie Dynamik und Stabilität hängen ganz entscheidend von
  - der Lage der Nullstellen, und
  - der Pole ab
- Die Pole des Nennerpolynoms entsprechen den Eigenwerten der DGL und bestimmen die Stabilität und Dynamik des Systems

Übertragungsfunktion - Pole und Nullstellen

- Von $G(s)$ lassen sich die Zähler- und Nennerpolynome auch in der komplexen Zahlenebene lösen, falls keine reellen Lösungen existieren
- Systeme mit $m > n$ sind technisch nicht realisierbar

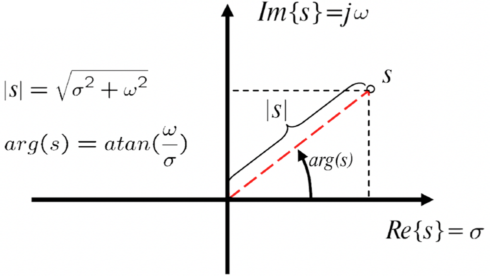
$$G(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad m < n$$

Visualisierung der Übertragungsfunktion

- Übertragungsfunktion $G(s)$ ist eine komplexwertige Funktion der komplexen Variablen $s = \sigma + j\omega$, mit Realteil σ und Imaginärteil $j\omega$
- G(s) kann mittels der s-Ebene oder des Pol-Nullstellen Diagramms visualisiert werden
  - Für Visualisierungen wichtig
  - Wird aufgespannt von $Re(s)$ und $Im(s)$

Visualisierung der Übertragungsfunktion

- Eine komplexe Zahl s lässt sich als ein Punkt in der s-Ebene darstellen, der durch ihren Betrag und ihre Phase bestimmt wird



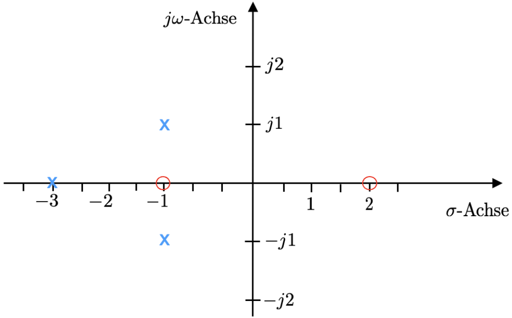
Übungsaufgabe - Pole und Nullstellen

- Berechnen Sie die Pole und Nullstellen der nachstehenden Übertragungsfunktion und stellen Sie diese in einem PN-Diagramm (s-Ebene) dar.

$$H(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

Lösung - Pole und Nullstellen

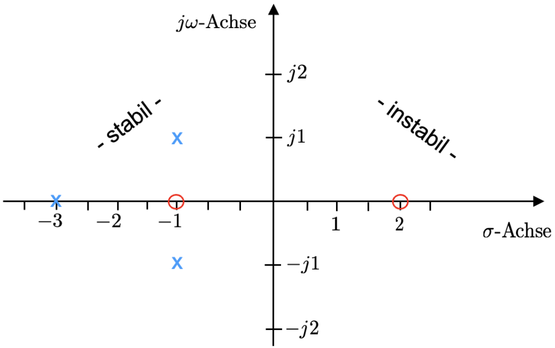
- Pole (Kreuzchen) $s = -3$, $s = -1 - j$ und $s = -1 + j$, Nullstellen (Kreisen) $s = -1$ und $s = 2$



PN-Diagramm und das Stabilitätsverhalten der Übertragungsfunktion

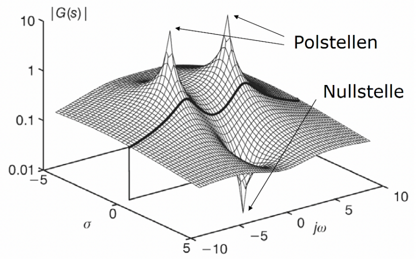
- Das Stabilitätsverhalten der Übertragungsfunktion hat in Abhängigkeit der Eigenwerte der Polstellen folgende 3 Möglichkeiten:
  1. **stabil**: negativer Realteil (linke komplexe s-Halbebene)
  2. **grenzstabil**: nur ein Eigenwert auf der imaginären Achse
  3. **instabil**: nur ein Eigenwert in der rechten komplexen s-Halbebene

