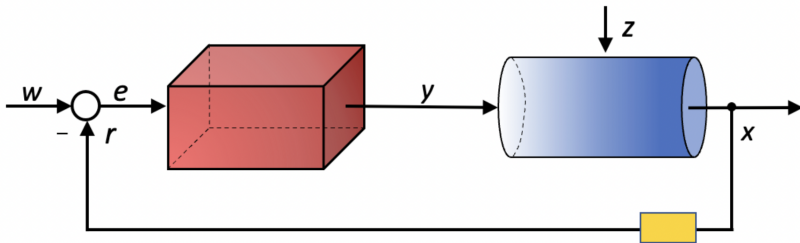


4 Mathematische Modellierung von Regelkreisgliedern 1



Inhalt

1. Regeln für das Rechnen mit Übertragungsfunktionen
 - ▶ Reihenschaltung
 - ▶ Parallelschaltung
 - ▶ Rückführung (Feedbackschaltung)
2. Signalflussplänen in Simulink
 - ▶ Simulink Grundlagen
 - ▶ Onramp-Kurs
3. Umformung von Signalflussplänen
 - ▶ Verschiebungsregeln
 - ▶ Anwendungsbeispiel

Motivation



Home > Farm > 2500 > News

Boat Smashes Into Truck That Was Towing It

As far as crashes go, this one is certainly unique.



Wiederholung – Übertragungsfunktion

Was ist eine Übertragungsfunktion (*Engl. transfer function*)?



Wiederholung – Übertragungsfunktion

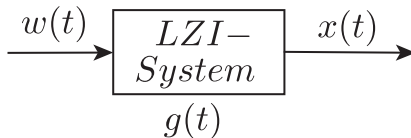
Was ist eine Übertragungsfunktion (*Engl. transfer function*)?

- ▶ Der Begriff wurde bereits für das statische und dynamische Systemverhalten eingeführt
- ▶ Eine Übertragungsfunktion beschreibt die Beziehung zwischen dem Eingang- und Ausgangssignal eines LZI-Systems

Wiederholung – Beschreibung von LZI Systeme im Zeitbereich

- ▶ Darstellung eines linearen und kausalen LZI-Systems mithilfe von Blockschaltbildern
- ▶ Beschreibung im Zeitbereich (Faltung):

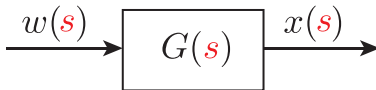
$$x(t) = (w * g)(t)$$



Wiederholung – Beschreibung von LZI Systeme im Bildbereich

- ▶ eine Faltung im Zeitraum entspricht eine Multiplikation im Bildbereich

$$X(s) = G(s) \cdot W(s)$$



Verknüpfungs- und Vereinfachungsregeln von Signalflusspläne

- ▶ Eine regelungstechnische Lösung beginnt oft mit dem Entwurf eines Signalflussplans (s. Kapitel Modellbildung)
- ▶ Für eine weitere Analyse muss aus dem oft komplexen Signalflussplan eine Übertragungsfunktion ermittelt werden
- ▶ Um diese Aufgabe effizient zu lösen, können folgende Regeln eingesetzt werden

Zusammenfassungsregel für Reihenschaltung

- ▶ Ausgang des ersten Gliedes ist mit dem Eingang des zweiten Gliedes verbunden
- ▶ Ziel: System vereinfachen und die **Gesamtübertragungsfunktion** berechnen



Zusammenfassungsregel für Reihenschaltung

- Ziel: System vereinfachen und die **Gesamtübertragungsfunktion** berechnen



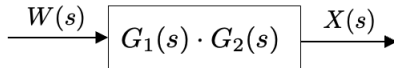
$$(1) \quad Y(s) = G_1(s) \cdot W(s)$$

$$(2) \quad X(s) = G_2(s) \cdot Y(s) \quad \Rightarrow \quad X(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot W(s)$$

$$\frac{X(s)}{W(s)} = G_1(s) \cdot G_2(s) = G(s)$$

Zusammenfassungsregel für Reihenschaltung

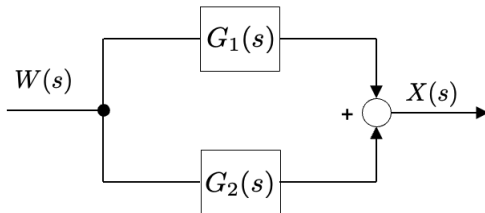
- ▶ die **Gesamtübertragungsfunktion** einer Reihenschaltung ist im Allgemeinen gleich dem Produkt der einzelnen Übertragungsfunktionen



