

Karolina Brleković | Jelena Noskov

MATEMATIKA NA DRŽAVNOJ MATURE

*OSNOVNA RAZINA (B)

*VIŠA RAZINA (A)

priručnik
za pripremu ispita državne
mature iz matematike



Zagreb, 2010.

SADRŽAJ

● Predgovor	6
● I. MATEMATIKA NA DRŽAVNOJ MATURI – iz kataloga Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	7
Uvod – općenito o ispitu iz matematike na državnoj maturi	7
Struktura ispita iz matematike na državnoj maturi	8
Sadržaj ispita iz matematike na državnoj maturi – obrazovni ishodi	10
● II. OSNOVNI POJMOVI, PRAVILA I FORMULE	16
● III. MATEMATIČKE FORMULE NA DRŽAVNOJ MATURI – iz kataloga Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	29
Formule za osnovnu razinu (B)	29
Formule za višu razinu (A)	30
● IV. ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE ZA POLAGANJE DRŽAVNE MATURE	33
1. Brojevi i algebra	33
1.1. Skupovi brojeva i intervali	33
1.2. Računanje s prirodnim, cijelim, racionalnim, realnim i kompleksnim brojevima	36
1.3. Računanje s potencijama i korijenima	41
1.4. Računanje s apsolutnom vrijednosti	44
1.5. Algebarski izrazi i algebarski razlomci	46
1.6. Računanje s postotcima	50
1.7. Omjeri i izražavanje jedne veličine uz pomoć drugih	53
1.8. Uporaba džepnog računala. Mjerne jedinice u geometriji i u zadatcima s tekstrom	57
1.9. Brojevi i algebra – zadaci za vježbu	61
Zadaci višestrukog izbora	61
Zadaci kratkih odgovora	73
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	78
2. Funkcije	91
2.1. Pojam i zadavanje funkcije	91
2.2. Operacije s funkcijama	96
2.3. Linearna i kvadratna funkcija	101
2.4. Funkcija apsolutne vrijednosti. Funkcija drugog korijena. Polinomi i racionalne funkcije	110
2.5. Eksponencijalna i logaritamska funkcija	117
2.6. Trigonometrijske funkcije	121
2.7. Nizovi	136
2.8. Derivacija funkcije	141
2.9. Funkcije – zadaci na vježbu	149
Zadaci višestrukog izbora	149
Zadaci kratkih odgovora	173
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	184
3. Jedinadžbe i nejednadžbe	199
3.1. Linearne jednadžbe i nejednadžbe	199
3.2. Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe	205

3.3. Jednadžbe i nejednadžbe s absolutnim vrijednostima i korijenom	212
3.4. Jednostavnije polinomske i racionalne jednadžbe i nejednadžbe	218
3.5. Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe	221
3.6. Trigonometrijske jednadžbe	231
3.7. Sustavi jednadžbi	236
3.8. Jednadžbe i nejednadžbe – zadatci za vježbu	241
Zadatci višestrukog izbora	241
Zadatci kratkih odgovora	256
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	261
4. Geometrija	267
4.1. Elementarna geometrija	267
Elementarna geometrija likova u ravnini	267
Odnosi među geometrijskim objektima u prostoru	275
Prizma, piramida, valjak, stožac, kugla	279
4.2. Trigonometrija	288
Trigonometrija pravokutnoga trokuta	288
Trigonometrija raznostraničnoga trokuta	294
4.3. Analitička geometrija	299
Koordinatni sustav na pravcu i u ravnini	299
Vektori	304
Jednadžba pravca	309
Krivulje drugog reda	316
4.4. Geometrija – zadatci za vježbu	322
Zadatci višestrukog izbora	322
Zadatci kratkih odgovora	340
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	347
5. Modeliranje i zadatci produženih odgovora	361
Modeliranje i zadatci produženih odgovora – zadatci za vježbu	384
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	390
V. OGLEDNI ISPITI	397
1. Osnovna razina	397
2. Viša razina	418
VI. RIJEŠENJA ZADATAKA ZA VJEŽBU I OGLEDNIH ISPITA	443
Brojevi i algebra	444
Funkcije	448
Jednadžbe i nejednadžbe	457
Geometrija	462
Modeliranje i zadatci produženih odgovora	467
Ogledni ispiti	470
Literatura	477

Dragi učenici i drage učenice!

Na kraju srednjoškolskog obrazovanja, pred vama je kruna vašega dosadašnjeg školovanja – polaganje državne mature. To je izazov za vas koji ćete taj ispit polagati, ali i za vaše profesore. Matematika je jedan od obveznih predmeta na državnoj maturi i svi ga učenici moraju polagati. Međutim, postoji mogućnost odabira između dvije razine ispita: osnovne (B) i više (A). Važno je pažljivo razmisliti koju razinu ispita odabratи, ovisno o tome koja je razina vašeg znanja matematike, ali i zahtjeva fakulteta ili drugoga visokog učilišta na koje se namjeravate upisati. Nakon što sjednete, odvagnete dobre i loše strane i odlučite – posao tek počinje! Gradivo matematike je opsežno, a potrebno je sve do sada naučeno ponoviti, utvrditi, a ponešto vjerojatno i naučiti. A to znači da valja navrijeme početi!

Pred vama je priručnik koji će vam zasigurno u tom procesu biti od neprocjenjive vrijednosti, bez obzira na to pripremate li se za maturu samostalno ili uz neko vodstvo. Priručnik će također biti od velike pomoći i svima onima koji će pripremati učenike za polaganje ispita na državnoj maturi. Nastao je kao rezultat trogodišnjega neposrednog rada s učenicima na pripremama za polaganje ispita Centra, a namijenjen je svima bez obzira na razinu državne mature koju žele polagati. Naime, sadržaji namijenjeni višoj razini posebno su istaknuti u tekstu te će ih oni koji se pripremaju za osnovnu razinu vrlo jednostavno uočiti i preskočiti. Zamišljen kao cjelovit i sveobuhvatan materijal, priručnik će vas voditi korak po korak od upoznavanja sa sadržajima koji se ispituju na državnoj maturi, preko ponavljanja teorijskih sadržaja, proučavanja riješenih primjera sve do samostalnog rješavanja zadataka i provjere naučenoga uz pomoć oglednih ispita. Ali krenimo redom...

Na samom početku priručnika, u poglavlju *Matematika na državnoj maturi*, upoznat ćete se s načinom polaganja ispita iz matematike, strukturom ispita i sadržajima koji se ispituju na državnoj maturi. Priručnik donosi sažetak teksta iz ispitnog kataloga za državnu maturu iz matematike Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja. Matematički sadržaj koji se ispituje na državnoj maturi podijelili smo u dvije cjeline: na teorijski dio i riješene primjere i zadatke. Sažeti i usustavljeni pregled teorijskog dijela pronaći ćete u drugome i trećem poglavlju priručnika, *Osnovni pojmovi, pravila i formule i Matematičke formule na državnoj maturi*. Matematičke formule u trećem poglavlju podijeljene su na dvije razine (na osnovnu i višu), preuzeute su iz kataloga Centra, i to su upravo one formule koje vam mogu koristiti pri pisanju ispita.

Najvažniji i najopsežniji dio priručnika čini poglavlje *Zbirka zadataka iz matematike za polaganje državne mature*. Zbirka zadataka podijeljena je na teme koja prate obrazovne ishode iz kataloga Centra: *Brojevi i algebra, Funkcije, Jednadžbe i nejednadžbe, Geometrija*. Na početku svakoga od tih poglavlja dani su detaljno riješeni primjeri, nakon čega slijede zadaci za vježbu te izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja. Zadaci za vježbu podijeljeni su na dvije cjeline: na zadatke višestrukog izbora i zadatke kratkog odgovora, točno onako kao i u ispitima državne mature. Treća vrsta zadataka koja se pojavljuje u ispitima državne mature, zadaci produženog odgovora, dani su u temi *Modeliranje i zadaci produženih odgovora*, jer su ti zadaci kombinacija sadržaja nekoliko prethodnih tema.

U petom poglavlju priručnika, *Ogledni ispit*, pronaći ćete pet ispita iz osnovne i pet ispita iz više razine znanja. Uz pomoć tih ispita možete testirati svoje znanje nakon što prođete sve sadržaje koji im prethode u ovom priručniku. Ispiti su sastavljeni prema pravilima sastavljanja ispita na državnoj maturi, uzimanjem u obzir broja i predviđenih omjera zadataka određenog tipa i sadržaja.

Na kraju priručnika, u poglavlju *Rješenja zadataka za vježbu i oglednih ispita*, pregledno su dana rješenja svih zadataka iz četvrtoga i petog poglavlja.

Nadamo se da će vam priručnik pomoći te da će svaki sljedeći naraštaj učenika, nakon korištenja ovim priručnikom tijekom priprema, sa zadovoljstvom čitati vlastite rezultate ispita državne mature iz matematike.

1. MATEMATIKA NA DRŽAVNOJ MATURI

• Uvod – općenito o ispitu iz matematike na državnoj maturi •

Matematika je na državnoj maturi obvezni predmet.

Pristupnici mogu birati hoće li matematiku polagati na jednoj od dviju ispitnih razina:

- ▶ na osnovnoj razini (B),
- ▶ na višoj razini (A).

Osnovna razina ispita odgovara nastavnomu planu i programu s najmanjom satnicom u četverogodišnjim srednjim školama.

Viša razina ispita iz matematike uskladěna je s nastavnim planom i programom za gimnazije.

Razlike u sadržaju razina mogu se pronaći u tablicama obrazovnih ishoda.

Ispit iz matematike na državnoj maturi je pisani. Ispit se piše bez prekida, a trajanje za svaku od dviju ispitnih razina prikazano je u tablici.

TRAJANJE ISPITA	
OSNOVNA RAZINA (B)	VIŠA RAZINA (A)
150 minuta	180 minuta

Tijekom pisanja ispita iz matematike na državnoj maturi dopušteno je rabiti:

- ▶ uobičajeni pribor za pisanje i brisanje: olovku, kemijsku olovku plavu ili crnu, boje i gumenicu,
- ▶ geometrijski pribor: trokut ili ravnalo i šestar,
- ▶ džepno računalo (tzv. znanstveni kalkulator),
- ▶ knjižicu s formulama potrebnim za rješavanje ispita koja je sastavni dio ispitnoga materalja.

Pristupnicima nije dopušteno donijeti niti rabiti nikakve druge listove s formulama.

Struktura ispita iz matematike na državnoj maturi

Ispitom iz matematike na državnoj se maturi ispituju dosegnuta razina znanja i kompetencija iz ovih **ispitnih područja**:

- ▶ brojevi i algebra,
- ▶ funkcije,
- ▶ jednadžbe i nejednadžbe,
- ▶ geometrija,
- ▶ modeliranje.

Cilj je ispita iz matematike provjeriti do koje razine pristupnici znaju, tj. mogu:

- ▶ rabiti matematički jezik tijekom čitanja, interpretiranja i rješavanja zadataka,
- ▶ odčitavati i interpretirati podatke zadane u analitičkome, tabličnome i grafičkom obliku ili riječima te u navedenim oblicima jasno, logično i precizno prikazivati dobivene rezultate,
- ▶ matematički modelirati problemsku situaciju, naći rješenje te provjeriti ispravnost dobivenoga rezultata,
- ▶ prepoznati i rabiti vezu između različitih područja matematike,
- ▶ rabiti različite matematičke tehnike tijekom rješavanja zadataka,
- ▶ rabiti džepno računalo.

U ispitu iz matematike zadatci su prema tipovima raspoređeni u dvije (na osnovnoj razini), odnosno tri (na višoj razini), **ispitne cjeline**:

- ▶ 1. ispitna cjelina: zadatci višestrukog izbora,
- ▶ 2. ispitna cjelina: zadatci kratkih odgovora,
- ▶ 3. ispitna cjelina: zadatci produženih odgovora.

Ispit iz matematike na osnovnoj razini sadržava 28 zadataka podijeljenih u prve dvije ispitne cjeline. Ispit iz matematike na višoj razini sadržava 30 zadataka iz sve tri ispitne cjeline.

Zadatke višestrukoga izbora pristupnici rješavaju označivanjem slova samo jednoga točnoga odgovora među četiri ponuđena. Slova točnih odgovora označuju se znakom X. Ispravno riješen zadatak donosi jedan ili dva boda, ovisno o složenosti rješavanja. Neispravni odgovori ne donose negativne bodove. Uspješnim rješavanjem prve ispitne cjeline (*zadataka višestrukoga izbora*) na svakoj od dviju ispitnih razina pristupnik može ostvariti 20 bodova.

U **zadatcima kratkih odgovora** pristupnici upisuju odgovor na predviđeno mjesto u ispitnoj knjižici. Svaki ispravno riješen zadatak (odnosno dio zadatka ako se traži više kratkih odgovora) donosi jedan bod. Neispravni odgovori ne donose negativne bodove. Uspješnim rješavanjem druge ispitne cjeline (*zadataka kratkih odgovora*) na osnovnoj razini pristupnik može ostvariti 20 bodova. Uspješnim rješavanjem druge ispitne cjeline (*zadataka kratkih odgovora*) na višoj razini pristupnik može ostvariti 26 bodova.

U **zadatcima produženih odgovora** (samo na višoj ispitnoj razini) potrebno je prikazati postupak rješavanja te upisati odgovor i postupak na predviđeno mjesto u ispitnoj knjižici. U trećoj ispitnoj cjelini boduje se:

- ▶ postavljanje zadatka,
- ▶ postupak,
- ▶ odgovor prema razrađenoj bodovnoj shemi.

Pri vrjednovanju zadataka produženih odgovora treba imati na umu:

- ▶ da se priznaju točna rješenja dobivena na različite načine,
- ▶ da se pristupniku koji je pogrešno prepisao zadatak te ga zatim točno riješio (a da pri tom zadatak nije promijenio smisao niti je pojednostavljen) oduzima 1 bod od predviđenoga broja bodova za taj zadatak,
- ▶ da se pristupniku koji je učinio pogrešku u zadatku produženoga odgovora (a da pri tom zadatak nije promijenio smisao niti je pojednostavljen) boduju svi ispravno provedeni koraci.

Uspješnim rješavanjem treće ispitne cjeline na višoj razini pristupnik može ostvariti 14 bodova.

Uspješnim rješavanjem ispita na osnovnoj razini pristupnik može ostvariti ukupno 40 bodova. Uspješnim rješavanjem ispita na višoj razini pristupnik može ostvariti ukupno 60 bodova.

Struktura ispita iz matematike na državnoj maturi za svaku od dviju ispitnih razina prikazana je u sljedećoj tablici.

Ispitna cjelina	tip zadatka	OSNOVNA RAZINA (B)		VIŠA RAZINA (A)	
		broj zadataka	broj bodova	broj zadataka	broj bodova
1.	zadatci višestrukog izbora	16	20	15	20
2.	zadatci kratkih odgovora	12	20	13	26
3.	zadatci produženih odgovora		ne ispituje se	2	14
UKUPNO		28	40	30	60

Bodovni udio pojedine ispitne cjeline na državnoj maturi za svaku od dviju ispitnih razina prikazana je u donjoj tablici. Postotni udio pojedine ispitne cjeline odnosi se na postotak ukupnog broja bodova pojedine ispitne cjeline u ukupnom broju bodova ispita. Moguće odstupanje udjela pojedine ispitne cjeline iznosi $\pm 5\%$.

Ispitna cjelina	OSNOVNA RAZINA (B)		VIŠA RAZINA (A)	
	bodovni udio	broj bodova	bodovni udio	broj bodova
brojevi i algebra	45 %	18	20 %	12
funkcije	10 %	4	25 %	15
jednadžbe i nejednadžbe	15 %	6	20 %	12
geometrija	15 %	6	25 %	15
modeliranje	15 %	6	10 %	6
UKUPNO	100 %	40	100 %	60

Sadržaj ispita iz matematike na državnoj maturi – obrazovni ishodi

Za svako područje ispitivanja određeni su posebni ciljevi ispita, odnosno konkretni opisi onoga što pristupnik mora znati, razumjeti i moći učiniti kako bi postigao uspjeh na ispitu.

Obrazovni ishodi za obje razine prikazani su u tablicama. U tablicama su detaljno razrađeni sadržaji koji će se ispitivati te obrazovni ishodi vezani za pojedine sadržaje.

Osnovna ispitna razina (B)

BROJEVI I ALGEBRA	
Sadržaji	Obrazovni ishodi
skupovi brojeva N, Z, Q i R	<ul style="list-style-type: none"> ▶ razlikovati skupove N, Z, Q i R (poznavati termine: prirodan, cijeli, racionalan, iracionalan i realan broj te razlikovati navedene brojeve) ▶ uspoređivati brojeve ▶ prepoznati i rabiti oznake intervala: (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ ▶ zapisivati skupove realnih brojeva intervalima i prikazivati ih na brojevnom pravcu
elementarno računanje	<ul style="list-style-type: none"> ▶ zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, korjenovati, potencirati, određivati apsolutne vrijednosti ▶ zaokruživati brojeve ▶ rabiti džepno računalno
postotci i omjeri	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rabiti postotke ▶ rabiti omjere
algebarski izrazi i algebarski razlomci	<ul style="list-style-type: none"> ▶ zbrajati, oduzimati i množiti jednostavnije algebarske izraze ▶ rabiti formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata ▶ zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti jednostavnije algebarske razlomke ▶ iz zadane formule izraziti jednu veličinu uz pomoć drugih
mjerne jedinice	<ul style="list-style-type: none"> ▶ računati s jedinicama za duljinu, površinu, obujam, vrijeme, masu i novac ▶ pretvarati mjerne jedinice ▶ rabiti mjerne jedinice u geometriji i zadatcima s tekstrom
FUNKCIJE	
Sadržaji	Obrazovni ishodi
linearna funkcija, kvadratna funkcija i eksponencijalna funkcija s bazom 10	<ul style="list-style-type: none"> ▶ izračunati funkcione vrijednosti ▶ prikazati funkcije tablično ▶ prikazati funkcije grafički ▶ interpretirati graf funkcije ▶ odrediti nultočke funkcije ▶ odrediti sjecišta grafa s koordinatnim osima ▶ iz zadanih svojstava, elemenata ili grafa odrediti funkciju ▶ za kvadratnu funkciju: <ul style="list-style-type: none"> – interpretirati ulogu vodećega koeficijenta i diskriminante – odrediti minimum/maksimum funkcije, odnosno tjeme parabole

JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

Sadržaji	Obrazovni ishodi
linearne jednadžbe i nejednadžbe	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati linearne jednadžbe ▶ rješavati linearne nejednadžbe
kvadratne jednadžbe	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati kvadratne jednadžbe
jednostavnije eksponencijalne jednadžbe	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati jednadžbe s potencijama jednakih baza, primjerice:
	$10^{x+1} = \frac{1}{10}$ ili $3 \cdot 10^x = 300$
jednostavniji sustavi linearnih i/ili kvadratnih jednadžbi	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati sustave algebarski i grafički ▶ interpretirati grafički prikaz jednadžbama

GEOMETRIJA	
Sadržaji	Obrazovni ishodi
elementarna geometrija likova u ravnini	<ul style="list-style-type: none"> ▶ odrediti mjeru kuta ▶ razlikovati vrste trokuta ▶ rabiti poučke o sukladnosti trokuta ▶ rabiti Pitagorin poučak i njegov obrat ▶ rabiti osnovna svojstva paralelograma ▶ rabiti osnovna svojstva kružnice i kruga ▶ odrediti opseg i površinu
prizma, piramida, valjak, stožac, kugla	<ul style="list-style-type: none"> ▶ skicirati geometrijska tijela ▶ prepoznati elemente tijela – osnovku (bazu), vrh, visinu, pobočke (strane) i plašt ▶ odrediti oplošje i obujam
koordinatni sustav na pravcu i u ravnini	<ul style="list-style-type: none"> ▶ prikazati točke u koordinatnom sustavu ▶ odčitati koordinate točaka u koordinatnom sustavu ▶ izračunati udaljenost točaka
jednadžba pravca	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rabiti eksplisitni i implicitni oblik jednadžbe pravca ▶ odrediti jednadžbu pravca zadanoga točkom i koeficijentom smjera ▶ odrediti jednadžbu pravca zadanoga dvjema točkama ▶ rabiti uvjet usporednosti pravaca

MODELIRANJE

Sadržaji	Obrazovni ishodi
sva područja ispitivanja	<ul style="list-style-type: none"> ▶ modelirati sljedeće situacije: <ul style="list-style-type: none"> – brojeve – algebru – geometriju – funkcije – jednadžbe – nejednadžbe

Viša ispitna razina (A)

BROJEVI I ALGEBRA	
Sadržaji	Obrazovni ishodi
skupovi N, Z, Q, R i C	<ul style="list-style-type: none"> ► razlikovati skupove N, Z, Q, R i C (poznavati termine: prirodan, cijeli, racionalan, iracionalan, realan i kompleksan broj te razlikovati navedene brojeve) ► uspoređivati brojeve ► prepoznati i rabiti oznake intervala: $(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$ ► zapisati skupove realnih brojeva intervalima i prikazivati ih na brojevnomu pravcu ► rabiti zapis kompleksnih brojeva u standardnome i trigonometrijskom obliku
elementarno računanje	<ul style="list-style-type: none"> ► zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, korjenovati, potencirati te određivati apsolutne vrijednosti ► zaokruživati brojeve ► rabiti džepno računalo
postotci i omjeri	<ul style="list-style-type: none"> ► rabiti postotke ► rabiti omjere
algebarski izrazi i algebarski razlomci	<ul style="list-style-type: none"> ► provoditi operacije s potencijama i korijenima ► zbrajati, oduzimati i množiti algebarske izraze ► rabiti formule za kvadrat i kub binoma, razliku kvadrata te razliku i zbroj kubova ► zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti algebarske razlomke ► iz zadane formule izraziti jednu veličinu uz pomoć drugih ► primijeniti binomni poučak
mjerne jedinice	<ul style="list-style-type: none"> ► računati s jedinicama za duljinu, površinu, obujam, vrijeme, masu i novac ► pretvarati mjerne jedinice ► rabiti mjerne jedinice u geometriji i u zadatcima s tekstrom

FUNKCIJE	
Sadržaji	Obrazovni ishodi
pojam funkcije, zadavanje i opera- cije s njima	<ul style="list-style-type: none"> ► rabiti funkcije zadane tablično, grafički, algebarski i riječima ► izvoditi operacije s funkcijama (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, komponiranje)
linearna i kva- dratna funkcija, funkcija absolutne vrijednosti, funkcija drugoga korijena, polino- mi i racionalne funkcije, ekspon- encijskalna i loga- ritamska funkcija, trigonometrijske funkcije	<ul style="list-style-type: none"> ► odrediti domenu funkcije ► odrediti sliku funkcije ► izračunati funkcijeske vrijednosti ► prikazati funkcije grafički ► prikazati funkcije tablično ► interpretirati graf funkcije ► odrediti nultočke funkcije ► odrediti sjecišta grafa s koordinatnim osima ► iz zadanih svojstava, elemenata ili grafa odrediti funkciju ► odrediti i primijeniti rast/pad funkcije ► odrediti tijek funkcije ► razlikovati parne i neparne funkcije ► za kvadratnu funkciju: <ul style="list-style-type: none"> – interpretirati ulogu vodećeg koeficijenta i diskriminante – odrediti minimum/maksimum funkcije, odnosno tjeme parabole

	<ul style="list-style-type: none"> ▶ za polinome i racionalne funkcije: <ul style="list-style-type: none"> – crtati grafove polinoma (najviše 3. stupnja) – crtati grafove racionalnih funkcija (polinomi najviše 2. stupnja u brojniku i nazivniku) ▶ za ekponencijalne i logaritamske funkcije: <ul style="list-style-type: none"> – rabiti osnovne eksponencijalne i logaritamske identitete ▶ za trigonometrijske funkcije: <ul style="list-style-type: none"> – definirati trigonometrijske funkcije na brojevnoj kružnici – odrediti temeljni period i primijeniti svojstvo periodičnosti trigonometrijskih funkcija – primijeniti osnovne trigonometrijske identitete: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ <ul style="list-style-type: none"> – primijeniti adicijske formule – primijeniti formule pretvorbe zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak i obrnuto – prepoznati, odnosno nacrtati grafove funkcija oblika: $f(x) = A \sin(Bx + C) + D \quad \text{i} \quad f(x) = A \cos(Bx + C) + D$
nizovi	<ul style="list-style-type: none"> ▶ prepoznati zadani niz ▶ prepoznati aritmetički niz ▶ rabeći definiciju i svojstva aritmetičkoga niza, odrediti opći član te zbroj prvih n članova ▶ prepoznati geometrijski niz ▶ rabeći definiciju i svojstva geometrijskoga niza, odrediti opći član te zbroj prvih n članova i zbroj reda
derivacija funkcije	<ul style="list-style-type: none"> ▶ derivirati konstantnu funkciju, funkciju potenciranja i trigonometrijske funkcije ▶ derivirati zbroj, razliku, umnožak, kvocijent i kompoziciju funkcija ▶ odrediti tangentu na graf funkcije u točki ▶ rabiti derivaciju funkcije pri ispitivanju tijeku funkcije

JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

Sadržaji	Obrazovni ishodi
linearne jednadžbe i nejednadžbe	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati linearne jednadžbe ▶ rješavati linearne nejednadžbe
kvadratne jednadžbe i nejednadžbe	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati kvadratne jednadžbe ▶ rješavati kvadratne nejednadžbe ▶ rabiti Viètine formule
jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima i drugim korijenima	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima, primjerice: $x - 3 + x = 5 \quad \text{i} \quad 2x + 3 > 5$ ▶ rješavati jednadžbe i nejednadžbe s korijenima, primjerice: $\sqrt{x^2 - 4} = 1$
jednostavnije polinomske i racionalne jednadžbe i nejednadžbe	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se mogu faktorizirati ▶ rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se supstitucijom mogu svesti na kvadratne, primjerice, bikvadratne jednadžbe

eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati jednadžbe/nejednadžbe s potencijama jednakih baza, primjerice: $2^{2x-1} = \sqrt{8}, 0.5^x = 32$ ▶ rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se mogu riješiti izravnom primjenom logaritmiranja, primjerice: $4^x < 5$ ▶ rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se mogu riješiti izravnom primjenom definicije logaritma, primjerice: $\log_2 x = 3$ ▶ rješavati jednadžbe/nejednadžbe u kojima se rabe osnovna svojstva računanja s eksponentima i logaritmima, primjerice: $\log_2(x+3) + \log_2(x+2) - 1 = 0$ ▶ rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se supstitucijom mogu svesti na kvadratne, primjerice: $9^x - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$
trigonometrijske jednadžbe	<ul style="list-style-type: none"> ▶ odrediti opće rješenje trigonometrijske jednadžbe ili rješenja iz zadanoga intervala rabeći definicije trigonometrijskih funkcija, primjerice: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.5$ ▶ odrediti opće rješenje trigonometrijske jednadžbe ili rješenja iz zadanoga intervala rabeći trigonometrijske identitete, primjerice: $2\sin 2x = \cos x$ ▶ rješavati jednadžbe koje se supstitucijom mogu svesti na kvadratne, primjerice: $2\tg^2 x - \tg x - 1 = 0$
sustavi navedenih jednadžbi i nejednadžbi	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rješavati sustave algebarski i grafički ▶ interpretirati grafički prikaz jednadžbama

GEOMETRIJA

Elementarna geometrija

Sadržaji	Obrazovni ishodi
elementarna geometrija likova u ravnini	<ul style="list-style-type: none"> ▶ odrediti mjeru kuta ▶ razlikovati vrste trokuta ▶ rabiti pojmove sukladnosti i sličnosti ▶ rabiti poučke o sukladnosti trokuta ▶ rabiti poučke o sličnosti trokuta ▶ rabiti koeficijent sličnosti ▶ rabiti Pitagorin poučak i njegov obrat ▶ rabiti osnovna svojstva paralelograma, trapeza i pravilnih mnogokuta ▶ odrediti elemente kružnice i kruga (središte i polumjer, kružni luk, kružni isječak, obodni i središnji kut, tetiva i tangenta) i rabiti njihova svojstva ▶ rabiti poučak o obodnomu i središnjem kutu i Talesov poučak ▶ odrediti opseg i površinu
odnosi među geometrijskim objektima u prostoru	<ul style="list-style-type: none"> ▶ prepoznati međusobni položaj dvaju pravaca i ravnina u prostoru ▶ odrediti probodište pravca i ravnine ▶ odrediti ortogonalnu projekciju točke i dužine ▶ odrediti kut pravca i ravnine i kut dviju ravnina
prizma, piramida, valjak, stožac, kugla	<ul style="list-style-type: none"> ▶ skicirati geometrijska tijela i prepoznati tijelo iz mreže ▶ prepoznati elemente tijela – osnovku (bazu), vrh, visinu, pobočke (strane) i plašt ▶ odrediti oplošje i obujam

TRIGONOMETRIJA

Sadržaji	Obrazovni ishodi
trigonometrija pravokutnog trokuta trigonometrija raznostraničnog trokuta	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rabiti definicije sinusa, kosinusa i tangensa kuta u pravokutnom trokutu ▶ rabiti poučak o sinusima i kosinusima ▶ primijeniti trigonometriju u planimetriji i stereometriji

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Sadržaji	Obrazovni ishodi
koordinatni sustav na pravcu i u ravnini	<ul style="list-style-type: none"> ▶ prikazati točke u koordinatnom sustavu ▶ odčitati koordinate točaka u koordinatnom sustavu ▶ izračunati udaljenost točaka ▶ izračunati koordinate polovišta dužine
vektori	<ul style="list-style-type: none"> ▶ zbrajati vektore, množiti vektore skalarom i skalarno množiti vektore ▶ rabiti koordinatni prikaz vektora ▶ odrediti duljinu vektora ▶ odrediti kut među vektorima
jednadžba pravca	<ul style="list-style-type: none"> ▶ rabiti eksplizitni i implicitni oblik jednadžbe pravca ▶ odrediti jednadžbu pravca zadanoga točkom i koeficijentom smjera ▶ odrediti jednadžbu pravca zadanoga dvjema točkama ▶ odrediti kut između dvaju pravaca ▶ rabiti uvjet usporednosti i okomitosti pravaca ▶ izračunati udaljenost točke od pravca
krivulje drugog reda	<ul style="list-style-type: none"> ▶ odrediti jednadžbu kružnice iz zadanih elemenata, i obrnuto ▶ odrediti jednadžbu elipse iz njezinih elemenata, i obrnuto ▶ odrediti jednadžbu hiperbole iz njezinih elemenata, i obrnuto te rabiti pojam i jednadžbe asimptota ▶ odrediti jednadžbu parabole iz njezinih elemenata, i obrnuto ▶ odrediti odnos između krivulje drugog reda i pravca ▶ odrediti jednadžbu tangente u točki krivulje ▶ rabiti uvjet dodira pravca i kružnice

MODELIRANJE

sva područja ispitivanja	<ul style="list-style-type: none"> ▶ modelirati situacije rabeći: <ul style="list-style-type: none"> – brojeve – algebru – geometriju – funkcije – jednadžbe – nejednadžbe
---------------------------------	--

II. OSNOVNI POJMOVI, PRAVILA I FORMULE

• Skupovi •

Definicija: Unija skupova A i B je skup: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ili } x \in B\}$.