PN-Diagramm und das Stabilitätsverhalten der Übertragungsfunktion



PN-Diagramm und das Stabilitätsverhalten der Übertragungsfunktion

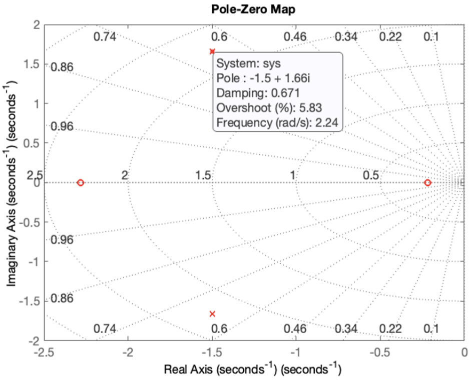
- Nullstellen haben keinen Einfluss auf die Stabilität des dynamischen Systems - beeinflussen aber sehr wohl die Stabilität des rückgekoppelten Systems



Pol-Nullstellen-Diagramm in Matlab

$$H(s) = \frac{2s^2+5s+1}{s^2+3s+5}$$

```
zaehler = [2 5 1];
nenner  = [1 3 5];
sys     = tf(zaehler,nenner);% Übertragungsfunktion

pole(sys); % Berechnung von Pole
zero(sys); % Berechnung von Nullstellen
pzmap(sys); % PN-Diagram
grid
```



Frequenzgang

Motivation - Anwendung von periodischen Eingangsgrößen in der RT

- als Testfunktionen zur Bestimmung des Frequenzgangs eines Systems (Regelstrecke, Regelkreis . . .)
- Modellierung von Eingangsignalen / Störungen, die oft sinusförmig, z. B. die 50-Herz-Netzstörung, Schwingungen einer Brücke, usw.

Vorgehen - Umwandlung der Übertragungsfunktion von der kartesischen in die Polarform

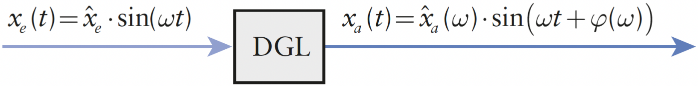
- Ziel: getrennte Darstellung von Amplitude und Phase
- Tools zu Bewertung der Leistungsfähigkeit, Stabilität, usw.: Bode- und Nyquist-diagramm

Beschreibung des dynamischen Verhaltens mithilfe des Frequenzgangs

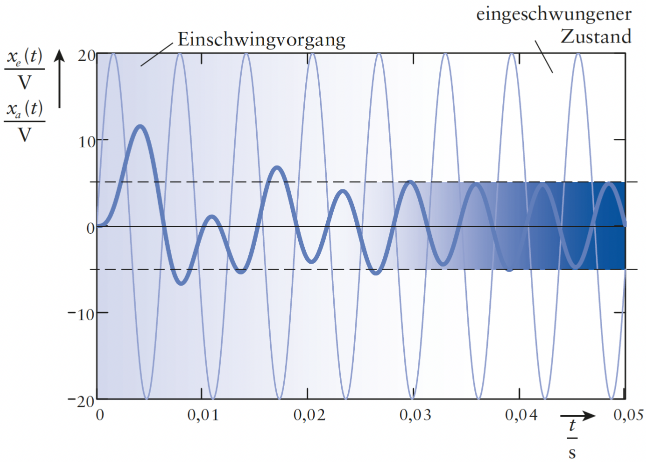
- Das Übertragungsverhalten von Regelkreisen wird mittels Differentialgleichungen im Zeitbereich für Testfunktionen berechnet
- Neben **aperiodischen** Testfunktionen wie Impuls-, Sprung- und Rampenfunktion benutzt man **periodische Funktionen**, z.B. sinusförmige Signale
- Die Analyse mit solchen Signalen führt zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens im **Frequenzbereich**

Beschreibung des dynamischen Verhaltens mithilfe des Frequenzgangs

- ein periodisches Eingangssignal führt nach dem Einschwingvorgang zu einem Ausgangssignal, das ebenfalls periodisch ist (LZI-System!)
- dieses Signal hat die **gleiche Frequenz**, aber eine **andere Amplitude und Phasenlage** als das Eingangssignal - Beispiel Sinuidale Anregung:



