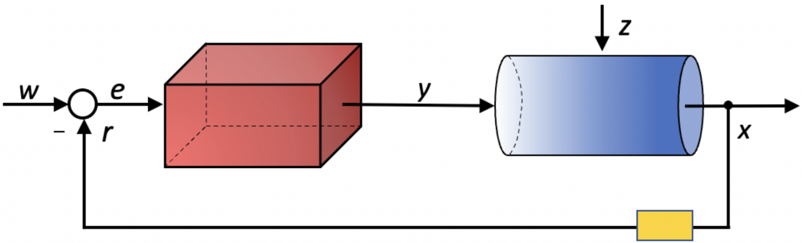
3. Grundlagen der Regelungstechnik



Inhalt

Technisches System

Was ist ein technisches *System*?

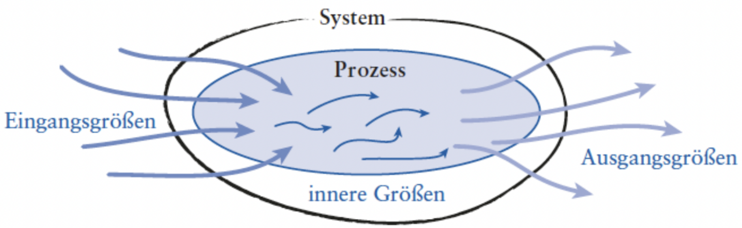
Technisches System

Was ist ein technisches *System*?

- Ein technisches System (bsp. Motor) ist eine Anordnung von Bauteilen, die durch ihr Zusammenwirken eine vorgegebene Funktion ausführen

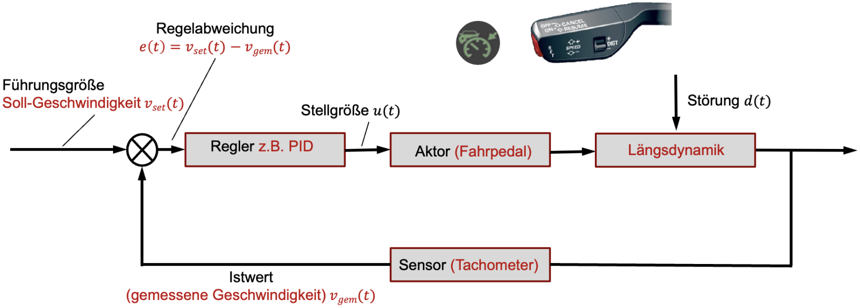
Technisches System

- Ein technisches System (bsp. Motor) ist eine Anordnung von Bauteilen, die durch ihr Zusammenwirken eine vorgegebene Funktion ausführen
- Systemzusammenhänge - die Größen eines Systems müssen:
  - qualitativ eindeutigen Definitionen genügen
  - quantitativ eindeutig bestimmbar sein



Beispiel: Geschwindigkeitsregelanlage (engl. cruise control)

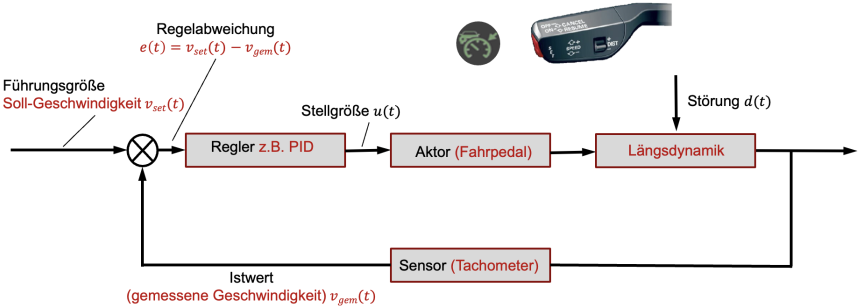
- Geschwindigkeit des Fahrzeugs soll möglichst gut der vom Fahrer vorgegebenen Wunschgeschwindigkeit folgen



Technology Arts Sciences TH Köln

Beispiel: Geschwindigkeitsregelanlage (engl. cruise control)

- Die Regelung erfolgt
  - elektronisch - durch Ändern des Drehmomentes (moderne Fahrzeuge)
  - mechanisch / pneumatisch



Definition eines LZI-Systems

Lineares zeitinvariantes System, LZI-System

Als ein lineares zeitinvariantes System (*engl. linear time-invariant system*) wird ein System bezeichnet, wenn sein Verhalten sowohl die Eigenschaft der **Linearität** aufweist als auch unabhängig von **zeitlichen Verschiebungen** ist.