Definicija: Presjek skupova A i B je skup: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ i } x \in B\}$.

Definicija: Razlika skupa A i skupa B ($A \setminus B$) skup je koji se sastoji od onih elemenata skupa A koji nisu u skupu B $\rightarrow A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$.

Važno: $A \setminus B \neq B \setminus A$

Definicija: Skup A je podskup skupa B ($A \subseteq B$) ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B.

Intervali

Zatvoreni interval: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Otvoreni interval: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Poluotvoreni ili poluzatvoreni interval:

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Neki posebni intervali:

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

Skupovi brojeva

Skup prirodnih brojeva: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

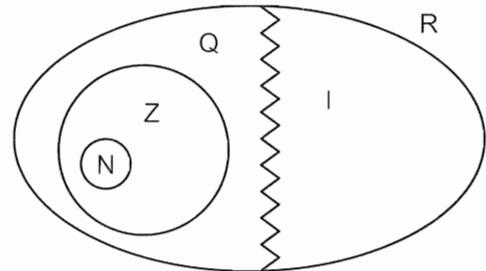
Skup cijelih brojeva: $\mathbf{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Skup racionalnih brojeva: $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{N} \right\}$

Skup iracionalnih brojeva \mathbf{I} : primjer iracionalnih brojeva: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$

Skup realnih brojeva \mathbf{R} unija je skupa racionalnih brojeva \mathbf{Q} i skupa iracionalnih brojeva \mathbf{I} .

$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$ uz $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$, gdje je \emptyset prazan skup



Skup kompleksnih brojeva

$$C = \{ z : z = a + bi : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \}$$

Vrijedi: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Ako je $z = ai + b$, tada je $\bar{z} = a - bi$. z i \bar{z} su konjugirano kompleksni brojevi.

a) Operacije s kompleksnim brojevima u algebarskom zapisu

$$z_1 = a + bi$$

$$z_2 = c + di$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

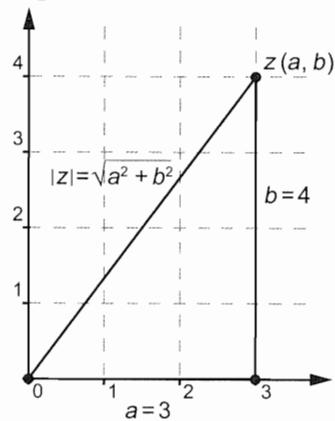
$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) \text{ uz } i^2 = -1$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, a, b \in \mathbb{R}$$



Prikaz kompleksnog broja u Gaussovoj ravnini

b) Trigonometrijski zapis kompleksnog broja

- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, $z^n = r^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \right)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

• Potencije i korijeni •

Potencije

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ faktora}} \quad a - \text{baza} \quad n - \text{eksponent}$$

Pravila za računanje s potencijama:

a) računanje s potencijama istih baza

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, za svaki $a > 0$ i za sve $m, n \in \mathbb{R}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$, za svaki $a > 0$ i za sve $m, n \in \mathbb{R}$,

b) računanje s potencijama istih eksponenata

- $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$, za svaki $a, b > 0$ i za svaki $m \in \mathbb{R}$
- $a^m : b^m = (a : b)^m$, za svaki $a, b > 0$ i za svaki $m \in \mathbb{R}$,

c) općenita pravila

- $a^0 = 1$, za svaki $a > 0$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, za svaki $a > 0$ i za sve $m, n \in \mathbf{R}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, za svaki $a > 0$ i za sve $m, n \in \mathbf{R}$.

Korijeni

Napomena: računanje s korijenima može se svesti na računanje s potencijama

- $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}$, za svaki $a > 0$ i za svaki $n \in \mathbf{R}, m \in \langle 0, +\infty \rangle$

► Racionalizacija nazivnika: $\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{a}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$

$$\frac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{a \cdot (\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$$

Kvadrat binoma, razlika kvadrata

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Kub binoma, zbroj i razlika kubova

- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Binomni poučak

Faktorijel: $n! = n \cdot (n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, za svaki $n \in \mathbf{N}$

Binomni koeficijenti: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, za svaki $n, k \in \mathbf{N}_0$ i $k \leq n$

Osnovna svojstava binomnih koeficijenata

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$$

Pascalov trokut

$n = 0$								1
$n = 1$								1
$n = 2$			1		2		1	
$n = 3$		1		3		3		1
$n = 4$	1		4		6		4	

Binomni poučak

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Postotci

$$p \cdot o = 100 \cdot i$$

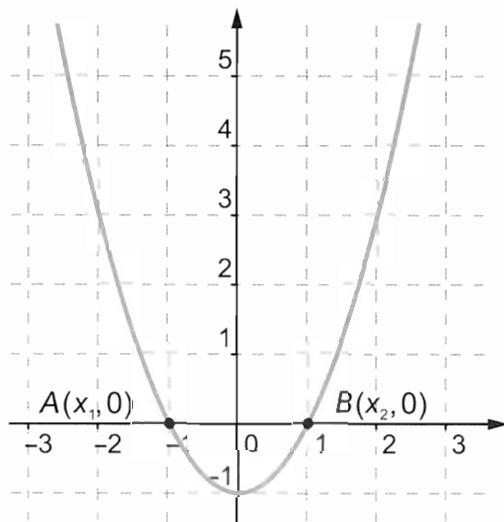
i – postotni iznos, p – postotak, o – osnovica

Funkcije

$f: D \rightarrow K$ D – domena ili područje definicije funkcije
 K – kodomena ili područje funkcijskih vrijednosti

Nultočke funkcije su sva rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ koja pripadaju skupu D .

- ▶ Sjedišta su grafa funkcije s koordinatnim osima točke: $(x_1, 0)$, $(0, f(0))$, gdje je x nultočka funkcije $f(x)$.
- ▶ Kompozicija funkcija f i g jest $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- ▶ Za funkciju f definira se inverzna funkcija f^{-1} kao $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ i $(f \circ f^{-1})(x) = x$.
- ▶ Za parnu funkciju vrijedi: $f(-x) = f(x)$, za svaki $x \in D$.
- ▶ Za neparnu funkciju vrijedi: $f(-x) = -f(x)$, za svaki $x \in D$.



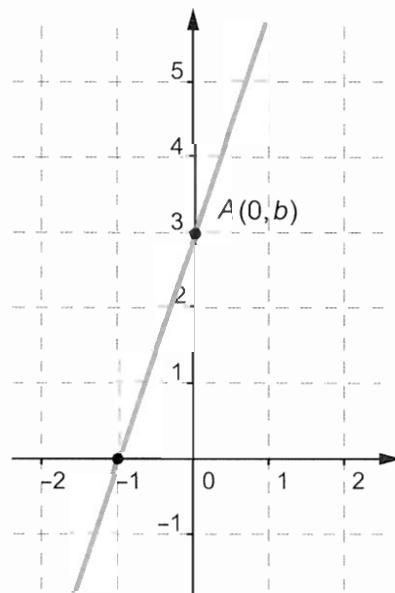
Linearna funkcija

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ $f(x) = ax + b$
 a – koeficijent smjera (nagib pravca)
 b – odsječak na osi y

Graf linearne funkcije je pravac.

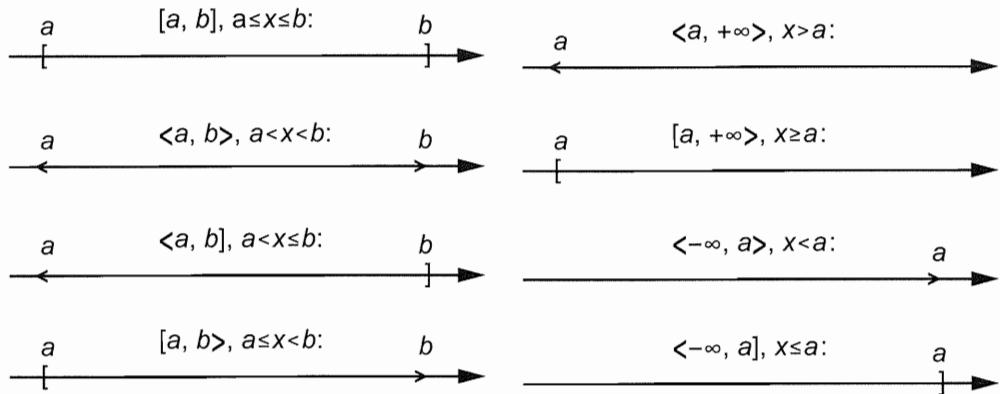
Linearna jednadžba

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$



Linearna nejednadžba

- Prikazi rješenja nejednadžbi uz pomoć intervala, nejednakosti i grafički ($a, b \in \mathbb{R}$):

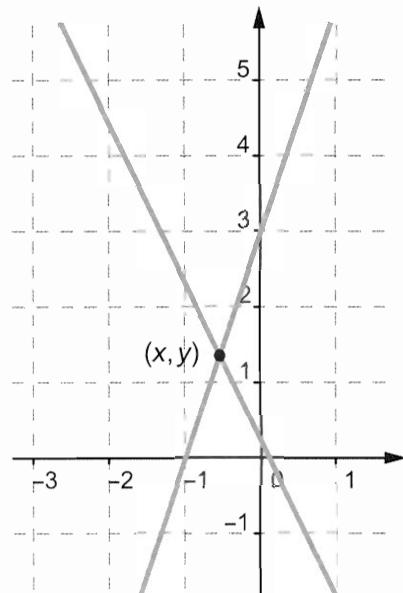


Sustavi linearnih jednadžbi

$$ax + b = y$$

$$cx + d = y$$

Rješenje sustava su koordinate sjecišta pripadnih pravaca.



Apsolutna vrijednost

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Funkcija absolutne vrijednosti

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+; f(x) = |x|, \text{ pri čemu je } \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$$

Jednadžba i nejednadžba s absolutnim vrijednostima

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}, \quad |x| \geq 0 \text{ za svaki } x \in \mathbb{R}$$

- nejednadžba $|x| \leq a$ ima rješenje:

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a & \text{za } a > 0 \\ x = 0 & \text{za } a = 0 \\ \text{nema rješenja} & \text{za } a < 0 \end{cases}$$

- nejednadžba $|x| \geq a$ ima rješenje:

$$\begin{cases} x \leq -a \text{ ili } x \geq a & \text{za } a > 0 \\ x = 0 & \text{za } a = 0 \\ \text{svaki realan broj} & \text{za } a < 0 \end{cases}$$

Kvadratna funkcija

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \quad a \neq 0$$

Parabola je grafički prikaz polinoma drugog stupnja.

Za $a > 0$ pripadna parabola je *otvorom* okrenuta prema gore

Za $a < 0$ pripadna parabola je *otvorom* okrenuta prema dolje

Tjeme parabole: $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Položaj parabole ovisi o parametrima a i D .

- Ako je broj $D = b^2 - 4ac = 0$, parabola dira osi apscisa.
- Ako je broj $D = b^2 - 4ac < 0$ i $a > 0$, parabola je iznad osi apscisa.
- Ako je broj $D = b^2 - 4ac < 0$ i $a < 0$, parabola je ispod osi apscisa.

Funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$ za $x_0 = -\frac{b}{2a}$ poprima ekstremnu vrijednost $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Za $a > 0$ y_0 globalni je minimum, za $a < 0$ y_0 globalni je maksimum.

Kvadratna jednadžba

- Nepotpune kvadratne jednadžbe:

$$\begin{array}{ll} b = 0, \quad a \neq 0 & c = 0; \quad a \neq 0 \\ ax^2 + c = 0 & ax^2 + bx = 0 \\ x_{1,2} = \sqrt{-\frac{c}{a}}; & x_1 = 0 \\ & x_2 = -\frac{b}{a} \end{array}$$

- Opća kvadratna jednadžba: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Diskriminanta kvadratne jednadžbe: $D = b^2 - 4ac$
 - $D > 0$ jednadžba ima dva različita realna rješenja
 - $D = 0$ jednadžba ima dvostruko realno rješenje
 - $D < 0$ jednadžba nema realnih rješenja, rješenja su konjugirano kompleksni brojevi $x_2 = \bar{x}_1$

- Vièteove formule za rješavanje kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a}$$

- Faktorizacija kvadratnog trinoma $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$

- Normirana kvadratna jednadžba kojoj su rješenja x_1 i x_2 glasi:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Kvadratna nejednadžba

- Rješenja kvadratnih nejednadžbi: $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$ mogu se odrediti sa skice pripadne parabole.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

$$f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} \quad f(x) = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$$

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+ \quad f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1$$

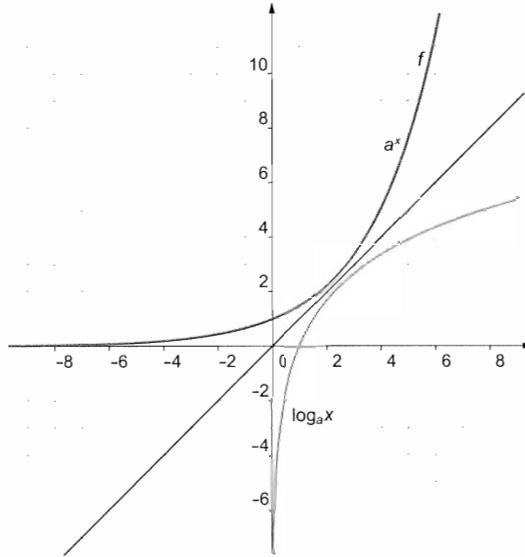
$$\log_b b^x = x = b^{\log_b x}, \text{ za } b > 0, b \neq 1$$

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y, \text{ za } b, x, y > 0, b \neq 1$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y, \text{ za } b, x, y > 0, b \neq 1$$

$$\log_b x^y = y \log_b x, b > 0, b \neq 1 \text{ i } x, y > 0$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$



Eksponencijalna i logaritamska jednadžba

$$b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a, \text{ za } b > 0, b \neq 1 \text{ i } y > 0.$$

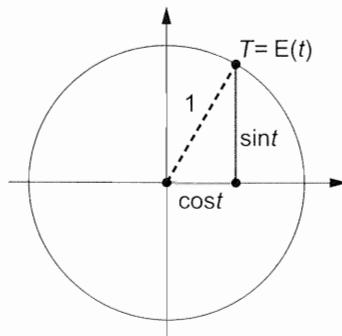
$f(x) = a^x$ i $g(x) = b^x$. Ako je $f(x) = g(x)$ i $a = b$ slijedi da je $x = y$.

Trigonometrijske funkcije

- Pretvorba stupnjeva u radijane $\alpha^\circ = \frac{\alpha^\circ}{180^\circ} \cdot \pi$ rad. Npr. $90^\circ = \frac{90^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$ rad.
- Pretvorba radijana u stupnjeve $\alpha \text{ rad} = \frac{\alpha \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} \cdot 180^\circ$. Npr. $\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} = 45^\circ$
- Definicije funkcija sinus i kosinus

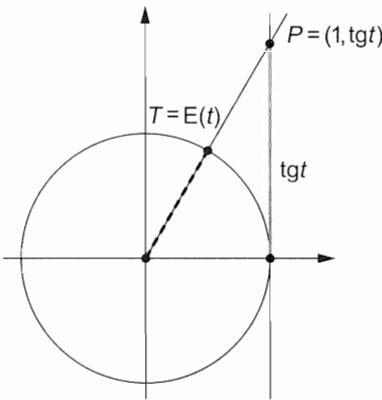
$$f: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1] \quad f(t) = \sin t$$

$$f: \mathbf{R} \rightarrow [-1, 1] \quad f(t) = \cos t$$



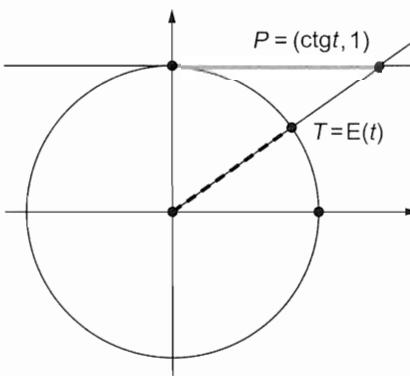
tangens

$$f : \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(t) = \tan t$$



kotangens

$$f : \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \rightarrow \mathbf{R} \quad f(t) = \cot t$$



- Kosinus je parna funkcija $\cos(-t) = \cos t, \forall t \in \mathbf{R}$
 - Sinus, tangens i kotangens neparne su funkcije $\sin(-t) = -\sin t, \forall t \in \mathbf{R}$;
- $$\tan(-t) = -\tan t, \forall t \in \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z} \right\};$$
- $$\cot(-t) = -\cot t, \forall t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}.$$
- Trigonometrijske su funkcije periodične ($k \in \mathbf{Z}$):

$$\begin{aligned} \sin(t + k \cdot 2\pi) &= \sin t, & \cos(t + k \cdot 2\pi) &= \cos t, \\ \tan(t + k\pi) &= \tan t, & \cot(t + k\pi) &= \cot t. \end{aligned}$$

Dakle, funkcije sin i cos imaju temeljni period 2π , a tg i ctg temeljni period π .

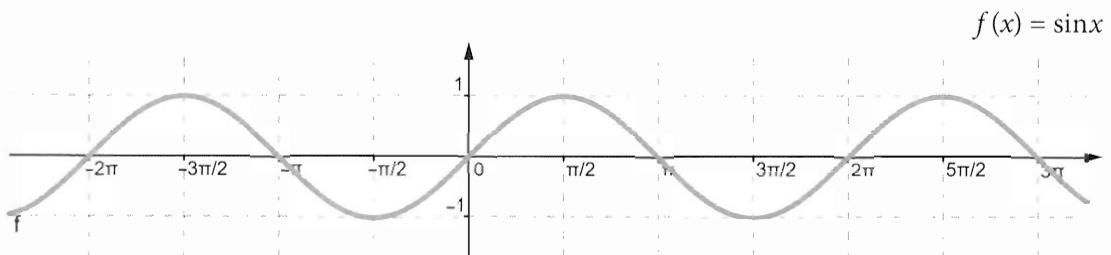
- Formule redukcije $\cos(\pi - t) = -\cos t \quad \cos(\pi + t) = -\cos t$
 $\sin(\pi - t) = \sin t \quad \sin(\pi + t) = -\sin t$
- $$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \sin t & \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) &= -\sin t \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) &= \cos t & \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) &= \cos t \end{aligned}$$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 - $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x, \quad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}.$$

- $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$, $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$,
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \cos(x-y)]$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Graf funkcije sinus $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ amplituda A , period $T = \frac{2\pi}{\omega}$, fazni pomak φ



Nizovi

- Aritmetički niz: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$,

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

- Geometrijski niz: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$,

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Geometrijski red: $S = \frac{a_1}{q-1}$, $|q| < 1$

Derivacija funkcije

- Derivacija umnoška: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- Derivacija kvocijenta: $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- Derivacija kompozicije: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- Tangenta na graf funkcije f u točki $T(x_1, y_1)$:
 $y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$
- Derivacije:

$$c' = 0 \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

• Planimetrija •

► Oznake:

- A, B, C vrhovi trokuta
- A, B, C, D vrhovi četverokuta
- a, b, c stranice
- α, β, γ kutovi
- O opseg geometrijskog lika
- P površina geometrijskog lika
- d dijagonala kvadrata i pravokutnika
- e, f dijagonale paralelograma
- R, r_o polumjer trokutu opisane kružnice
- p, r_u polumjer trokutu upisane kružnice.

Trokut

Trokut

$$P = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}; P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ac \sin \beta; P = \frac{abc}{4R}; P = \rho \cdot s$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}; s = \frac{a+b+c}{2}$$

► Zbroj kutova u trokutu: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

► Sukladnost i sličnost trokuta

Kažemo da su trokuti sukladni ako imaju sukladne odgovarajuće kutove i stranice:

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

■ Kažemo da su trokuti slični ako imaju sukladne odgovarajuće kutove i proporcionalne (razmjerne) odgovarajuće stranice: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

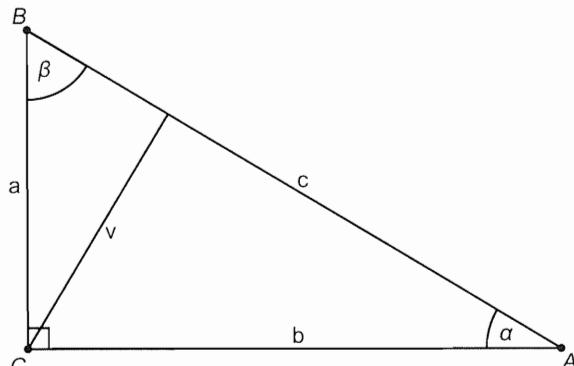
■ Koeficijent sličnosti k :

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}; \frac{O'}{O} = k; \frac{P'}{P} = k^2.$$

Pravokutni trokut

- $\alpha + \beta = 90^\circ, \gamma = 90^\circ$
- $c^2 = a^2 + b^2$ (Pitagorin poučak)
- $P = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2}$
- $O = a + b + c$
- $R = \frac{c}{2}$
- $\rho = \frac{ab}{a+b+c}$
- $p + q = c$

$v = \sqrt{pq}, a = \sqrt{pc}, b = \sqrt{qc}$ Euklidov poučak



► Jednakostranični trokut

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}; P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; R = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \rho = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}; O = 3a$$

Trigonometrija pravokutnoga trokuta

- ▶ sinus kuta = $\frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$, $\sin \alpha = \frac{a}{c}$
- ▶ kosinus kuta = $\frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$
- ▶ tangens kuta = $\frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$, $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Trigonometrija raznostraničnoga trokuta

- ▶ Poučak o sinusima: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$
- ▶ Poučak o kosinusima:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Četverokut

- ▶ Paralelogram:
$$P = a \cdot v; \quad P = ab \sin \alpha;$$

$$P = \frac{1}{2}ef \sin \varphi; \quad O = 2(a + b)$$
- ▶ Romb:
$$P = a^2 \sin \alpha; \quad P = \frac{1}{2}ef; \quad O = 4a$$
- ▶ Trapez:
$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v; \quad O = a + b + c + d$$

Pravilni mnogokuti

- ▶ Središnji kut: $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$
- ▶ Unutarnji kut: $180^\circ - \alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$
- ▶ Broj dijagonala: $\frac{n(n-3)}{2}$
- ▶ Zbroj unutarnjih kutova: $180^\circ \cdot (n-2)$

Krug i kružnica

- ▶ Opseg kruga i kružnice $o = 2r\pi$; površina kruga $P = r^2\pi$
- ▶ Površina kružnog isječka: $I = \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$ (α -kut izražen u stupnjevima)
- ▶ Duljina kružnog luka: $l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$ (α -kut izražen u stupnjevima)
- ▶ Talesov poučak: Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.
- ▶ Poučak o obodnome (β) i središnjem kutu (α): $\alpha = 2\beta$

• Stereometrija •

Oznake:

- | | | | |
|-------|------------------------------|---------|-------------------------------|
| ► O | oplošje | ► o_B | opseg baze |
| ► V | volumen (obujam) | ► P | površina plašta |
| ► B | površina baze | ► s | izvodnica stošca |
| ► D | prostorna dijagonala | ► r | polumjer baze valjka i stošca |
| ► h | visina geometrijskoga tijela | ► R | polumjer opisane kugle. |

Prizma

$$V = B \cdot h, \quad O = 2B + P = 2B + o_B \cdot h$$

► **Kocka:** $V = a^3, \quad O = 6a^2, \quad D = a\sqrt{3}$

► **Kvadar:** $V = a \cdot b \cdot c, \quad O = 2(ab + bc + ac), \quad D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Piramida

$$V = \frac{B \cdot h}{3}, \quad O = B + P$$

► **Valjak:** $V = r^2\pi h, \quad O = 2r\pi(r + h)$

► **Stožac:** $V = \frac{r^2\pi h}{3}, \quad O = r\pi(r + s), \quad s = \sqrt{r^2 + h^2}$

Kugla

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi, \quad O = 4R^2\pi$$

• Analitička geometrija •

Vektori

- Koordinatni prikaz vektora:
 $\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$
- Skalarni umnožak vektora:
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$
- Duljina vektora: $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
- Kut među vektorima: $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Koordinatni sustav u ravnini

- Udaljenost točaka $T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$:
 $d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Koordinate polovišta $P(x_p, y_p)$ dužine $\overline{T_1T_2}$:
 $x_p = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_p = \frac{y_1 + y_2}{2}$
- Površina trokuta ΔABC , $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$:

$$P = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$$

Jednadžba pravca

- ▶ Eksplisitni oblik jednadžbe pravca: $y = kx + l$; $k = \operatorname{tg} \alpha$, α kut nagiba pravca prema x -osi; l – odsječak pravca na osi ordinata
- ▶ Jednadžba pravca zadanoga točkom $T(x_1, y_1)$ i koeficijentom smjera k : $y - y_1 = k(x - x_1)$
- ▶ Jednadžba pravca zadanoga dvjema točkama $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
- ▶ Segmentni oblik jednadžbe pravca: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, gdje su m i n odsječci na osi x i y redom
- ▶ Uvjet usporednosti pravaca: $p_1 \parallel p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$, gdje su k_1, k_2 koeficijenti smjera
- ▶ Uvjet okomitosti pravaca: $p_1 \perp p_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$, gdje su k_1, k_2 koeficijenti smjera
- ▶ Kut između dva pravca: $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$, $\alpha \in [0, \pi]$, $k_1 \cdot k_2 \neq 1$
- ▶ Udaljenost točke $T(x_1, y_1)$ od pravca $p \dots Ax + By + C = 0$: $d(T, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Krivulje drugoga reda

Kružnica

- ▶ Jednadžba kružnice polumjera r sa središtem u $S(p, q)$:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$
- ▶ Jednadžba tangente na kružnicu u njezinoj točki $T(x_1, y_1)$:

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$$
- ▶ Uvjet da pravac $p \dots y = kx + l$ bude tangenta kružnice:

$$r^2(k^2 + 1) = (kp - q + l)^2$$

Elipsa

- ▶ a – duljina velike poluosni
- ▶ e – linearni ekscentricitet, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$
- ▶ $F_{1,2}(\pm e, 0)$ – žarišta
- ▶ Jednadžba elipse:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- ▶ Jednadžba tangente na elipsu u njezinoj točki $T(x_1, y_1)$:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$
- ▶ Uvjet da pravac $p \dots y = kx + l$ bude tangenta elipse: $a^2 k^2 + b^2 = l^2$

Hiperbola

- ▶ a – duljina velike poluosni
- ▶ b – duljina male poluosni
- ▶ e – linearni ekscentricitet, $e = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ▶ $F_{1,2}(\pm e, 0)$ – žarišta
- ▶ asimptote: $y = \pm \frac{b}{a} x$
- ▶ Jednadžba hiperbole:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2; \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
- ▶ Jednadžba tangente na hiperbolu u njezinoj točki $T(x_1, y_1)$:

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$
- ▶ Uvjet da pravac $p \dots y = kx + l$ bude tangenta hiperbole: $a^2 k^2 - b^2 = l^2$

Parabola

- ▶ Jednadžba parabole s tjemenom u ishodištu: $y^2 = 2px$
- ▶ Žarište $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- ▶ Direktrisa (ravnalica): $x = -\frac{p}{2}$
- ▶ Jednadžba tangente na parabolu u njezinoj točki $T(x_1, y_1)$:

$$y_1 y = p(x + x_1)$$
- ▶ Uvjet da pravac $p \dots y = kx + l$ bude tangenta parabole: $p = 2kl$

III. MATEMATIČKE FORMULE NA DRŽAVNOJ MATURI

• Formule za osnovnu razinu (B) •

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ► $a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0$ ► $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$
 - $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ► $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
 - Kvadratna jednadžba: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 - Tjeme parabole: $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$
-

- Površina trokuta: $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$
 - Površina paralelograma: $P = a \cdot v_a$
 - Površina kruga: $P = r^2\pi$
 - Opseg kruga: $O = 2r\pi$
-

B – površina osnovke (baze), P – površina pobočja, h – duljina visine, r – polumjer kugle

- Obujam (volumen) prizme i valjka: $V = B \cdot h$
 - Oplošje prizme: $O = 2B + P$
 - Obujam (volumen) piramide i stošca: $V = \frac{1}{3}B \cdot h$
 - Oplošje piramide: $O = B + P$
 - Obujam (volumen) kugle: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$
-

- Udaljenost točaka T_1, T_2 : $d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Jednadžba pravca: $y - y_1 = k(x - x_1)$, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Uvjet usporednosti pravaca: $k_1 = k_2$

•Formule za višu razinu (A) •

► Kompleksan broj: $i^2 = -1$, $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a, b \in \mathbf{R}$