Beispiel - Einschwingvorgang des RLC-Gliedes



Technology Arts Sciences TH Köln

Übertragungsfunktion versus Frequenzgang

- Ermittlung der Frequenzgangfunktion aus einer Übertragungsfunktion

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$

Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

$$\xRightarrow{s = j\omega}$$

Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_0^\infty x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Übertragungsfunktion

$$G(s)$$

$$\xRightarrow{s = j\omega}$$

Frequenzgang

$$G(j\omega)$$

Übertragungsfunktion versus Frequenzgang

- Darstellung in Polarkoordinaten

$$\underbrace{G(j\omega) = \mid G(j\omega) \mid}_{\text{Amplitudengang: } \mid G(j\omega) \mid} e^{j \angle G(j\omega)}$$

Amplitudengang

Phasengang

$$G(j\omega) = \mid G(j\omega) \mid e^{j \angle G(j\omega)}$$

Technology Arts Sciences TH Köln

Amplituden- und Phasengang

- Der **Amplitudengang** eines Systems beschreibt das *Verhältnis* der Signalamplituden von *Eingangs- und Ausgangsgrößen*:

$$| G(j\omega) | = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{G(j\omega)\} + \mathrm{Im}^2\{G(j\omega)\}}$$

- Der **Phasengang** eines Systems zeigt die *Phasenverschiebungen* der Frequenzkomponenten im Ausgangssignal an, die sie auf dem Weg durch das Übertragungsglied in Bezug zu den Frequenzkomponenten des Eingangssignals erfahren:

$$\angle G(j\omega) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}$$

Übungsaufgabe - Berechnung des Frequenzgangs und der Systemantwort

- Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 0.1}{s + 5}$$

- Gesucht ist der Frequenzgang sowie die Amplitude- und Phasenantwort für folgende Test-/ Anregungsfunktion:

$$w(t) = \cos(2t)$$

Übungsaufgabe - Berechnung des Frequenzgangs und der Systemantwort

- Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 0.1}{j\omega + 5}$$

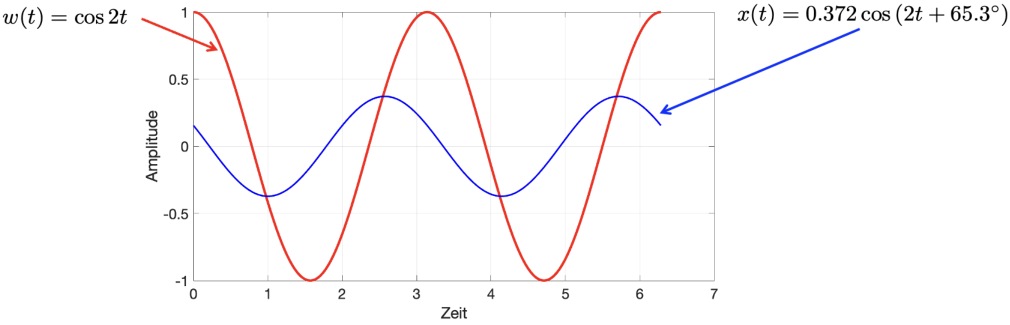
- Amplituden und Phasengang:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2 + 0.01}}{\sqrt{\omega^2 + 25}} \text{ und } \angle G(j\omega) = \Phi(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{0.1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{5}\right)$$

- Mit der Testfunktion:

$$|G(j2)| = \frac{\sqrt{2^2 + 0.01}}{\sqrt{2^2 + 25}} = 0.372 \text{ und } \Phi(j2) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{0.1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) = 65.3^\circ$$

Übungsaufgabe - Berechnung des Frequenzgangs und der Systemantwort

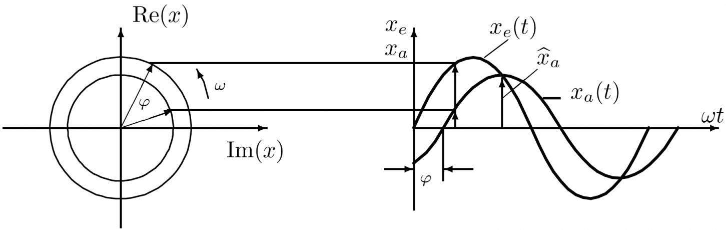


Zeigeradarstellung der Ein-/Ausgangsschwingungen

- ersetzt man die sinusförmigen Ein-/Ausgangssignale in der Gaußschen Zahlenebene durch ihren komplexen Zeiger erhält man

$$x_e(t) = \widehat{x}_e \cdot \sin \omega t = \widehat{x}_e \cdot e^{j\omega t}$$

$$x_a(t) = \widehat{x}_a \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \widehat{x}_a \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}.$$



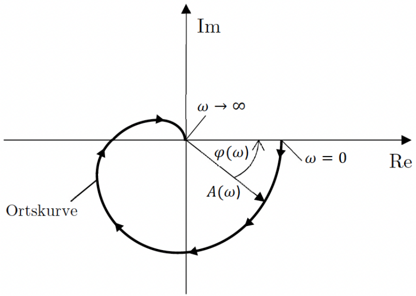
Grafische Darstellung des Frequenzganges

Die aus dieser Zeigerdarstellung zu entwickelnde grafische Darstellung des Frequenzganges kann auf zwei Arten erfolgen:

- **Ortskurve** in der komplexen Ebene, oder
- Darstellung von Betrag und Phase im **Bode-Diagramm**.

