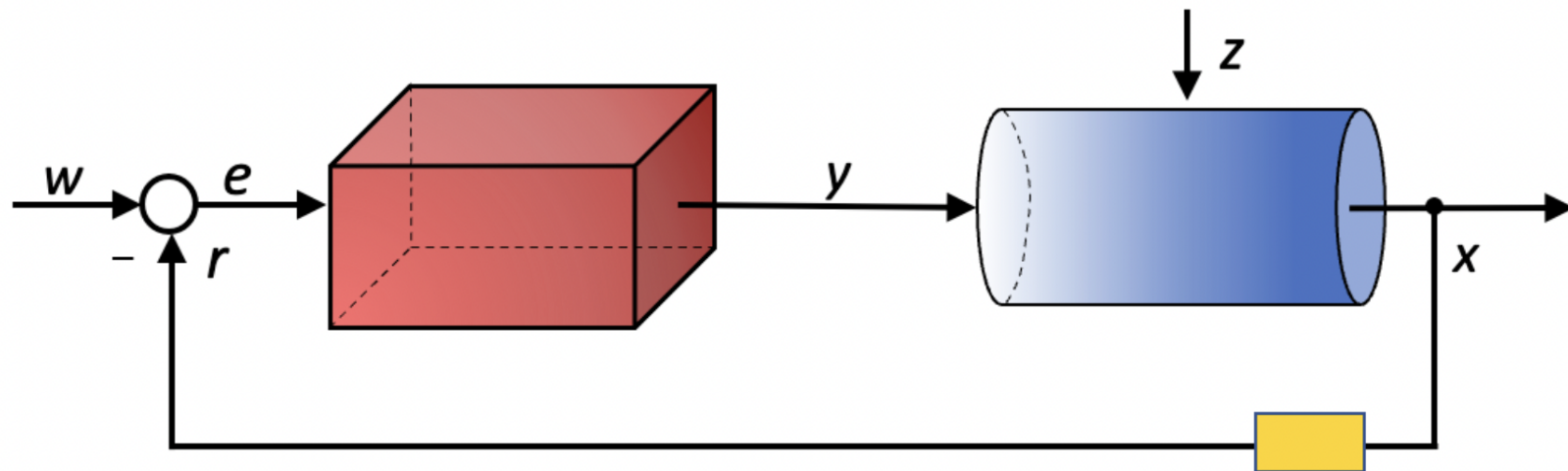


2. Modellbildung in der Regelungstechnik



Inhalt

1. Entwicklung mathematischer Modelle dynamischer Systeme
2. Modelle unterschiedlicher Systeme
 - ▶ Elektrische Systeme
 - ▶ Mechanische Systeme
 - ▶ Rotierende Systeme
 - ▶ Thermische Systeme
 - ▶ Hydraulische Systeme
3. Übertragungsverhalten elementarer Regelkreisglieder

Motivation

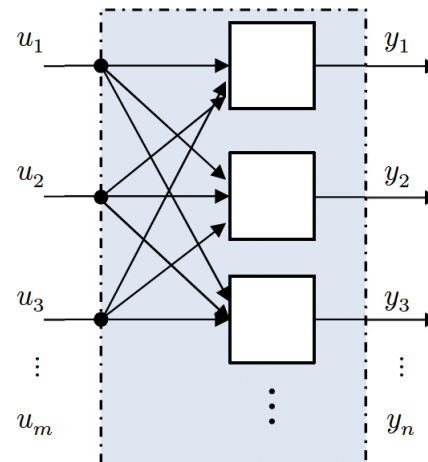
Wofür braucht man eine mathematische Beschreibung eines dynamischen Systems?



Motivation

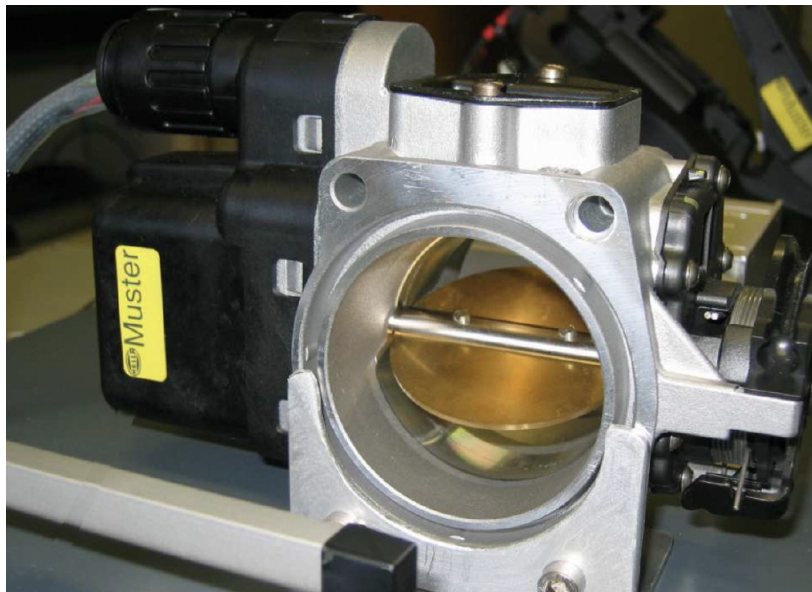
Wofür braucht man eine mathematische Beschreibung eines dynamischen Systems?