Lineare und nichtlineare Systeme

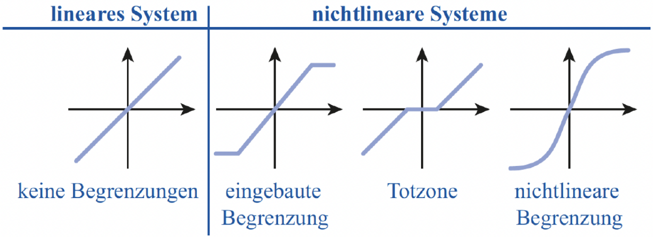
- Ein System besitzt ein **lineares Übertragungsverhalten**, wenn es additiv und homogen auf Eingangssignale reagiert.
- Lineare Systeme sind Systeme, bei denen das Superpositionsprinzip gilt, d.h.:

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x_i(t) = f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot w_i(t)\right)$$

- Ist diese Eigenschaft erfüllt, dann wird das System als linear bezeichnet, andernfalls als **nichtlinear**

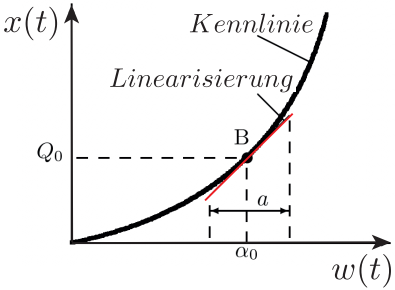
Lineare und nichtlineare Systeme

- Mehrzahl technischer Systeme funktionieren nichtlinear, **Lösung** $\Rightarrow$ Linearisierung.



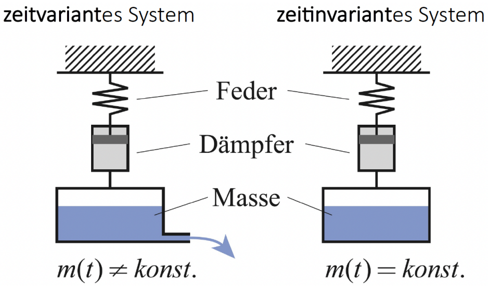
Linearisierung

- Die Linearisierung eines nichtlinearen Systems (Regelkreisgliedes) erfolgt mathematisch durch Bildung der Ableitung am Arbeitspunkt
- Beispiel: Linearisierung einer Ventilkennlinie; **B** - Arbeitspunkt, **a** - linearer Arbeitsbereich, α_o - Arbeitspunkt des Ventils (Winkelstellung)



Zeitvariante und zeitinvariante Systeme

- Ein System verhält sich zeitinvariant, wenn ein zeitverschobenes Eingangssignal $w(t - t_0)$ das zeitverschobene Ausgangssignal $x(t - t_0)$ erzeugt (für eine beliebige Zeit t_0).
- In diesem Modul beschäftigen wir uns ausschließlich mit LZI-Systemen



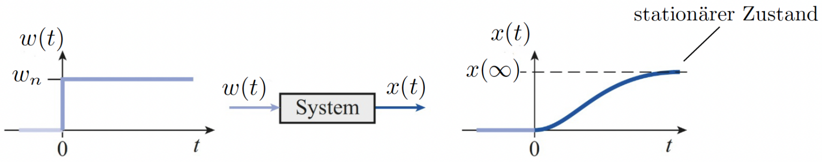
Beispiele für zeitvariante Systemeigenschaften

- Änderung der Trägheit durch Massenverlust (Flugkörper, Fahrzeuge)
- Änderung der Spannung oder des Druckes durch Endladungsvorgänge (Batterien, Speicherbehälter)
- Änderung des Wärmeübergang durch Rußansatz und Verschmutzung (Öfen, Feuerungen)

Dynamisches und statisches Verhalten von Systemen

Dynamisches Verhalten

- Das dynamische Verhalten eines Systems gibt den zeitlichen Verlauf der Ausgangsgrößen als Reaktion auf Veränderungen der Eingangsgrößen an



Dynamisches und statisches Verhalten von Systemen

Statisches Verhalten

- Das statische Verhalten eines Systems beschreibt den zeitunabhängigen Zusammenhang zwischen seinen Ein- und Ausgangsgrößen.
- Es wird graphisch als Kennlinie dargestellt.