Ortskurve (Nyquist Diagramm)

- Die Ortskurve ist die Darstellung des Frequenzgangs in der komplexen Zahlenebene
- Sie bietet die Möglichkeit Amplitude und Phase in einem Diagramm darzustellen, wobei die kurve bei $\omega = 0$ beginnt und bei $\omega = \infty$ endet



Beispiel - Erstellung einer Ortskurve

- Vorgegebenen Frequenzgang eines PT1-Systems:

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$$

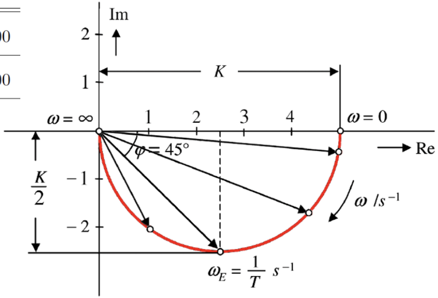
- Zunächst die Aufteilung in Real- und Imaginärteil, nach konjugiert komplexer Erweiterung:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\omega T)} \cdot \frac{(1 - j\omega T)}{(1 - j\omega T)} = \frac{K}{(1 + \omega^2 T^2)} - \frac{j\omega TK}{(1 + \omega^2 T^2)}$$

Beispiel - Erstellung einer Ortskurve

- Die Wertetabelle zeigt die Real- und Imaginärteile des Frequenzgangs $G(j\omega)$, wenn ω von 0 bis ∞ für die angegebenen Werte von $K = 5, T = 1$ variiert

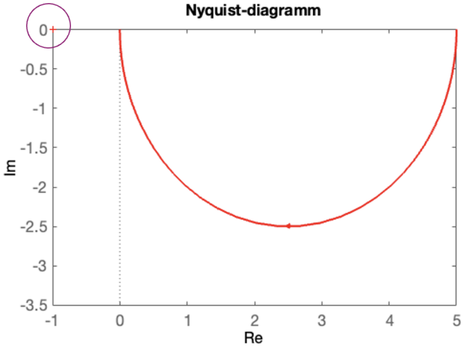
ω	0	0.5	1	2	4	5	10	20	30	100	1000	∞
$\mathrm{Re}(G)$	5	4	2.5	1	0.29	0.19	0.05	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
$\mathrm{Im}(G)$	0	-2	-2.5	-2	-1.18	-0.96	-0.50	-0.25	-0.17	-0.05	0.00	0.00



Nyquist Diagramm in Matlab

- Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{5}{1+s \cdot T}$

```
zaehler = 5;
nenner  = [1 1];
sys     = tf(zaehler,nenner);% Übertragungsfunktion

nyquist(sys)%  Nyquist-diagramm
[re,im] = nyquist(sys,2); % Re. und Im. von G(s) bei w=2
```

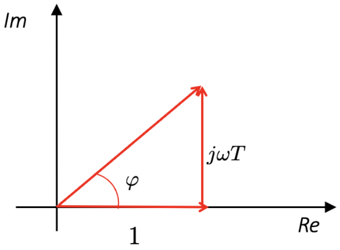


Bode-Diagramm

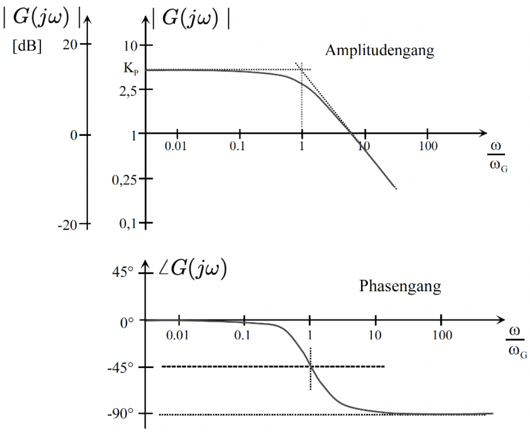
- Aufteilung in zwei Diagramme (anders als bei der Ortskurve)
  - Der Amplitudengang $\mid G(j\omega) \mid$
  - Der Phasengang $\angle G(j\omega)$
- Der Phasenwinkel wird linear in Grad aufgetragen
- Amplitudengang wird häufig in Dezibel angegeben $\mid G(j\omega) \mid = 20lg\frac{|X(s)|}{|W(s)|}$