- ▶ um das System(e) regelungstechnisch behandeln zu können
- ▶ für Simulationszwecke (mathematisches Modell)
- ▶ ...



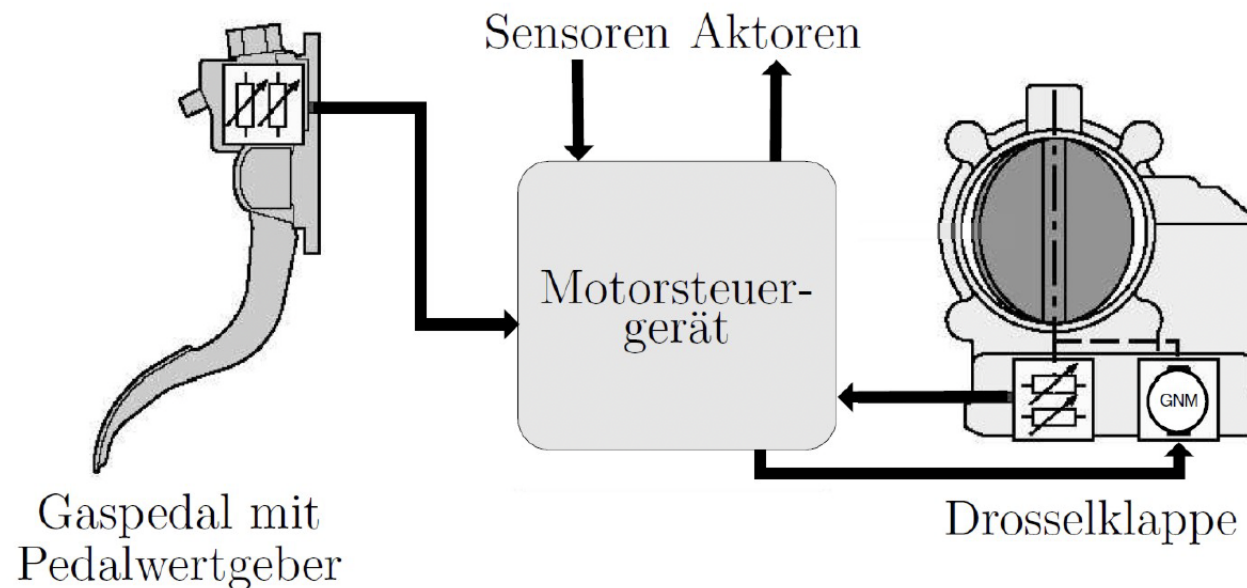
Beispiel: Elektronische Drosselklappe (EDK)

Elektronische Drosselklappen zeichnen sich durch eine mechanische Entkoppelung des Fahrpedals von der Drosselklappe aus



Beispiel: E-Gas System mit EDK

E-Gas-System oder Drive-by-Wire: Dieser Verbund besteht aus einer elektronischen Drosselklappe, einem Pedalwertgeber und einer elektronischen Regelung.



Das mathematische Modell

- ▶ Ein *mathematisches Modell* beschreibt das Zusammenspiel von einzelnen Komponenten eines komplexen Systems (aus der Natur), mit den Mitteln der Mathematik.
- ▶ Das Modell ist eine vereinfachte (abstrakte) Darstellung des komplexen Systems → es muss abgewogen werden, welche Details des realen Systems modelliert werden sollen
- ▶ das Modell weist folgende Bestandteile und Eigenschaften auf
 - ▶ Variable
 - ▶ Gleichungen
 - ▶ Nebenbedingungen

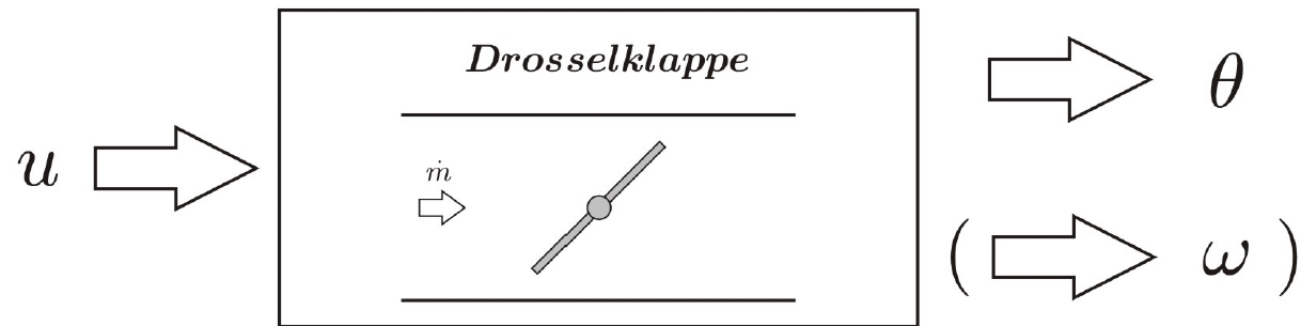
Das mathematische Modell - *Variable*

Variable - jedes System wird durch eine gewisse Menge *unabhängiger* und *abhängiger Variablen* geprägt