$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot \dots \cdot G_{n-1}(s) \cdot G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s)$$

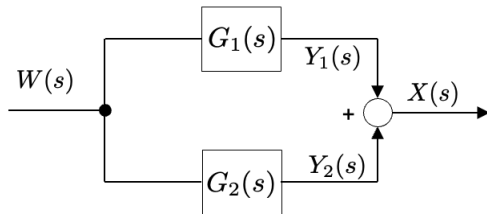
Zusammenfassungsregel für Parallelschaltung

- Das Eingangssignal verzweigt sich und wirkt gleichzeitig auf die beiden Eingänge der Glieder mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$



Zusammenfassungsregel für Parallelschaltung

- Das Eingangssignal verzweigt sich und wirkt gleichzeitig auf die beiden Eingänge der Glieder mit den Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$



$$(1) \quad Y_1(s) = G_1(s) \cdot W(s)$$

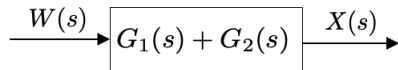
$$(2) \quad Y_2(s) = G_2(s) \cdot W(s)$$

$$X(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = (G_1(s) + G_2(s)) \cdot W(s)$$

$$\frac{X(s)}{W(s)} = G_1(s) + G_2(s) = G(s)$$

Zusammenfassungsregel für Parallelschaltung

- ▶ die **Gesamtübertragungsfunktion** einer Reihenschaltung ist im Allgemeinen gleich der Summe der einzelnen Übertragungsfunktionen

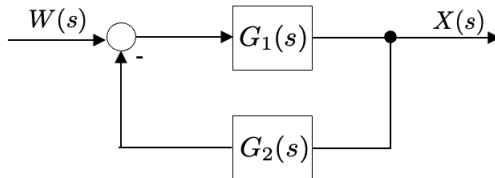


$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_{n-1}(s) + G_n(s) = \sum_{i=1}^n G_i(s)$$

Zusammenfassungsregel für Feedbackschaltung

Das Ausgangssignal des ersten Gliedes $G_1(s)$ wird über ein zweites Glied mit $G_2(s)$ auf den Eingang vom Glied $G_1(s)$ zurückgeführt und:

- ▶ zur Eingangsgröße addiert (**Mitkopplung**), oder
- ▶ von der Eingangsgröße subtrahiert (**Gegenkopplung**)



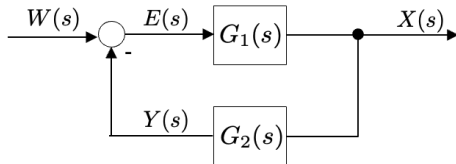
Zusammenfassungsregel für Feedbackschaltung

Für den oberen und unteren Block gilt

$$(1) \quad E(s) = W(s) - Y(s)$$

$$(2) \quad Y(s) = G_2(s) \cdot X(s)$$

$$(3) \quad X(s) = G_1(s) \cdot E(s)$$



$$E(s) = W(s) - G_2(s) \cdot X(s)$$

$$X(s) = G_1(s) \cdot W(s) - G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot X(s)$$

$$X(s) \cdot (1 + G_1(s) \cdot G_2(s)) = G_1(s) \cdot W(s)$$

$$\frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} = G(s)$$

Zusammenfassungsregel für Feedbackschaltung

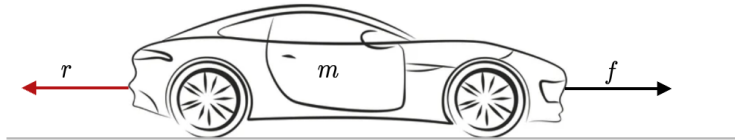
Für den oberen und unteren Block gilt

- ▶ Mitkopplung \implies negatives Vorzeichen
- ▶ Gegenkopplung \implies positives Vorzeichen

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \pm G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