► $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\blacktriangleright a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \blacktriangleright a^m : a^n = a^{m-n}, a \neq 0 \quad \blacktriangleright a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0 \quad \blacktriangleright \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\blacktriangleright (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\blacktriangleright a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\blacktriangleright (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\blacktriangleright a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$\blacktriangleright (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$\blacktriangleright \text{Kvadratna jednadžba: } ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\blacktriangleright \text{Viète formule: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a}$$

$$\blacktriangleright \text{Tjeme parabole: } T \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

$$\blacktriangleright b^x = a \Leftrightarrow x = \log_b a, \quad \log_b b^x = x = b^{\log_b x}$$

$$\blacktriangleright \log_b(xy) = \log_b x + \log_b y, \quad \log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y, \quad \log_b xy = y \log_b x \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\blacktriangleright \text{Površina trokuta: } P = \frac{a \cdot v_a}{2}, \quad P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

$$P = \frac{ab \sin y}{2}, \quad P = \frac{abc}{4r_o}, \quad P = r_u s$$

$$\blacktriangleright \text{Jednakostraničan trokut: } P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \quad v = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad r_o = \frac{2}{3} v, \quad r_u = \frac{1}{3} v$$

$$\blacktriangleright \text{Površina paralelograma: } P = a \cdot v,$$

$$\blacktriangleright \text{Površina trapeza: } P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$\blacktriangleright \text{Površina kruga: } P = r^2 \pi,$$

$$\blacktriangleright \text{Opseg kruga: } O = 2r\pi$$

$$\blacktriangleright \text{Površina kružnoga isječka: } P = \frac{r^2 \pi \alpha}{360},$$

$$\blacktriangleright \text{Duljina kružnoga luka: } l = \frac{r\pi\alpha}{180}$$

B – površina osnovke (base), P – površina pobočja, h – duljina visine, r – polujem osnovke stošca

- Obujam (volumen) prizme i valjka: $V = B \cdot h$, ► Oplošje prizme i valjka: $O = 2B + P$
 - Obujam (volumen) piramide i stošca: $V = \frac{1}{3} B \cdot h$, ► Oplošje piramide: $O = B + P$
 - Oplošje stošca: $O = r^2\pi + r\pi s$
 - Obujam (volumen) kugle: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$, ► Oplošje kugle: $O = 4r^2\pi$, r – polujem kugle
-

U pravokutnom trokutu:

$$\begin{aligned}\text{sinus kuta} &= \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} & \text{kosinus kuta} &= \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}} \\ \text{tangens kuta} &= \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}\end{aligned}$$

- Poučak o sinusima: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$,
 - Poučak o kosinusima: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$
 - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
 - $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$,
 - $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$
 - $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 - $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 - $\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$, $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$,
 - $\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
 - $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
-

- Udaljenost točaka T_1, T_2 : $d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Polovište dužine $\overline{T_1T_2}$: $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- Vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$: $\overrightarrow{T_1T_2} = \vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$
- Skalarni umnožak vektora: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- Jednadžba pravca: $y - y_1 = k(x - x_1)$, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- ▶ Kut α između dvaju pravaca: $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$
- ▶ Udaljenost točke $T(x_1, y_1)$ i pravca $p \dots Ax + By + C = 0$: $d(T, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- ▶ Jednadžbe krivulja drugog reda i tangenata u točki krivulje

Krivulja drugog reda	Jednadžba krivulje	Jednadžba tangente u točki T(x ₁ , y ₁) krivulje
Kružnica središte $S(p, q)$	$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$	$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$
Elipsa fokusi $F_{1,2}(\pm e, 0)$ $e^2 = a^2 - b^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
Hiperbola fokus $F_{1,2}(\pm e, 0)$ $e^2 = a^2 + b^2$ asimptote $y = \pm \frac{b}{a} x$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
Parabola fokus $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$y^2 = 2px$	$y_1 y = p(x + x_1)$

- ▶ Uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i kružnice: $r^2(1 + k^2) = (kp - q + l)^2$

- ▶ Aritmetički niz: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
- ▶ Geometrijski niz: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$
- ▶ Geometrijski red: $S = \frac{a_1}{q - 1}$, $|q| < 1$

- ▶ Derivacija umnoška: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- ▶ Derivacija kvocijenta: $\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- ▶ Derivacija kompozicije: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- ▶ Tangenta na graf funkcije f u točki $T(x_1, y_1)$: $y - y_1 = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$
- ▶ Derivacije:

$$c' = 0 \quad (x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \neq 0 \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

IV. ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE ZA POLAGANJE DRŽAVNE MATURE

1. BROJEVI I ALGEBRA

1.1. Skupovi brojeva i intervali	33
1.2. Računanje s prirodnim, cijelim, racionalnim, realnim i kompleksnim brojevima	36
1.3. Računanje s potencijama i korijenima	41
1.4. Računanje s apsolutnom vrijednosti	44
1.5. Algebarski izrazi i algebarski razlomci	46
1.6. Računanje s postotcima	50
1.7. Omjeri i izražavanje jedne veličine uz pomoć drugih	53
1.8. Upotreba džepnog računala. Mjerne jedinice u geometriji i u zadatcima s tekstom	57
1.9. Brojevi i algebra – zadatci za vježbu	61
Zadatci višestrukog izbora	61
Zadatci kratkog odgovora	73
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	78
Osnovna razina	78
Viša razina	85

1.1. Skupovi brojeva i intervali

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Koja od navedenih brojeva pripada skupu \mathbb{I} ?

- A) -2 B) $2\sqrt{7}$ C) $-\sqrt{81}$ D) $-\frac{1}{2}$

Rješenje: B.

Broj $2\sqrt{7} \in \mathbb{I}$, a svi ostali brojevi racionalni su.

Primjer 2.

Koja od navedenih intervala predstavlja skup svih realnih rješenja nejednadžbe $x \leq 3$?

- A) $\langle -\infty, 3 \rangle$ B) $\langle -\infty, 3] \quad$ C) $\langle 3, +\infty \rangle \quad$ D) $[3, +\infty \rangle$

Rješenje: B.

To su, dakle, svi realni brojevi manji ili jednaki broju 3.

Primjer 3.

Presjek skupova $\langle -3, 3 \rangle \cap \langle 0, 5 \rangle$ jednak je skupu:

- A) $\langle 3, 5 \rangle$, B) $\langle 0, 3 \rangle$, C) $\langle -3, 5 \rangle$, D) $\langle -3, 0 \rangle$.

Rješenje: B.

Treba pronaći presjek (zajednički dio) tih dvaju intervala.

Primjer 4.

Koji je od navedenih brojeva najmanji?

- A) -1.4 B) $-3\frac{1}{2}$ C) 0.25 D) $-3\frac{3}{4}$

Rješenje: D.

-1.4

$$-3\frac{1}{2} = -3.5$$

0.25

$$-3\frac{3}{4} = -3.75$$

Primjer 5.

Skup $[-3, 2] \cup (-1, 4]$ pripada:

- A) otvorenim intervalima, B) sleva poluotvorenim intervalima,
C) zatvorenim intervalima, D) zdesna poluotvorenim intervalima.

Rješenje: C.

Unija tih dvaju intervala je $[-3, 4]$, a to je rješenje zatvoreni interval.

Primjer 6.

Koji par predstavlja dva međusobno recipročna broja?

- A) $\frac{3}{4}; 0.\dot{3}$ B) $\frac{1}{2}; -0.5$ C) $\frac{2}{5}; 2.5$ D) $\frac{1}{3}; 1.\dot{3}$

Rješenje: C.

Recipročni su brojevi oni za koje vrijedi da im je umnožak jednak 1.

Primjer 7.

Koja je od tvrdnji istinita?

- A) $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ B) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ C) $3 \in \mathbb{I}$ D) $\frac{3}{7} \in \mathbb{N}$

Rješenje: A.

Prema definicijama skupova brojeva.

Primjer 8.

Koja od navedenih elemenata skupa C pripada i skupu R?

- A) $2 + i$ B) $-i$ C) $3i$ D) $\sqrt{8}$

Rješenje: D.

Broj $\sqrt{8}$ pripada skupu R.

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Ispišimo sve cijele brojeve veće od -3 i manje od 2 .

Rješenje:

$-2, -1, 0, 1$

Primjer 2.

Odredimo cijele brojeve između kojih se nalazi broj $-1 + \sqrt{2}$ i koji su mu najbliži.

Rješenje:

Između 0 i 1 .

$$-1 + \sqrt{2} \approx 0.4142$$

Primjer 3.

Brzinu iz sljedeće izjave zapišimo uz pomoć nejednakosti: Iznos brzine v automobila na autoputu nalazi se između 80 i 130 km/h.

Rješenje:

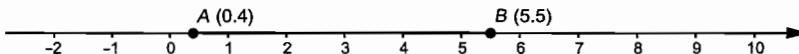
$$80 \text{ km/h} \leq v \leq 130 \text{ km/h}$$

Primjer 4.

Interval $\left[\frac{2}{5}, \frac{11}{2} \right]$ prikažimo na brojevnom pravcu.

Rješenje:

$$\frac{2}{5} = 0.4 \quad \frac{11}{2} = 5.5$$



Primjer 5.

Broju $z = -2 + i$ odredimo njegov konjugirano kompleksni par.

Rješenje:

$$\bar{z} = -2 - i$$

Viši razina (2)

Primjer 6.

Odredi cijele brojeve koji se nalaze između $\sqrt{3}$ i $\sqrt{7}$.

Rješenje:

Cijeli broj između $\sqrt{3}$ i $\sqrt{7}$ je broj 2 .

• 1.2. Računanje s prirodnim, cijelim, racionalnim, realnim i kompleksnim brojevima •

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Za koju je od navedenih vrijednosti broja n razlomak $\frac{12}{n-1}$ prirodan broj?

- A) $n = -11$ B) $n = 1$ C) $n = 2$ D) $n = 0$

Rješenje: za C.

Za $n = 1$ razlomak nije definiran, a za $n = -11$ i $n = 0$ dobiju se negativni cijeli brojevi.

Primjer 2.

Izračunajmo: $D(35, 72)$.

- A) 5, B) 1, C) 10, D) 3.

Rješenje: B.

Budući da je $35 = 5 \cdot 7$ i $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, ne postoji prirodan broj veći od 1 koji dijeli 35 i 72.

Primjer 3.

Izračunajmo $-2 + \frac{1}{7} : \frac{1}{49}$.

- A) 2 B) 5 C) 3 D) -5

Rješenje: B.

$$-2 + \frac{1}{7} : \frac{1}{49} = -2 + \frac{1}{7} \cdot \frac{49}{1} = -2 + 7 = 5$$

Primjer 4.

Koja je vrijednost izraza $\frac{\frac{1}{8} + \frac{5}{12} - \frac{7}{32}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{12} - \frac{7}{32}}$?

- A) $\frac{31}{23}$ B) $\frac{73}{23}$ C) $\frac{23}{31}$ D) $\frac{31}{96}$

Rješenje: A.

$$\frac{\frac{1}{8} + \frac{5}{12} - \frac{7}{32}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{12} - \frac{7}{32}} = \frac{\frac{12+40-21}{96}}{\frac{36+8-21}{96}} = \frac{31}{23}$$

Primjer 5.

Vrijednost izraza $-3 - 3 \{-3 - 3 [-3 (-3) - 3]\}$ je:

- A) -60, B) 216, C) 60, D) 126.

Rješenje: C.

$$-3 - 3 \{-3 - 3 [-3 (-3) - 3]\} = -3 - 3 \{-3 - 3 [9 - 3]\} = -3 - 3 \{-3 - 3 \cdot 6\} = -3 - 3 \cdot (-21) = -3 + 63 = 60$$

Primjer 6.

Koja je vrijednost izraza $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \right)$?

- A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{7}{12}$ C) $\frac{12}{7}$ D) $\frac{7}{3}$

Rješenje: B.

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} : \frac{\frac{4}{4} - \frac{3}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \right) = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} : \frac{\frac{12}{12}}{\frac{7}{12}} \cdot \frac{5}{12} = -\frac{1}{5} \left(-\frac{7}{1} \right) \cdot \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Primjer 7.

Koja je vrijednost izraza $\left(\frac{\frac{10}{3} + \frac{1}{2}}{0.5 - \frac{10}{3}} \cdot \frac{2.5 - \frac{7}{3}}{\frac{3}{2} - 0.2} \right) : (6.25 - 1)$?

- A) 1 B) $\frac{13923}{460}$ C) $\frac{25}{4}$ D) $-\frac{460}{13923}$

Rješenje: D.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\frac{10}{3} + \frac{1}{2}}{0.5 - \frac{10}{3}} \cdot \frac{2.5 - \frac{7}{3}}{\frac{3}{2} - 0.2} \right) : (6.25 - 1) = \left(\frac{\frac{10}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{10}{3}} \cdot \frac{\frac{5}{2} - \frac{7}{3}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{5}} \right) : \left(\frac{25}{4} - 1 \right) = \left(\frac{\frac{23}{6}}{\frac{6}{17}} \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{13}{10}} \right) : \frac{21}{4} = \\ & = \left(\frac{\frac{23}{6}}{\frac{6}{17}} \cdot \frac{5}{39} \right) \cdot \frac{4}{21} = \left(\frac{23}{17} \cdot \frac{10}{78} \right) \cdot \frac{4}{21} = -\frac{230}{1326} \cdot \frac{4}{21} = -\frac{230}{663} \cdot \frac{2}{21} = -\frac{460}{13923} \end{aligned}$$

► **Primjer 8.**

Imaginarni dio broja $(1 - i)^3$ jest:

- A) -2, B) $-2i$, C) 2, D) $-i$.

Rješenje: A.

$$(1 - i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3 = 1 - 3i - 3 + i = -2 - 2i$$

$$\text{Im } (1 - i)^3 = -2$$

Ustaži online (1)

► **Primjer 9.**

Modul kompleksnog broja $\frac{1+2i}{2-i}$ jest:

- A) i , B) 1, C) -1, D) 2.

Rješenje: B.

$$\frac{1+2i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+i+4i+2i^2}{4+1} = \frac{5i}{5} = i$$

$$|i| = |0 + 1 \cdot i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

Ustaži online (1)

► **Primjer 10.**

Zapis broja $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ u trigonometrijskom obliku jest:

- A) $\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$, B) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$,

C) $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, D) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.

Rješenje: C.

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3},$$

jer točka $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pripada drugom kvadrantu Gaussove ravnine.

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

viša razina (A)

Primjer 11. >

Skup svih kompleksih brojeva koji imaju apsolutnu vrijednost jednaku $r, r > 0$, prikazan u Gaussovoj ravnini jest:

- A) kružnica, B) krug, C) elipsa, D) pravac.

Rješenje: A.

$z = x + yi, |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, pa iz $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ slijedi $x^2 + y^2 = r^2$, što je jednadžba kružnice polumjera r sa središtem u ishodištu.

viša razina (A)

Primjer 12.

Vrijednost izraza $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2.5}} - 2^{1.2}$ (zaokruženo na četiri decimale, uz upotrebu kalkulatora) jest:

- A) -1.2344, B) 1.2344, C) -1.2345, D) nema rješenja.

Rješenje: A.

Upotrijebimo li kalkulator, dobiti ćemo broj -1.234406331.

Primjer 13.

Vrijednost izraza $\sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ jest:

- A) $\sqrt[4]{128}$, B) $\sqrt[4]{8}$, C) $\sqrt[8]{128}$, D) $\sqrt{8}$.

Rješenje: C.

$$\sqrt{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \sqrt{\sqrt{2\sqrt[4]{8}}} = \sqrt[8]{128} = \sqrt[8]{128}$$

Primjer 14.

Nakon unošenja pod znak korijena, za $x, y > 0$ izraz $2xy\sqrt{\frac{5x}{2y}}$ postaje:

- A) $\sqrt{2x^2y}$, B) $\sqrt{10x^2y}$, C) $\sqrt{10x^3y}$, D) $\sqrt{x^2y}$.

Rješenje: C.

$$2xy\sqrt{\frac{5x}{2y}} = \sqrt{\frac{4x^2y^2 \cdot 5x}{2y}} = \sqrt{\frac{2x^2y \cdot 5x}{1}} = \sqrt{10x^3y}$$

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Izračunajmo $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5} + 1 \right)$.

Rješenje:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{2+5}{5} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{7}{5} = \frac{15-10-42}{30} = -\frac{37}{30}$$

Primjer 2.

Izračunajmo: $\left(1.75 : \frac{2}{3} - 1.75 \cdot \frac{9}{8} \right) : \frac{7}{12}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \left(1.75 : \frac{2}{3} - 1.75 \cdot \frac{9}{8} \right) : \frac{7}{12} &= \left(\frac{175}{100} \cdot \frac{3}{2} - \frac{175}{100} \cdot \frac{9}{8} \right) : \frac{12}{7} = \left(\frac{7}{4} \cdot \frac{3}{2} - \frac{7}{4} \cdot \frac{9}{8} \right) : \frac{12}{7} = \left(\frac{21}{8} - \frac{63}{32} \right) : \frac{12}{7} = \\ &= \frac{84-63}{32} \cdot \frac{12}{7} = \frac{21}{32} \cdot \frac{12}{7} = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Primjer 3.

Izračunajmo $\frac{0.125 : 0.25 + \frac{25}{16} : 2.5}{(10 - 22 : 2.3) \cdot 0.46 + 1.6}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \frac{0.125 : 0.25 + \frac{25}{16} : 2.5}{(10 - 22 : 2.3) \cdot 0.46 + 1.6} &= \frac{\frac{125}{1000} \cdot \frac{100}{25} + \frac{25}{16} \cdot \frac{10}{25}}{\left(10 - \frac{22}{23} \cdot \frac{10}{23} \right) \cdot \frac{46}{100} + \frac{16}{10}} = \\ &= \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{1} + \frac{5}{8}}{\left(10 - \frac{220}{23} \right) \cdot \frac{23}{50} + \frac{8}{5}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{8}}{\frac{230-220}{23} \cdot \frac{23}{50} + \frac{8}{5}} = \frac{\frac{4+5}{8}}{\frac{1}{5} + \frac{8}{5}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{5}} = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

Primjer 4.

Decimalni broj 0.375 napiši u obliku razlomka i skrati do kraja.

Rješenje:

$$0.375 = \frac{375}{1000} : \frac{25}{25} = \frac{15}{40} : \frac{5}{5} = \frac{3}{8}.$$

Primjer 5.

Izračunajmo: $i^{27} - i^{15} + i^{-37} - i^{250}$.

Rješenje:

$$i^{27} = i^{4 \cdot 6 + 3} = i^3 = -i$$

$$i^{250} = i^{4 \cdot 62 + 2} = i^2 = -1$$

$$i^{15} = i^{4 \cdot 3 + 3} = i^3 = -i$$

$$i^{-37} = i^{4 \cdot (-9) + 1} = i^1 = i$$

$$i^{-37} = \frac{1}{i^{37}} = \frac{1}{i^{4 \cdot 9 + 1}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$

Primjer 6.

Koristeći se trigonometrijskim oblikom broja $-1 + i$, potencirajte broj eksponentom 100.

Rješenje:

$$x = -1$$

$$y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{II. KVADRANT} \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = -1$$

$$\begin{aligned} (-1+i)^{100} &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right)^{100} = \left(\sqrt{2} \right)^{100} \cdot \left(\cos \frac{100 \cdot 3\pi}{4} + i \sin \frac{100 \cdot 3\pi}{4} \right) = \\ &= 2^{50} \cdot (\cos 75\pi + i \sin 75\pi) = 2^{50} \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = -2^{50} \end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 7.

Zaokružimo broj 0.125623 na:

- a) dvije decimalne, b) tri decimalne, c) četiri decimalne.

Rješenje:

Pravilo o zaokruživanju kaže: ako je prva znamenka iza znamenaka koje ostaju u zapisu broj 5 ili veći broj, tada se posljednjoj znamenici zapisa dodaje 1. Ako je prva znamenka iza znamenaka koje ostaju u zapisu broj manji od 5, posljednja znamenka zapisa samo se prepisuje.

- a) 0.13 b) 0.126 c) 0.1256

Primjer 8.

Izračunajmo $2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{27} - 2\sqrt{8}$, pa dobiveni rezultat zapišimo u decimalnom obliku zaokruživši ga na četiri decimalne.

Rješenje:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{27} - 2\sqrt{8} &= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{9 \cdot 3} - 2\sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 4\sqrt{2} = \\ &= -2\sqrt{2} + 12\sqrt{3} = 17.95618257 \approx 17.9562 \end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 9.

Nadi module kompleksnih brojeva: a) $z = -i + 3$, b) $w = 1 + 3i$.

Rješenje:

$$\text{a) } x = 3, y = -1 \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{b) } x = 1, y = 3 \quad |w| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

viša razina (A)

• 1.3. Računanje s potencijama i korijenima •

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Riješimo jednadžbu: $8^7 : 4^x = 2^9$.

- A) 2 B) 1 C) 6 D) 0

Rješenje: C.

$$8^7 : 4^x = 2^9$$

$$2^{21} : 2^{2x} = 2^9$$

$$21 - 2x = 9$$

$$x = 6$$

Primjer 2.

Izraz $\frac{2^{-3} \cdot 16}{4}$ zapisan u obliku potencije s bazom 2 jednak je:

- A) 2^{-2} , B) 2^{-1} , C) 2, D) 2^3 .

Rješenje: B.

$$\frac{2^{-3} \cdot 2^4}{2^2} = \frac{2^1}{2^2} = 2^{-1}$$

Primjer 3.

Vrijednost izraza: $\left(\frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-1} - 2^{-2}} : \frac{3^{-1} + 3^{-2}}{3^{-1} - 3^{-2}} \right)^{-1}$ jest:

- A) $\frac{1}{2}$, B) $\frac{2}{3}$, C) $\frac{3}{2}$, D) $\frac{1}{3}$.

Rješenje: B.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^{-1} + 2^{-2}}{2^{-1} - 2^{-2}} : \frac{3^{-1} + 3^{-2}}{3^{-1} - 3^{-2}} \right)^{-1} &= \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} : \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{9}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}} \right)^{-1} = \left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} : \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}} \right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{3}{4} : \frac{2}{9} \right)^{-1} = (3 : 2)^{-1} = \left(\frac{3}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(uša izrada 6)

Primjer 4.

Vrijednost izraza $(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3})$ jest:

- A) $\sqrt{21} - 1$, B) $1 - \sqrt{21}$, C) $3\sqrt{7} - 1$, D) $1 - 3\sqrt{7}$.

Rješenje: B.

$$(\sqrt{7} - 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{3}) = \sqrt{49} + \sqrt{21} - 2\sqrt{21} - 2\sqrt{9} = 7 - \sqrt{21} - 6 = 1 - \sqrt{21}$$

Primjer 5. ► Kolika je vrijednost izraza: $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2}} \right)^2$?

- A) $\sqrt{6} - \sqrt{-2}$ B) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ C) 1 D) 2

Rješenje: B.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{6}+2}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{6}-2}{2}} \right)^2 &= \frac{\sqrt{6}+2}{2} - 2 \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{6}+2) \cdot (\sqrt{6}-2)}{4}} + \frac{\sqrt{6}-2}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6}+2}{2} + \frac{\sqrt{6}-2}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6-4}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Primjer 6. ►

a) Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ jednak je:

- A) $\frac{1-\sqrt{15}}{2}$, B) $\frac{\sqrt{15}-1}{2}$, C) $\frac{\sqrt{15}}{4}$, D) $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Rješenje: B.

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{20}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = \\ &= \frac{2\sqrt{15} - 6 + 5 - \sqrt{15}}{2} = \frac{\sqrt{15} - 1}{2} \end{aligned}$$

b) Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\frac{3\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 3}$ jednak je:

- A) $\sqrt{2}$, B) $-\frac{12}{7} - \sqrt{2}$, C) $-\sqrt{2}$, D) $\frac{12}{7} + \sqrt{2}$.

Rješenje: C.

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 3} &= \frac{3\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2} - 3} \cdot \frac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2} + 3} = \frac{(3\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2} + 3)}{2 - 9} = \\ &= \frac{6 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 6}{-7} = \frac{7\sqrt{2}}{-7} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Primjer 7. ►

Nakon djelomičnog korjenovanja i obavljenih računskih operacija izraz

$$\frac{(\sqrt{75} + \sqrt{72} - 3\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{8})}{10}$$

- A) $30 + \sqrt{6}$, B) $40 + \sqrt{6}$, C) $3 + \sqrt{6}$, D) $3\sqrt{6}$.

Rješenje: C.

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{75} + \sqrt{72} - 3\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{8})}{10} &= \frac{(5\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{10} = \\ &= \frac{(2\sqrt{3} + 6\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}{10} = \frac{6 + 10\sqrt{6} + 24}{10} = \frac{30 + 10\sqrt{6}}{10} = 3 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Izračunajmo $\frac{1000 \cdot 0.1}{10^{-2}}$ i rezultat zapišimo u obliku potencije s bazom 10.

Rješenje:

$$\frac{1000 \cdot 0.1}{10^{-2}} = \frac{10^3 \cdot 10^{-1}}{10^{-2}} = \frac{10^2}{10^{-2}} = 10^{2+2} = 10^4.$$

Primjer 2.

Pojednostavimo $\frac{8x^{4a} \cdot y^{6b} \cdot z^{3c}}{x^a \cdot y^{2b} \cdot z^{2c}} : (4x^{2a} \cdot y^{4b} \cdot z^c)$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \frac{8x^{4a} \cdot y^{6b} \cdot z^{3c}}{x^a \cdot y^{2b} \cdot z^{2c}} : (4x^{2a} \cdot y^{4b} \cdot z^c) &= 8x^{4a-a} \cdot y^{6b-2b} \cdot z^{3c-2c} : (4x^{2a} \cdot y^{4b} \cdot z^c) = \\ &= 8x^{3a} \cdot y^{4b} \cdot z^c : (4x^{2a} \cdot y^{4b} \cdot z^c) = 2x^a \end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 3.

Rastavimo na faktore $2^n + 2^{n+1}$.

Rješenje:

$$2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2^n \cdot 2 = 2^n(1+2) = 3 \cdot 2^n$$

viša razina (A)

Primjer 4.

Pojednostavimo $(4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} (4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{4 - \sqrt{15}} &= \sqrt{(4 + \sqrt{15})^2} \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2 \cdot (4 - \sqrt{15}) = \\ &= \sqrt{(16 - 15) \cdot (4 + \sqrt{15}) \cdot (\sqrt{10} - \sqrt{6})^2} = \sqrt{(4 + \sqrt{15}) \cdot (16 - 2\sqrt{60})} = \\ &= \sqrt{(4 + \sqrt{15}) \cdot (16 - 2 \cdot 2\sqrt{15})} = \sqrt{(4 + \sqrt{15}) \cdot (16 - 4\sqrt{15})} = \\ &= \sqrt{(4 + \sqrt{15}) \cdot 4 \cdot (4 - \sqrt{15})} = \sqrt{(16 - 15) \cdot 4} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 5.

Racionaliziraj nazivnik: a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$, b) $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$.

Rješenje:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

b) $\frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = 2 \cdot (\sqrt{2}-1).$

• 1.4. Računanje s absolutnom vrijednosti •

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Vrijednost izraza $\frac{|-2|-|5|}{|-1|-|-5|}$ jest:

- A) 1, B) $-\frac{3}{4}$, C) $\frac{1}{2}$, D) $\frac{3}{4}$.

Rješenje: D.

$$\frac{|-2|-|5|}{|-1|-|-5|} = \frac{2-5}{1-5} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Primjer 2.

Vrijednost funkcije $f(x) = \frac{|x-1|-|1|}{|x+2|-|-3|}$ za $x = -\frac{1}{3}$ jest:

- A) -4, B) $\frac{1}{4}$, C) 4, D) $-\frac{1}{4}$.

Rješenje: B.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left|\frac{-1}{3}-1\right|-1}{\left|\frac{-1}{3}+2\right|-3} = \frac{\left|\frac{4}{3}-1\right|}{\left|\frac{5}{3}-3\right|} = \frac{\left|\frac{1}{3}\right|}{\left|-\frac{4}{3}\right|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

Primjer 3.

Zapis funkcije $f(x) = |x-1|$ bez znaka absolutne vrijednosti jest:

- A) $\begin{cases} x-1; & x>1 \\ -x+1; & x<1 \\ 0; & x=1 \end{cases}$, B) $\begin{cases} x-1; & x<1 \\ -x+1; & x>1 \\ 1; & x=0 \end{cases}$, C) $\begin{cases} -x-1; & x<1 \\ x+1; & x>1 \\ 0; & x=1 \end{cases}$, D) $\begin{cases} -x+1; & x>1 \\ -x-1; & x<1 \\ 1; & x=0 \end{cases}$.

Rješenje: A.

Prema definiciji absolutne vrijednosti.

Primjer 4.

Ako je $x \leq -2$, onda je izraz $\sqrt{x^2 + 4x + 4}$ jednak izrazu:

- A) $x+2$, B) $x-2$, C) $-x-2$, D) $-x+2$.

Rješenje: C.

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = -x-2$$

Primjer 5.

Vrijednost izraza $\sqrt{(\sqrt{13}-3)^2} - \sqrt{(2-\sqrt{13})^2}$ jest:

- A) $2\sqrt{13}-1$, B) -1, C) -5, D) $2\sqrt{13}-5$.

Rješenje: B.

$$\sqrt{(\sqrt{13}-3)^2} - \sqrt{(2-\sqrt{13})^2} = |\sqrt{13}-3| - |2-\sqrt{13}| = \sqrt{13}-3 - (-2+\sqrt{13}) =$$

$$= \sqrt{13}-3+2-\sqrt{13} = -1$$

viša razina (A)

Primjer 6.

Vrijednost izraza $\left|-3^{-2} - \frac{2}{9}\right|^{1} - (-5)^{-1} + |-5|^0$ jest:

- A) -2, B) 3, C) $-\frac{9}{5}$, D) -3.

Rješenje: C.

$$\left|-3^{-2} - \frac{2}{9}\right|^{1} - (-5)^{-1} + |-5|^0 = -\left|\frac{1}{9} - \frac{2}{9}\right| + \frac{1}{5} + 1 = -\left|\frac{3}{9}\right| + \frac{1}{5} + 1 = -3 + \frac{1}{5} + 1 = -\frac{9}{5}$$

Zadatci kratkih odgovora**Primjer 1.**

Vrijednost izraza $\sqrt{\frac{2 \cdot (-2)+1}{-2+1}}$ jest:

Rješenje:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot (-2)+1}{-2+1}} = \sqrt{\frac{-4+1}{-1}} = \sqrt{\frac{-3}{-1}} = \sqrt{3}.$$

viša razina (A)

Primjer 2.