Dynamisches vs. statisches Verhalten

Statisches Verhalten

- Veränderung der Ausgangs- nur, wenn sich die Eingangsgröße ändert
- Keine Energiespeicher! keine Eigenbewegung (Eigendynamik)
- Beschreibung durch algebraische Gleichungen
- Beispiel: idealer Messverstärker

Dynamisches Verhalten

- Veränderung der Ausgangs-, ohne dass sich die Eingangsgröße ändert
- Interne Energiespeicher! Eigenbewegung (Eigendynamik)
- Beschreibung durch **Differenzialgleichungen**
- Beispiel: Pendel

Beschreibung von LZI-Systeme im **Zeitbereich** mittels Differentialgleichungen (DGL)

- Technik und Natur sind ständig in Bewegung und somit dynamische, also **zeitabhängige** Systeme.
- zeitliche Veränderungen werden mathematisch mit der Ableitung, bzw. dem Differenzialquotienten von Prozessgrößen beschrieben.

Beschreibung von LZI-Systeme mittels Differentialgleichungen

- dynamische Prozesse lassen sich je nach Komplexität mittels einer oder mehreren Differentialgleichungen beschreiben.
- Gleichungen die das Verhalten zwischen Ein- und Ausgangsgröße beschreiben, sind gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Form:

$$\ldots + a_3\,\dddot{x}(t) + a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = b_0w(t) + b_1\dot{w}(t) + b_2\ddot{w}(t) + b_3\,\dddot{w}(t) + \ldots$$

Beschreibung von LZI-Systeme mittels Differentialgleichungen

Diese Gleichung wird in die regelungstechnische Normalform gebracht:

- Sortierung der Ableitungen, beginnend mit der höchsten Ableitung links
- Normierung auf den Faktor 1 vor $w(t)$
- Ausgangsgröße auf der linken, Eingangsgröße auf der rechten Seite!

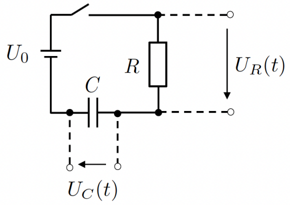
Für eine DGL 2. Ordnung gilt dann:

$$\underbrace{\frac{a_2}{a_0}}_{T_2}\ddot{w}(t) + \underbrace{\frac{a_1}{a_0}}_{T_1}\dot{w}(t) + w(t) = \underbrace{\frac{b_1}{a_0}}_{K}x(t)$$

Beispiel: DGL eines elektrischen Systems

Folgende Gesetzmäßigkeiten bestehen:

- Zu jeder Zeit gilt der Maschensatz (2 Kirchhoffsches Gesetz) $U_0 = U_R(t) + U_C(t)$
- Für die Spannung über dem Widerstand gilt (Ohmsches Gesetz) $U_R(t) = R \cdot I(t)$.
- Der Kondensator lädt sich auf, sobald der Schalter geschlossen wird - dann gilt $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$



Beispiel: DGL eines elektrischen Systems

- nach einsetzten von $U_C(t)$ und $U_R(t)$ in den Maschensatz erhalten wir

$$U_0 = RI(t) + \frac{Q(t)}{C}$$

- dieser Ausdruck kann nach der Zeit abgeleitet werden und wir erhalten

$$\dot{I}(t) + \frac{1}{RC} I(t) = 0 \quad \rightarrow \text{ eine homogene DGL erster Ordnung}$$