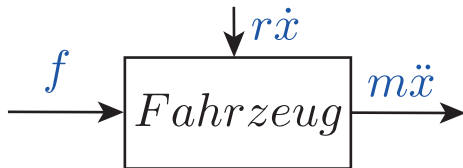
Beispiel Geschwindigkeitsregelanlage (Tempomat)

- ▶ $m = 1000\text{kg}$ - Masse des Fahrzeugs
- ▶ $r = 50\text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ - Reibungswiderstand Koeffizient
- ▶ $f = 500\text{ N}$ - Kraft, die zwischen Fahrbahn und Reifen entsteht

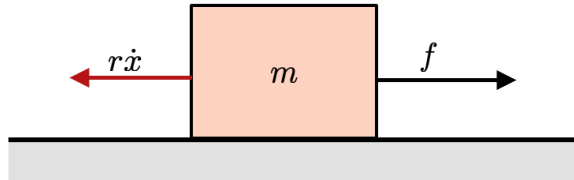


Vereinfachtes Modell der Geschwindigkeitsregelanlage

► Signalflussplan



Freikörperbild der Geschwindigkeitsregelanlage



$$f - r\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} = \frac{f}{m}$$

Übertragungsfunktion der Geschwindigkeitsregelanlage

- ▶ DGL umschreiben

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} = \frac{f}{m} \quad \Rightarrow \quad \dot{v} + \frac{r}{m}v = \frac{1}{m}f$$

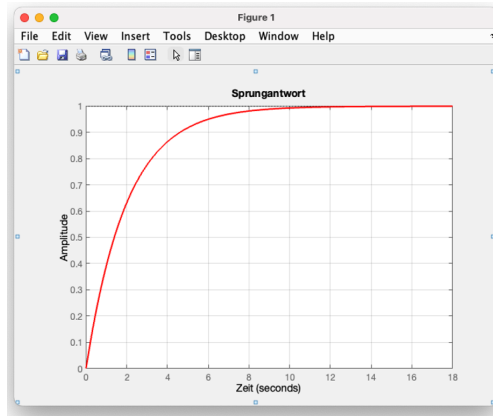
- ▶ Lösung der DGL mithilfe der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L} \left\{ \dot{v}(t) + \frac{r}{m}v(t) = \frac{1}{m}f(t) \right\} \quad \Rightarrow \quad s \cdot V(s) + \frac{r}{m}V(s) = \frac{1}{m}F(s)$$

- ▶ Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s + \frac{r}{m}}$$

Sprungantwort des Fahrzeugs



```
% Lösung der Tempomat DGL mithilfe Control Toolbox  
%  $G(s) = 1/m \cdot (s + r/m)$   
% Prof. E. Kamau, TH Köln
```

```
clc; clear all; %#ok<CLALL>
```

```
m = 1000; %[kg]  
f = 500; %[N]  
r = 50; %[N.s/m]  
num = 1/m; %Zähler  
den = [1 r/m]; %Nenner  
sys = tf(num, den);  
step(sys, 'b')%plot
```

Beispiel - Regler eines Tempomats (Feedbackschaltung)

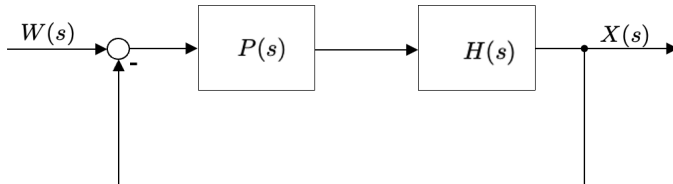
- ▶ Was ist die Gesamtübertragungsfunktion des Tempomats (Übertragungsfunktion $H(s)$) wenn das System von einem Regler mit der Übertragungsfunktion $P(s)$ geregelt wird?
- ▶ Wobei:

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s + \frac{r}{m}} = \frac{1}{ms + r} \quad \text{und} \quad P(s) = K_p$$

Beispiel - Regler eines Tempomats (Feedbackschaltung)

► Wobei:

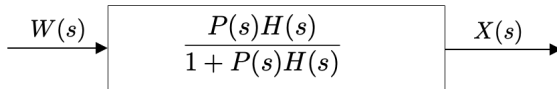
$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s + \frac{r}{m}} = \frac{1}{ms + r} \quad \text{und} \quad P(s) = K_p$$