- ▶ **Unabhängige Variable** - sind Eingangsgrößen, die unabhängig von dem im System ablaufenden Prozess sind, sie lassen sich untergliedern in:
 - ▶ Steuergrößen - frei wählbare Größen, mit denen das System gesteuert werden kann.
 - ▶ Störgrößen
- ▶ **Abhängige Variable**
 - ▶ Zustandsgrößen - dies sind Größen, die das innere Verhalten eines Systems, also seinen Zustand, widerspiegeln.
 - ▶ Ausgangsgrößen - sie stehen im funktionellen Zusammenhang zu den Eingangs- und Zustandsgrößen.

Beispiel: Mathematisches Modell einer EDK

- ▶ die Eingangsgröße ist die am Elektromotor anliegende Spannung u .
- ▶ Als Ausgangsgröße dient der Winkel, der über ein Potentiometer gemessen wird θ .



Das mathematische Modell - *Gleichungen*

- ▶ Das Abbild der Wirkungsweise des Systems wird durch eine Gesamtheit von Gleichungen bzw. sonstigen funktionellen Zusammenhängen der *einzelnen Variablen* untereinander beschrieben.
- ▶ Die Gleichungen umfassen den Bereich der gewöhnlichen und partiellen Differenzial- und Differenzengleichungen.
- ▶ Sie können sowohl lineares als auch nichtlineares Verhalten aufweisen

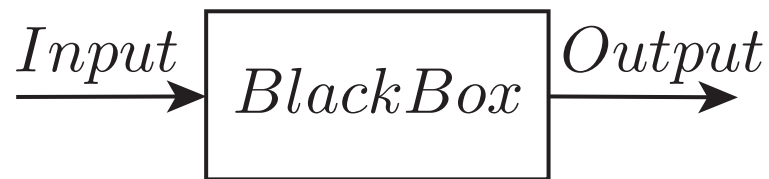
Vorgehen bei der Modellbildung

- ▶ Bei der Modellbildung klärt man zunächst ab, welche Größen (Variable) und welche Zusammenhänge zur Beschreibung des komplexen Originalsystems überhaupt relevant sind.
- ▶ Zur Abbildung in ein mathematisches Modell beschreibt man die Zusammenhänge zwischen den Größen durch Gleichungen

Vorgehen bei der Modellbildung

1. Schritt der Modellbildung

- ▶ *Black Box* → ein Objekt, von dem zunächst nur das Verhalten über definierte äußere Schnittstellen bekannt ist.
- ▶ Zunächst werden nur die Ein- bzw. Ausgangsgrößen untersucht, d.h. gezielt den Input (Eingangsgrößen) ändern und beobachten wie sich der Output (Ausgangsgrößen) ändert



Vorgehen bei der Modellbildung

2. Schritt der Modellbildung

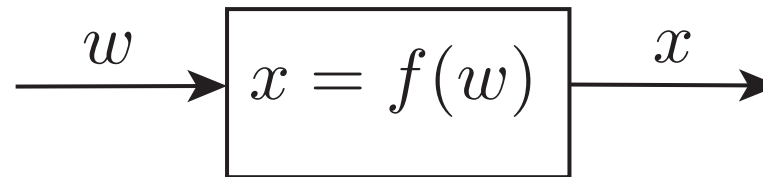
- ▶ Dann wird *versucht*, die innere unbekannte Struktur zu modellieren
- ▶ w ist die unabhängige und x die abhängige Variable



Vorgehen bei der Modellbildung

3. Schritt der Modellbildung

- ▶ Letztlich *versucht* man einen mathematischen Zusammenhang zwischen der Änderung der Ausgangsgröße in Abhängigkeit von einer Änderung der Eingangsgröße herzustellen.



Modelle unterschiedlicher Systeme

Zielsetzung

- ▶ Im folgenden Abschnitt wird beschrieben, wie die Input-Output-Beziehungen der Systeme ermittelt werden können.
- ▶ Dies wird erreicht, indem sie durch vereinfachte Modelle dargestellt werden, die aus wenigen Grundelementen bestehen.

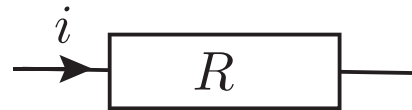
Elektrische Systeme

- ▶ Die Grundelemente elektrischer Systeme sind der *Widerstand*, die *Spule* und der *Kondensator*
- ▶ Für die Entwicklung von Modellen elektrischer Schaltungen verwenden wir die Kirchhoffschen Regeln \Rightarrow Der *Knotenpunkt*- und der *Maschensatz*.