Izračunajmo vrijednost izraza $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}$.

Rješenje:

$$|3-\sqrt{7}| + |\sqrt{7}-3| = 3-\sqrt{7} + (-\sqrt{7}+3) = 6-2\sqrt{7}$$

viša razina (A)

Primjer 3.

Izračunajmo $\left|-\frac{2}{3}-2\right| \cdot \left|\frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{2}-\frac{11}{4}\right| : \left|3-\frac{1}{4}\right|$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} & \left|-\frac{2}{3}-2\right| \cdot \left|\frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{2}-\frac{11}{4}\right| : \left|3-\frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{-2-6}{3}\right| \cdot \left|\frac{3}{2}\right| - \left|\frac{1}{2}-\frac{11}{4}\right| : \left|\frac{12-1}{4}\right| = \\ & = \left|-\left|\frac{8}{3}\right| \cdot \frac{2}{3}\right| - \left|\frac{1}{2}-\frac{11}{4} \cdot \frac{4}{11}\right| = \left|-\frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3}\right| - \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{16}{9} - \frac{1}{2} = \frac{23}{18} \end{aligned}$$

Primjer 4.

Funkciju $f(x) = |x-1| - |x-2|$ zapišimo bez upotrebe znaka absolutne vrijednosti.

Rješenje:

$$x-1=0 \quad x-2=0$$

$$x=1 \quad x=2$$

$$x<1$$

$$f(x)=-x+1-(-x+2)=-1$$

$$1 < x < 2$$

$$f(x)=2x-3$$

$$x>2$$

$$f(x)=x-1-(x-2)=1$$

$$f(x) = \begin{cases} -1; & x < 1 \\ 2x-3; & 1 \leq x < 2 \\ 1; & x \geq 2 \end{cases}$$

viša razina (A)

• 1.5. Algebarski izrazi i algebarski razlomci •

Zadaci višestrukog izbora

Primjer 1.

Vrijednost izraza $\frac{a^{-2} - b}{2ab}$ za $a = 1$ i $b = 2$ jest:

- A) $-\frac{1}{2}$, B) $\frac{1}{2}$, C) $-\frac{1}{4}$, D) $\frac{1}{4}$.

Rješenje: C.

$$\frac{a^{-2} - b}{2ab} = \frac{1^{-1} - 2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1 - 2}{4} = -\frac{1}{4}$$

Primjer 2.

Reducirani oblik izraza $\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} : \frac{x-1}{x-y}$ glasi:

- A) 1, B) $\frac{x-1}{x-y}$, C) $\frac{x-y}{x-1}$, D) $\frac{x+1}{x+y}$.

Rješenje: D.

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} : \frac{x-1}{x-y} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{x-1} = \frac{x+1}{x+y}$$

Primjer 3.

Pojednostavljeni oblik izraza $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}} - \frac{y^{-1}}{x^{-1}} \right)^{-1} : \left(\frac{1}{x^{-2}} - \frac{1}{y^{-2}} \right)^{-1}$ jest:

- A) 1, B) $-x$, C) $-xy$, D) y .

Rješenje: C.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x^{-1}}{y^{-1}} - \frac{y^{-1}}{x^{-1}} \right)^{-1} : \left(\frac{1}{x^{-2}} - \frac{1}{y^{-2}} \right)^{-1} = \left(\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \right)^{-1} : (x^2 - y^2)^{-1} = \left(\frac{y-x}{x+y} \right)^{-1} : \frac{1}{(x-y)(x+y)} = \\ & = \left(\frac{y^2 - x^2}{xy} \right)^{-1} \cdot (x-y)(x+y) = \frac{-xy}{(x-y)(x+y)} \cdot (x-y)(x+y) = -xy \end{aligned}$$

Primjer 4.

Za $a \neq -\frac{1}{2}$ izraz $\frac{1 - \frac{1}{1+2a} + 2a}{1 + \frac{1}{1+2a}}$ jednak je: A) $2a + 1$, B) $2a + 2$, C) $2a$, D) a .

Rješenje: C.

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \frac{1}{1+2a} + 2a}{1 + \frac{1}{1+2a}} = \frac{\frac{1+2a-1+2a(1+2a)}{1+2a}}{\frac{1+2a+1}{1+2a}} = \frac{2a+2a+4a^2}{2+2a} = \\ & = \frac{4a+4a^2}{2+2a} = \frac{4a(1+a)}{2(1+a)} = 2a \end{aligned}$$

Primjer 5.

Nakon provedenih operacija izraz $\frac{4x-1}{4x+1} \cdot \frac{4x}{16x^2-1}$ jednak je:

- A) $4x$, B) $\frac{4x+1}{4}$, C) $\frac{4x}{4x+1}$, D) $\frac{4x}{(4x+1)^2}$.

Rješenje: D.

$$\frac{4x-1}{4x+1} \cdot \frac{4x}{16x^2-1} = \frac{4x-1}{4x+1} \cdot \frac{4x}{(4x-1) \cdot (4x+1)} = \frac{4x}{(4x+1)^2}$$

viša razina (A)

Primjer 6.

Za $x \neq -1$ izraz $\frac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1}$ jednak je:

- A) $-x$, B) $\frac{1}{x+1}$, C) $x+1$, D) 1.

Rješenje: C.

$$\frac{x+2+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\frac{x^2+2x+1}{x}}{\frac{1+x}{x}} = \frac{(x+1)^2}{1+x} = x+1$$

viša razina (A)

Primjer 7.

Treći član u razvoju binoma $(2x + 3y)^6$ jest:

- A) $15 \cdot x^4 \cdot y^2$, B) $144 \cdot x^2 \cdot y^4$, C) $4320 \cdot x^4 \cdot y^2$, D) $2160 \cdot x^4 \cdot y^2$.

Rješenje: D.

$$\binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = \binom{6}{2} (2x)^4 \cdot (3y)^2 = 15 \cdot 16 \cdot x^4 \cdot 9 \cdot y^2 = 2160x^4 \cdot y^2$$

viša razina (A)

Primjer 8.

Član uz x^4 u razvoju binoma $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$ jest:

- A) peti član, B) četvrti član, C) drugi član, D) sedmi član.

Rješenje: A.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k &= \binom{12}{k} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^{12-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = \binom{12}{k} \cdot \frac{x^{12-k}}{3^{12-k}} \cdot \frac{3^k}{x^k} = \binom{12}{k} \cdot \frac{3^k}{3^{12-k}} \cdot \frac{x^{12-k}}{x^k} \\ &\Rightarrow \frac{x^{12-k}}{x^k} = x^{12-2k} = x^4 \end{aligned}$$

$$12 - 2k = 4 \Rightarrow k = 4$$

Rješenje je $(k+1\text{-vi})$ član, tj. peti član.

viša razina (A)

Primjer 9.

Nakon kvadriranja izraza $a\sqrt{2} - \frac{b}{\sqrt{2}}$ dobivamo:

- A) $a^2 - 2ab + \frac{b^2}{2}$, B) $2a^2 - 2ab + \frac{b^2}{2}$, C) $a^2 + 2ab + \frac{b^2}{2}$, D) $a^2 + 2ab + \frac{b^2}{2}$.

Rješenje: B.

$$\left(a\sqrt{2} - \frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 \cdot 2 - 2a\sqrt{2} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b^2}{2} = 2a^2 - 2ab + \frac{b^2}{2}$$

Primjer 10.

Nakon obavljenih potrebnih računskih operacija izraz

$$(\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}) \cdot (\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})$$

- glasí:
- A) $2x$, B) $2y$, C) $2xy$, D) 0 .

Rješenje: B.

Izrazi $\sqrt{x-y}$ i $\sqrt{x+y}$ definirani su za $x-y \geq 0$ i $x+y \geq 0$.

$$\text{Zbog toga je } \sqrt{(x+y)^2} = |x+y| = x+y \text{ i } \sqrt{(x-y)^2} = |x-y| = x-y.$$

$$(\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}) \cdot (\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}) = \sqrt{(x+y)^2} - \sqrt{(x-y)^2} = x+y - x+y = 2y$$

Zadatci kratkih odgovora**Primjer 1.**

U izrazu $\frac{\frac{a^2+1}{a}}{a+\frac{1}{a}-1}$ obavimo zadane računske operacije i dobiveni rezultat do kraja skratimo.

Rješenje:

$$\frac{\frac{a^2+1}{a}}{a+\frac{1}{a}-1} = \frac{\frac{a^3+1}{a}}{\frac{a^2-a+1}{a}} = \frac{(a+1) \cdot (a^2-a+1)}{a^2-a+1} = a+1$$

Primjer 2.

Pojednostavnimo izraz $\left(t + \frac{4}{t-4}\right) \left(\frac{8}{t^2-2t} - \frac{t}{4-4t+t^2} \right)$, $t \neq 0, 2, 4$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \left[t + \frac{4}{t-4}\right] \left[\frac{8}{t^2-2t} - \frac{t}{4-4t+t^2} \right] &= \frac{t^2-4t+4}{t-4} \cdot \left(\frac{8}{t(t-2)} - \frac{t}{(t-2)^2} \right) = \\ &= \frac{(t-2)^2}{t-4} \cdot \left(\frac{8 \cdot (t-2) - t^2}{t \cdot (t-2)^2} \right) = \frac{(t-2)^2}{t-4} \cdot \frac{8t-16-t^2}{t \cdot (t-2)^2} = \frac{8t-16-t^2}{t \cdot (t-4)} = \frac{-(t-4)^2}{t \cdot (t-4)} = -\frac{t-4}{t} = \frac{4-t}{t} \end{aligned}$$

Primjer 3.

Kvadrirajmo i kubirajmo izraz $\frac{2}{3}xy - \frac{3}{4}vu$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}xy - \frac{3}{4}vu\right)^2 &= \left(\frac{2}{3}xy\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}xy \cdot \frac{3}{4}vu + \left(\frac{3}{4}vu\right)^2 = \frac{4}{9}x^2y^2 - xyvu + \frac{9}{16}v^2u^2 \\ \left(\frac{2}{3}xy - \frac{3}{4}vu\right)^3 &= \left(\frac{2}{3}xy\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}xy\right)^2 \cdot \frac{3}{4}vu + 3 \cdot \frac{2}{3}xy \cdot \left(\frac{3}{4}vu\right)^2 - \left(\frac{3}{4}vu\right)^3 = \\ &= \frac{8}{27}x^3y^3 - 3 \cdot \frac{4}{9}x^2y^2 \cdot \frac{3}{4}vu + 2xy \cdot \frac{9}{16}v^2u^2 - \frac{27}{64}v^3u^3 = \\ &= \frac{8}{27}x^3y^3 - x^2 \cdot y^2vu + \frac{9}{8}xyv^2u^2 - \frac{27}{64}v^3u^3\end{aligned}$$

Primjer 4.

Koji izraz dobijemo nakon skraćivanja razlomka $\frac{2^{x+y} + 2^x}{2^y + 4^y}$?

Rješenje:

$$\frac{2^x \cdot 2^y + 2^x}{2^y + 2^{2y}} = \frac{2^x \cdot (2^y + 1)}{2^y + (2^y)^2} = \frac{2^x \cdot (2^y + 1)}{2^y + 2^y \cdot 2^y} = \frac{2^x \cdot (2^y + 1)}{2^y \cdot (1 + 2^y)} = 2^{x-y}$$

Sjeti se da je: $4^y = (2^2)^y = (2 \cdot 2)^y = 2^{2y} = (2^y)^2 = 2^y \cdot 2^y$.

viša razina (A)

Primjer 5.

Koristeći se binomnim poučkom, izračunajmo $(2x - 5y)^4$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}(2x - 5y)^4 &= \binom{4}{0}(2x)^4(5y)^0 - \binom{4}{1}(2x)^3 \cdot (5y)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2(5y)^2 - \binom{4}{3}(2x) \cdot (5y)^3 + \\ &\quad \binom{4}{4}(2x)^0 \cdot (5y)^4 = 16x^4 - 160x^3 \cdot y + 600x^2 \cdot y^2 - 1000x \cdot y^3 + 625y^4\end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 6.

Iz jednakosti $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1$ izrazimo a uz pomoć b .

Rješenje:

$$\begin{aligned}\frac{3}{a} + \frac{2}{b} &= 1 \\ \frac{3b + 2a}{a \cdot b} &= 1 / \cdot a \cdot b\end{aligned}$$

$$3b + 2a = a \cdot b$$

$$2a - a \cdot b = -3b$$

$$a \cdot (2 - b) = -3b / : (2 - b)$$

$$a = \frac{3b}{b - 2}$$

Primjer 7.

Iz jednakosti $y = \frac{x+1}{x-1}$ izrazimo varijablu x uz pomoć varijable y .

Rješenje:

$$\begin{aligned}y &= \frac{x+1}{x-1} / \cdot (x-1), \quad x \neq 1 \\ x \cdot y - y &= x + 1 \\ x \cdot y - x &= y + 1 \\ x \cdot (y - 1) &= y + 1 / : (y - 1) \\ x &= \frac{y+1}{y-1}\end{aligned}$$

• 1.6. Računanje s postotcima •

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Od kojeg broja 51 % iznosi $\frac{3}{5} + 0.425 - \frac{1}{200}$?

- A) od 204 B) od 2 C) od 0.005 D) od 51

Rješenje: B.

i – postotni iznos; p – postotak; o – osnovica

$$i : o = p : 100, \text{ tj. } p \cdot o = 100 \cdot i$$

$$i = \left(\frac{3}{5} + 0.425 - \frac{1}{200} \right) = \left(\frac{3}{5} + \frac{425}{1000} - \frac{1}{200} \right) = \left(\frac{3}{5} + \frac{17}{40} - \frac{1}{200} \right) = \frac{120 + 85 - 1}{200} = \frac{204}{200}$$

$$p = 51$$

$$o = \frac{100 \cdot i}{p} = \frac{100 \cdot \frac{204}{200}}{51} = \frac{2}{51} = \frac{204}{102} = 2$$

Primjer 2.

Koliko je 4 % od $\frac{\frac{3}{25} + 0.59}{\left(\frac{3}{4} - 0.15\right) : 4}$?

- A) 25 B) 1 C) 100 D) 0.25

Rješenje: B.

$$o = \frac{\frac{3}{25} + 0.59}{\left(\frac{3}{4} - 0.15\right) : 4} = \frac{\frac{3}{25} + \frac{59}{100}}{\left(\frac{3}{4} - \frac{15}{100}\right) \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{300 + 16 + 59}{100}}{\frac{75 - 15}{100} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{375}{60} = 25$$

$$i = \frac{p \cdot o}{100} = \frac{4 \cdot 25}{100} = 1$$

► **Primjer 3.**

Pri proizvodnji ekoloških vrećica nastaje 1.96 % otpada. Koliko komada cijelih vrećica treba proizvesti da bismo dobili 1 000 komada bez greške?

- A) 1 002 B) 1 020 C) 1 030 D) 1 022

Rješenje: B.

$$1000 = x - \left(\frac{1.96 \cdot x}{100} \right)$$

$$1000 = \frac{2451}{2500}x$$

$$1000 = x - \frac{196 \cdot x}{10000}$$

$$x = 1020$$

► Primjer 4. ►

U morskoj je vodi 4.5 % soli. Koliko slatke vode valja uliti u 20 litara morske vode kako bi u mješavini bilo 3 % soli?

- A) 30 l B) 10 l C) 20 l D) 15 l

Rješenje: B.

$$1) p = 4.5 \\ o = 20 \text{ l} \\ i = ? \\ i = \frac{p \cdot o}{100} = \frac{45}{100} \cdot 20 = \frac{90}{100} = \frac{9}{10} \text{ l}$$

$$2) i = 9/10 \text{ l} \\ p = 3 \\ o = ? \\ o = \frac{100 \cdot i}{p} = \frac{100 \cdot \frac{9}{10}}{3} = \frac{90}{3} = 30 \text{ l}$$

$$30 = 20 + x \\ x = 10 \text{ l.}$$

(više razina (A))

► Primjer 5. ►

Na velikoj rasprodaji košulju su najprije snizili 20 %, a zatim još 10 %. Ako je konačna cijena košulje 61 kunu i 20 lipa, kolika je bila početna cijena?

- A) 83 kn B) 90 kn C) 38 kn D) 85 kn

Rješenje: D.

x – početna cijena

i_1 – iznos prvoga sniženja

$$p_1 = 20, o = x$$

$$i_1 = \frac{p_1 \cdot o}{100} = \frac{20 \cdot x}{100} = \frac{x}{5}$$

Cijena nakon prvog sniženja: $x - \frac{x}{5} = o_1$.

i_2 – iznos drugog sniženja

$$p_2 = 10, o_1 = x - \frac{x}{5} = \frac{4}{5}x$$

$$i_2 = \frac{p_2 \cdot o_1}{100} = \frac{10 \cdot \left(x - \frac{x}{5}\right)}{100} = \frac{10 \cdot \frac{4}{5}x}{100} = \frac{4x}{50} = \frac{2x}{25}$$

Cijena nakon drugog sniženja: $\left(x - \frac{x}{5}\right) - \frac{2x}{25} = 61.2$

$$\left(x - \frac{x}{5}\right) - \frac{2x}{25} = 61.2 \\ x = 85$$

Primjer 6.

Cijena kave uz maržu 30 % iznosi 8 kuna. Uz koliku bi maržu cijena te kave iznosila 9 kuna?

- A) $\frac{37}{13} \%$ B) $\frac{185}{4} \%$ C) $\frac{80}{13} \%$ D) $\frac{370}{8} \%$

Rješenje: B.

$$8 = x + \frac{x \cdot 30}{100}$$

$$130x = 800$$

$$x = \frac{80}{13} - \text{nabavna cijena kave}$$

$$9 = \frac{80}{13} + \frac{13 \cdot p}{100}$$

$$\frac{8 \cdot p}{130} = \frac{37}{13}$$

$$p = \frac{370}{8} \% = 46.25 \%$$

Zadatci kratkih odgovora

► Primjer 1. ►

Kružni isječak tvori 16 % kruga čiji je polujer 4 cm. Kolika je površina togu kružnoga isječka?

Rješenje:

$$o = P = r^2 \cdot \pi = 16\pi$$

$$i = \frac{16 \cdot 16}{100} \pi = 2.56 \pi = \frac{64}{25} \pi \text{ cm}^2.$$

viši razinu (A)

Primjer 2.

Pretplata za TV poskupi 100 %. Za koliko postotaka mora pojeftiniti nova pretplata tako da bude jednaka onoj prije poskupljenja?

Rješenje:

x – pretplata prije poskupljenja

$$i = x \quad p_1 = \frac{100 \cdot i}{o_1} = \frac{100 \cdot x}{2x} = 50$$

$$p \cdot o = 100 \cdot i$$

$$o_1 = 2x$$

$$i = \frac{p \cdot o}{100} = \frac{100 \cdot x}{100} = x$$

$$p = ?$$

Nova cijena pretplate je $2x = o_1$.

Traženo pojeftinjenje iznosi 50 %.

► Primjer 3. ►

Marko ima posjed veličine 150 m^2 . Kako bi proširio posjed, od susjeda je kupio zemljište veličine 45 % svog posjeda. Kolika je u četvornim metrima veličina Markova posjeda nakon kupnje?

Rješenje:

$$i = \frac{p \cdot o}{100} = \frac{45 \cdot 150}{100} = 67.5 \text{ m}^2$$

Marko je kupio 67.5 m^2 zemljišta, pa sada ima ukupno 217.5 m^2 zemljišta. viša razinu (A)

Primjer 4.

Odredimo broj od kojega $x \%$ iznosi y ako je $x = 34$, a $y = 12$.

Rješenje:

$$p = 34$$

$$o = \frac{100 \cdot i}{p} = \frac{100 \cdot 12}{34} = \frac{600}{17} = 35.2941$$

$$i = 12$$

$$o = ?$$

Primjer 5.

Koji broj iznosi 5 % od broja 125.

Rješenje:

$$i = \frac{p \cdot o}{100} = \frac{5 \cdot 125}{100} = 6.25$$

• 1.7. Omjeri i izražavanje jedne veličine uz pomoć drugih veličina •

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Stranice trokuta odnose se kao $3 : 5 : 7$. Ako je opseg trokuta 45 cm , kolika je površina tog trokuta?

- A) 3 cm^2 B) $\frac{135\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$ C) $\frac{135}{16} \text{ cm}^2$ D) $\frac{135}{4} \text{ cm}^2$

Rješenje: B.

$$a : b : c = 3 : 5 : 7$$

$$a = 3 \cdot k$$

$$b = 5 \cdot k$$

$$c = 7 \cdot k$$

$$o = a + b + c = 3k + 5k + 7k = 15k$$

$$45 = 15k$$

$$k = 3$$

$$a = 9 \text{ cm}$$

$$b = 15 \text{ cm}$$

$$c = 21 \text{ cm}$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{45}{2} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{\frac{45}{2} \cdot \left(\frac{45}{2}-9\right) \cdot \left(\frac{45}{2}-15\right) \cdot \left(\frac{45}{2}-21\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{45}{2} \cdot \frac{27}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{135}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Primjer 2.

Geografska karta izrađena je u mjerilu $1 : 100 000$. Kolika je stvarna udaljenost dvaju mesta ako je njihova udaljenost na karti 7 cm ?

- A) $3 500 \text{ km}$ B) 350 km C) 35 km D) 3.5 km

Rješenje: C.

$$1 : 100 000 = 7 : x$$

$$x = 7 \cdot 100 000$$

$$x = 700 000 \text{ cm} = 7 \text{ km}$$

► Primjer 3. ►

Neka su a i b katete, c hipotenuza, p i q duljine ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu, a v visina na hipotenuzu. Kolike su stranice a i b ako je $p : q = 225 : 64$, $c = 17$?

- A) $15; 8$ B) $7; 12$ C) $8; 7$ D) $15; 7$

Rješenje: A.

$$p = \frac{a^2}{c} \quad q = \frac{b^2}{c}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{\frac{a^2}{c}}{\frac{b^2}{c}} = \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{225}{64} = \frac{c^2 - b^2}{b^2} = \frac{289 - b^2}{b^2}$$

$$225b^2 = 64 \cdot 289 - 64b^2$$

$$289b^2 = 64 \cdot 289$$

$$b^2 = 64$$

$$b = 8$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 225$$

$$a = 15$$

Uzorak rješenja (1)

Primjer 4.

Omjer kutova u trokutu je $1 : 2 : 5$. Koliki je zbroj dvaju većih kutova?

- A) 180° B) $67,5^\circ$ C) $\left(\frac{315}{2}\right)^\circ$ D) 135°

Rješenje: C.

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 5$$

$$\alpha = k$$

$$\beta = 2k$$

$$\gamma = 5k$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$k + 2k + 5k = 180^\circ$$

$$8k = 180^\circ$$

$$k = \frac{45}{2}$$

$$\beta = 2k = 45^\circ, \quad \gamma = 5k = \left(\frac{225}{2}\right)^\circ$$

$$\gamma + \beta = \left(\frac{315}{2}\right)^\circ = 157.5^\circ$$

Primjer 5.

Magnetsku indukciju računamo uz pomoć izraza $B = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{2 \cdot r \cdot \pi}$.

Iz zadanog izraza iskažite srednji polumjer zavojnice r .

- A) $\frac{2B\mu}{NI\pi}$ B) $\frac{NI\mu}{2B\pi}$ C) $\frac{2B\pi}{NI\mu}$ D) ništa od ponuđenoga

Rješenje: B.

$$B = \mu \cdot \frac{N \cdot I}{2 \cdot r \cdot \pi} / \cdot 2r\pi$$

$$B \cdot 2r\pi = \mu \cdot N \cdot I / : 2\pi B$$

$$r = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot B}$$

Primjer 6.

Iz jednadžbe sfernih zrcala $\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$ izrazimo x' .

- A) $\frac{f}{f-x}$ B) $\frac{x-f}{f \cdot x}$ C) $\frac{x \cdot f}{x-f}$ D) $\frac{x}{x-f}$

Rješenje: C.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x'} = \frac{x-f}{f \cdot x}$$

$$x' = \frac{x \cdot f}{x-f}$$

Zadatci kratkih odgovora**Primjer 1.**

Površina pravokutnog trokuta je 45, a omjer $a:c = 3:5$. Izračunajmo opseg trokuta.

Rješenje:

$$P = 45$$

$$a:c = 3:5$$

$$o = ?$$

$$a = 3 \cdot k$$

$$c = 5 \cdot k$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(5k)^2 - (3k)^2} = \sqrt{25k^2 - 9k^2} = \sqrt{16k^2} = 4k$$

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{3k \cdot 4k}{2} = 6k^2$$

$$45 = 6k^2$$

$$k^2 = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

$$k = \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$a = 3 \cdot \sqrt{\frac{15}{2}}; \quad b = 4 \cdot \sqrt{\frac{15}{2}}; \quad c = 5k = 5 \cdot \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$o = a + b + c = 12 \cdot \sqrt{\frac{15}{2}} = 12 \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} = 12 \cdot \frac{\sqrt{15} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$o = 6\sqrt{30} \text{ jedinica}$$

Primjer 2.

Površina jednakokračnog trapeza iznosi 108 cm^2 . Omjer osnovica a, c i visine v na osnovicu jest $a : c : v = 6 : 2 : 3$. Kolika je duljina kraka b ?

Rješenje:

$$P = 108 \text{ cm}^2$$

$$a : c : v = 6 : 2 : 3$$

$$b = ?$$

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v, \quad a = 6k, \quad c = 2k, \quad v = 3k$$

$$108 = \frac{6k+2k}{2} \cdot 3k$$

$$216 = 24k^2 / : 24 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$$

$$a = 18, \quad c = 6, \quad v = 9$$

$$x = \frac{a-c}{2} = 6$$

$$b^2 = x^2 + v^2 = 6^2 + 9^2 = 117$$

$$b = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \text{ cm}$$

viša razina (A)

Primjer 3.

Popunimo tablicu. Rezultate zaokružimo na četiri decimale.

Količina (kg)	145	21	
Cijena (kn)	21		45

Rješenje:

Količina (kg)	145	21	310.7143
Cijena (kn)	21	3.0414	45
$145 : 21 = 21 : x$	$145 : 21 = x : 45$		
$145 \cdot x = 441$	$6525 = 21 \cdot x$		
$x = 3.0414$	$x = 310.7143$		

Primjer 4.

Iz formule $\frac{x \cdot d}{l} = \left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot \lambda$ izrazi n .

Rješenje:

$$\frac{x \cdot d}{l} = \left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot \lambda / : \lambda$$

$$\frac{x \cdot d}{l \cdot \lambda} = n - \frac{1}{2}$$

$$n = \frac{x \cdot d}{l \cdot \lambda} + \frac{1}{2} = \frac{2xd + \lambda l}{2\lambda l}$$

1.8. Upotreba džepnog računala.

Mjerne jedinice u geometriji i u zadatcima s tekstrom

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Koristeći se džepnim računalom, odredimo koji je broj najmanji.

- A) $\sin(23^\circ 12')$ B) $\sqrt[3]{21}$ C) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ D) $\log_5 21$

Rješenje: A.

$$\sin(23^\circ 12') \approx 0.3939$$

$$\sqrt[3]{21} \approx 2.7589$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} \approx 3.3437$$

$$\log_5 21 = \frac{\log 21}{\log 5} \approx 1.8917$$

Primjer 2.

Poznato je da nakon x sekundi broj neraspadnutih atoma radioaktivnoga izotopa kobalta iznosi $n(x) = 10^6 \cdot 10^{-1.82 \cdot 10^{-9} \cdot x}$. Koliko je neraspadnutih atoma ostalo nakon 100 sekundi?

- A) 888 887 B) 999 997 C) 999 994 D) 999 999

Rješenje: D.

$$n(100) = 10^6 \cdot 10^{-1.82 \cdot 10^{-9} \cdot 100} = 10^{6+(-1.82 \cdot 10^{-9} \cdot 100)} = 999999.5809 \approx 999999$$

viša razina (A)

Primjer 3.

Vrijednost izraza $\log_3 8 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{25}} - 1.2^{4.2}$ (zaokružimo na četiri decimale) jest:

- A) 0.9814, B) 0.9812, C) 0.9816, D) 0.9818.

Rješenje: C.

$$\log_3 8 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{25}} - 1.2^{4.2} = \frac{\log 8}{\log 3} + \sqrt[3]{\sqrt[3]{25}} - 1.2^{4.2} \approx 1.8927 + 1.2394 - 2.1506 = 0.9815$$

Primjer 4.

Polumjer kružnice čija je duljina π dm iznosi:

- A) 0.05 m, B) 0.5 cm, C) 0.5 m, D) 50 mm.

Rješenje: A.

$$o = \pi dm$$

$$o = 2 \cdot r \cdot \pi$$

$$\pi = 2 \cdot r \cdot \pi$$

$$r = \frac{1}{2} dm = 0.05 m$$

Primjer 5.

Polumjer kugle volumena $36\pi m^3$ iznosi:

- A) 30 m, B) 300 cm, C) 300 mm, D) ništa od navedenoga.

Rješenje: B.

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$36\pi = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

$$r^3 = 27$$

$$r = 3 \text{ m} = 300 \text{ cm.}$$

Primjer 6.

Ako je brzina svjetlosti približno $300\,000 \text{ km/s}$, vrijeme (u minutama) za koje svjetlost prevali put do Neptuna, koji je od Sunca udaljen 4 498 milijuna kilometara, iznosi:

- A) 15 000, B) 250, C) 300, D) 25.

Rješenje: B.

$$t = \frac{s}{v} = \frac{4498 \cdot 10^6 \text{ km}}{300000 \frac{\text{km}}{\text{s}}} = 15\,000 \text{ s} = 250 \text{ minuta}$$

Primjer 7.