Beispiel - Regler eines Tempomats (Feedbackschaltung)

- ▶ Die Gesamtübertragungsfunktion lautet

$$G(s) = \frac{P(s)H(s)}{1 + P(s)H(s)} = \frac{K_p}{ms + r + K_p}$$



Zusammenfassungsregel in Matlab

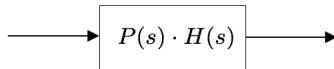
- Für die Reihenschaltung stellt Matlab die Funktion **Series** zur Verfügung (s. Übung)

```
>> numh = 1;  
>> denh = [1000 50];  
>> nump = 80;  
>> denp = 1;  
>> [num den] = series(numh, denh, nump, denp);  
>> printsys(num,den)
```

```
num/den =  
  
      80  
-----  
1000 s + 50
```

$$H(s) = \frac{\frac{1}{m}}{s + \frac{r}{m}} = \frac{1}{ms + r}$$

$$G(s) = P(s) \cdot H(s) = \frac{80}{1000s + 50}$$



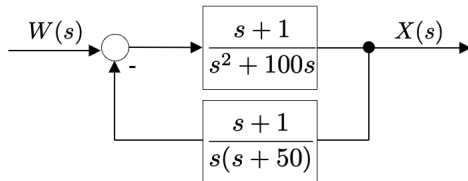
Zusammenfassungsregel in Matlab

- Für die Feedbackschaltung stellt Matlab die Funktion **Feedback** zur Verfügung (s. Übung)

```
>> numh = [1 1];  
>> denh = [1 100 0];  
>> nump = [1 1];  
>> denp = [1 50 0];;  
>> [num den] = feedback(numh, denh, nump, denp);  
>> printsys(num,den)
```

num/den =

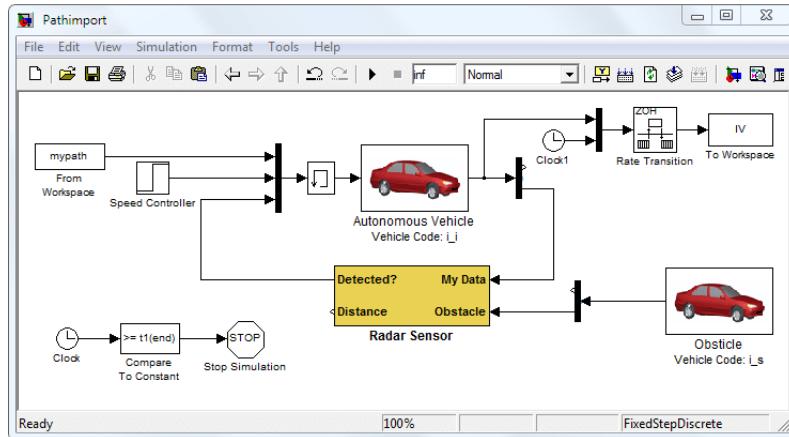
$$\frac{s^3 + 51 s^2 + 50 s}{s^4 + 150 s^3 + 5001 s^2 + 2 s + 1}$$



Signalflusspläne in Simulink

- ▶ Signalflusspläne haben im Rahmen der Simulation von Regelkreisen zur interaktiven Untersuchung des dynamischen Verhaltens eine große Bedeutung
- ▶ So ist ein sehr effizientes Arbeiten möglich, da die Modellgestaltung auf dieser abstrakt-grafischen Ebene erfolgt

Simulink als grafisch-interaktives Simulationswerkzeug



Simulink Grundlagen

- ▶ SIMULINK ermöglicht eine hierarchische **Modellierung** mit Hilfe von graphischen Blöcken, eine Grundausstattung von Blöcken wird mitgeliefert
- ▶ Mit diesen Blöcken lassen sich eine Vielzahl von Problemen lösen, sowohl bei *zeitkontinuierlichen* als auch *zeitdiskreten* Anwendungen
- ▶ **Vorteil** - der Benutzer muss sich nicht mehr mit der textbasierten Programmierung auseinander setzen
- ▶ Mit Hilfe einer geeigneten Erweiterung für SIMULINK kann aus den erstellten Blockschaltbildern ein fertiger C-Code erzeugt und kompiliert werden