Elektrische Systeme

1. Widerstand

- ▶ Für einen Widerstand R ergibt sich die Potentialdifferenz U , wenn durch ihn ein Strom i fließt, wie folgt: $U = Ri$



Elektrische Systeme

2. Spule

- ▶ Die Potentialdifferenz U über einer Induktionsspule mit der Induktivität L hängt zu einem bestimmten Zeitpunkt von der Änderungsrate des Stroms i ab und hat einen Wert von:

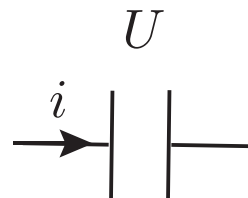
$$U = L \frac{di}{dt}$$



Elektrische Systeme

3. Kondensator

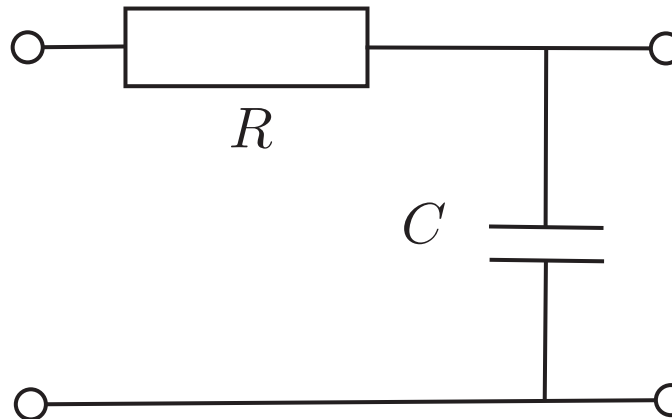
- ▶ Bei einem Kondensator hängt die Potentialdifferenz U von der Ladung q an den Kondensatorplatten mit $U = q/C$ ab, wobei C die Kapazität ist.
- ▶ damit gilt: $U = \frac{1}{C}q$ und $i = C \frac{dU}{dt}$



Übungsaufgabe

Modellbildung beim elektrischen System mit Widerstand und Kapazität

- ▶ Leiten Sie ein Modell für das unten dargestellte elektrische System ab.



Lösung

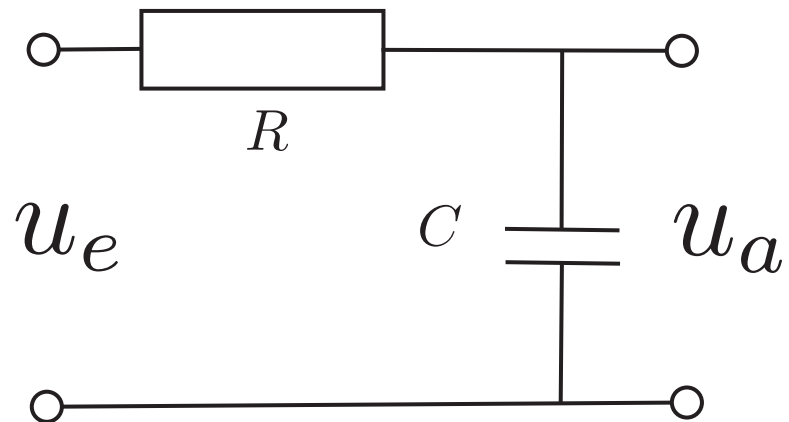
1. Schritt der Modellbildung

- ▶ Was sind die Ein- bzw. Ausgangsgrößen?
- ▶

Lösung

1. Schritt der Modellbildung

- ▶ Was sind die Ein- bzw. Ausgangsgrößen?
- ▶ Die Eingangsspannung u_e und die Ausgangsspannung u_a .