Prodavači na tržnici prodaju smokve. Cijene su izražene za različite mase smokava.

Odaberimo najbolju ponudu (sa stajališta kupca).

- A) 1 kg za 18 kn B) 250 g za 5 kn C) 500 g za 7 kn D) 75 dkg za 15 kn

Rješenje: C.

$$1 \text{ kg za } 18 \text{ kn} \Rightarrow 1 \text{ kg za } 18 \text{ kn}$$

$$250 \text{ g} = 1/4 \text{ kg za } 5 \text{ kn} \Rightarrow 1 \text{ kg za } 20 \text{ kn}$$

$$500 \text{ g} = 1/2 \text{ kg za } 7 \text{ kn} \Rightarrow 1 \text{ kg za } 14 \text{ kn}$$

$$75 \text{ dkg} = 3/4 \text{ kg za } 15 \text{ kn} \Rightarrow 1 \text{ kg za } 20 \text{ kn}$$

Primjer 8.

Gustoća je omjer mase i obujma. Tekućina ima gustoću $5\,427 \cdot 10^3 \text{ g/m}^3$. Ako joj je masa $1.5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$, tada je njezin obujam (u m^3) jednak:

- A) $2.7 \cdot 10^{18}$, B) $\frac{249}{50}$, C) 4.98, D) $\frac{5}{1809} \cdot 10^{17}$.

Rješenje: D.

$$\rho = 5427 \cdot 10^3 \text{ g/m}^3 = 5\,427 \text{ kg/m}^3$$

$$m = 1.5 \cdot 10^{18} \text{ kg}$$

$$V = ?$$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1.5 \cdot 10^{18}}{5427} = \frac{5}{1809} \cdot 10^{17} \text{ m}^3$$

Zadaci kratkih odgovora

Primjer 1.

Banka oročava novac prema formuli:

$$C(n) = g \cdot (1 + p\%)^n,$$

u kojoj je $C(n)$ – iznos kojim štediš raspolaže nakon n godina,

g – glavnica, novac uložen uz kamate,

p – kamatna stopa (kamatnjak).

Ako je $p = 7,2$, glavnica 2 000 kuna, a broj godina 5, koliko će novca štediš imati nakon završetka štednje?

Uputa: za računanje upotrijebimo džepno računalo.

Rješenje:

$$C(n) = g \cdot (1 + p\%)^n$$

$$C(5) = 2\,000 \cdot \left(1 + \frac{7,2}{100}\right)^5 = 2831,42 \text{ kn}$$

Primjer 2.

Koristeći se džepnim računalom, poredajmo brojeve po veličini (počevši od najmanjega):

$$2^{2^2}; \operatorname{tg} 78^\circ; \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}; \log_2 7.$$

Rješenje:

$$2^{2^2} = 16$$

$$\operatorname{tg} 78^\circ \approx 4,7046$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0,005$$

$$\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} \approx 2,8074$$

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}; \log_2 7; \operatorname{tg} 78^\circ; 2^{2^2}$$

Primjer 3.

Poredajmo mase po veličini krenuvši od najmanje: $4\,300 \text{ g}$, 3 kg , $5 \cdot 10^{-3} \text{ t}$, 2 dag .

Rješenje:

$$4\,300 \text{ g} = 4,3 \text{ kg}$$

$$3 \text{ kg}$$

$$5 \cdot 10^{-3} \text{ t} = 5 \text{ kg}$$

$$2 \text{ dag} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} = 0,002 \text{ kg}$$

$$2 \text{ dag}, 3 \text{ kg}, 4\,300 \text{ g}, 5 \cdot 10^{-3} \text{ t}.$$

Primjer 4.

U staklenoj cijevi polujmiera 1 cm nalazi se živa. Visina cijevi je 59 cm. Ako je gustoća žive $13\,600 \text{ kg/m}^3$, kolika je masa žive u cijevi izražena gramima? (Zaokružimo na najbliži cijeli broj.)

Rješenje:

Napomena: cijev je valjak, pa se volumen izračunava prema formuli $V = r^2 \pi \cdot v$.

$$r = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$$

$$v = 59 \text{ cm} = 0.59 \text{ m}$$

$$m = ?$$

$$V = r^2 \pi v = 0.01^2 \pi \cdot 0.59 = 0.000185354 \text{ m}^3$$

$$m = \rho \cdot V = 13\,600 \cdot 0.016 = 2.520814 \text{ kg} \approx 2\,521 \text{ g}$$

viša razina (A)

Primjer 5.

Zadane su dužine duljina 0.03 m, 40 mm i 5 cm. Može li se od zadanih dužina konstruirati trokut? Ako može, koliki je njegov opseg u milimetrima?

Rješenje:

$$0.03 \text{ m} = 3 \text{ cm}$$

$$40 \text{ mm} = 4 \text{ cm}$$

Dakle, stranice su 3, 4 i 5 cm.

Stranice trokuta moraju zadovoljavati nejednakost trokuta koja kaže da zbroj duljina bilo koje dvije stranice mora biti veći od duljine treće stranice.

Te dužine zadovoljavaju navedenu nejednakost.

Opseg trokuta je $3 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 12 \text{ cm} = 120 \text{ mm}$.

Primjer 6.

Dva kuta u raznostraničnom trokutu imaju mjere $21^\circ 31'$ i $56^\circ 46'$. Izračunajmo mjeru trećeg kuta.

Rješenje:

$$21^\circ 31' +$$

$$\underline{56^\circ 46'}$$

$$78^\circ 17'$$

Prisjetimo se: $60' = 1^\circ$.

Zbroj mjera kutova u svakom trokutu iznosi 180° .

Sada od 180° oduzmemo zbroj dvaju kutova koje znamo i dobit ćemo rješenje $101^\circ 43'$.

Primjer 7.

Izračunaj polujer kruga čija je površina $36\pi \text{ m}^2$. Rezultat izrazi u centimetrima i milimetrima.

Rješenje:

$$P = r^2 \pi$$

$$r^2 = \frac{36\pi}{\pi} = 36; r = 6 \text{ m} = 600 \text{ cm} = 6\,000 \text{ mm}$$

Primjer 8.

U pravokutnom trokutu kut $\alpha = 36^\circ 27'$. Koliki je kut β ?

Rješenje:

U pravokutnom trokutu vrijedi: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \alpha = 53^\circ 33'$

1.9. Brojevi i algebra – zadatci za vježbu

Zadaci višestrukog izbora

Rješenja zadataka potražite na str. 444.

1. Koji od navedenih brojeva ne pripada skupu I?
A) $-2\sqrt{3}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $2\sqrt{7} - 1$ D) $\sqrt{5}$
2. Odaberite par suprotnih brojeva.
A) $-1, 1$ B) $\frac{1}{2}, 2$ C) $2, -\frac{1}{2}$ D) $\sqrt{7}, \frac{1}{\sqrt{7}}$
3. Koji se element skupa \mathbb{Z} nalazi između brojeva -3 i 5 ?
A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) -2 D) 6
4. Za koju je od sljedećih vrijednosti varijable n vrijednost razlomka $\frac{5}{n-1}$ cijeli broj?
A) -4 B) 3 C) 9 D) 1
5. Odaberite koji je broj najveći.
A) $\frac{19}{24}$ B) $\frac{5}{8}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{2}{3}$
6. Nejednakost $-1 \leq x < 5$ zapiši u obliku intervala.
A) $\langle -1, 5 \rangle$ B) $[-1, 5]$ C) $\langle -1, 5]$ D) $[-1, 5 \rangle$
7. Koji je interval jednak skupu $\langle 0, 5 \rangle \cap [-1, 6]$?
A) $\langle 0, 6 \rangle$ B) $\langle 0, 5 \rangle$ C) $\langle 5, -1 \rangle$ D) $[5, 6]$
8. Odaberite par recipročnih brojeva.
A) $\frac{2}{6}, 0.3$ B) $\frac{2}{5}, 2.5$ C) $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$ D) $1, -1$
9. Koja je tvrdnja istinita?
A) $3 \in \mathbb{I}$ B) $\frac{3}{0} \in \mathbb{R}$ C) $-5 \in \mathbb{Z}$ D) $\frac{3}{7} \in \mathbb{N}$
10. Koji se broj na brojevnom pravcu nalazi između 2 i 3 ?
A) $2 + \sqrt{5}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3} + 2$ D) $\sqrt{7} - 1$
11. Koji je od navedenih brojeva racionalan?
A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{81}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{3}$
12. Koji broj pripada intervalu $[-5, 27]$?
A) -7 B) 29 C) 27 D) -5
13. Interval $[-3, -1] \cap [-5, 2]$ jest:
A) otvoren, B) slijeva poluotvoren, C) zatvoren, D) zdesna poluotvoren.

14. Koji je interval prikaz ovih dviju nejednakosti: $x \geq 3$ i $x < 5$?
- A) $(-\infty, 3]$ B) $[3, 5)$ C) $(-\infty, 5)$ D) $(3, 5)$
15. Koji od navedenih brojeva pripada skupu \mathbb{I} ?
- A) -3 B) $3\sqrt{7}$ C) $-\sqrt{169}$ D) $-\frac{1}{3}$
16. Koji od navedenih intervala predočuje skup $\{x \leq 5; x \in \mathbb{R}\}$?
- A) $(-\infty, 5)$ B) $(-\infty, 5]$ C) $(5, +\infty)$ D) $[5, +\infty)$
17. Skup $(-5, 2) \cap (1, 5)$ jednak je intervalu:
- A) $(1, 2)$, B) $(0, 2)$, C) $(-5, 5)$, D) $(2, 5)$.
18. Koji je od navedenih brojeva najmanji?
- A) -0.4 B) $-3\frac{1}{2}$ C) 0.5 D) $-4\frac{3}{4}$
19. Interval $[-3, 2] \cup (-1, 0]$ jest :
- A) otvoren, B) slijeva poluotvoren, C) zatvoren, D) zdesna poluotvoren.
20. Koji par predočuje dva međusobno recipročna broja?
- A) $\frac{3}{4}; 1.\dot{3}$ B) $\frac{1}{3}; -0.\dot{3}$ C) $\frac{2}{5}; 0.5$ D) $\frac{1}{3}; 1.\dot{3}$
21. Koja je od tvrdnji istinita?
- A) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ B) $-\frac{1}{3} \in \mathbb{Z}$ C) $2 \in \mathbb{I}$ D) $\frac{3}{5} \in \mathbb{N}$
22. Koji od sljedećih elemenata skupa C pripada i skupu \mathbb{R} ?
- A) $3+i$ B) $-3i$ C) $8i$ D) $\sqrt{8}$
23. Za koju je vrijednost varijable n vrijednost razlomka $\frac{7}{n+1}$ prirodan broj?
- A) $n = -11$, B) $n = 6$, C) $n = 2$, D) $n = 3$.
24. $D(352, 18)$ jest:
- A) 1, B) 2, C) 18, D) 176.
25. Vrijednost izraza $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ jest:
- A) $\frac{1}{3}$, B) $\frac{6}{5}$, C) $\frac{5}{2}$, D) $\frac{7}{5}$.
26. Vrijednost izraza $(-2)(-5) - [2 - 3 \cdot (1 - 5) + 2] - 1$ jest:
- A) -37 , B) 17 , C) -7 , D) 25 .
27. Vrijednost izraza $\frac{30 \cdot \frac{17}{4} - \frac{56}{5} : \frac{28}{3}}{1 : 6 + 12 : 5}$ jest:
- A) $\frac{77}{3}$, B) $\frac{351}{7}$, C) $49\frac{16}{77}$, D) $\frac{421}{77}$.

28. Koja je vrijednost izraza $\frac{2}{3} \cdot 2.25 - \frac{7}{6}$?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 3 C) $0.\dot{3}$ D) $\frac{6}{2}$

29. Koja je vrijednost izraza $\frac{3 + \frac{4}{25} + 0.59}{\left(\frac{3}{4} - 0.15\right) : 4}$?

- A) 100 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{25}$ D) 25

30. Realni dio broja $(1 - 2i)^3$ jest:

- A) 12, B) -11, C) $2i$, D) 2.

31. Imaginarni dio broja $\frac{2-i}{4+i} + 2+i$ jest:

- A) $\frac{11}{17}$, B) 11, C) $\frac{41}{17}$, D) $11i$.

32. Modul kompleksnog broja $(3i - 5)^2$ jest:

- A) 1, B) 16, C) 34, D) -30.

33. Apsolutna vrijednost broja $\frac{i-5}{2-i} + \frac{i-4}{i}$ jest:

- A) 13, B) $-\frac{6}{5}$, C) $\frac{17}{5}$, D) $\sqrt{13}$.

34. Zapis broja $2 - 2i$ u trigonometrijskom obliku glasi:

- A) $2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, B) $2 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$,
 C) $2\sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$, D) $2 \cdot \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$.

35. Broj $(2 - 2i)^5$ jednak je:

- A) $(2\sqrt{2})^5 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, B) $10 - 10i$, C) $32 - 32i$, D) $-128 + 128i$.

36. Grafički prikaz skupa svih kompleksnih koji imaju istu apsolutnu vrijednost kao i broj $3 - 4i$ kružnica je polumjera:

- A) 3, B) 5, C) 25, D) -4.

37. D (36, 72) jednako je:

- A) 12, B) 36, C) 72, D) 6.

38. Izračunaj $-1 + \frac{1}{49} : \frac{1}{7}$.

- A) $-\frac{6}{7}$ B) 6 C) 7 D) $-\frac{7}{6}$

39. Kolika je vrijednost izraza $\frac{\frac{5}{8} + \frac{1}{12} - \frac{7}{32}}{\frac{3}{8} + \frac{7}{12} - \frac{5}{32}}$?

- A) $\frac{31}{23}$ B) $\frac{47}{77}$ C) $\frac{23}{31}$ D) $\frac{77}{47}$

40. Vrijednost izraza $-2 - 2 \cdot [-2 - 2 \cdot [-2 \cdot (-2) - 2]]$ jest:

- A) -10, B) 32, C) 10, D) 12.

41. Kolika je vrijednost izraza $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} : \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} : \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$?

- A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{1}{6}$ C) 6 D) $\frac{7}{3}$

42. Imaginarni je dio broja $(2 - i)^2$:

- A) -4, B) $-4i$, C) 4, D) $-i$.

43. Modul kompleksnog broja $\frac{1+3i}{3-i}$ jest:

- A) i , B) 1, C) -1, D) 2.

44. Zapis broja $-1 + \sqrt{3}i$ u trigonometrijskom obliku glasi:

- A) $2 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$, B) $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$,
 C) $\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$, D) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.

45. Vrijednost izraza $\sqrt[3]{5} - 2^{0.2}$ (zaokruženo na četiri decimale, uz upotrebu džepnog računala) iznosi:

- A) -0.1590, B) 0.1590, C) 0.1580, D) ništa od navedenog.

46. Vrijednost izraza $\sqrt{\sqrt{3}\sqrt{3\sqrt{3}}}$ jest:

- A) $\sqrt{2187}$, B) $\sqrt[8]{27}$, C) $\sqrt[16]{2187}$, D) $\sqrt{27}$.

47. Nakon unošenja pod znak korijena, izraz $2x^2y\sqrt{\frac{5y}{8x}}$ postaje:

- A) $\sqrt{2x^2y}$, B) $\sqrt{\frac{5x^2y}{2}}$, C) $\sqrt{\frac{5x^3y^3}{4}}$, D) $\sqrt{\frac{5x^3y^3}{2}}$.

48. Da bi jednakost $16 : 2^x = \frac{1}{2}$ bila točna, x mora biti jednak:

- A) 2, B) 4, C) -1, D) 5.

49. Pozitivan broj koji nedostaje u izrazu $\underline{\quad}^2 : 3 = \frac{1}{3}$ jest:

- A) 9, B) $\sqrt{3}$, C) 1, D) 3.

50. Izraz $\frac{3^{-2} \cdot 9}{0.3}$ kao potencija s bazom 3 jest:
 A) 3^2 , B) 3^0 , C) $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, D) 3^1 .
51. Izraz $\frac{5^{-3} \cdot (0.2)^2 \cdot 5}{5^{-2} \cdot 0.008 \cdot (-5)^3}$ zapisan kao potencija s bazom 5 jest:
 A) 5^{-4} , B) -5^{-3} , C) 5^{-2} , D) -5^{-2} .
52. Vrijednost izraza $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$ jest:
 A) 10, B) 30, C) 20, D) 16.
53. Vrijednost izraza $\left(\frac{100^{-5} \cdot 1000^2}{(-0.01)^{-2} \cdot (0.001)^{-1}}\right)^{-3}$ jest:
 A) 10^{-3} , B) 10^{12} , C) 10^{33} , D) 10^{11} .
54. Vrijednost izraza $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2$ jest:
 A) $2\sqrt{2}-2$, B) 1, C) 2, D) $2\sqrt{2}$.
55. Kolika je vrijednost izraza $(\sqrt{5}-2\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{7}+2\sqrt{5})$?
 A) $\sqrt{5}-2\sqrt{7}$, B) $-4-3\sqrt{35}$, C) $24-3\sqrt{35}$, D) $24+5\sqrt{35}$
56. Racionalizacijom nazivnika izraza $\frac{6}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$ dobiva se:
 A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, B) $-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$, C) $-2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, D) $12\sqrt{3}-12\sqrt{2}$.
57. Racionalizacijom nazivnika izraza $\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ dobiva se:
 A) 3, B) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$, C) 1, D) $\frac{4+3\sqrt{10}-4\sqrt{5}}{3}$.
58. Nakon djelomičnog korjenovanja za $x > 0$ $x^2 \sqrt{\frac{36y^3}{25x^4}}$ i $y \geq 0$ dobivamo:
 A) $\frac{6x}{5y}$, B) $\frac{6y\sqrt{y}}{5}$, C) $\frac{6y}{5}$, D) $\frac{6x^2}{5y}$.
59. Nakon djelomičnog korjenovanja i obavljenih računskih operacija izraz $\frac{(\sqrt{50}+\sqrt{32}-2\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{8})}{\sqrt{2}}$ daje:
 A) $24\sqrt{2}$, B) $21\sqrt{2}$, C) 42, D) 21.
60. Izračunaj x kako bi jednakost $27^7 : 9^x = 3^9$ bila ispravna.
 A) 2, B) 1, C) 6, D) 0

61. Izraz $\frac{5^{-2} \cdot 25}{125}$ zapisan kao potencija s bazom 5 jest:
- A) 5^{-3} , B) 5^{-1} , C) 5, D) 5^2 .
62. Vrijednost izraza $\left(\frac{3^{-1} + 3^{-2}}{2^{-1} - 2^{-2}} : \frac{3^{-1} + 3^{-2}}{2^{-1} - 2^{-2}} \right)^{-1}$ jest:
- A) $\frac{1}{2}$, B) $\frac{2}{3}$, C) $\frac{3}{2}$, D) 1.
63. Vrijednost izraza $(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})$ jest:
- A) $\sqrt{10} - 1$, B) $1 + \sqrt{10}$, C) $2\sqrt{5} - 1$, D) $1 - 2\sqrt{5}$.
64. Kolika je vrijednost izraza $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+3}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{2}} \right)^2$?
- A) $3 - \sqrt{7}$ B) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ C) 1 D) 2
65. Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ jednak je:
- A) 1, B) $\sqrt{3} + 2$, C) $\sqrt{3}$, D) $3\sqrt{2}$.
66. Vrijednost izraza $\| -2 - 5 | - | -3 | - 3 | 5 - 2 \|$ jest:
- A) 19, B) 5, C) -5, D) 1.
67. Vrijednost izraza $\frac{|1-\sqrt{3}| - |\sqrt{3}-1|}{|-1| - |\sqrt{3}|}$ jest:
- A) 1, B) $1 + \sqrt{3}$, C) 0, D) $1 - \sqrt{3}$.
68. Vrijednost funkcije $f(x) = \frac{|x-1|-1}{|x+2|-3}$ za $x = \sqrt{2}$ iznosi:
- A) $-\sqrt{2} + 2$, B) $\sqrt{2}$, C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, D) 2.
69. Vrijednost funkcije $f(x) = \frac{|x-1|-1}{|x-1|-1}$ za $x = 4$ iznosi:
- A) 0, B) 3, C) -2, D) 1.
70. Zapis funkcije $f(x) = |x + 3|$ bez znaka absolutne vrijednosti glasi:
- A) $\begin{cases} x+3; x < -3 \\ 0; x = -3 \\ x-3; x > -3 \end{cases}$, B) $\begin{cases} -x-3; x < 3 \\ 0; x = 3 \\ x+3; x > 3 \end{cases}$, C) $\begin{cases} -x-3; x < -3 \\ 0; x = -3 \\ x+3; x > -3 \end{cases}$, D) $\begin{cases} x-3; x < -3 \\ 0; x = -3 \\ x+3; x > -3 \end{cases}$.

71. Zapis funkcije $f(x) = |-x - 2| + 2$ bez znaka apsolutne vrijednosti jest:

$$\text{A) } \begin{cases} -x; x > -2 \\ 2; x = -2 \\ x + 4; x < -2 \end{cases}, \quad \text{B) } \begin{cases} -x; x < 2 \\ 2; x = 2 \\ x + 4; x > 2 \end{cases}, \quad \text{C) } \begin{cases} x + 4; x < -2 \\ 2; x = -2 \\ -x; x > -2 \end{cases}, \quad \text{D) } \begin{cases} -x; x < -2 \\ 2; x = -2 \\ x + 4; x > -2 \end{cases}.$$

72. Za $x \geq 3$ izraz $\sqrt{x^2 - 6x + 9}$ jednak je:

- A) $x + 3$, B) $-x + 3$, C) $x - 3$, D) $-x - 3$.

73. Za $x \leq \frac{3}{2}$ izraz $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ jednak je:

- A) $2x + 3$, B) $-2x + 3$, C) $2x - 3$, D) $-2x - 3$.

74. Vrijednost izraza $\sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$ jest:

- A) $2\sqrt{5} - 4$, B) $2\sqrt{5}$, C) 0, D) -4 .

75. Vrijednost izraza $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} - \sqrt{3}$ jest:

- A) $\sqrt{3}$, B) $-\sqrt{3} + 2$, C) -2 , D) $-2\sqrt{3} + 2$.

76. Vrijednost izraza $\left|(-5)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right| - (-3)^{-2} + |-5|^0$ jest:

- A) $\frac{13}{9}$, B) $\frac{8}{9}$, C) $\frac{11}{9}$, D) $\frac{1}{3}$.

77. Vrijednost izraza $\frac{-|-2|+|5|}{|-2|+|-5|}$ jest:

- A) 1, B) $-\frac{3}{7}$, C) $\frac{1}{2}$, D) $\frac{3}{7}$.

78. Vrijednost funkcije $f(x) = \frac{\|x - 1\| - 1}{\|x + 2\| - 3}$ za $x = -1$ iznosi:

- A) -1 , B) $\frac{1}{2}$, C) 0, D) $-\frac{1}{2}$.

79. Vrijednost funkcije $f(x) = \frac{\|x - 1\| - 1}{\|x + 2\| - 3}$ za $x = 1$ iznosi:

- A) -4 , B) $\frac{1}{4}$, C) 4, D) funkcija nije definirana.

80. Zapis funkcije $f(x) = |1 - x|$ bez znaka apsolutne vrijednosti glasi:

$$\text{A) } \begin{cases} 1 - x; x < 1 \\ x - 1; x > 1 \\ 0; x = 1 \end{cases}, \quad \text{B) } \begin{cases} x + 1; x < 1 \\ -x + 1; x > 1 \\ 1; x = 0 \end{cases}, \quad \text{C) } \begin{cases} -x + 1; x < 1 \\ x - 1; x > 1 \\ 0; x = 1 \end{cases}, \quad \text{D) } \begin{cases} -x + 1; x > 1 \\ -x - 1; x < 1 \\ 1; x = 0 \end{cases}.$$



81. Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\frac{2-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ jednak je:

- A) $\frac{\sqrt{15}}{3}$, B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, D) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{15}}{3}$.

82. Nakon racionalizacije nazivnika izraz $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ jednak je:

- A) 1, B) $-(2+\sqrt{3})$, C) $2+\sqrt{3}$, D) -1.

83. Vrijednost izraza $|\sqrt{7}-3|-|2-\sqrt{7}|$ jest:

- A) $2\sqrt{7}-1$, B) -1, C) -7, D) $5-2\sqrt{7}$.

84. Vrijednost izraza $|\sqrt{17}-2|-|3-\sqrt{17}|$ jest:

- A) $2\sqrt{17}-1$, B) 1, C) -5, D) $2\sqrt{17}-5$.

85. Vrijednost izraza $-\left|-5^{-2}-\frac{2}{25}\right|^{-1}-(-3)^{-1}+|-3|^0$ jest:

- A) -2, B) 3, C) -7, D) $-\frac{102}{25}$.

86. Vrijednost izraza: $\frac{2xy-1}{x^{-1}-y^{-1}}$ za $x=2$ i $y=3$ iznosi:

- A) $\frac{6}{11}$, B) $\frac{5}{3}$, C) 66, D) $\frac{11}{6}$.

87. Reducirani oblik izraza $\frac{a-3}{a+3} \cdot \frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$ jest:

- A) $\frac{1}{a-3}$, B) $a+3$, C) 1, D) $\frac{a+3}{a-3}$.

88. Nakon skraćivanja i naznačenih računskih operacija izraz $\frac{1}{2(a-1)} - \frac{1}{2(a+1)}$ jednak je:

- A) $\frac{2}{a^2-1}$, B) $\frac{4a}{a^2-1}$, C) $\frac{1}{a^2-1}$, D) $\frac{2}{a+1}$.

89. Reducirani oblik izraza $\frac{b \cdot (a-b)^2}{a^4-b^4} - \frac{a}{a^2+b^2}$ glasi:

- A) $\frac{ab}{a+b}$, B) $\frac{ab}{a^2+b^2}$, C) $-\frac{1}{a+b}$, D) $\frac{1}{a+b}$.

90. Pojednostavljeni oblik izraza $\frac{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{(a^{-1}+b^{-1}) \cdot (a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2})}$ jest:

- A) 1, B) $b-a$, C) $\frac{ab}{b+a}$, D) $\frac{ab}{a-b}$.

91. Za $x \neq -1, 0, 1$ izraz $\frac{\frac{1}{1+x} + \frac{3}{3-3x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{3}{3+3x}}$ jednak je:

- A) $x + 1$, B) $\frac{1}{x+1}$, C) $\frac{1}{x}$, D) x .
- 92.** Za $x \neq y$ izraz $\frac{3^x - 3^y}{3^{-y} - 3^{-x}}$ jednak je:
- A) 3^{x+y} , B) -3^{x+y} , C) 3^{-x-y} , D) 3^{x-y} .
- 93.** Koeficijent uz $x^5 y^3$ u razvoju binoma $(3x + 2y)^8$ iznosi:
- A) 16, B) 336, C) 108 864, D) 5 184.
- 94.** Peti član u razvoju binoma $(3x + 2y)^6$ jest:
- A) 2 160 xy , B) 2 160 $x^2 y^2$, C) 9 $x^2 y^4$, D) 2 160 $x^4 y^2$.
- 95.** Član sa y^4 u razvoju binoma $(3x + 2y)^6$ jest:
- A) drugi, B) treći, C) peti, D) četvrti.
- 96.** Vrijednost izraza $\frac{a^{-2} - b}{2ab}$ za $a = -1$ i $b = 3$ iznosi:
- A) $-\frac{1}{2}$, B) $\frac{1}{3}$, C) -3 , D) $\frac{1}{4}$.
- 97.** Vrijednost izraza $\frac{a^{-2} - b}{2ab}$ za $a = 2$ i $b = 5$ jest:
- A) $-\frac{1}{2}$, B) 6, C) -3 , D) $-\frac{19}{80}$.
- 98.** Reducirani oblik izraza $\frac{x^3 - y^3}{xy} : \frac{x \cdot (x - y)}{x^2 y}$ jest:
- A) $(x + y)^2$, B) $x^2 + xy + y^2$, C) 1, D) ništa od navedenoga.
- 99.** Jedan od faktora u rastavu izraza $8 - y^3$ na faktore jest:
- A) $4 - y$, B) $2 - y$, C) $2 - 2y + 2$, D) $2 + y$.
- 100.** Peti član u razvoju binoma $(2x + 3y)^6$ jest:
- A) $15 \cdot x^4 \cdot y^2$, B) $4 860 \cdot x^2 \cdot y^4$, C) $4 320 \cdot x^4 \cdot y^2$, D) $4 320 \cdot x^2 \cdot y^4$.
- 101.** Član sa x^2 u razvoju $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^2$ jest:
- A) peti član, B) četvrti član, C) šesti član, D) sedmi član.
- 102.** Kvadriranjem binoma $a\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ dobiva se:
- A) $a^2 - 6\sqrt{6}a + 9$, B) $2a^2 - 6\sqrt{6}a + 27$, C) $2a^2 + 6\sqrt{6}a + 27$, D) $2a^2 - \sqrt{6}a + 27$.
- 103.** Kubiranja binoma $x - \sqrt{2}$ dobiva se:
- A) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2}$, B) $x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x + 2\sqrt{2}$
 C) $x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 6x + 2\sqrt{2}$, D) $x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2x - 2\sqrt{2}$.

104. 26 % od broja $\frac{1}{2} : 3 + (1 - 0.25)$ jest:

- A) $\frac{11}{52}$, B) $\frac{11}{12}$, C) $\frac{55}{26}$, D) $\frac{143}{600}$.

105. $\left(\frac{3}{4} - 0.5\right) : \left(\frac{1}{2} + 0.25\right)$ iznosi 30 % od:

- A) $\frac{90}{16}$, B) $\frac{10}{9}$, C) $\frac{3}{16}$, D) $\frac{45}{8}$.

106. Krastavaci se pri branju sortiraju na I. i II. klasu. Ako je postotni udio krastavaca prve klase 35 %, a ukupan urod 2 t, koliko je kilograma krastavaca druge klase ubrano u berbi?

- A) 650 kg B) 700 kg C) 1 300 kg D) 350 kg

107. Tvornica stakla proizvodi boce. Pri proizvodnji nastaje 3 % otpada. Koliko komada boca mora proizvesti tvornica da bi dobila 100 boca bez greške?