Einstieg mithilfe des Simulink-Onramp-Kurs

- ▶ Onlinekurs belegen
- ▶ Kurs unter: <https://matlabacademy.mathworks.com/details/simulink-onramp/simulink>
- ▶ Zertifikat im ILU-Kurs hochladen – **Teil der Vorleistung!**

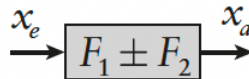
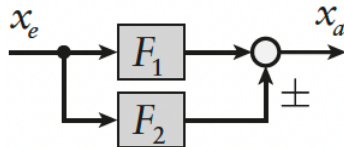


Umformung von Signalflusspläne

- ▶ Bei komplexen Signalflussplänen reichen die drei vorgestellten einfachen Umformungsregeln nicht aus, um tiefgehende regelungstechnische Untersuchungen durchzuführen
- ▶ Nachfolgend ist eine Übersicht über alle Regeln

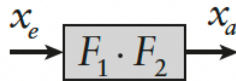
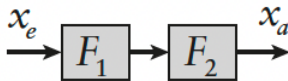
Regel 1: Zusammenfassung von parallel geschalteten Übertragungsblöcken

► $x_a = (F_1 \pm F_2) \cdot x_e$



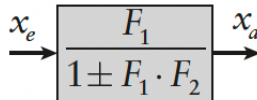
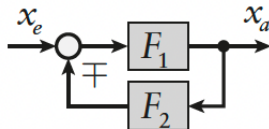
Regel 2: Zusammenfassung von in Reihe geschalteten Übertragungsblöcken

► $x_a = F_1 \cdot F_2 \cdot x_e$



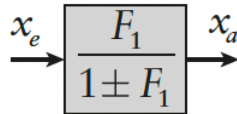
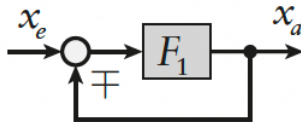
Regel 3: Kreisstruktur mit indirekter Gegenkopplung

► $x_a = (x_e \mp x_a \cdot F_2) \cdot F_1$



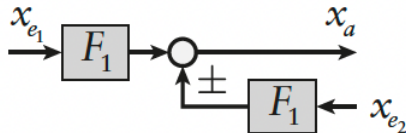
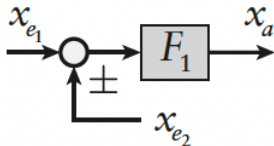
Regel 4: Kreisstruktur mit direkter Gegenkopplung

► $(x_e \mp x_a) \cdot F_1 = x_a$



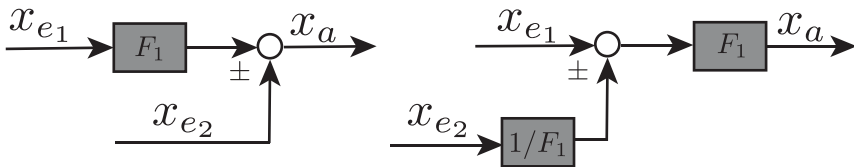
Regel 5: Verlagerung von Summationsstelle und Übertragungsblock

► $x_a = (x_{e_1} \pm x_{e_2}) \cdot F_1$



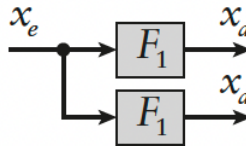
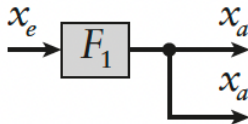
Regel 6: Verlagerung von Summationsstelle und Übertragungsblock

► $x_a = x_{e_1} \cdot F_1 \pm x_{e_2}$



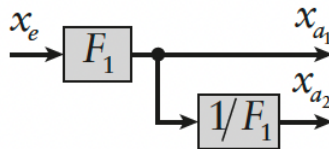
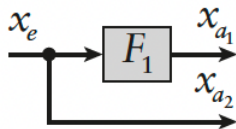
Regel 7: Verlagerung von Verzweigungsstelle und Übertragungsblock