Lösung

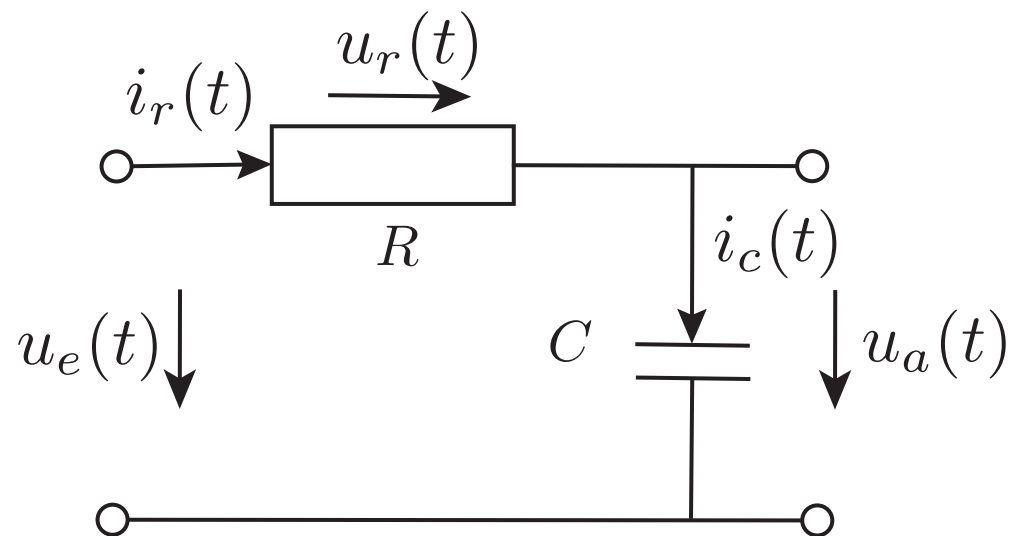
2. Schritt der Modellbildung

- ▶ Wie ist die *innere Struktur*?
- ▶

Lösung

2. Schritt der Modellbildung

- ▶ Wie ist die *innere Struktur*?
- ▶ Grundelemente \Rightarrow der Kondensator, der Widerstand und die Batterie.



Lösung

3. Schritt der Modellbildung

- ▶ Mathematisches Modell?

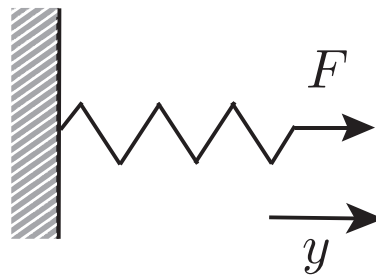
Mechanische Systeme

- ▶ Mechanische Systeme, egal wie komplex sie sind, besitzen Steifigkeit (oder Federung), Dämpfung und Trägheit.
- ▶ Sie bestehen aus Grundelementen, die durch **Federn**, **Dämpfer** und **Massen** dargestellt werden können.

Mechanische Systeme

1. Feder

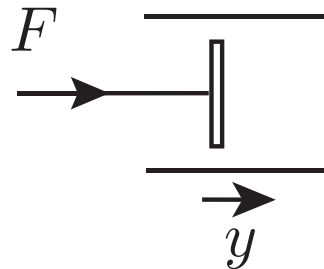
- ▶ bei einer linearen Feder ist die Ausdehnung y proportional zur aufgebrachten äußeren Kraft F
- ▶ dieses elastische Verhalten wird durch das *Hooke'sche Gesetz* beschrieben: $F = ky$
- ▶ die Proportionalitätskonstante k wird als *Federkonstante* oder *Richtgröße* bezeichnet



Mechanische Systeme

2. Dämpfer

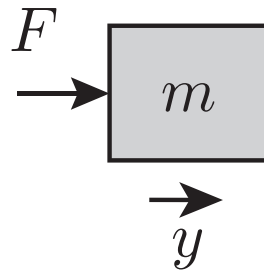
- ▶ i.d.R. ist das ein Kolben, der sich in einem viskosen Medium in einem Zylinder bewegt
- ▶ Die Bewegung des Kolbens nach innen erfordert, dass die eingeschlossene Flüssigkeit über die Kanten des Kolbens hinausfließt und umgekehrt
- ▶ Die Widerstandskraft F , die überwunden werden muss, ist proportional zur Geschwindigkeit des Kolbens, d.h. $F = c \frac{dy}{dt}$



Mechanische Systeme

3. Masse

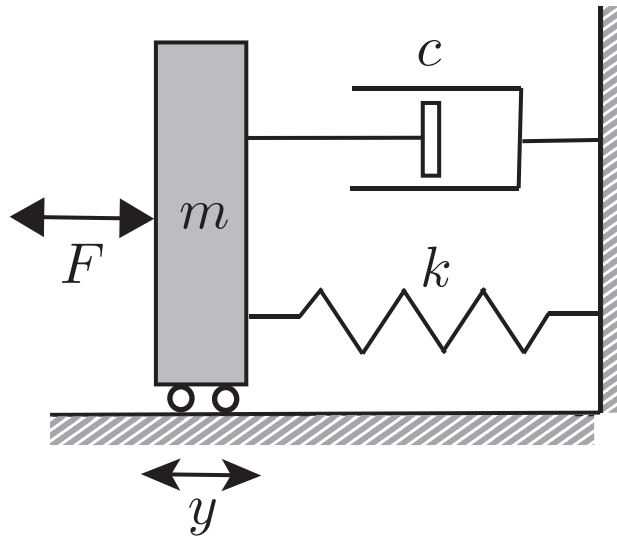
- ▶ Die Trägheit eines Systems, d. h. sein Widerstand gegen eine Beschleunigung, kann durch die Masse dargestellt werden.
- ▶ Für eine Masse m ist die Beziehung zwischen der aufgebrauchten Kraft F und ihrer Beschleunigung a durch das zweite Newtonsche Gesetz als $F = ma$ gegeben, d.h. $F = m \frac{dy^2}{dt^2}$