Bode-Diagramm: PT1-System

- Frequenzgang $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$
- Phasengang $\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{1+j\omega T} = 0 - \arctan(\omega T)$
- Amplitudengang $| G(j\omega) | = \frac{1}{\sqrt{1^2+(\omega T)^2}}$



Bode-Diagramm: PT1-System



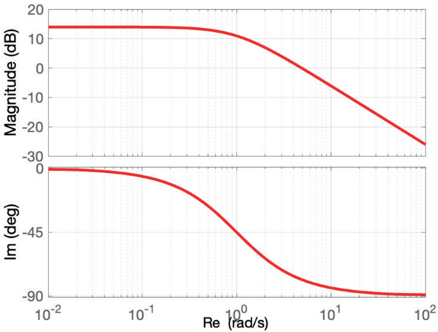
$$|G(j\omega)| = \frac{K_p}{\sqrt{1^2 + (\omega T)^2}}$$

Bode-Diagramm in Matlab

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$G(iw) = \frac{1}{(iw+1)}\frac{1-iw}{(1-iw)} = \frac{1-iw}{1+w^2}$$

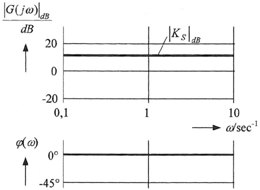
```
zaehler = 5;
nenner  = [1 1];
sys     = tf(zaehler,nenner);% Übertragungsfunktion

bode(sys)%  Bode-diagramm
[re,im] = bode(sys,2); % Re. und Im. von G(s) bei w=2
```



Grundformen beim Bode-Diagramm (1)

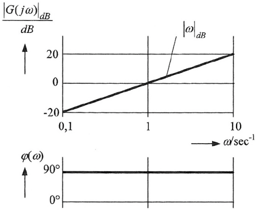
Grundform I
P-Verhalten

$$G(j\omega) = K_S$$



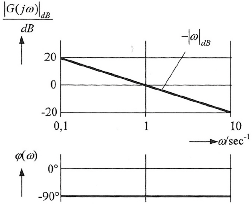
Grundform II
D-Verhalten

$$G_D(j\omega) = j\omega$$



Grundform III
I-Verhalten

$$G_I(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

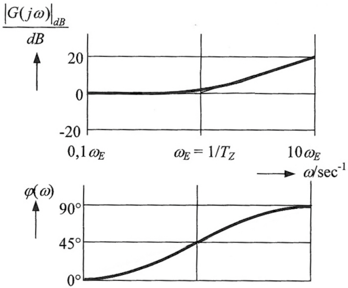


Technology
Arts Sciences
TH Köln

Grundformen beim Bode-Diagramm (2)

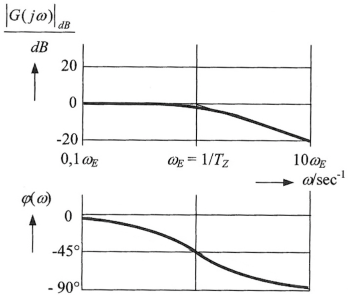
Grundform IV
PD-Verhalten

$$G_Z(j\omega) = 1 + j\omega \cdot T_Z$$



Grundform V
P-T$_1$-Verhalten

$$G_N(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \cdot T_N}$$



Bestimmung der Modellparameter

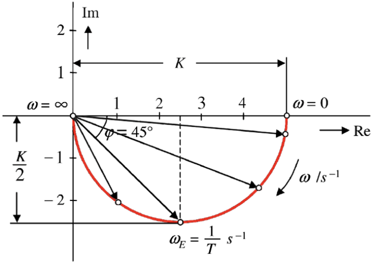
Aus bekannten Amplitudengängen kann man die Modellparameter in folgenden Schritten bestimmen