► $x_a = x_e \cdot F_1$



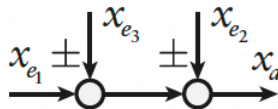
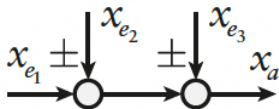
Regel 8: Verlagerung von Verzweigungsstelle und Übertragungsblock

► $x_{a_1} = x_e \cdot F_1, \quad x_{a_2} = x_e$



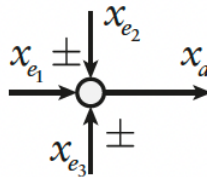
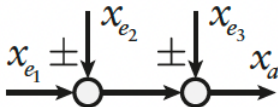
Regel 9: Verlagerung von Summationsstellen

► $x_a = x_{e_1} \pm x_{e_2} \pm x_{e_3}$



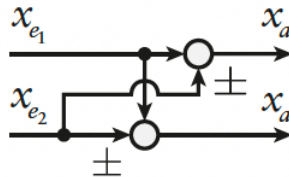
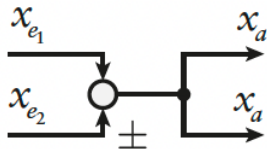
Regel 10: Zusammenfassung von Summationsstellen

► $x_a = x_{e_1} \pm x_{e_2} \pm x_{e_3}$



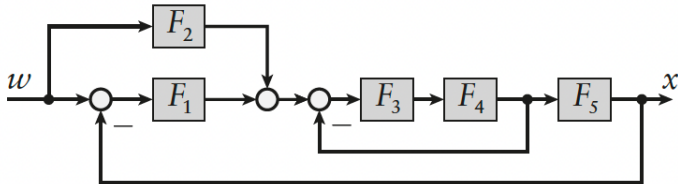
Regel 11: Verlagerung von Summations- und Verzweigungsstelle

► $x_a = x_{e_1} \pm x_{e_2}$



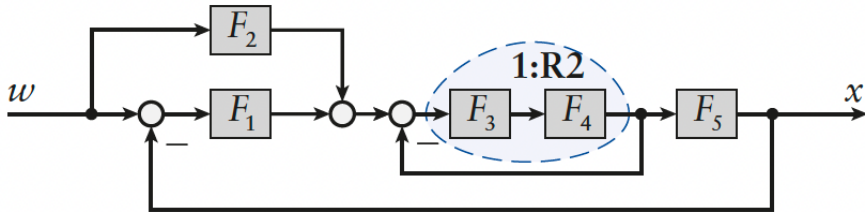
Übungsaufgabe - Zweischleifiger Regelkreis mit Vorsteuerung (Kaskadenstruktur)

- Um das Verhalten des Regelkreises untersuchen zu können, soll die Gesamtübertragungsfunktion $F(s)$ ermittelt werden