Lösung einer homogenen DGL

- Homogene Differenzialgleichungen erster Ordnung sind vom Typ:

$$\dot{y}(t) + Dy(t) = 0$$

- Lösung mit dem Standardansatz: eine $e-$ Funktion in der allgemeinen Form

$$y(t) = Ae^{Bt}$$

- Dabei sind die Konstanten A und B unbekannt, können aber bspw. nach der Festlegung der Anfangsbedingungen bestimmt werden, um eine spezielle Lösung der DGL zu erhalten

Lösung der homogenen DGL des RC-Tiefpasses

- allgemeine Lösung der DGL $\dot{I}(t) + \frac{1}{RC} I(t) = 0$ hat daher die Form:

$$I(t) = Ae^{-t/RC}$$

- wir wählen die Anfangsbedingung $I(t = 0) = I_0 = U_0/R$, um den Aufladungsprozess des Kondensators zu beschreiben und erhalten dann $A = I_0$ für den anfänglichen Strom

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$

- für die Spannung UR(t) am Widerstand erhalten Sie dann:

$$U_R(t) = U_0 e^{-t/RC}$$

Lösung der homogenen DGL des RC-Tiefpasses

- die Spannung $U_C(t)$ erhalten wir durch Integration von

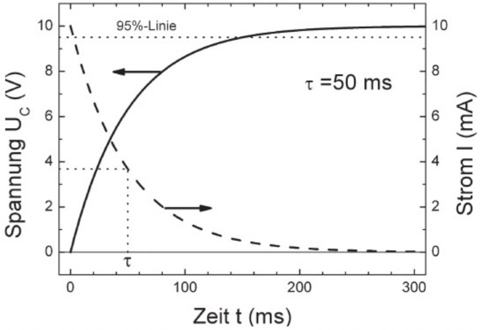
$$\begin{aligned} U_C(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt \\ &= -RI_0 e^{-t/RC} + c_0 \\ &= -RI_0 e^{-t/RC} + RI_0. \end{aligned}$$

- schließlich erhalten wir eine ansteigende, sich exponentiell dem Grenzwert U_0 annähernde Funktion:

$$U_C(t) = U_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Spannung und Strom am Kondensator im RC-Tiefpass

- Strom fällt nach einer Zeitkonstanten $\tau = RC$ auf ca. 36% seines anfänglichen Werts ab
- Spannung steigt in $3\tau = 150ms$ auf 95% ihres endgültigen Wertes an



$$U_C(t) = U_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC}$$

Beschreibung von LZI-Systeme mittels Differentialgleichungen

- die RC-Tiefpass Gleichung kann in die für regelungstypische Anwendungen übliche Form für DGL gebracht werden

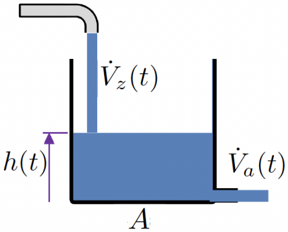
$$\underbrace{RC}_{T_1}\dot{x}(t) + x(t) = \underbrace{1}_{K}\cdot w(t)$$

- die Modellbildung hierfür kann auch nach folgendem Schema ablaufen:
  1. **Eingangsgröße:** $I_0 \Leftrightarrow w(t)$
  2. **Ausgangsgröße:** $I \Leftrightarrow x(t)$
  3. **Änderung:** Kondensatorladung = Strom in Kondensator
  4. DGL: $C \cdot \dot{x}(t) = \frac{1}{R}(w(t) - x(t))$

Beispiel: Behälter mit Zu- und Ablauf

Für verschiedene Systeme lassen sich ähnliche DGL ableiten

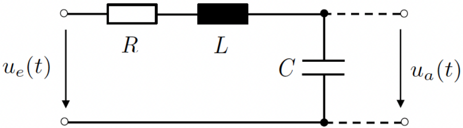
- Beispiel: Schema für einen Behälter mit Zu- und Abfluss:
  1. **Eingangsgröße:** Zulauf $w(t)$
  2. **Ausgangsgröße:** Ablauf $x(t)$
  3. **Änderung:** Volumenänderung = Zulauf − Ablauf
  4. DGL: $A \cdot \dot{h}(t) = K_z \sqrt{h(t)} - \dot{V}_a(t)$