Übungsaufgabe

Modellbildung beim Feder-Masse-Dämpfer System

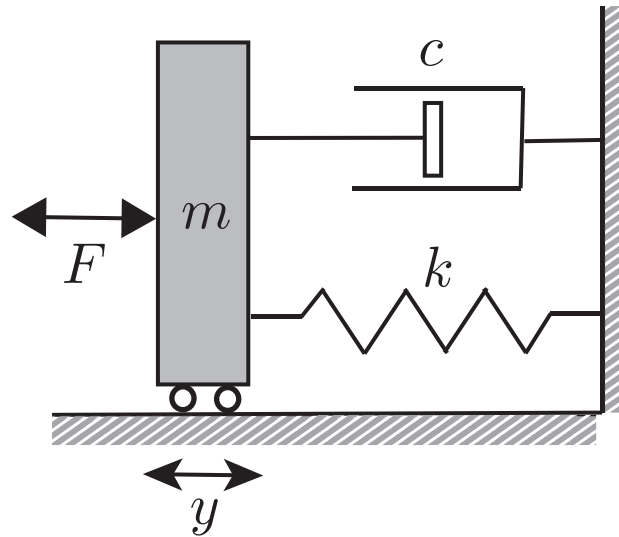
- ▶ Leiten Sie ein Modell für das unten dargestellte mechanische System ab.
- ▶ Die Eingangsgröße des Systems ist die Kraft F und die Ausgangsgröße ist die Verschiebung y .



Lösung

1. Schritt der Modellbildung

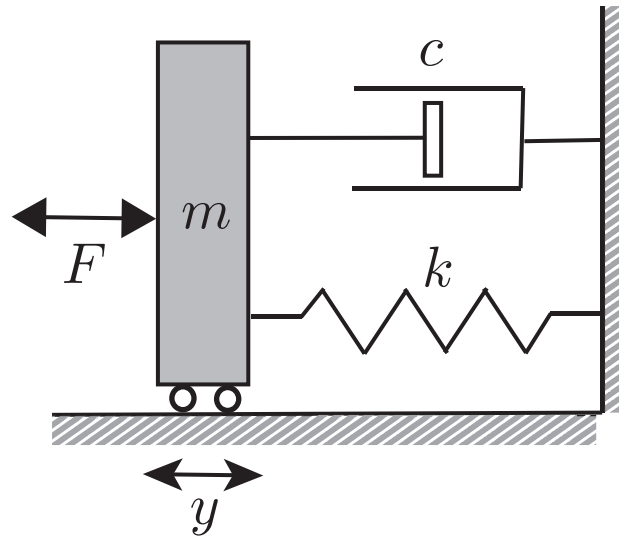
- ▶ Was sind die Ein- bzw. Ausgangsgrößen?
- ▶



Lösung

1. Schritt der Modellbildung

- ▶ Was sind die Ein- bzw. Ausgangsgrößen?
- ▶ Die Eingangsgröße des Systems ist die Kraft F und die Ausgangsgröße ist die Verschiebung y .



Lösung

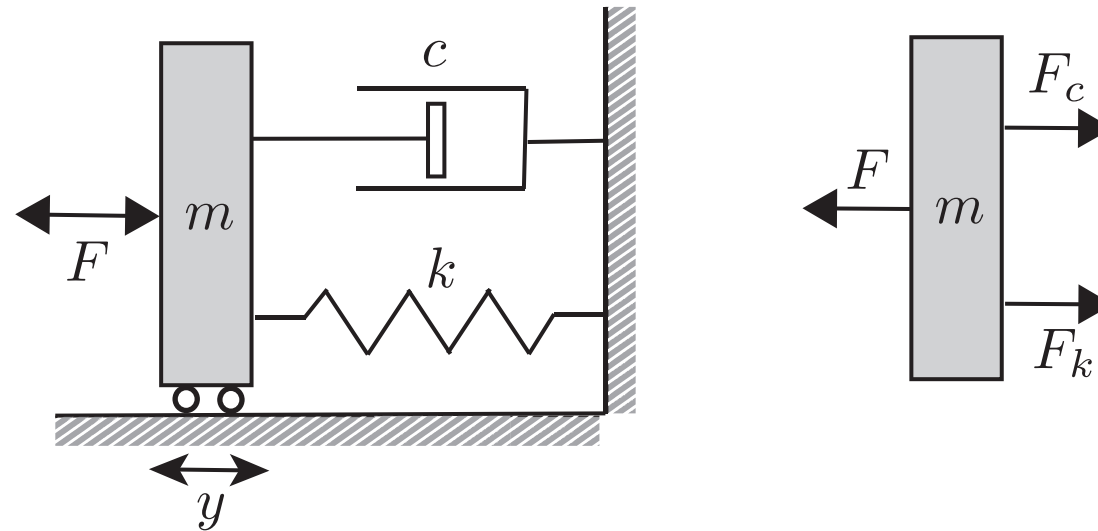
2. Schritt der Modellbildung

- ▶ Wie ist die *innere Struktur*?
- ▶
- ▶

Lösung

2. Schritt der Modellbildung

- ▶ Wie ist die *innere Struktur*?
- ▶ Freikörperbild erstellen
- ▶ Grundelemente \Rightarrow die Feder, der Dämpfer und die Masse.