- A) 102 B) 103 C) 104 D) 105

108. Nakon uzimanja poreza od 3.5 % plaća iznosi 5 980 kn. Za koliko postotaka treba povećati plaću tako da se vrati na početni iznos prije uzimanja poreza?

- A) 3.6 B) 3.7 C) 3.4 D) 3.5

109. U vodi bazena je 2 % klora. Koliko litara čiste vode treba doliti u 1 000 l vode u bazenu kako bi se postotni udio klora smanjio na 1.5 %?

- A) 1 500 B) 20 C) $\frac{1\,000}{3}$ D) $\frac{4\,000}{3}$

110. Cijena kvadratnog metra stana snižena je za 3 %, pa za još 2 %. Ako je konačna cijena kvadratnog metra stana 6 760 kuna i 80 lipa, kolika je bila početna cijena?

- A) 7 000 kn B) 7 011 kn 12 lp C) 7 112 kn 14 lp D) 7 098 kn 84 lp

111. Od kojeg broja 12 % iznosi $\frac{3}{5} + 0.425 - \frac{1}{200}$?

- A) 12 B) 2 C) 0.005 D) $\frac{17}{2}$

112. Od kojeg broja 25 % iznosi $\frac{1}{25} + \frac{1.2 - 0.4}{\frac{1}{5}}$?

- A) 101 B) 2 C) 0.005 D) $\frac{404}{25}$

113. Koliko je 25 % od $\frac{3 + \frac{4}{25} + 0.59}{\left(\frac{3}{4} - 0.15\right) : 4}$?

- A) $\frac{25}{4}$ B) 1 C) 100 D) 0.25

- 114.** Pri proizvodnji ekoloških vrećica nastaje 0.96 % otpada. Koliko komada cijelih vrećica treba proizvesti da bismo dobili 2 000 komada bez greške?
- A) 2 002 B) 2 020 C) 2 030 D) 2 022
- 115.** U morskoj je vodi 4.5 % soli. Koliko litara slatke vode valja uliti u 100 litara morske vode kako bi u mješavini bilo 2.5 % soli?
- A) 50 B) 100 C) 80 D) 150
- 116.** Na velikoj rasprodaji cijenu ležaja najprije su snizili za 20 %, a zatim za još 10 %. Ako je konačna cijena ležaja 699 kuna i 90 lipa, kolika je bila početna cijena?
- A) 972 kn 9 lip B) 972 kn C) 972 kn 83 lip D) 973 kn
- 117.** Ako toplo čokoladu naplatimo 12 kuna, marža je 30 %. Ako bismo tu toplo čokoładu naplatili 15 kuna, marža bi iznosila:
- A) $\frac{37}{13}\%$, B) $\frac{125}{2}\%$, C) $\frac{80}{13}\%$, D) $\frac{37}{8}\%$.
- 118.** Stranice trokuta odnose se kao $2 : 3 : 4$. Površina trokuta je $24\sqrt{15}$ kvadratnih jedinica. Koliki je opseg trokuta?
- A) $36\sqrt{15}$ B) $3\sqrt{15}$ C) $36\sqrt{2}$ D) 288
- 119.** Na geografskoj karti udaljenost koju trebamo prijeći jest 10 cm. Karta je napravljena u mjerilu $1 : 125\,000$. Kolika je stvarna udaljenost koju trebamo prijeći?
- A) 1.25 km B) 12.5 km C) 125 km D) 1 250 km
- 120.** Stranice trokuta odnose se kao $2 : 3 : 4$. Opseg trokuta je 36 cm. Kolika je površina trokuta?
- A) $12\sqrt{15}\text{ cm}^2$ B) $12\sqrt{5}\text{ cm}^2$ C) $2\sqrt{15}\text{ cm}^2$ D) $2\sqrt{5}\text{ cm}^2$
- 121.** Neka su a i b katete, c hipotenuza, a p i q duljine ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu. Kolike su stranice a i b ako je $p : q = 169 : 81$, a $c = 14$?
- A) 7; 6 B) $\frac{63}{25}; \frac{91}{25}$ C) $\frac{91\sqrt{10}}{25}; \frac{63\sqrt{10}}{25}$ D) 63; 91
- 122.** Stranice trokuta odnose se kao $3 : 5 : 7$. Ako je opseg 30 cm, kolika je površina tog trokuta?
- A) 3 cm^2 B) $15\sqrt{3}\text{ cm}^2$ C) $\frac{135}{16}\text{ cm}^2$ D) $\frac{135}{4}\text{ cm}^2$
- 123.** Geografska karta izradena je u mjerilu $1 : 500\,000$. Kolika je stvarna udaljenost dvaju mjestu ako ona na karti iznosi 10 cm?
- A) 5 500 km B) 500 km C) 50 km D) 5 km
- 124.** Neka su a i b katete, c hipotenuza, a p i q duljine ortogonalnih projekcija kateta na hipotenuzu. Kolika je duljina stranice b ako je $p : q = 64 : 25$, a $c = 12$?
- A) ništa od ponuđenoga B) 89 C) 60 D) $\frac{60\sqrt{89}}{89}$

125. Omjer kutova u trokutu je $1 : 2 : 3$. Koliki je najmanji kut?

- A) 30° B) 180° C) 60° D) 135°

126. Omjer kutova u trokutu je $2 : 3 : 5$. Koliki je zbroj najmanjega i srednjeg kuta?

- A) 30° B) 180° C) 60° D) 90°

127. Omjer kutova u trokutu je $2 : 3 : 5$. Koliki je zbroj dvaju većih kutova?

- A) 180° B) 144° C) 126° D) 90°

128. Iz izraza $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ prikaži R_2 .

- A) $\frac{R \cdot R_1}{R - R_1}$ B) $\frac{R_1 - R}{R \cdot R_1}$ C) $\frac{R \cdot R_1}{R_1 - R}$ D) $\frac{R - R_1}{R \cdot R_1}$

129. Iz izraza $F_{cp} = m \frac{v^2}{r}$ prikaži r .

- A) $\frac{v^2}{mF_{cp}}$ B) $\frac{mv^2}{F_{cp}}$ C) $\frac{F_{cp}}{mv^2}$ D) $\frac{F_{cp}m}{v^2}$

130. Iz izraza $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ izvedi a .

- A) $\frac{v_0 - 2s}{t^2}$ B) $\frac{s - v_0 t}{2}$ C) $\frac{v_0 t - s}{2}$ D) $\frac{2s}{t^2} - \frac{2v_0}{t}$

131. Koristeći se džepnim računalom, odredi koji je broj najveći.

- A) $\cos 75^\circ 12'$ B) $\log_5 4$ C) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ D) $\sin 12^\circ 24'$

132. Vrijednost izraza $\log_2 5 - \sqrt[3]{\sin(12^\circ 10')} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ (zaokruži na četiri decimale) jest:

- A) 2.8446, B) 1.8446, C) 0.8446, D) -0.5227.

133. Nakon x sekunda ostane neraspadnuto $n(x) = 10^6 \cdot 10^{-1.82 \cdot 10^{-9} \cdot x}$ atoma radioaktivnog izotopa kobalta. Koliko atoma ostane neraspadnuto nakon 25 000 s?

- A) 999 885.2379 B) 999 995.2379 C) 999 795.2379 D) 999 895.2379

134. Brzina svjetlosti je $300\ 000$ km/s. Za koje vrijeme (u minutama) svjetlost prevali put od 3 596 milijuna kilometara?

- A) za 19.98 min B) za 11986.67 min C) za 199.78 min D) za 198.79 min

135. Koristeći se džepnim računalom, odredi koji je broj najveći.

- A) $\sin(25^\circ 04')$ B) $\sqrt[3]{21}$ C) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ D) $\log_5 100$

136. Vrijednost izraza $\log_8 3 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{25} - 12^{4.2}}$ (zaokruženo na četiri decimale) jest:

- A) -34083.0703, B) 34083.0703, C) 340.8307, D) -34083.0702.

137. Promjer kružnice čija je duljina 2π dm iznosi:

- A) 0,01 m, B) 1 cm, C) 1 dm, D) 100 mm.

138. Promjer kugle volumena $36\pi \text{ m}^3$ jest:

- A) 60 m, B) 600 cm, C) 600 mm, D) ništa od navedenoga.

139. Gustoća je omjer mase i obujma. Tekućina ima gustoću $5\,427 \cdot 10^3 \text{ g/m}^3$. Ako je obujam $2,7 \cdot 10^{14}$, tada je masa (u kg) jednaka:

- A) $1.4653 \cdot 10^{18}$, B) $2.01 \cdot 10^{-11}$, C) $4.975 \cdot 10^{10}$, D) $1.4653 \cdot 10^{15}$.

140. Kupine se prodaju u raznim pakiranjima. Odaberi za kupca najpovoljniju ponudu.

- A) 125 g za 7 kn B) 250 g za 10 kn C) 500 g za 11 kn D) $\frac{1}{4}$ kg za 8 kn

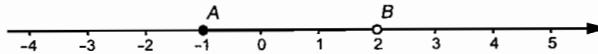
141. Tvar ima gustoću $1\,232 \cdot 10^3 \text{ g/m}^3$. Ako je obujam tvari $3 \cdot 10^{18} \text{ m}^3$, kolika je njezina masa (u kg)?

- A) $3.696 \cdot 10^{21} \text{ kg}$ B) $3.696 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ C) $3.969 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ D) $3.696 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Zadaci kratkih odgovora

Rješenja zadataka potražite na str. 445.

- Ispišite sve cijele brojeve veće od $\frac{1}{2}$ i manje od $\frac{9}{2}$.
- Ispišite sve prirodne brojeve veće od -2 i manje od $\frac{13}{4}$.
- Odredi cijele brojeve između kojih se nalazi broj $2\sqrt{3} - 1$ i koji su mu najbliže.
- Odredi cijele brojeve između kojih se nalazi broj $1 - \sqrt{5}$ i koji su mu najbliže.
- Zapiši uz pomoć nejednakosti: pustinjski kaktus visok je između 70 i 120 cm.
- Interval $[\sqrt{3}, 5)$ prikaži na brojevnom pravcu.
- Na brojevnom pravcu prikaži skup $[-3, 5] \cup (2, +\infty)$.
- Prikaži na brojevnom pravcu skup $(-3, 7] \cap (-5, 8)$.
- Pripada li broj $-\frac{1}{7}$ intervalu $[-3, 11]$?
- Predočeni skup prikaži uz pomoć intervala.



11. Broju $z = -i + 1$ odredite konjugirano kompleksni par.

12. Odredi modul konjugirano kompleksnog para broja $2 - 3i$.

13. Izračunaj $\frac{3 + 4 \cdot 2 : 0.1}{\left(1 : 0.3 - \frac{7}{3}\right) \cdot 0.3125}$.
14. Izračunaj $\frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{7}}{\frac{2}{5} + \frac{1}{7}} \cdot \left(\frac{19}{2} - \frac{19}{3}\right)$.
15. Izračunaj $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$.
16. Broj 0.0125 zapiši u obliku razlomka i skrati do kraja.
17. Izračunaj $2i^{50} - 3i^{150} + 4i^{200} - 5i^{250}$.
18. Izračunaj $\frac{i^{101} - 1}{1 - i^{102}}$.
19. Odredi imaginarni dio broja $\frac{2i^{105} - 1}{i - i^{103}}$.
20. Koristeći se trigonometrijskim oblikom broja, izračunaj $(1 - i)^{50}$.
21. Odredi \bar{z} ako je $z = (1 + i)(3 + i)(4 - i)$.
22. Modul kompleksnog broja $\frac{17 + 11i}{2 - i} \cdot \frac{3 - 4i}{17 - 11i}$ jest: _____.
23. Realni dio kompleksnog broja $(1 - i\sqrt{3})^3$ jednak je: _____.
24. Zaokružimo broj 12.3562795 na:
 - a) tri decimalne,
 - b) četiri decimalne,
 - c) pet decimalna.
25. Izračunaj vrijednost izraza $2\sqrt{5} - 3\sqrt{7} + 5\sqrt{343} - 2\sqrt{125}$ koristeći se pravilima za računanje s korijenima. Koristeći se kalkulatorom, dobiveni rezultat zapiši u decimalnom obliku zaokruživši ga na četiri decimalne.
26. Izračunaj $\frac{0.01 \cdot 10^{-2} : \frac{1}{10}}{1000}$ i rezultat zapiši kao potenciju s bazom 10.
27. Izračunaj $\frac{10^{-6} : 0.001 \cdot 10^3}{0.1}$ i rezultat zapiši kao potenciju s bazom 10.
28. Pojednostavni $(4a^{3x}b^{3y} - 6a^{3x}b^{2y} + 2a^{2x}b^y) : 2a^{2x}b^y$.
29. Rastavi na faktore $5^{n+1} + 5^n$.
30. Rastavi na faktore $3^{n+2} + 3^n + 3^{n+1}$.

31. Pojednostavni $(\sqrt{10} - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3 - \sqrt{5}}$.
32. Pojednostavni $\sqrt{4 + \sqrt{15}} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$.
33. Nađi vrijednost izraza $\sqrt{\frac{5 - (-2) \cdot 3}{-1 + 2 \cdot (-1)}}.$
34. Izračunaj $|\sqrt{3} - 1| - 3 \cdot |1 - \sqrt{3}| + 2 - \sqrt{3}$.
35. Zapiši funkciju $f(x) = 2 \cdot |x - 1|$ bez znaka apsolutne vrijednosti.
36. Zapiši funkciju $f(x) = \frac{|x - 1|}{|2 - x|}$ bez znaka apsolutne vrijednosti.
37. Zapiši funkciju $f(x) = |x - 3| + |3 - x|$ bez znaka apsolutne vrijednosti.
38. Izračunaj vrijednost izraza $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$.
39. Izračunaj vrijednost izraza $\sqrt{(6 - \sqrt{13})^2} - \sqrt{(\sqrt{13} - 6)^2}$.
40. Izračunaj $-\left| \frac{2}{3} + 1 \right| : \frac{1}{2} + \left| \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 \right| - 1$.
41. Izračunaj $\left| -3 - 1 : \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right| - \left| 2 - \frac{3}{2} \left| 1 - \frac{1}{2} \right| - 1 \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) \right|$.
42. Pojednostavni izraz $\frac{x^3 y^{-1} - x^{-1} y^3}{x y^{-1} + x^{-1} y} : \frac{x^2 - y^2}{xy}$.
43. Pojednostavni izraz $\frac{y \cdot (x - y)^2}{x^4 - y^4} - \frac{x}{x^2 + y^2}$.
44. Skrati razlomak $\frac{3^{a+b} + 3^b}{3^a + 9^a}$.
45. Kubiraj i kvadriraj izraz $\left(\frac{1}{2}ab - \frac{2}{5}a \right)$.
46. Kubiraj i kvadriraj izraz $\left(xy - \frac{1}{2} \right)$.
47. Obavi zadane računske operacije i napiši rezultat nakon skraćivanja: $\frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$.
48. Obavi zadane računske operacije i napiši rezultat nakon skraćivanja: $\frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{x + \frac{1}{x} + 1}$.

49. Izračunaj koristeći se binomnim poučkom: $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^6$.
50. Izračunaj koristeći se binomnim poučkom: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$.
51. Iz izraza $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1$ izrazi b uz pomoć a .
52. Iz izraza: $\frac{xy - 1}{2x} = 1$ izrazi y uz pomoć x .
53. Iz izraza: $(x + 1)(y + 1) = 2$ izrazi x uz pomoć y .
54. Kružni isječak tvori 27 % kruga čiji je promjera 4 cm. Kolika je površina tog isječka?
55. Posuda s vodom ima oblik valjka čiji je polumjer osnovke 3 cm, a visina 7 cm. Ako je posuda napunjena vodom do 75 % svoje visine, koliki je obujam vode u posudi (iskazan u cm^3)?
56. TV pristojba poskupi za 80 %. Za koliko postotaka mora pojeftiniti nova TV pristojba tako da opet bude jednaka onoj prije poskupljenja?
57. Knjiga u knjižari poskupjela je za 15 %. Koliko postotaka mora pojeftiniti pa da cijena knjige bude jednaka onoj prije poskupljenja?
58. Košulja na rasprodaji pojeftini za 30 %. Koliko bi posto morala poskupjeti da se cijena vrati na početnu?
59. Marko ima parcelu od $1\ 127 \text{ m}^2$, a Ivan od $1\ 237 \text{ m}^2$. Za koliko je posto Ivanova parcela veća?
60. Od kojeg broja 20 % iznosi: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$?
61. Koliko je 15 % od $\left|\frac{3}{4} - \frac{1}{2} : 0.25 - \left(3 - \frac{1}{3}\right)\right|$?
62. Prikaži x kao postotni dio od y ako je $x = 20.25$, $y = 27$.
63. Opseg pravokutnog trokuta je 54 cm, a omjer $b : c = 3 : 5$. Izračunajte površinu trokuta.
64. Površina jednakokračnog trokuta je 94 cm^2 , a omjer $a : b = 3 : 7$. Izračunajte opseg trokuta.
65. Površina jednakokračnog trokuta je 120 cm^2 . Omjer osnovice i visine na osnovicu je $5 : 3$. Izračunaj opseg.
66. Površina jednakokračnog trapeza iznosi 98 cm^2 . Omjer osnovica i visine je $5 : 3 : 4$. Koliki je opseg toga trapeza?
67. Popuni tablicu (zaokruži na četiri decimale).

Količina (kg)	25	100	50
Cijena (kn)	135		256

68. Popuni tablicu (zaokruži na četiri decimale).

Količina benzina	7	21
Prijedeni kilometri	100	1 500

69. Iz formule $p = p_0 + \rho_{\text{tek}}gh$ izrazi gustoću tekućine ρ_{tek} .

70. Iz formule $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$ izrazi presjek vodiča S .

71. Popuni tablicu.

250 g	kg
1 000 cm ³	m ³
12 g/cm ³	kg/m ³
12 min 5 s	s
2 h 15 min	min

72. Poredaj po veličini počevši od najvećega i koristeći se kalkulatorom.

$$\frac{1}{2} \log_5 8 \quad \operatorname{tg} 78^\circ 12' \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(1 \cdot 10^{-3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

73. Banka oročava novac po formuli $C(n) = g(1 + p\%)^n$. Ako je kamatna stopa 4.5, glavnica 7 850 kn, a broj godina 15, koliko će novca imati štediša na kraju štednje?

74. Poredaj gustoće krenuvši od najmanje.

$$7 \text{ g/cm}^3 \quad 12 \text{ kg/cm}^3 \quad 0.25 \text{ g/m}^3 \quad 1.25 \text{ kg/m}^3$$

75. Poredaj vremena krenuvši od najkraćega.

$$2 \cdot 10^{-3} \text{ min} \quad \frac{1}{2} \text{ min } 2 \text{ s} \quad \frac{7}{8} \text{ s} \quad 1 \cdot 10^{-6} \text{ h}$$

76. Poredaj mase po veličini krenuvši od najveće.

$$2 \text{ kg } 38 \text{ g} \quad 4 800 \text{ g} \quad 2 \cdot 10^2 \text{ dag } 3 \text{ g} \quad 4 \cdot 10^{-2} \text{ t}$$

77. Zadane su dužine duljine 0.02 m, 60 mm i 5 cm. Može li se od zadanih dužina konstruirati trokut? Ako može, koliki je njegov opseg u milimetrima?

78. Zadane su dužine duljine 0.002 m, 60 mm i 4 cm. Može li se od zadanih dužina konstruirati trokut? Ako može, koliki je njegov opseg u milimetrima?

79. Dva kuta u raznostraničnom trokutu imaju mjeru $31^\circ 21'$ i $46^\circ 56'$. Izračunaj mjeru trećeg kuta.

80. U pravokutnom trokutu jedan od kutova je $56^\circ 21'$. Koliki je drugi šiljasti kut u tom trokutu?

81. U jednakokračnom trokutu kut uz osnovicu je $46^\circ 54'$. Koliki je kut nasuprot osnovici?

82. Masa bakrene kugle je 33 kg, a gustoća bakra je $8\ 900\ \text{kg/m}^3$. Koliki je polumjer te kugle?
83. U cijevi polumjera 0.5 cm nalazi se tekućina mase 0.5 kg. Kolika joj je gustoća ako tekućina u cijevi doseže do visine 30 cm?
84. Kocka mase 2 kg ima gustoću $850\ \text{kg/m}^3$. Koliki je brid kocke?
85. Gustoća željeza je $7\ 800\ \text{kg/m}^3$. Kolika je masa (iskazana u kilogramima) skulpture volumena $300\ \text{cm}^3$?

Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja

DM	državna matura
PM	probna matura
NI	nacionalni ispit
PI	primjer ispit
OJK gimnazije	opće, jezične i klasične gimnazije
PM gimnazije	prirodoslovno-matematičke gimnazije
KOI	klučni obrazovni ishodi

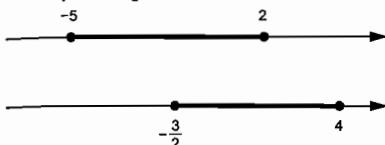
Rješenja zadataka potražite na str. 446.

Osnovna razina

1. Koji od brojeva pripada skupu iracionalnih brojeva? **PM 2009.**
 A) 4.33 B) $-\sqrt{16}$ C) $-\frac{4}{7}$ D) $\sqrt{5}$
2. Koji je od navedenih brojeva najbliži broju 3? **PI 2009.**
 A) π B) $4 - \frac{2}{3}$ C) $\sqrt{10}$ D) 1.5^3
3. Koliko je prirodnih brojeva u intervalu $\left(2, \frac{11}{2}\right]$? **NI 2006. za OJK gimnazije**
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5
4. Koliko je prirodnih brojeva u intervalu $\left[2, \frac{19}{3}\right]$? **NI 2007. za strukovne škole**
 A) 3 B) 4 C) 5 D) 6
5. Kojemu intervalu pripadaju brojevi $-\frac{1}{2}$ i 1? **NI 2008.**
 A) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right]$ B) $(-1, 1]$ C) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ D) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
6. Marko je pročitao $\frac{2}{3}$, Ana $\frac{7}{11}$, Pero $\frac{5}{6}$ i Višnja $\frac{1}{2}$ iste knjige. Tko je pročitao najveći dio knjige? **PI 2009.**
 A) Marko B) Ana C) Pero D) Višnja

7. Koliko cijelih brojeva sadržava zajednički dio zatvorenih intervala prikazanih na brojevnim pravcima na slici?

PI 2009.



- A) 5 B) 4 C) 3 D) 2

8. Koji je od navedenih brojeva veći od $-\frac{7}{2}$ i manji od $\frac{1}{3}$?

DM, jesen 2010.

- A) $-\frac{23}{6}$ B) $-\frac{11}{3}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{7}$

9. Koji je od navedenih brojeva manji od $-\frac{5}{2}$?

DM, ljeto 2010.

- A) $-\frac{7}{2}$ B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) $-\frac{2}{3}$

10. Odredite tri racionalna broja između $\frac{1}{9}$ i $\frac{1}{7}$.

NI 2006. za gimnazije OJK

11. Na brojevnom pravcu prikažite skup svih realnih brojeva x za koje je $x < 2.5$. NI 2008.

12. $\frac{0.05}{0.1} =$

NI 2007. za strukovne škole

- A) 0.2 B) 0.5 C) 2 D) 5

13. Koju vrijednost ima razlomak $\frac{231}{630}$?

PM 2009.

- A) $\frac{11}{90}$ B) $\frac{7}{30}$ C) $\frac{11}{30}$ D) $\frac{7}{10}$

14. Kolika je vrijednost izraza $\frac{0.25 - 7 \cdot \frac{3}{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}$?

DM, jesen 2010.

- A) -41 B) $-\frac{41}{16}$ C) $\frac{41}{16}$ D) 41

15. Koji od navedenih brojeva zaokruživanjem na dvije decimale daje broj 5.78?

DM, jesen 2010.

- A) 5.7699 B) 5.7731 C) 5.7791 D) 5.7866

16. Kolika je vrijednost izraza $\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}$?

DM, ljeto 2010.

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{13}{18}$

17. Kolika je vrijednost broja $\frac{\sqrt{28}}{3}$ zaokružena na tri decimale?

DM, ljeto 2010.

- A) 1.760 B) 1.763 C) 1.764 D) 1.770

18. Izračunajte vrijednost izraza: $\frac{1 + 3 \cdot (1.5 - 1)}{0.1 - 2 \frac{3}{5}}$.

PM 2009.

19. Izračunajte vrijednost izraza $\frac{1+4.5 \cdot \frac{1}{3}}{(2:0.1-4) \cdot 0.125}$.

PI 2009.

20. Izračunajte $\frac{-7+5 \cdot 9}{7:2-1}$.

NI 2008.

21. Zadani su brojevi $a = 2$, $b = \frac{2}{3}$ i $c = \frac{1}{2}$. Odredite broj $H = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

DM, jesen 2010.

22. Zadani su brojevi $a = \frac{18}{25}$ i $v = 6.3$. Odredite broj $V = \frac{1}{3} a^2 v$.

DM, Ijeto 2010.

23. Jedna tableteta sadržava $5.2 \cdot 10^7$ korisnih bakterija. Dijete od deset godina smije popiti najviše dvije tablete tri puta na dan. Koliko najviše tih bakterija dijete smije unijeti u organizam u jednom danu?

PI 2009.

- A) $5.20 \cdot 10^8$ B) $1.04 \cdot 10^8$ C) $1.56 \cdot 10^8$ D) $3.12 \cdot 10^8$

24. Masa Jupitera približno je jednaka $2 \cdot 10^{27}$ kg, a masa Zemlje $6 \cdot 10^{24}$ kg.

Koliko je puta masa Jupitera veća od mase Zemlje?

NI 2006. za OJK gimnazije

- A) $3 \cdot 10^3$ B) $3 \cdot 10^{-3}$ C) $\frac{1}{3} \cdot 10^3$ D) $\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$

25. $5 \cdot 5^n$ jednako je:

NI 2006. za OJK gimnazije

- A) 25^n , B) 10^n , C) 5^{n+1} , D) 25^{n+1} .

26. $1 - |-3| =$

NI 2007. za strukovne škole

- A) 4 B) 2 C) -2 D) -4

27. Koja od sljedećih tvrdnji nije uvijek točna za realne brojeve a i b ?

NI 2006. za OJK gimnazije

- A) $a - b = -(b - a)$ B) $(a - b)^2 = (b - a)^2$ C) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$ D) $(a + b)^2 = (-a - b)^2$

28. Izraz $(3m - 2)^2$ jednak je:

PM 2009.

- A) $3m^2 - 6m + 2$, B) $9m^2 - 6m + 4$, C) $9m^2 - 12m + 4$, D) $3m^2 - 12m + 2$.

29. Izraz $(3 + 2x)^2$ jednak je:

PI 2009.

- A) $9 + 6x + 2x^2$, B) $9 + 12x + 2x^2$, C) $9 + 6x + 4x^2$, D) $9 + 12x + 4x^2$.

30. Izračunaj: $(x + 1)(x - 2)$.

NI 2007. za strukovne škole

- A) $x^2 - 2$, B) $x^2 - x - 2$, C) $x^2 - 3x - 2$, D) $x^2 + x - 2$.

31. Skraćivanjem izraza $\frac{9a^2 - 4}{6a + 4}$ dobivamo:

NI 2006. za OJK gimnazije

- A) $\frac{3a}{2}$, B) $\frac{3a+2}{2}$, C) $3a - 1$, D) $\frac{3a-2}{2}$.

32. Koliki je rezultat oduzimanja $3 - \frac{1+2a}{a}$?

PM 2009.

- A) $\frac{a-1}{a}$ B) $\frac{a+1}{a}$ C) $\frac{5a-1}{a}$ D) $\frac{5a+1}{a}$

33. Koji je rezultat oduzimanja $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = ?$

PI 2009.

- A) $\frac{a-b}{ab}$ B) $\frac{b-a}{ab}$ C) $\frac{1}{a-b}$ D) $\frac{1}{b-a}$

34. $\frac{1}{ab} - \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} =$

- A) $\frac{-a+b+c}{abc}$, B) $\frac{a-b+c}{abc}$, C) $\frac{a+b-c}{abc}$, D) $\frac{-a-b+c}{abc}$.

NI 2008.

35. $\frac{1}{a-3} - \frac{6}{a^2-9} =$

- A) $\frac{-5}{a^2+a-12}$, B) $\frac{a-9}{a^2-9}$, C) $\frac{1}{a^2-9}$, D) $\frac{1}{a+3}$

NI 2007. za strukovne škole

36. Čemu je jednak izraz $(a^3 + 2)^2$?

- A) $a^6 + 4a^3 + 4$ B) $a^6 + 2a^3 + 4$ C) $a^5 + 4a^3 + 4$ D) $a^5 + 2a^3 + 4$

DM, jesen 2010.

37. Koji je rezultat sređivanja izraza $x(5-2x) + 2x^2 - 9$?

- A) $2x^2 + 3x - 9$ B) $4x^2 + 5x - 9$ C) $3x - 9$ D) $5x - 9$

DM, jesen 2010.

38. Koji je rezultat dijeljenja $\left(\frac{3a-b}{b^2} + \frac{1}{b}\right) : \frac{6a}{b}$, za $a \neq 0, b \neq 0$?

- A) $\frac{2}{a}$ B) $\frac{2}{b}$ C) $\frac{1}{2a}$ D) $\frac{1}{2b}$

DM, jesen 2010.

39. Čemu je jednak izraz $\left(\frac{3a+1}{3}\right)^2$?

- A) $\frac{3a^2 + 6a + 1}{9}$ B) $\frac{9a^2 + 6a + 1}{9}$ C) $\frac{9a^2 + 3a + 1}{3}$ D) $\frac{3a^2 + 3a + 1}{3}$

DM, ljeto 2010.

40. Koji je rezultat oduzimanja $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$, za $x \neq \pm 2$?

- A) $\frac{1}{x+2}$ B) $\frac{2x-1}{x+2}$ C) $\frac{1}{x-2}$ D) $\frac{1}{x^2-4}$

DM, ljeto 2010.