Beispiel: Reihenschwingkreis

- Analog zum RC-Tiefpass wird mit der Maschenregel die Spannung u_e ermittelt:
  $u_e = u_R + u_L + u_a$
- Der Spannungsabfall am Widerstand ergibt sich wieder zu $u_R = i \cdot R$, der Ladestrom im Kondensator zu $i = C\frac{du_a}{dt}$ und die Spannung an der Spule $i = L\frac{du_a}{dt}$. Daraus folgt:

$$u_e(t) = u_a(t) + RC\dot{u}_a(t) + LC\ddot{u}_a(t)$$



Beispiel: Reihenschwingkreis

- Umformen ergibt:

$$\underbrace{LC}_{T_2{}^2}\ddot{x}_a(t) + \underbrace{RC}_{T_1}\dot{x}_a(t) + x_a(t) = \underbrace{1}_{K} \cdot x_e(t)$$

- Bei dieser DGL handelt es sich um ein schwingfähiges **PT2 Übertragungs-System** und weist ein proportionales Übertragungsverhalten mit einer Verzögerung 2. Ordnung auf.

Lösung der DGL eines PT2-Systems

- Die Lösung der Differenzialgleichung dieses PT2-Systems ist nicht mehr ganz so trivial wie beim RC-Tiefpass. Prinzipiell kann man die Gleichung mit folgenden Methoden lösen:
  1. Spezielle **Eingangsfunktionen** anwenden (Sprung, Rampe, Impuls)
  2. Trennung der Variablen
  3. Lösen durch geeigneten Ansatz
  4. **Laplace-Transformation**, Übertragungsfunktion
- Bei linearen Systemen ist es immer vorteilhaft, die Lösung von DGL nicht im **Zeitbereich**, sondern mittels Laplace-Transformation im **Bildbereich** vorzunehmen.

Spezielle Eingangssignale (-funktionen) in der Regelungstechnik

- Regelkreisglieder werden in der Regelungstechnik nach ihrem dynamischen Verhalten beurteilt. Dabei spielt *weniger das Schwingungsverhalten*, ausgehend von einem bestimmten Anfangszustand eine Rolle, *als vielmehr die Antwort des Regelkreisgliedes* auf ein bestimmtes **Eingangssignal (Anregungssignal).**

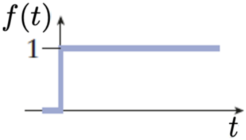
- Bei der Analyse des Zeitverhaltens werden dabei nicht beliebige Eingangssignale herangezogen, sondern man beschränkt sich auf einige **Grundtypen von Signalen**.

- Diese Signale werden dann auch für die Bestimmung der partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung verwendet.

Einheitssprungfunktion

- am häufigsten verwendete Eingangssignal
- wird beschrieben durch die Gleichung:

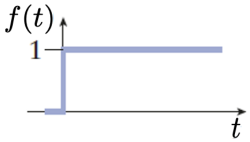
$$f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$



Einheitssprungfunktion

Die (Einheits-)Sprungfunktion entspricht einer großen Zahl von in der Praxis vorkommenden Schaltvorgängen:

- Schließen eines Schalters in einem elektrischen Netzwerk
- Ankoppeln eines Lastmomentes an einem Motor
- Einschalten eines Brenners einer Heizung
- Aufschalten des Sollwerts einer Regelung

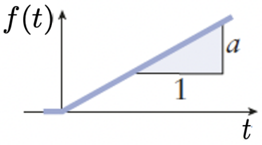


Rampenfunktion

Die Rampenfunktion (Anstiegsfunktion) stellt ein Signal dar, welches mit konstanter Steigung linear ins Unendliche anwächst

- wird beschrieben durch die Gleichung:

$$f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} at, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

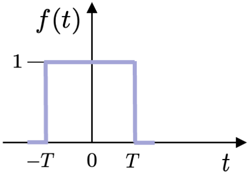


Rechteckfunktion

Die Rechteckfunktion ist eine Funktion mit endlicher Amplitude und endlicher Dauer

- wird beschrieben durch die Gleichung:

$$f(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 0, t < -T \\ 1, -T \leq t \leq T, \\ 0, T \leq t \end{cases}$$

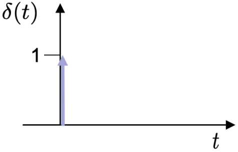


Impulsfunktion (Deltafunktion)

Stellt eine kurzfristige Beeinflussung eines Systems (Bsp. Hammerschlag) da und lässt sich aus einem rechteckigen Impuls der Dauer τ und der Höhe $1/\tau$ aufbauen, bei welchem die Zeitdauer immer kurzer wird.