Lösung

3. Schritt der Modellbildung

- ▶ Mathematisches Modell?

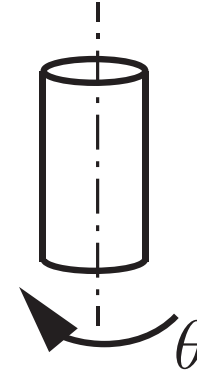
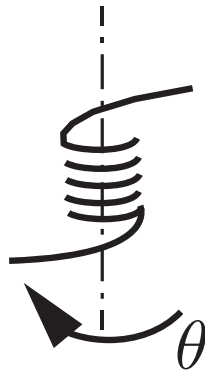
Rotierende Systeme

- ▶ Für rotierende Systeme sind die Grundelemente
 - ▶ eine Torsionsfeder
 - ▶ ein Rotationsdämpfer
 - ▶ das Trägheitsmoment

Rotierende Systeme

1. Torsionsfeder

- ▶ die Torsionsfeder stellt die *Federung* oder *Steifigkeit* eines rotierenden Elements dar, wie unten abgebildet
- ▶ der Drehwinkel θ ist proportional zum Drehmoment T : $T = k\theta$

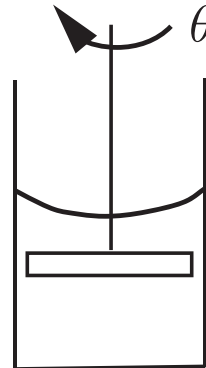


Rotierende Systeme

2. Rotationsdämpfer

- ▶ dies stellt eine Scheibe dar, die sich in einer Flüssigkeit dreht
- ▶ der Widerstandsmoment T ist proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω und damit:

$$T = c\omega \frac{d\theta}{dt}$$



Rotierende Systeme

3. Das Trägheitsmoment

- ▶ die Trägheit eines rotierenden Systems wird durch das Trägheitsmoment einer Masse dargestellt
- ▶ ein Drehmoment T , das auf eine Masse mit einem Trägheitsmoment I ausgeübt wird, führt zu einer Winkelbeschleunigung a , d.h.: $T = Ia = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$



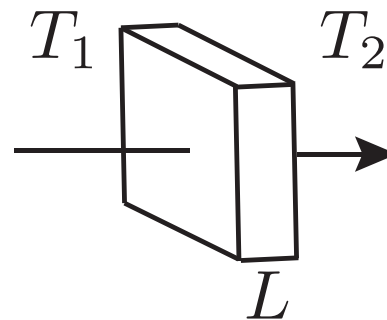
Thermische Systeme

- ▶ Thermische Systeme haben zwei Grundbausteine, nämlich:
 - ▶ den *Wärmewiderstand*, und
 - ▶ die *Wärmekapazität*.

Thermische Systeme

1. Wärmewiderstand

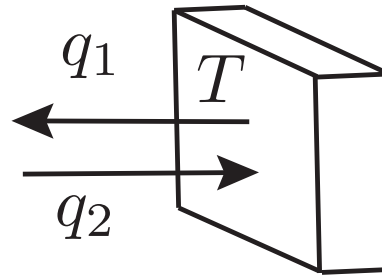
- ▶ Der Wärmewiderstand R ist der Widerstand, der dem Wärmestrom q entgegengesetzt wird und ist definiert durch: $q = \frac{T_1 - T_2}{R}$
- ▶ Bei der Wärmeleitung durch einen Festkörper ist der Wärmestrom proportional zur Querschnittsfläche A und zum Temperaturgradienten, d.h. $q = Ak \frac{T_1 - T_2}{L}$, wobei k die Wärmeleitfähigkeit ist.



Thermische Systeme

2. Wärmekapazität

- ▶ Die thermische Kapazität ist ein Maß für die in einem System gespeicherte interne Energie.
- ▶ Wenn der Wärmestrom in ein System q_1 und der Wärmestrom aus dem System q_2 beträgt, ist die Änderungsrate der inneren Energie des Systems $q_1 - q_2$.
- ▶ Eine Zunahme der inneren Energie kann zu einer Änderung der Temperatur führen, also:
$$q_1 - q_2 = C \frac{dT}{dt},$$
 wobei $C = mc$, m die Masse und c die spezifische Wärmekapazität ist.



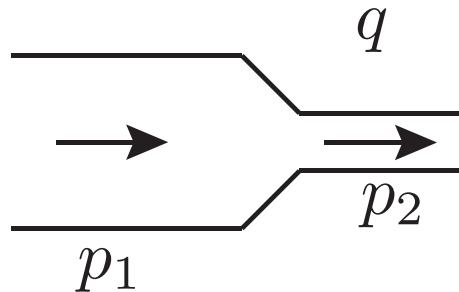
Hydraulische Systeme

- ▶ Für ein hydraulisches System sind die drei Grundelemente:
 - ▶ hydraulischer Widerstand,
 - ▶ hydraulische Kapazität und
 - ▶ hydraulische Trägheit.
- ▶ Das Äquivalent des elektrischen Stroms ist die volumetrische Durchflussmenge und die Potentialdifferenz ist die Druckdifferenz.
- ▶ Wir betrachten hier nur den einfacheren Fall von hydraulischen Systemen, d. h. wir schließen inkompressible Flüssigkeiten aus.