41. $(2x-3)^2 =$ _____

NI 2008.

42. $(x-4)^2 =$ _____

NI 2007. za strukovne škole

43. Pomnožite i pojednostavite izraz $(x-4)(3+x)$.

PI 2009.

44. Luka je dobio 21 bod od mogućih 35 na ispitu iz matematike.

PI 2009.

Koliki je postotak ispitu Luka riješio?

- A) 14 % B) 21 % C) 40 % D) 60 %

45. Na telefonskoj kartici od 50 impulsa iskorišteno je 82 %.

NI 2008.

Koliko je impulsa neiskorišteno?

- A) 18 B) 10 % C) 9 D) 8 %

46. Ruksak je stajao 300 kn.

NI 2007. za strukovne škole

Damir ga je kupio na sniženju od 20 % i platio:

- A) 280 kn, B) 240 kn, C) 150 kn, D) 120 kn.

47. Na CD-u kapacitet 700 Mb snimljeni su sadržaji od 139 Mb i 435 Mb.

PM 2009.

Koliki je postotak CD-a iskorišten?

- A) 62.14 % B) 82 % C) 19.28 % D) 18 %

48. U Republici Hrvatskoj 2004. godine rođeno je 20 875 dječaka.

DM, jesen 2010.

Godine 2005. rođeno je 4,19 % više dječaka nego 2004. godine.

Koliko je dječaka rođeno 2005. godine?

- A) 20 964 B) 21 750 C) 24 875 D) 29 626

49. Ana je pročitala $\frac{13}{17}$, Nina $\frac{7}{9}$, a Petra 77 % iste knjige.

NI 2007. za strukovne škole

Tko je pročitao najviše, a tko najmanje?

50. Izračunajte 17 % od 250.

PI 2009.

51. Nakon sniženja od 40 %, cijena robe je 105 kuna.

PM 2009.

Kolika je cijena robe prije sniženja? Za koliko je kuna cijena smanjena?

Odgovor: Cijena prije sniženja iznosila je _____ kn.

Cijena je smanjena za _____ kn.

52. Koliko je 23 % od 4 356?

NI 2008.

53. Izračunaj broj od kojeg 11 % iznosi 35,2.

DM, jesen 2010.

54. Ispit iz matematike donosi ukupno 60 bodova.

DM, jesen 2010.

Mjerila za pozitivne ocjene izražene su postotkom ostvarenih bodova i prikazana tablicom.

Ocjena	Dovoljan (2)	Dobar (3)	Vrlo dobar (4)	Odličan (5)
Ostvareni postotak bodova (%)	51 – 64	65 – 79	80 – 89	90 – 100

Koju će ocjenu dobiti Jakov ako je na ispitu postigao 41 bod?

Marti je 1 bod nedostajao za ocjenu odličan (5). Koliko je bodova Marta postigla na ispitu?

55. Za 120 kn mogle su se kupiti dvije čokolade više nego nakon njihova poskupljenja od 25 %.

DM, ljetno 2010.

a) Koliko se čokolada moglo kupiti prije poskupljenja?

b) Kolika je cijena jedne čokolade nakon poskupljenja?

56. Izračunaj broj od kojega 8 % iznosi 6,4.

DM, ljetno 2010.

57. Stranice pravokutnika na zemljovidu mjerila $1 : 50\ 000$ iznose 1,5 cm i 2 cm.

PM 2009.

Kolika je površina koju taj pravokutnik predočuje u prirodi?

- A) $150\ 000 \text{ m}^2$ B) $300\ 000 \text{ m}^2$ C) $600\ 000 \text{ m}^2$ D) $750\ 000 \text{ m}^2$

58. Ako je $9x + 3y - 4 = 0$, koliko je y ?

PM 2009.

- A) $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ B) $y = -3x + \frac{4}{3}$ C) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ D) $y = 3x - \frac{4}{3}$

59. Čemu je jednak y ako je $x - y - 3 = 0$?

PI 2009.

- A) $y = -x - 3$ B) $y = -x + 3$ C) $y = x - 3$ D) $y = x + 3$

60. Ako je $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$, tada je y jednako:

NI 2008.

- A) $y = -\frac{2}{3}x + 2$, B) $y = \frac{2}{3}x - 2$, C) $y = -\frac{3}{2}x + 2$, D) $y = \frac{3}{2}x - 2$.

61. Ako je $x - y - 3 = 0$, tada je y jednako:

- A) $y = -x - 3$, B) $y = -x + 3$, C) $y = x - 3$, D) $y = x + 3$.

NI 2007. za strukovne škole

62. Ako je $P = 10$ i ako je $P = \frac{a \cdot v}{2}$, tada je $a \cdot v$ jednako:

- A) $\frac{1}{5}$, B) 5, C) 12, D) 20.

NI 2007. za strukovne škole

63. Ako je $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$, tada je v :

- A) $v = \frac{2P}{a-c}$, B) $v = \frac{2P}{a+c}$, C) $v = \frac{a+c}{2P}$, D) $v = \frac{2P-a}{c}$.

NI 2006. za OJK gimnazije

64. U dječjoj kasici bile su ukupno 132 kune u kovanicama od 5 kuna,

2 kune i 50 lipa. Kovanica od 2 kune bilo je dvostruko više nego kovanica od 5 kuna, a kovanica od 50 lipa bilo je tri puta više nego kovanica od 2 kune.

Koliko je u toj kasici bilo kovanica od 2 kune?

DM, jesen 2010.

- A) 22 B) 33 C) 44 D) 55

65. Ako je $s = \frac{a+b+c}{2}$, čemu je jednako a ?

DM, ljetno 2010.

- A) $a = \frac{s-b-c}{2}$ B) $a = 2(s-b-c)$ C) $a = 2s-b-c$ D) $a = 2s + \frac{b+c}{2}$

66. Ako je $kx + l = 0$ i $x \neq 0$, čemu je jednako k ?

DM, jesen 2010.

- A) $k = -l + x$, B) $k = -l - x$, C) $k = -\frac{x}{l}$, D) $k = -\frac{l}{x}$.

67. Ana, Cvita i Ivan zajedno su igrali novčanu nagradnu igru.

PM 2009.

Dogovorili su se o podjeli nagrade ako je osvoje. Ana će dobiti dvije petine nagrade, trećinu ostatka dobit će Cvita, a sve ostalo pripasti će Ivanu.

a) Koliki će dio nagrade dobiti Cvita? Odgovor napišite u obliku razlomka.

b) Koliki će postotak nagrade pripasti Ivanu?

68. Filip je 3 kg jabuka platio 16 kuna i 50 lipa. Koliko će platiti za 8 kg jabuka? **PM 2009.**

69. Cijena mandarina proporcionalna je njihovoj masi. Dopunite sljedeću tablicu. **PI 2009.**

Masa	3 kg	2.5 kg
Cijena	13.5 kn	56.25 kn

70. Za 13 m^3 vode treba platiti 127.27 kn. Koliko treba platiti 10 m^3 vode?

NI 2008.

71. Slitina od koje se izrađuje kovanica od 50 lipa sastoji se od nikla i željeza.

NI 2008.

Omjer nikla prema željezu je 1:19. Masa kovanice od 50 lipa je 3.65 g.

Koliko je grama željeza potrebno za izradbu jedne kovanice od 50 lipa?

(Rezultat ne zaokružujte.)

72. Omjer brašna i šećera u kolaču je 5 : 2. U kolač smo stavili 150 g šećara. **DM, jesen 2010.**

Koliko ćemo staviti grama brašna?

73. Sljedeća tablica povezuje novčane iznose izražene eurima i kunama. **DM, jesen 2010.**

Upišite vrijednosti koje nedostaju.

EURO (EUR)	1	256.78
KUNA (HRK)	7.4456	1 000

74. Veza između kilometara i milja dana je formulom $y = 1.609 x$, u kojoj y označuje kilometre, a x milje.

DM, jesen 2010.

Koliko je kilometra 12.3 milja? _____

Koliko je milja 100 km? _____

75. Omjer šećera i maslaca u kolaču je $4 : 3$. U kolač smo stavili 15 dag maslaca. Koliko ćemo staviti dekagrama šećera?

DM, ljetno 2010.

76. Sljedeća tablica povezuje duljine izražene stopama i metrima. Popunite vrijednosti koje nedostaju.

DM, ljetno 2010.

Stopa (foot)	1	5.8
Metar (m)	0.3048	1.40208

77. Svetarska sonda putuje prema planetu udaljenome $4 \cdot 10^9$ km od Zemlje.

PM 2009.

Nakon što je prošla četvrtinu puta, izgubila je vezu s bazom na Zemlji.

Veza je ponovno uspostavljena na udaljenosti $1.3 \cdot 10^9$ km od Zemlje.

Koliko je kilometara sonda preletjela bez veze s bazom?

- A) $3 \cdot 10^8$ km B) $3 \cdot 10^7$ km C) 130 km D) 13 km

78. Za $n = 3$ vrijednost izraza $2\ 000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$ jednaka je:

NI 2008.

- A) 9 261 000 000, B) 432 000, C) 2 315.25, D) 2 000.25.

79. Rabeći džepno računalo prema potrebi, odredite koji je od navedenih brojeva najveći?

NI 2008.

- A) $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ B) $14.1 \cdot 10^{-1}$ C) $|- \frac{7}{5}|$ D) $\frac{3}{2} - \frac{1}{12}$

80. U javnoj garaži parkiranje se naplaćuje ovako: prvih pola sata 5 kuna, drugih pola sata 4 kune, a svaki sljedeći započeti sat po 7 kuna.

PM 2009.

Vozilo je bilo parkirano od 10 : 35 do 15 : 50.

Koliko je kuna parkiranje platio njegov vlasnik?

- A) 23 kn B) 30 kn C) 37 kn D) 44 kn

81. $18^\circ 12'$ jednako je:

PM 2009.

- A) 18.1° , B) 18.2° , C) 18.3° , D) 18.6° .

82. $36^\circ 36'$ jednako je:

NI 2008.

- A) 36.3° , B) 36.36° , C) 36.6° , D) 36.72° .

83. Koliko je 12.5 sati?

PI 2009.

- A) 12 sati i 5 minuta B) 12 sati i 15 minuta C) 12 sati i 30 minuta D) 12 sati i 50 minuta

84. 100 m^2 jednako je:

NI 2007. za strukovne škole

- A) 10^6 cm^2 , B) 10^4 cm^2 , C) 10^{-4} cm^2 , D) 10^{-6} cm^2 .

85. Jedna astronomска единица iznosi $1.49 \cdot 10^8$ km. To je: **NI 2008.**
 A) 149 miljardi km, B) 14.9 miljardi km, C) 149 milijuna km, D) 14.9 milijuna km.

86. Dnevna potreba hrane za odraslu osobu iznosi 250 g ugljikohidrata i 45 g bjelančevine. Kilogram neke hrane A ima 10 g ugljikohidrata i 160 g bjelančevine, a kilogram neke hrane B ima 220 g ugljikohidrata i 20 g bjelančevina. Nina je pojela najmanju količinu hrane A i hrane B tako da njezine dnevne potrebe za ugljikohidratima i bjelančevinama budu zadovoljene. Koliko je kilograma hrane B Nina pojela? **PI 2009.**
 A) 0.78 kg B) 0.99 kg C) 1.06 kg D) 1.13 kg

87. Koliko je trajao teniski meč ako je počeo u 10 sati i 45 minuta ujutro i bez prestanka trajao do 14 sati i 12 minuta istoga dana? **DM, jesen 2010.**
 A) 3 sata i 13 minuta B) 3 sat i 17 minuta C) 3 sata i 27 minuta D) 3 sata i 33 minute

88. Prvi set odbojkaške utakmice trajao je 18 minuta. **DM, ljeto 2010.**
 U koliko je sati utakmica započela ako je prvi set završio u 18 sati i 5 minuta?
 A) u 17 sati i 43 minute B) u 17 sati i 47 minuta
 C) u 17 sati i 53 minute D) u 17 sati i 57 minuta

89. Masa 256 jednakih olovaka iznosi 4.24 kg. **DM, ljeto 2010.**
 Kolika je masa 20 takvih olovaka?
 A) 3.3125 g B) 33.115 g C) 331.25 g D) 3312.5 g

90. Brod je isplovio iz luke. Najprije je 2 sata plovio prema istoku brzinom 12 km/h, a onda se okrenuo prema sjeveru i 5 sati plovio brzinom 14 km/h. Koliko je nakon tih 7 sati plovidbe bio udaljen od luke? **DM, ljeto 2010.**
 A) 69 km B) 74 km C) 79 km D) 84 km

Viša razina

1. Koliko je prirodnih brojeva u intervalu $\left(2, \frac{11}{2}\right]$? **NI 2006. za gimnazije**
 A) 2, B) 3, C) 4, D) 5.

2. Koja je od navedenih tvrdnji istinita? **DM, jesen 2010.**
 A) Svaki kompleksan broj ujedno je i realni broj.
 B) Svaki racionalan broj ujedno je i cijeli broj.
 C) Svaki racionalan broj ujedno je i realni broj.
 D) Svaki kompleksan broj ujedno je i iracionalni broj.

3. Neka je $n \geq 9$ prirodan broj. U ovisnosti o n , odredite koji je od ovih brojeva najveći: **NI 2006. za PM gimnazije**

$$A = \frac{9}{n}, \quad B = \frac{n}{9}, \quad C = \frac{n+1}{9}, \quad D = \frac{9}{n-1}.$$

4. Na kojoj je slici prikazan kompleksni broj $-2 + i$? **NI 2007. za PM gimnazije**
 A), B), C), D).

5. Kompleksan broj $\frac{2+3i}{3-2i}$ jednak je :

- A) $-i$, B) i , C) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2}i$, D) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i$

PM 2009.

6. $\frac{6-4i}{1+i}$ jednako je:

- A) $1-5i$, B) $5+i$, C) $1-10i$, D) $-10i$.

NI 2007. za gimnazije

7. Svi brojevi koji imaju isti modul kao broj $z = 1 + i\sqrt{3}$ u koordinatnom sustavu nalaze se:

- A) u I kvadrantu, B) na imaginarnoj osi, C) na realnoj osi,

NI 2007. za gimnazije

- D) na kružnici.

8. Kolika je vrijednost izraza $\frac{1+4.5 \cdot \frac{1}{3}}{\left(2 \cdot 0.3 - \frac{8}{3}\right) \cdot 0.125}$?

PI 2009.

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 7

9. Koja je od navedenih tvrdnji istinita?

DM, Ijeto 2010.

- A) $-1.5 \in \mathbb{Z}$ B) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ C) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ D) $\pi \in \mathbb{N}$

10. Koliki je modul (apsolutna vrijednost) kompleksnog broja $(1-i)^5$?

DM, Ijeto 2010.

- A) $\sqrt{8}$ B) $\sqrt{32}$ C) 8 D) 32

11. Kompleksni broj $(-1 + 2i)^3$ zapišite u obliku $a + bi$.

PI 2009.

12. Odredite $a, b \in \mathbb{R}$ tako da brojevi $z = a - 2 + (b+3)i$ i $w = \frac{1}{2}a + 3bi$ budu konjugirano kompleksni.

NI 2008.

13. Izračunajte $\left(1.5 - \frac{8}{15} \cdot \left(3 \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)\right) : 0.5$.

PM 2009.

14. a) Neka je $z = 3 + 2i$. Koliko iznosi $(iz\bar{z})^4$?

DM, Ijeto 2010.

b) Kompleksan broj $z = 2i$ prikažite u trigonometrijskom obliku.

15. a) Kompleksan broj $z = -3i$ prikažite u trigonometrijskom obliku.

DM, jesen 2010.

b) Odredite realni dio kompleksnoga broja $(1+i)^8$.

16. Koja je vrijednost razlomka $\frac{0.001^2}{100 \cdot 0.1}$?

PM 2009.

- A) 10^{-9} B) 10^{-7} C) 10^{-6} D) 10^{-4}

17. Jedna tableta sadržava $5.2 \cdot 10^7$ korisnih bakterija.

Dijete od deset godina smije popiti najviše dvije takve tablete tri puta na dan.

Koliko najviše tih bakterija dijete smije unijeti u organizam u jednome danu?

PI 2009.

- A) $5.20 \cdot 10^8$ B) $1.04 \cdot 10^8$ C) $1.56 \cdot 10^8$ D) $3.12 \cdot 10^8$

18. $5 \cdot 3^n - 3^{n+1}$ jednako je:

NI 2006. za PM gimnazije

- A) $2 \cdot 3^n$, B) $4 \cdot 3^n$, C) $8 \cdot 3^n$, D) $12 \cdot 3^n$.

19. Izračunajte $36^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 9^{-\frac{1}{2}}$ i napiši rezultat kao razlomak.

DM, ljeto 2010.

20. $1 - |-3| =$

NI 2007. za gimnazije

- A) 4, B) 2, C) -2, D) -4.

21. Tvrđnja „realan broj x udaljen je od broja 2 za 5“

zapisuje se izrazom:

NI 2006. za PM gimnazije

- A) $|x - 2| = 5$, B) $|x + 2| = 5$, C) $|x + 5| = 2$, D) $|x - 5| = 2$.

22. Koliko je $|a - b|$, ako je $a < b$?

DM, jesen 2010.

- A) $a - b$ B) $-a + b$ C) $-a - b$ D) $a + b$

23. Za sve realne brojeve x i y vrijedi:

NI 2007. za gimnazije

- A) $y - x = -(x + y)$, B) $y - x = -(x - y)$, C) $y - x = -(-y - x)$, D) $y - x = -(y - x)$.

24. Koja od sljedećih tvrdnji nije uvijek točna za

realne brojeve a i b ?

NI 2006. za PM gimnazije

- A) $a - b = -(b - a)$ B) $(a - b)^2 = (b - a)^2$ C) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$ D) $(a + b)^2 = (-a - b)^2$

25. Razlomak $\frac{1-x^3y^3}{x^{-2}y^{-2}+x^{-1}y^{-1}+1}$ jednaka je:

PM 2009.

- A) -1, B) $\frac{1+xy}{xy}$, C) xy , D) $\frac{xy-1}{xy}$.

26. Koja je vrijednost izraza $\frac{a^{-3}+a^{-2}}{a^{-2}-1} : \frac{1}{a^2}$?

PI 2009.

- A) $\frac{a}{1-a}$ B) $\frac{a}{a-1}$ C) $\frac{a-1}{a}$ D) $\frac{1-a}{a}$.

27. $\left(6 - 3a + \frac{18a^2}{6+3a}\right) : \frac{9a^4 - 144}{6a^3 + 48} =$

NI 2008.

- A) $\frac{2(a^2 - 2a + 4)}{a^2 - 4}$, B) $\frac{2(a^2 + 2a + 4)}{a^2 - 4}$, C) $\frac{2(a-2)}{a+2}$, D) $\frac{2(a+2)}{a-2}$.

28. $\frac{1}{a-3} - \frac{6}{a^2-9} =$

NI 2007. za gimnazije

- A) $\frac{-5}{a^2+a-12}$, B) $\frac{a-9}{a^2-9}$, C) $\frac{1}{a^2-9}$, D) $\frac{1}{a+3}$.

29. Što je rezultat sređivanja izraza $\left(\frac{1+a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}}{a} - \frac{1}{a-1}\right) : \frac{a}{1-a^3}$

za $a \neq 0, 1$?

DM, ljeto 2010.

- A) $\frac{a^2+a+1}{a^5}$ B) $\frac{a^2-a+1}{a^5}$ C) $\frac{a^5}{a^2+a+1}$ D) $\frac{a^5}{a^2-a+1}$

30. Što je od navedenoga točno za broj $a = 1 + \sqrt{5}$?

DM, jesen 2010.

- A) $a^2 + 2a + 4 = 0$ B) $a^2 + 2a - 4 = 0$ C) $a^2 - 2a + 4 = 0$ D) $a^2 - 2a - 4 = 0$

31. Koji je rezultat sređivanja izraza $\left[1 + \frac{4a}{(2a-1)^2}\right] : \frac{16a^4 - 1}{2a+1}$ za $a \neq \pm \frac{1}{2}$? **DM, jesen 2010.**

- A) $\frac{1}{(2a-1)^3}$ B) $\frac{1}{(2a-1)^2(2a+1)}$ C) $\frac{2a+1}{(2a-1)^3}$ D) $\left(\frac{2a+1}{2a-1}\right)^2$

32. Popunite: $(3 + \underline{\quad})^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} + 4x^2$. **NI 2007. za gimnazije**

33. Koliko iznosi član razvoja $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ koji ne sadržava x ?

Pri rješavanju zadatka možete rabiti formulu $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ **DM, jesen 2010.**

34. Plin je poskupio 15 %. Koliko se posto treba smanjiti cijena plina da bi mu konačna cijena bila 5.5 % veća od cijene prije poskupljenja? **PI 2009.**

- A) 7.80 % B) 8.26 % C) 8.96 % D) 9.50 %

35. U plesnu se grupu upisalo 120 učenika. Mladići čine 20 % grupe. Naknadno su se upisale 2 djevojke i 18 mladića.

Koliki je sada postotak mladića u plesnoj grupi? **PM 2009.**

- A) 20 % B) 28 % C) 30 % D) 38 %

36. Cijena iznajmljivanja bicikla najprije je povećana 25 %, pa snižena 22 %.

Što treba učiniti s cijenom da postane jednaka početnoj? **NI 2008.**

- A) povećati je 3 % B) sniziti je 3 % C) povećati je 2.56 % D) sniziti je 2.56 %

37. Ruksak je stajao 300 kuna. Damir ga je kupio na sniženju i platio 240 kuna. Sniženje je:

- A) 40 %, B) 30 %, C) 20 %, D) 10 %.

NI 2007. za gimnazije

38. Masa Jupitera približno je jednaka $2 \cdot 10^{27}$ kg, a masa Zemlje $6 \cdot 10^{24}$ kg. Masa Zemlje je:

NI 2006. za PM gimnazije

- A) 0.03 % mase Jupitera B) 0.3 % mase Jupitera,
C) 3 % mase Jupitera, D) 3.3 % mase Jupitera.

39. Marija je visoka m centimetara, a Nives n centimetara.

Izraz $n = m + 0.15m$ znači:

NI 2006. za PM gimnazije

- A) Nives je viša od Marije za 0.15 cm, B) Nives je viša od Marije za 15 %,
C) Marija je viša od Nives za 15 cm, D) Marija je viša od Nives za 0.15 %.

40. Ana je pročitala $\frac{13}{17}$, Nina $\frac{7}{9}$, a Petra 77 % iste knjige.

Tko je pročitao najviše, a tko najmanje? **NI 2007. za gimnazije**

41. Povećanje troškova života u travnju u odnosu prema ožujku je 4.2 %, a u svibnju u usporedbi s travnjem 3.5 %. Koliki je postotak povećanja troškova života u usporedbi s ožujkom?

DM, ljeto 2010.

Troškovi života u listopadu su 3.8 % veći nego u rujnu. Za koliko bi se posto morali smanjiti troškovi života u studenome da bi se vratili na stanje iz rujna?

42. U jezeru je otkriveno 10 grama algi za koje se zna da utječu na porast populacije raka. Naseobina algi povećava se 15 % tjedno.

Populacija raka u jezeru počinje naglo rasti ako je u njemu 10 000 g algi. **DM, jesen 2010.**

a) Koliko će grama algi biti u jezeru tjedan dana nakon što su otkrivene?

b) Koliko će grama algi biti u jezeru nakon tri tjedna?

c) U kojem će tjednu populacija raka početi naglo rasti?

43. Mjere kutova trokuta su u omjeru 1 : 10 : 4.

Najduža stranica ima duljinu 10 cm. Kolika je tada duljina najkratke stranice zaokružene na jednu decimalnu?

PM 2009.

- A) 1.2 cm B) 1.6 cm C) 2.0 cm D) 2.4 cm

44. Za koliko se vremena pri rotaciji oko svoje osi

Zemlja okreće za 45° .

NI 2007. za gimnazije

- A) za 3 sata B) za 4 sata i 45 minuta C) za 6 sati D) za 9 sati

45. Broj a za 3 je veći od pozitivnog broja b . Njihov je omjer $5 : 3$. Tada je a jednak: **NI 2008.**

- A) $\frac{3}{2}$, B) $\frac{9}{2}$, C) $\frac{15}{2}$, D) $\frac{21}{2}$.

46. Ako je $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$, tada je v :

NI 2006. za PM gimnazije

- A) $v = \frac{2P}{a-c}$, B) $v = \frac{2p}{a+c}$, C) $v = \frac{a+c}{2P}$, D) $v = \frac{2P-a}{c}$.

47. Koji izraz predviđa tvrdnju *Broj a pri djeljenju sa 7 daje količnik b i ostatak 5.*

NI 2007. za gimnazije

- A) $a = 7b - 5$ B) $a = 7b + 5$ C) $7a = b + 5$ D) $7a = b - 5$

48. Ako je $P = 6$ i ako je $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$, tada je $a + c$ jednako: **NI 2007. za gimnazije**

- A) $\frac{3}{v}$, B) $\frac{12}{v}$, C) $3 - v$, D) $12 - v$.

49. Odredite h iz formule $S = r\pi(r + 2h)$.

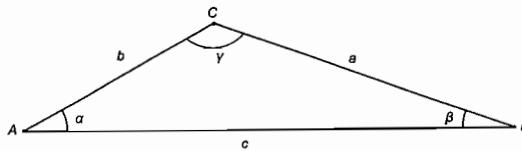
PM 2009.

- A) $h = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{r\pi} - r\right)$, B) $h = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{r\pi} + r\right)$, C) $h = \frac{1}{2}\left(\frac{r\pi}{S} - r\right)$, D) $h = \frac{1}{2}\left(\frac{r\pi}{S} + r\right)$.

50. U trokutu ABC sa slike omjer kutova je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 2 : 13$.

Za duljine stranica vrijedi $a - b = 3$ cm.

DM, ljetno 2010.



Kolika je duljina najkratke stranice toga trokuta?

- A) 2.19 cm B) 4.23 cm C) 6.49 cm D) 8.92 cm

51. Jedan gigabajt ima 1 024 megabajta. Na jedan CD stane 700 megabajta podataka. Koliko je najmanje CD-ova potrebno da bi se pohranilo 6 gigabajta podataka?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 9

DM, jesen 2010.

52. Iva i Matej dijele iznos od 24 464 kn u omjeru 3 : 5. Koliko je kuna Iva dobila manje od Mateja?

- A) 3 262 kn B) 4 892.80 kn C) 6 116 kn D) 9 785.60 kn

DM, jesen 2010.

53. Izrazite a iz $p = ab + (a + b)v$.

NI 2008.

54. Odredite s ako je $t = \frac{s+r}{s-r}$ ($s \neq r, t \neq 1$).

PI 2009.

55. Čemu je jednak b ako je $a = \frac{b-c}{\cos \varphi}$ i $\cos \varphi \neq 0$?

DM, jesen 2010.

56. Rabeći džepno računalo, odredite koji je od navedenih brojeva najveći.

NI 2008.

- A) $\log_5 8$ B) $\sqrt[3]{380}$ C) $\operatorname{tg}(78^\circ)$ D) 1.22^2

57. 100 m^2 jednak je:

NI 2007. za gimnazije

- A) 10^6 cm^2 , B) 10^4 cm^2 , C) 10^{-4} cm^2 , D) 10^{-6} cm^2 .

58. Jedna astronomска jedinica iznosi $1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$. To je:

NI 2008.

- A) 149 milijardi km, B) 14.9 milijardi km, C) 149 milijuna km, D) 14.9 milijuna km.

59. U 100 ml sirupa za snižavanje temperature sadržano je

2.4 g paracetamola. Koliko miligrama paracetamola ima u 5 ml sirupa?

PM 2009.

- A) 12 mg B) 24 mg C) 120 mg D) 240 mg

60. Mjera kuta je 162° . Koliko je to radijana?

DM, ljetno 2010.

- A) $\frac{9\pi}{10}$, B) $\frac{10\pi}{9}$, C) $\frac{9\pi}{20}$, D) $\frac{20\pi}{9}$.

61. Mjera kuta je $\frac{7\pi}{10}$ radijana. Koliko je to stupnjeva?

DM, jesen 2010.

- A) 21° B) 63° C) 94° D) 126°

62. Ulaganjem $1 000 \text{ kn}$ u banku nakon n godina

dobiva se $1 000 \cdot \left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^n$ kuna.

PM 2009.

Koliki je iznos na računu nakon 5 godina?

Za koliko bi godina iznos od $1 000 \text{ kn}$ narastao na $10 000 \text{ kn}$?

63. Slitina od koje se izrađuje kovanica od 50 lipa sastoji se od nikla i željeza.

Omjer nikla prema željezu je $1 : 19$. Masa kovanice od 50 lipa je 3.65 g ,

njezin je promjer 20.5 mm , a gustoća slitine 6.912 g/cm^3 . Koliko je grama

željeza potrebno za izradbu jedne kovanice od 50 lipa (rezultat ne zaokružujte)?

KOI

• 2. FUNKCIJE

2.1. Pojam i zadavanje funkcije	91
2.2. Operacije s funkcijama	96
2.3. Linearna i kvadratna funkcija	101
2.4. Funkcija absolutne vrijednosti. Funkcija drugog korijena. Polinomi i racionalne funkcije	110
2.5. Eksponencijalna i logaritamska funkcija	117
2.6. Trigonometrijske funkcije	121
2.7. Nizovi	136
2.8. Derivacija funkcije	141
2.9. Funkcije – zadaci na vježbu	149
Zadaci višestrukog izbora	149
Zadaci kratkih odgovora	173
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	184
Osnovna razina	184
Viša razina	191

• 2.1. Pojam i zadavanje funkcije •

Zadaci višestrukog izbora

Primjer 1.

Za funkciju $f(x) = f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ nađimo $f(3)$.

- A) 1 B) 3 C) 4 D) 8

Rješenje: C.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \\&= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}{2} = \frac{8}{2} = 4\end{aligned}$$

► Primjer 2.