- wird beschrieben durch die Gleichung:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} f(t;\tau) = \lim_{\tau \to 0} \begin{cases} & t < 0 \\ \frac{1}{\tau} & \leq t \leq \tau \\ & t > \tau \end{cases}$$

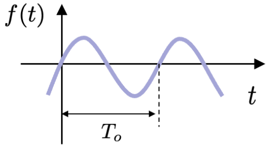


Harmonische Schwingung, Bsp. Sinusfunktion

Die Sinusfunktion dient als Referenzsignal für oszillierende Eingangssignale in einem Regelkreis.

- wird, mit $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$, beschrieben durch die Gleichung:

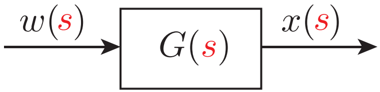
$$f(t) = \sin(\omega_o t)$$



Beschreibung von LZI-Systeme im **Frequenz- bzw. Bildbereich**

Regelkreisglieder werden i.d.R. durch zwei verschiedene Methoden beschrieben:

- die Beschreibung im Zeitbereich durch Differentialgleichungen und ihre Lösungen (s. Abschnitt 2.4)
- die Beschreibung im **Frequenz- bzw. Bildbereich** durch **Übertragungsfunktion** und **Frequenzgang** (mit den grafischen Darstellungsmöglichkeiten *Ortskurve* und *Bode-Diagramm*).



Mathematische Transformationen

- Um vom Zeit- zum Frequenz- oder Bildbereich zu wechseln, ist eine mathematische Transformation erforderlich
- In der Mathematik werden Transformationen durchgeführt, um Rechnungen zu vereinfachen
- Rechenoperationen höherer Ordnung werden dabei durch Operationen niedriger Ordnung ersetzt

Mathematische Transformationen

Beispiele für mathematische Transformationen

- Logarithmieren: Multiplikation ⇔ Addition
- Fourier-Transformation: Zeitbereich ⇔ Frequenzbereich
- **Laplace-Transformation:** Originalbereich ⇔ Bildbereich

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{F_1, F_2} \arrow[r] \arrow[d, "\text{Transformation}"] & \underset{\text{Multiplikation}}{\boxed{F_1 \cdot F_2}} \arrow[r] & \boxed{F} \\
\boxed{\log F_1, \log F_2} \arrow[r] & \overset{\text{Indirekter Lösungsweg}}{\underset{\text{Addition}}{\boxed{x = \log F_1 + \log F_2}}} \arrow[r] & \boxed{\log^{-1}(x)} \arrow[u, "\text{Rücktransformation}"']
\end{tikzcd}
$$

Laplace-Transformation

Was versteht man unter Laplace-Transformation?

-
-
-

Laplace-Transformation

Was versteht man unter Laplace-Transformation?

- Die Laplace-Transformation stellt ein **wichtiges Hilfsmittel** zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dar.
- sie ist eine Integraltransformation, die eingesetzt wird, um die Berechnungen zu vereinfachen
- Mit Hilfe der Laplace-Transformation werden Differential- und Integral-Ausdrücke in **algebraische Ausdrücke** umgewandelt.

Laplace-Transformation

Definition

Ist $x(t)$ ein Signal mit der Eigenschaft $x(t) = 0$ für $t < 0$, so lautet die einseitige Laplace-Transformierte

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

Die Variable s stellt den Laplace-Operator $s \equiv \sigma + j\omega$ (Komplexe Frequenz) dar.