Hydraulische Systeme

1. Hydraulischer Widerstand

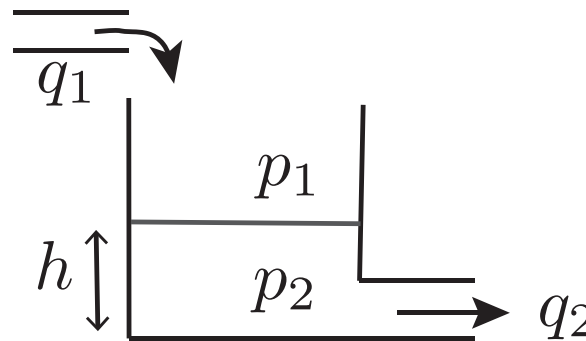
- ▶ Der hydraulische Widerstand R ist der Strömungswiderstand, der entsteht, wenn eine Flüssigkeit von einem Rohr mit Radius r_1 in ein anderes mit Radius r_2 fließt.
- ▶ Sie ist definiert als das hydraulische Äquivalent des Ohmschen Gesetzes: $p_1 - p_2 = Rq$, wobei q die Durchflussmenge und p der Druck ist.



Hydraulische Systeme

2. Hydraulische Kapazität

- ▶ Die hydraulische Kapazität C ist die potenzielle Energie einer bestimmten Flüssigkeit
- ▶ Die Änderungsrate des Volumens V der *gespeicherten* Flüssigkeit ist gleich der Differenz zwischen der volumetrischen Rate q_1 , mit der die Flüssigkeit in den Behälter einströmt, und der Rate q_2 , mit der sie ihn ausströmt, d.h. $q_1 - q_2 = C \frac{dp}{dt}$, wobei $C = \frac{A}{\rho g}$, ρ die Dichte, $h = V/A$ die Höhe und g die Erdbeschleunigung ist.



Hydraulische Systeme

3. Hydraulische Trägheit

- ▶ die Trägheit eines rotierenden Systems wird durch das Trägheitsmoment einer Masse dargestellt
- ▶ ein Drehmoment T , das auf eine Masse mit einem Trägheitsmoment I ausgeübt wird, führt zu einer Winkelbeschleunigung a , d.h.: $T = Ia = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$



Lernziele dieser Vorlesung

Nach dem Studium dieses Abschnitts können Sie ...

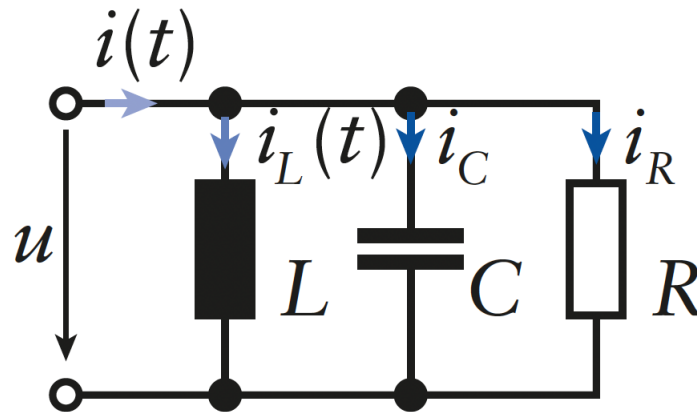
1. ein technisches system analysieren und charakterisieren
2. einen Wirkungsplan eines technischen erstellen
3. ein mathematisches Modell des technischen Systems erstellen (DGL Ableiten)

Fragen zur Selbstkontrolle

1. Wofür braucht man eine mathematische Beschreibung eines Systems in der Regelungstechnik ?
2. Was versteht man unter einem mathematischen Modells?
3. Beschreiben Sie die für die Regelungstechnik relevante Eingangs- und Ausgangsgrößen bei einem elektronischen Drosselklappe-System.
4. Welche Rolle spielt die Regelung der elektronischen Drosselklappe?
5. Was sind die drei Schritte in der Modellbildung?

Übung 1: Elektrischer Schwingkreis

Das folgende elektrische Netzwerk soll analysiert werden. Der Schwingkreis wird durch den Strom $i(t)$ angeregt, welcher als Eingangsgröße dient. Als Ausgangsgröße soll der Strom durch die Spule $i_L(t)$ ermittelt werden. Wie lautet die Differentialgleichung für dieses System?



Übungsaufgabe 2: Modell eines RLC-Schaltkreises.

Entwickeln Sie ein Modell für die unten gezeigte Schaltung mit einer Eingangsspannung u , wenn der Schalter geschlossen ist, und einer Ausgangsspannung u_C über dem Kondensator.