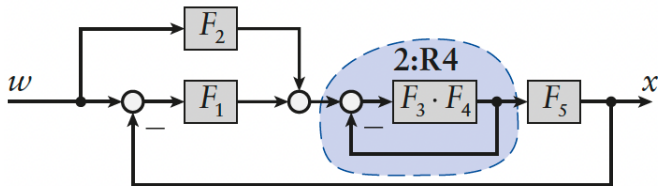
Lösungsschritt 1

► Reihenschaltung



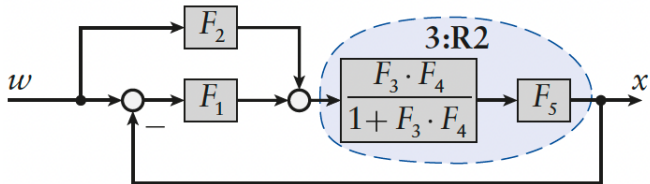
Lösungsschritt 2

- Kreisstruktur mit direkter Gegenkopplung



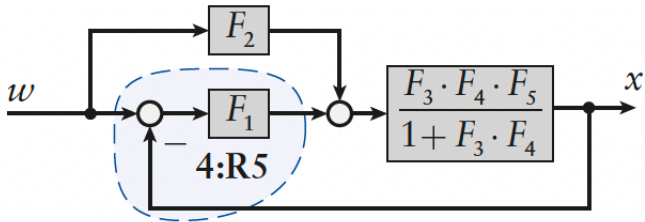
Lösungsschritt 3

► Reihenschaltung



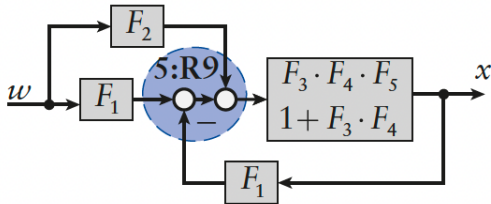
Lösungsschritt 4

► Reihenschaltung



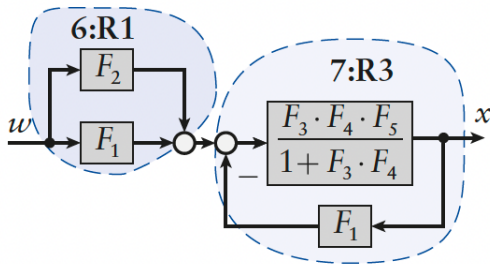
Lösungsschritt 5

- Vertauschen von Summationsstellen



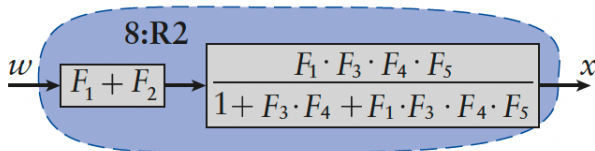
Lösungsschritt 6 und 7

- Parallelschaltung und Kreisstruktur



Lösungsschritt 8

► Reihenschaltung



Resultierende Übertragungsfunktion

- ▶ die Gesamtübertragungsfunktion

$$\begin{array}{c} w \rightarrow \boxed{\frac{F_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot F_5 \cdot (F_1 + F_2)}{1 + F_3 \cdot F_4 + F_1 \cdot F_3 \cdot F_4 \cdot F_5}} \rightarrow x \end{array}$$

Lernziele dieser Vorlesung

Nach dem Studium dieses Abschnitts können Sie ...

1. vereinfachte Form der Übertragungsfunktion von der Reihen-, Parallel- und Feedbackschaltung (Rückführung) herleiten
2. Verschiebungsregeln anwenden
3. komplexere Blockschaltbilder analysieren und zu einem einzigen Block vereinfachen
4. Das stationäre Verhalten eines Systems berechnen

Fragen zur Selbstkontrolle

1. Was versteht man unter der Gesamtübertragungsfunktion eines komplexen Systems?
2. Mit welcher Funktion lässt sich in Matlab die Gesamtübertragungsfunktion einer Reihenschaltung berechnen?
3. Was ist bei einer Feedbackschaltung der Unterschied zwischen Mit- und Gegenkopplung?
4. Was ist eine Faltung?
5. Nennen Sie zwei Gründe für die Modellierung von Systemen in Simulink

Übungsaufgabe 4.1: Signalflussplan im Zeitbereich

Folgende Gleichung ist mit einem Signalflussplan darzustellen:

$$x = 15 \cdot (2 \cdot y - z_1) + z_2 - 10 \cdot z_3$$

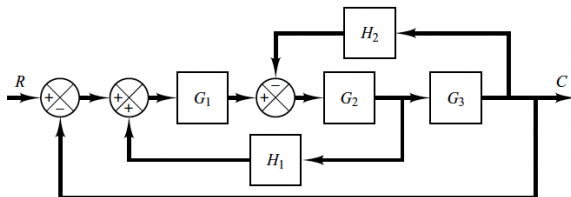
Übungsaufgabe 4.2: Signalflussplan im Bildbereich

Folgende Gleichung soll im Signalflussplan im Bildbereich dargestellt werden:

$$x(t) = \frac{K_s}{T_1} \int w(t) dt + z(t)$$

Übungsaufgabe 4.3: Vereinfachung eines Mehrschleifensystems

Verwenden Sie die Vereinfachungsregeln, um das unten dargestellte System zu vereinfachen. Beginnen Sie damit, den Summationspunkt der negativen Feedbackschaltung, die Block H_2 enthält, aus der positiven Feedbackschaltung, die Block H_1 enthält, herauszuziehen.



Übungsaufgabe 4.4: Vereinfachung eines Mehrschleifensystems

Verwenden Sie die Vereinfachungsregeln, um das unten dargestellte System zu vereinfachen.