Laplace-Transformation

- Den Wertebereich von s, für den die Laplace-Transformierte ausgewertet werden kann, bezeichnet man als den Konvergenzbereich der Laplace-Transformation

- Die Existenz des Laplace-Integrals setzt einen definierbaren Konvergenzbereich voraus, den wir bei unseren Anwendungen stets annehmen

Inverse Laplace-Transformation

Definition

Die inverse Laplace-Transformation wird durch das komplexe Integral gegeben

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \int_{c-i\cdot\infty}^{c+\infty} X(s) \cdot e^{s\cdot t} ds$$

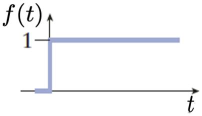
Der Vorgang der Transformation wird wie folgt symbolisiert: $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(s)$

Beispiel: Berechnung der Laplace-Transformation

Laplace-Transformation des Einheitssprungs:

- Eingangs Signal

$$f(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$



- Laplace-Transformation

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[\frac{1}{-s} e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Berechnung der Laplace -Transformation

- Die Berechnung der Laplace-Transformation kann in vielen Fällen entfallen, da umfangreiche Tabellen existieren

$x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathscr{L}\{x(t)\}$	$x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathscr{L}\{x(t)\}$
$x(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$1 \cdot X(s)$	$\delta(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	1 (Deltafunktion)
$\dot{x}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s \cdot X(s)$	$\sigma(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$ (Sprungfunktion)
$\ddot{x}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2 \cdot X(s)$	$r(t) = t$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$ (Rampenfunktion)
$x(t)^{(n)}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n \cdot X(s)$	$\sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{(s^2+\omega^2)}$
e^{-at}	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s+a}$	$\cos(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)}$
$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s} \cdot X(s)$	$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

Eigenschaften der Laplace -Transformation

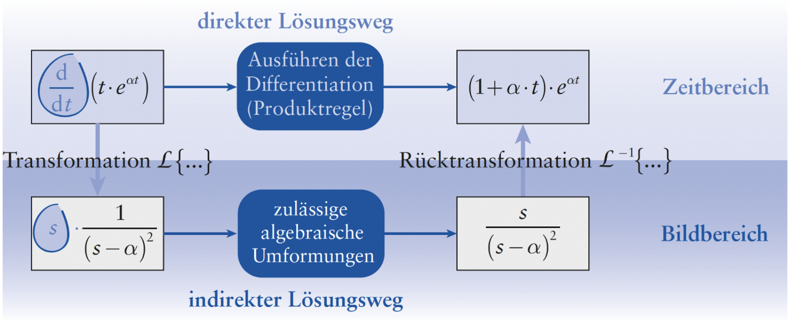
Rechenregel	**Originalfunktion**	**Bildfunktion**
Addition	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(s) + X_2(s)$
Verstärkung	$ax(t)$	$aX(s)$
Differentiation	$\dot{x}(t)$	$sX(s) - X(0)$
Integration	$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$

Eigenschaften der Laplace -Transformation (contd.

Rechenregel	**Originalfunktion**	**Bildfunktion**
Faltung	$\int x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau$	$X_1(s)X_2(s)$
Ähnlichkeit	$\frac{1}{a}x(\frac{t}{a})$	$X(as)$
Dämpfung	$x(t)e^{-at}$	$X(s+a)$
Verschiebung	$x(t-T)$	$X(s)e^{-sT}$
Anfangswert	$\lim_{t\to+0} x(t)$	$\lim_{s\to\infty} sX(s)$
Endwert	$\lim_{t\to\infty} x(t)$	$\lim_{s\to 0} sX(s)$

BLösung einer DGL mithilfe der Laplace-Transformation

- Der Nutzen der Laplace-Transformation stellt sich insbesondere bei DGL höherer Ordnung ein.