- Annäherung des Amplitudengangs mit Asymptoten
- Bestimmung des Modelltyps durch Vergleich mit Tabellen
- Bestimmung der Lage der Asymptote bei niedrigen Frequenzen
- Bestimmung der **Eck- bzw. Grenzfrequenzen** an den Schnittstellen der Asymptoten

Eck- bzw. Grenzfrequenz

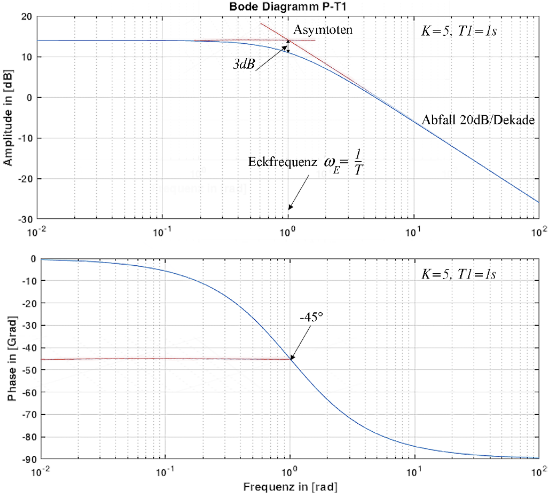
Definition:

- Bei der Frequenz ω_G fällt der Amplitudengang auf $\frac{1}{\sqrt{2}}$ seines Werts bei der Frequenz $\omega = 0$ ab
- Dies entspricht einem Rückgang um 3 dB - daher auch 3-dB-Punkt genannt
- **Ortskurve** ω_G bzw. ω_E markiert den unteren Scheitelpunkt der Kurve



Eck- bzw. Grenzfrequenz

- **Bode Diagramm** - bei ω_G bzw. ω_E ist der Amplitudengang um 3 dB gegenüber dem Maximalwert abgesunken



Übungsaufgabe - Bode-Diagramm

Der Frequenzgang eines offenen Regelkreises lautet

$$G(j\omega) = \frac{2 \cdot K_P}{(j\omega) \cdot (1 + j\omega)^2}$$

1. Skizzieren Sie mit Hilfe von Geraden das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises mit $K_P = 5$.
2. Bei welchem Wert von K_P befindet sich der Regelkreis an der Stabilitätsgrenze?

Lernziele dieser Vorlesung

Nach dem Studium dieses Abschnitts können Sie ...

1. Pole und Nullstellen von vorgegebenen Übertragungsfunktionen berechnen
2. Das Stabilitätsverhalten der Übertragungsfunktion mithilfe der Polestellen bestimmen
3. Frequenzgang eines Systems berechnen und in einer Ortskurve oder Bode-Diagramm darstellen
4. Komplexe Systeme in elementare Einheiten zerlegen

Fragen zur Selbstkontrolle

1. Welchen Einfluss haben Nullstellen auf ein dynamisches System?
2. Mit welcher Funktion lässt sich in Matlab ein Nyquist-Diagramm darstellen?
3. Wie kann man das Stabilitätsverhalten eines Systems anhand der Eigenwerte der Pole bestimmen?
4. Was sind Amplituden- und Phasengang eines Systems und welche Informationen liefern diese Kenngrößen?
5. Wie lässt sich die Eck- oder Grenzfrequenz aus einem Bodediagramm bestimmen?

Übungsaufgabe 5.1

Berechnen Sie die Pole und Nullstellen der folgenden Übertragungsfunktion und stellen Sie diese anschließend in einem PN-Diagramm dar.

$$G(s) = \frac{0{,}3s + 1}{s^3 + 6s^2 + 13s + 20}$$

Übungsaufgabe 5.2

Welche der folgenden Systeme sind stabil?

$$\text{a) } G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$\text{b) } G(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 4}$$

$$\text{c) } G(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 3}$$

Übungsaufgabe 5.3

Im Folgenden soll die Übertragungsfunktion des Systems anhand der gegebenen Differentialgleichung bestimmt werden. Anschließend sind die Pole und Nullstellen zu berechnen und in einem PN-Diagramm darzustellen.

$$\dddot{y} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} = 8u$$

wobei:

$$\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$$

Übungsaufgabe 5.4

Der Frequenzgang eines offenen Regelkreises lautet

$$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega \cdot (1 + 2j\omega)}$$

1. Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Frequenzen $\omega = (0; 0{,}3; 0{,}4; 0{,}5; 0{,}7; 1; \infty)$.
2. Zeichnen Sie die Ortskurve und tragen Sie die entsprechende Frequenzmarkierungen ein.