Beispiel RC-Tiefpass

- Herleitung der DGL (s. Kapitel 2.4)
- Berechnung der Laplace -Transformation (s. Tabelle)

$$\mathscr{L}\left\{RC \cdot \dot{x}(t) + x(t) = w(t)\right\} \Rightarrow \quad RC \cdot s \cdot X(s) + X(s) = W(s)$$

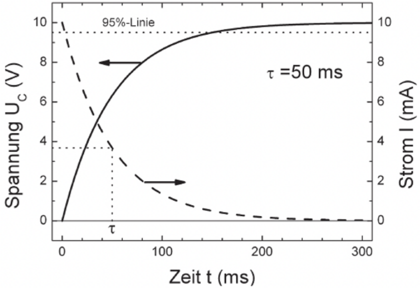
- Durch Umformen erhält man die sogenannte Übertragungsfunktion - $G(s)$

$$\frac{X(s)}{W(s)} = \boxed{G(s) = \frac{1}{RC \cdot s + 1}}$$

Beispiel RC-Tiefpass

- **Rücktransformation** ergibt lt. Tabelle:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = x_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$



$$\boxed{I(t) = I_0 e^{-t/RC}}$$

Beispiel Laplace-Transformation eines PT-2 Systems

- Laplace-Transformation einer DGL 2. Ordnung

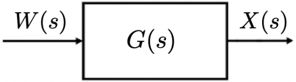
$$a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_1\dot{w}(t) + b_0 w(t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$a_2 s^2 X(s) + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_1 s W(s) + b_0 W(s)$$

- Die **Übertragungsfunktion**

$$G(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$



Lernziele dieser Vorlesung

Nach dem Studium dieses Abschnitts können Sie ...

1. ein LTI-System mittels Differentialgleichung (DGL) beschreiben
2. spezielle Eingangsfunktionen anwenden, um solche DGL zu lösen
3. die Methode der Laplace-Transformation benutzen, um DGL zu lösen

Fragen zur Selbstkontrolle

1. Wie bezeichnet man ein Übertragungsglied mit einem Eingangssignal und einem Ausgangssignal?
2. Was versteht man unter Übertragungsverhalten?
3. Wie stellt sich ein mathematisches Modell eines technischen Systems dar?
4. Woran erkennt man in einem Wirkungsplan, ob das dargestellte System eine Regelung oder eine Steuerung beschreibt?
5. Wie ist die Übertragungsfunktion eines Systems definiert?
6. Was versteht man unter einem LZI-System?

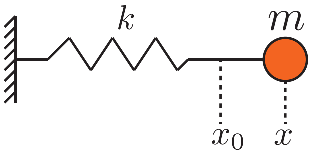
Übungsaufgabe 3.1: Laplace-Transformation der Rampenfunktion

Berechnen Sie die Laplace-Transformation der Rampenfunktion, indem Sie das folgende Integral analytisch lösen

$$F(s) = \int_0^\infty t e^{-st} dt$$

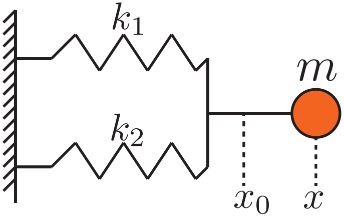
Übungsaufgabe 3.2: Einmassenschwinger

Eine an einer Feder mit der Federkonstanten k befestigte Masse m wird um x von der Ruhelage x_0 ausgelenkt. Bitte stellen Sie Differentialgleichung des ungedämpften Einmassenschwinger auf und bestimmen Sie anschließend mithilfe der Laplace-Transformation die Übertragungsfunktion dieses Systems. Berechnen Sie dazu die Zeitkonstante T_1 für $m = 100kg$ und $k = 0{,}25N/m$.



Übungsaufgabe 3.3: Einmassenschwinger

Eine an zwei Feder mit den Federkonstanten k_1 und k_2 befestigte Masse m wird um x von der Ruhelage x_0 ausgelenkt. Bitte stellen Sie Differentialgleichung des ungedämpften Einmassenschwinger auf und bestimmen Sie anschließend mithilfe der Laplace-Transformation die Übertragungsfunktion dieses Systems.



Übungsaufgabe 3.4: Laplace Rücktransformation

Folgende Bildfunktionen sollen in den Zeitbereich zurücktransformiert:

1. $$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$
2. $$F(s) = \frac{K_s}{s^2(1 + 2s)}$$
3. $$F(s) = \frac{1}{sT_1 + 1}$$
4. $$F(s) = \frac{1}{(s + 2)(s - 3)}$$