Za funkciju $f(x) = \frac{\sin 2x}{1+\cos x}$ nađimo $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

- A) $-\sqrt{2}$ B) $2 - \sqrt{2}$ C) $2 + \sqrt{2}$ D) 2

Rješenje: B.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 2 - \sqrt{2}$$

Primjer 3.

Područje definicije funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2}$ jest:

- A) $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$, B) $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$, C) $\pm\sqrt{2}$, D) \mathbb{R} .

Rješenje: B.

U racionalnim funkcijama u nazivniku ne može biti 0, jer u tome slučaju dijelimo s 0 što nije definirano.

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2 \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Primjer 4.

Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ jest:

- A) $\{\pm 2\}$, B) \emptyset , C) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, D) \mathbb{R} .

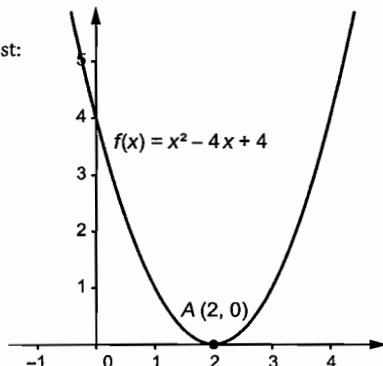
Rješenje: D.

Argument funkcije drugog korijena mora biti broj veći ili jednak nuli:

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0,$$

$$(x - 2)^2 \geq 0.$$

Ta jednakost vrijedi za bilo koji realni broj x , jer je kvadrat bilo kojeg realnog broja uvijek nenegativan realni broj.

**Primjer 5.**

Područje definicije funkcije $f(x) = \log \frac{x+3}{x}$ jest:

- A) \mathbb{R} , B) $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$, C) $(-3, 3)$, D) $(0, +\infty)$.

Rješenje: B.

Domena logaritamske funkcije skup je pozitivnih realnih brojeva. Stoga izraz pod logaritmom mora biti strogo veći od nule, tj. mora vrijediti nejednakost:

$$\frac{x+3}{x} > 0.$$

I. slučaj

$$x+3 > 0; \quad x > -3$$

$$x > 0$$

$$x \in (0, +\infty)$$

II. slučaj

$$x+3 < 0; \quad x < -3$$

$$x < 0$$

$$x \in (-\infty, -3)$$

Rješenje zadatka je unija rješenja prvoga i drugog slučaja: $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

viša razina (A)

Primjer 6.

Ako je $f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, a $\cos x = 1$, onda je $f(x)$ jednako:

- A) 1, B) 0, C) 2, D) -1.

Rješenje: A.

$$\cos x = 1$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - 1} = 0$$

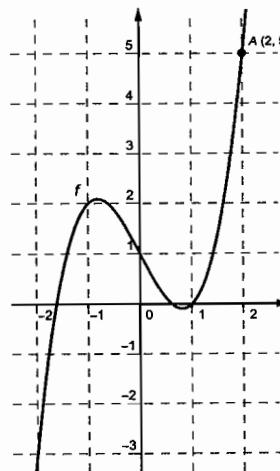
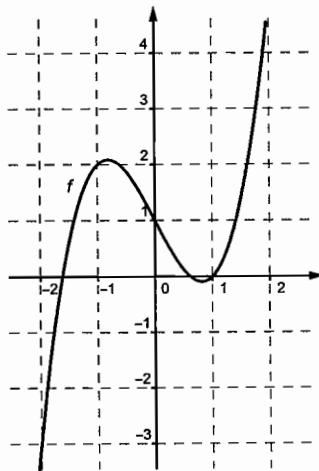
$$f(x) = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{0}{1} = 1$$

viša razina (A)

Primjer 7.

Funkcija je zadana grafički (vidjeti sliku).

Rješenje: C.



Vrijednost funkcije za $x = 2$ jest:

- A) -1, B) -3, C) 5, D) 0.

Primjer 8.

Ako je $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x+7}{3x}$, onda je $f(x)$ jednako:

- A) $\frac{7x-2}{3}$, B) $\frac{3}{2+7x}$, C) $\frac{2+7x}{3}$, D) $\frac{1}{x}$.

Rješenje: C.

$$\frac{1}{x} = y \quad x = \frac{1}{y}$$

$$f(y) = \frac{2+7y}{3}$$

$$f(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} + 7}{3 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\frac{2}{x} + 7}{\frac{3}{x}} = \frac{\frac{2+7x}{x}}{\frac{3}{x}} = \frac{2+7x}{3}$$

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Koncentracija lijeka u pacijentovoj krvi t sati nakon injekcije lijeka opisana je funkcijom:

$$L(t) = \frac{\frac{3}{10} \cdot t}{t^2 + 2} \text{ mg/cm}^3.$$

Ako su pacijent liječili dali u 19:30 sati, kolika je koncentracija lijeka u krvi u 22:30 sati?

Rješenje:

Prošla su tri sata od davanja lijeka, pa računamo: $L(3) = \frac{\frac{3}{10} \cdot 3}{3^2 + 2} = \frac{\frac{9}{10}}{11} = \frac{9}{110} = 0.081 \text{ mg/cm}^3$.

Primjer 2.

Popunimo tablicu za funkciju $f(x) = 2\sin(\pi - x) - 1$.

x	π	$\frac{\pi}{2}$	2π	0	$3\frac{\pi}{2}$
$f(x)$					

Rješenje:

x	π	$\frac{\pi}{2}$	2π	0	$3\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	-1	1	-1	-1	-3

Primjer 3.

Funkcija je zadana kao: $f(x) = \begin{cases} \log_2 x; & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \\ \sin 2x - 1; & \frac{3\pi}{2} \leq x < +\infty \end{cases}$.

Izračunajmo: $f(4)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Rješenje:

$$f(4) = \log_2 4 = 2 \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) - 1 = \sin 3\pi - 1 = 0 - 1 = -1$$

Primjer 4.

Ispišimo tablicu vrijednosti funkcije $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ za x u segmentu od -1 do 1 uz prirast od $\frac{1}{4}$.

Rješenje:

x	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	0	$-\frac{175}{144}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{255}{16}$	nije definiran	$-\frac{255}{16}$	$-\frac{15}{4}$	$-\frac{175}{144}$	0

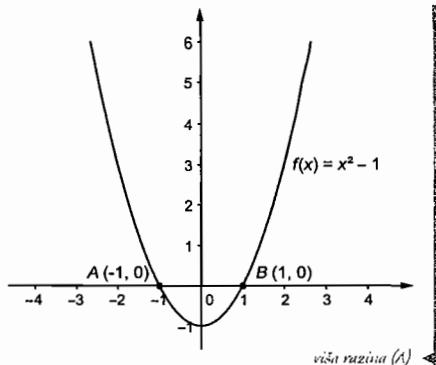
Primjer 5.

Na brojevnom pravcu označite područje definicije funkcije $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$.

Rješenje:

Domena logaritamske funkcije jest skup $\langle 0, +\infty \rangle$.

Dakle, $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ riješimo kvadratnu nejednadžbu grafički (vidjeti sliku).



viša razina (A)

Primjer 6.

Ako je $f\left(\frac{1}{x-1}\right) = x$, odredimo $f(3)$.

Rješenje:

$$y = \frac{1}{x-1} / (x-1), x \neq 1$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x \cdot y = 1 + y$$

$$x = \frac{1+y}{y} = 1 + \frac{1}{y}$$

$$f(3) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Primjer 7.

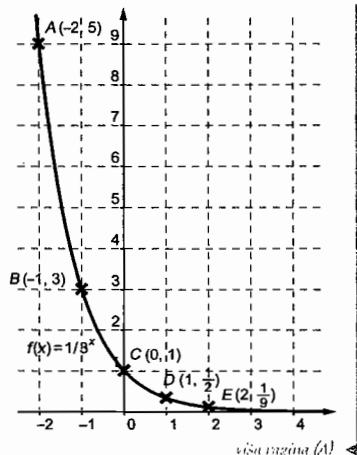
U koordinatni sustav smjestimo četiri točke

koje pripadaju grafu funkcije $f(x) = \frac{1}{3^x}$.

Rješenje:

x	1	-1	0	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	3	1	$\frac{1}{9}$

Rješenje je prikazano na slici.



viša razina (A)

Primjer 8.

Za $f(z) = 2 + z - 3z^2$ i $z = 1 - i$ odredimo $f(\bar{z})$.

Rješenje:

$$f(1+i) = 2 + 1 + i - 3 \cdot (1+i)^2 = 3 + i - 3 \cdot (1+2i+i^2) = 3 + i - 3 \cdot (2i) = 3 - 5i \quad \text{viša razina (A)}$$

2.2. Operacije s funkcijama

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Ako je $f(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1$ i $g(x) = -x^5 + 2x^3 + x^2 + 1$, onda je $f(x) + g(x)$ jednako:

- A) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 + x^2 + x$, B) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 + x$,
 C) $x^5 - 4x^4 + 5x^3$, D) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 + x^2$.

Rješenje: B.

$$\begin{aligned}f(x) + g(x) &= 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1 + (-x^5 + 2x^3 + x^2 + 1) \\&= 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 1 - x^5 + 2x^3 + x^2 + 1 \\&= x^5 - 4x^4 + 5x^3 + x\end{aligned}$$

Primjer 2.

Ako je $f(x) = x + 5$ i $g(x) = -x^2 + 5x - 2$, onda je $f(x) - g(x)$ jednako:

- A) $x^2 - 5x + 3$, B) $x^2 - 6x + 3$, C) $x^2 - 4x + 7$, D) $-x^2 + 6x + 3$.

Rješenje: C.

$$f(x) - g(x) = x + 5 - (-x^2 + 5x - 2) = x + 5 + x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 7$$

Primjer 3.

Ako je $f(x) = x^2 - 3x + 1$ i $g(x) = x - 2$, onda je $f(x) \cdot g(x)$ jednako:

- A) $x^3 - 5x^2 + 7x - 2$, B) $x^2 - 2x - 1$, C) $x^3 - x^2 + 7x - 2$, D) $x^3 + 3x - 2$.

Rješenje: A.

$$\begin{aligned}f(x) \cdot g(x) &= (x^2 - 3x + 1) \cdot (x - 2) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-2) - 3x \cdot x - 3x \cdot (-2) + x - 2 \\&= x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 6x + x - 2 = x^3 - 5x^2 + 7x - 2\end{aligned}$$

Primjer 4.

Ako je $f(x) = 4x^3 + 5x - 21$ i $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$, onda je $f(x) : g(x)$ jednako:

- A) $x - 2$, B) $2x - 3$, C) $x - 3$, D) $3x - 2$.

Rješenje: B.

$$f(x) : g(x) = (4x^3 + 5x - 21) : (2x^2 + 3x + 7) = 2x - 3$$

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 6x^2 + 14x \\ - 6x^2 - 9x - 21 \\ \hline - 6x^2 - 9x - 21 \\ \hline 0 \end{array}$$

Primjer 5.

Ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x - 12$ polinomom $g(x) = x - 2$ jednak je:

- A) 0, B) 12, C) $x - 2$, D) 4.

Rješenje: A.

$$f(x) : g(x) = (2x^3 - 4x^2 + 6x - 12) : (x - 2) = 2x^2 + 6$$

$$\begin{array}{r} \underline{2x^3 - 4x^2} \\ 0 + 6x - 12 \\ \underline{6x - 12} \\ 0 \end{array}$$

Primjer 6.

Ako je $f(x) = \frac{1}{x-1}$ i $g(x) = \frac{x^2-1}{2}$, onda je $(f \circ g)(-1)$ jednako:

- A) 2, B) $-\frac{1}{2}$, C) 1, D) -1.

Rješenje: D.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{x^2-1}{2}\right] = \frac{1}{\frac{x^2-1}{2}-1} = \frac{1}{\frac{x^2-1-2}{2}} = \frac{2}{x^2-3}$$

$$(f \circ g)(-1) = \frac{2}{(-1)^2-3} = \frac{2}{1-3} = \frac{2}{-2} = -1$$

višja razina (A)

Primjer 7.

Ako je $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ i $g(x) = \log_3 x^2$, onda je $(g \circ f)(2)$ jednako:

- A) 0, B) nema rješenja, C) 2, D) $\frac{1}{2}$.

Rješenje: C.

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left[\frac{1+x}{1-x}\right] = \log_3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = \log_3 \frac{1+2x+x^2}{1-2x+x^2}$$

$$(g \circ f)(2) = \log_3 \frac{1+2 \cdot 2 + 2^2}{1-2 \cdot 2 + 2^2} = \log_3 9 = 2$$

višja razina (B)

Primjer 8.

Polinom drugog stupnja zadovoljava jednakosti $f(-1) = 5$, $f(2) = 3$ i $f(0) = 2$. Slika tog polinoma je skup:

- A) $(0, +\infty)$, B) \mathbb{R} , C) $\left[\frac{215}{168}, +\infty\right)$, D) $\mathbb{R}/\{6\}$.

Rješenje: C.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a - b + c = 5$$

$$4a + 2b + c = 3$$

$$c = 2$$

$$a - b = 3 \rightarrow a = 3 + b$$

$$4a + 2b = 1$$

$$4 \cdot (3 + b) + 2b = 1$$

$$12 + 4b + 2b = 1$$

$$6b = -11$$

$$b = -\frac{11}{6}$$

$$a = 3 - \frac{11}{6}$$

$$a = \frac{7}{6}$$

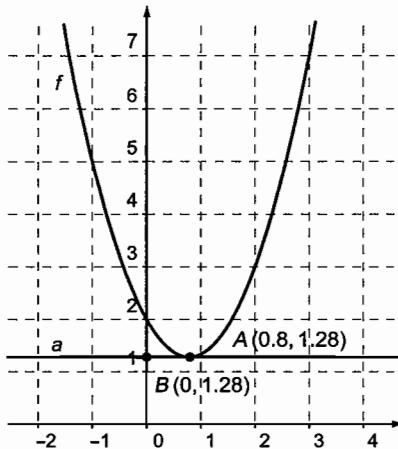
Da bismo odredili sliku funkcije potrebno je naći njezin minimum.

$$f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + 2$$

Taj je minimum jednak:

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot \frac{7}{6} \cdot 2 - \left(-\frac{11}{6}\right)^2}{4 \cdot \frac{7}{6}} = \\ = \frac{\frac{28}{3} - \frac{121}{36}}{\frac{14}{3}} = \frac{\frac{336 - 121}{36}}{\frac{14}{3}} = \frac{\frac{215}{36}}{\frac{14}{3}} = \frac{215}{168}$$

Slika funkcije f jest: $\left[\frac{215}{168}, +\infty\right)$



Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Za polinome $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ i $g(x) = x^2 - x + 2$ odredimo:

- a) $f + g$, b) $f - g$, c) $f \cdot g$, d) $f : g$, e) $f \circ g$, f) $g \circ f$

Rješenje:

a) $(f + g)(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5 + x^2 - x + 2 = x^3 - x^2 - 3$

b) $(f - g)(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5 - (x^2 - x + 2) = x^3 - 2x^2 + x - 5 - x^2 + x - 2 = x^3 - 3x^2 + 2x - 7$

c) $(f \cdot g)(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 5) \cdot (x^2 - x + 2) = \\ = x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x^3 - x^2 + 2x - 5x^2 + 5x - 10 = \\ = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 7x - 10$

d) $(f : g)(x) = (x^3 - 2x^2 + x - 5) : (x^2 - x + 2) = x - 1$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + 2x \\ \underline{-x^2 - x - 5} \\ -x^2 + x - 2 \\ \hline -2x - 3 \end{array}$$

e) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x^2 - x + 2] = (x^2 - x + 2)^3 - 2 \cdot (x^2 - x + 2)^2 + x^2 - x + 2 - 5 = \\ = (x^2 - x)^3 + 3 \cdot (x^2 - x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (x^2 - x) \cdot 4 + 8 - 2 \cdot [(x^2 - x)^2 + 2 \cdot (x^2 - x) \cdot 2 + 4] + x^2 - x - 3 = \\ = x^6 - 3x^4 \cdot x + 3x^2 \cdot x^2 - x^3 + 3 \cdot (x^4 - 2x^2 \cdot x + x^2) \cdot 2 + 12x^2 - 12x + 8 - \\ - 2 \cdot [x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x^2 - 4x + 4] + x^2 - x - 3 = \\ = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 6x^4 - 12x^3 + 6x^2 + 12x^2 - 12x + 8 - 2x^4 + 4x^3 - \\ - 2x^2 - 8x^2 + 8x - 8 + x^2 - x - 3 = \\ = x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 5x + 5$

$$\begin{aligned}
 f) (g \circ f)(x) &= g[f(x)] = g[x^3 - 2x^2 + x - 5] \\
 &= (x^3 - 2x^2 + x - 5)^2 - (x^3 - 2x^2 + x - 5) + 2 \\
 &= (x^3 - 2x^2)^2 + 2 \cdot (x^3 - 2x^2) \cdot (x - 5) + (x - 5)^2 - x^3 + 2x^2 - x + 5 + 2 \\
 &= x^6 - 2x^5 \cdot 2x^2 + (2x^2)^2 + 2 \cdot (x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 10x^2) + x^2 - 10x + 25 \\
 &\quad - x^3 + 2x^2 - x + 7 \\
 &= x^6 - 4x^5 + 2x^4 + 4x^4 - 14x^3 + 20x^2 + x^2 - 10x + 25 - x^3 + 2x^2 - x + 7 \\
 &= x^6 - 4x^5 + 6x^4 - 15x^3 + 23x^2 - 11x + 32
 \end{aligned}$$

► **Primjer 2.**

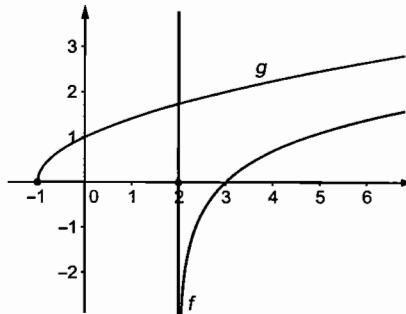
Za funkcije $f(x) = \log(x - 2)$ i $g(x) = \sqrt{x+1}$ odredimo domenu za:

- a) $f + g$, b) $f - g$, c) $f \cdot g$, d) $f : g$, e) $f \circ g$, f) $g \circ f$

Rješenje:

a) $f(x) + g(x) = \log(x - 2) + \sqrt{x+1}$

$D_f = \langle 2, +\infty \rangle$ jer prema definiciji logaritamske funkcije mora vrijediti $x - 2 > 0$
 $x > 2$



$D_g = \langle -1, +\infty \rangle$ jer prema definiciji funkcije drugog korijena mora vrijediti $x + 1 \geq 0$
 $x \geq -1$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = \langle 2, +\infty \rangle$$

b) $f(x) - g(x) = \log(x - 2) - \sqrt{x+1}$

$D_f = \langle 2, +\infty \rangle$ jer prema definiciji logaritamske funkcije mora vrijediti $x - 2 > 0$
 $x > 2$

$D_g = \langle -1, +\infty \rangle$ jer prema definiciji funkcije drugog korijena mora vrijediti $x + 1 \geq 0$
 $x \geq -1$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = \langle 2, +\infty \rangle$$

c) $f(x) \cdot g(x) = \log(x - 2) \cdot \sqrt{x+1}$

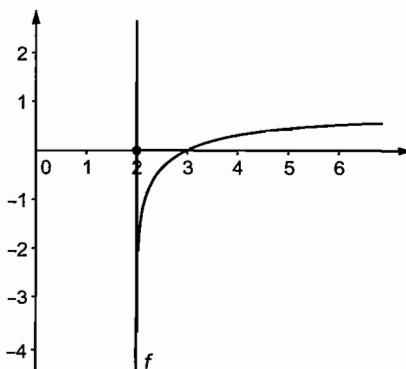
$D_f = \langle 2, +\infty \rangle$ jer prema definiciji logaritamske funkcije mora biti $x - 2 > 0$
 $x > 2$

$D_g = \langle -1, +\infty \rangle$ jer prema definiciji funkcije drugog korijena mora biti $x + 1 \geq 0$, tj. $x \geq -1$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g = \langle 2, +\infty \rangle$$

d) $(f : g)(x) = \frac{\log(x - 2)}{\sqrt{x+1}}$

$$D_{fg} = \langle 2, +\infty \rangle$$



e) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[\sqrt{x+1}] = \log(\sqrt{x+1} - 2)$

Prema definiciji logaritamske funkcije mora vrijediti:

$$\sqrt{x+1} - 2 > 0 \quad \text{uvjet } x+1 \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} > 2 / ^2$$

$$x+1 > 4$$

$$x > 4 - 1$$

$$x > 3$$

$$D_{f \circ g} = \langle 3, +\infty \rangle$$

f) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\log(x-2)] = \sqrt{\log(x-2)+1}$

Prema definiciji funkcije drugog korijena mora vrijediti:

$$\log(x-2) + \log 10 \geq 0$$

$$\log[10 \cdot (x-2)] \geq 0$$

$$\log[10 \cdot (x-2)] \geq \log 1$$

$$10x - 20 \geq 1$$

$$10x \geq 21$$

$$x \geq \frac{21}{10}$$

Prema definiciji logaritamske funkcije mora biti:

$$x-2 > 0$$

$$x > 2$$

Dakle, $D_{g \circ f} = \left[\frac{21}{10}, +\infty \right).$

viša razina (A)

Primjer 3.

Odredimo realan broj a tako da polinom $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + a$ bude djeljiv polinomom $g(x) = x - 1$.

Rješenje:

$$(x^4 - x^3 + 2x^2 - x + a) : (x - 1) = x^3 + 2x + 1$$

$$\underline{x^4 - x^3}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - x + a \\ 2x^2 - 2x \\ \hline x + a \\ x - 1 \\ \hline a + 1 \end{array}$$

Ostatak mora biti 0, pa je $a + 1 = 0$, tj. $a = -1$.

viša razina (A)

Primjer 4.

Ako je $(g \circ f)(x) = \frac{1-x^2}{x^2}$, $x \neq 0$ i $f(x) = 1 - x^2$, pronađimo $g(x)$.

Rješenje:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1-x^2}{x^2}$$

$$g(1-x^2) = \frac{1-x^2}{x^2} \Rightarrow 1-x^2 = y \Rightarrow x^2 = 1-y$$

$$g(y) = \frac{1-(1-y)}{(1-y)} = \frac{1-1+y}{1-y} = \frac{y}{1-y} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{1-x}$$

viša razina (A)

► **Primjer 5.**

Nadimo inverznu funkciju funkcije $f(x) = \log_2(3x + 5)$.

Rješenje:

$$f(x) = \log_2(3x + 5)$$

$$y = \log_2(3x + 5)$$

$$2^y = 3x + 5$$

$$2^y - 5 = 3x$$

$$x = \frac{2^y - 5}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2^x - 5}{3}$$

vila razina (1)

• 2.3. Linearna i kvadratna funkcija •

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Graf na slici prikazuje funkciju:

A) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$,

B) $f(x) = 2x - 1$,

C) $f(x) = 2x + 1$,

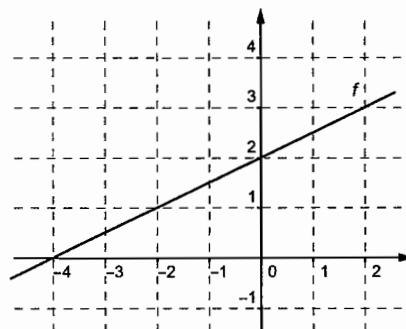
D) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

Rješenje: A.

► Zadatak je moguće rješiti odčitavanjem dviju točaka s grafom na slici i provjerom pripadaju li te točke grafovima ponuđenih funkcija.

► Zadatak je moguće rješiti i provjerom sjecišta s y -osi, koje se lako odčita iz jednadžbe $y = ax + b$ kao $A(0, b)$. Dakle, u našem je slučaju:

A) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ A(0, 2)



B) $f(x) = 2x - 1$ B(0, -1)

C) $f(x) = 2x + 1$ C(0, 1)

D) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ D(0, -2)

Sa slike se jasno vidi da se samo točka A nalazi na zadatom pravcu.

Primjer 2.

Površina trokuta što ga graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ zatvara s koordinatnim osima jest:

- A) -12 kv. jed., B) 12 kv. jed., C) -6 kv. jed., D) 6 kv. jed.

Rješenje: D.

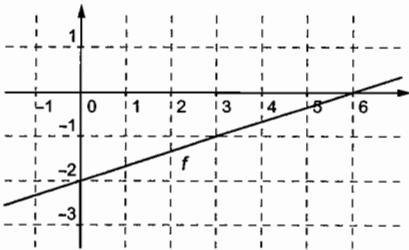
I. način

Nacrtajmo graf funkcije tako da odredimo sjecišta grafa s koordinatnim osima.

$$\begin{aligned} \text{Nultočka } \frac{1}{3}x - 2 &= 0 & A(6,0) \\ \frac{1}{3}x &= 2 / \cdot 3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Sjecište s y-osi $(0, b) = (0, -2)$

$$\text{Sada je } P = \frac{|x_A \cdot y_B|}{2} = \frac{|6 \cdot (-2)|}{2} = \frac{|-12|}{2} = 6.$$



II. način

Zapišimo jednadžbu zadanoga pravca u segmentnom obliku:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x - 2 \\ -\frac{1}{3}x + y &= -2 / : (-2) \\ -\frac{1}{3}x + \frac{y}{-2} &= 1 \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{-2} &= 1 \\ m &= 6, \quad n = -2 \\ P &= \frac{|m \cdot n|}{2} = \frac{|6 \cdot (-2)|}{2} = \frac{|-12|}{2} = 6 \text{ kv. jed.} \end{aligned}$$

Primjer 3.

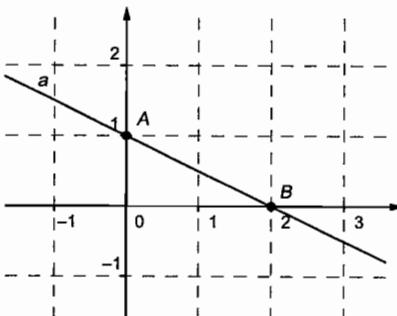
Za graf funkcije na slici koeficijent smjera jednak je:

- A) 2, B) $-\frac{1}{2}$, C) $\frac{1}{2}$, D) -2.

Rješenje: B.

Odredimo dvije točke kroz koje prolazi graf funkcije: $A(0, 1)$ i $B(2, 0)$. Koeficijent smjera određujemo prema formuli:

$$k_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}.$$



Primjer 4.

Odredimo koja od točaka pripada funkciji $f(x) = ax + b$ zadanoj u sljedećoj tablici.

x	-3	-1	0	3
$f(x)$	-3	$-\frac{7}{3}$	-2	-1

- A) $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$, B) $\left(2, \frac{2}{3}\right)$, C) $(-6, 0)$, D) $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$.

Rješenje: D.

Poznate su nam koordinate točaka:

- A) $(-3, -3)$, B) $B\left(-1, -\frac{7}{3}\right)$, C) $(0, -2)$, D) $(3, -1)$.

Iz točke C određujemo odsječak na y -osi: $b = -2$.

Stoga funkcija $f(x)$ ima oblik $f(x) = ax - 2$.

Uvrštavanjem jedne od točaka, npr. D(3,-1), izračunajmo a .

$$-1 = 3a - 2$$

$$-3a = -2 + 1$$

$$a = \frac{1}{3}$$

Dakle, funkcija glasi $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

Sada samo treba vidjeti koja od točaka pripada njezinu grafu. Uvrštavanjem koordinata točaka utvrdimo da je to točka D.

Primjer 5.

Kojoj linearnej funkciji pripadaju parovi iz tablice?

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

- A) $f(x) = x + 1$ B) $f(x) = -x + \frac{1}{2}$, C) $f(x) = x + \frac{1}{2}$, D) ne postoji takva funkcija

Rješenje: D.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = a \cdot 0 + b \\ 0 = a \cdot \frac{1}{2} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = b \\ \frac{1}{2}a = -b / \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow f(x) = -x + \frac{1}{2}$$

Provjerimo sada treću točku iz tablice: $f(1) = -x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

Ne postoji takva linearna funkcija.

Primjer 6.

Slobodni koeficijent c funkcije $f(x) = -6x^2 + x + c$ za koju vrijedi $f(2) = 3$ jest:

- A) -25, B) 25, C) -22, D) 22.

Rješenje: B.

Uvrstimo $x = 2$ i $f(2) = 3$ u zadani izraz funkcije $f(x)$ i izračunajmo c .

$$3 = -6 \cdot 2^2 + 2 + c$$

$$3 = -24 + 2 + c$$

$$3 = -22 + c$$

$$c = 25$$

Primjer 7.

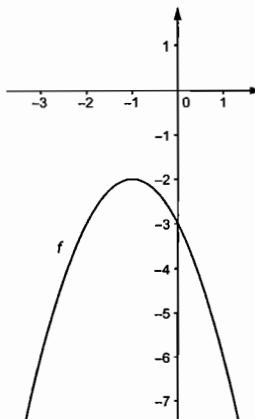
Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?

- A) $a > 0, D = 0,$
- B) $a > 0, D < 0,$
- C) $a < 0, D < 0,$
- D) $a < 0, D > 0$

Rješenje: C.

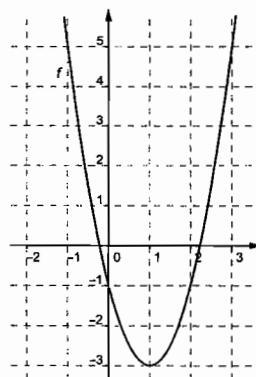
$a < 0$, parabola je okrenuta otvorom prema dolje

$D < 0$, pripadna kvadratna funkcija nema realnih nultočaka, tj. parabola ne siječe x -os

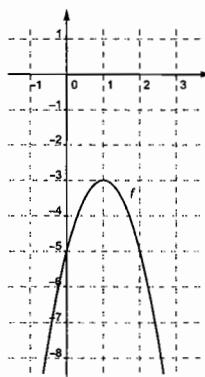
**Primjer 8.**

Koji od sljedećih grafova prikazuje funkciju $f(x) = -2 \cdot (x - 1)^2 - 3$?

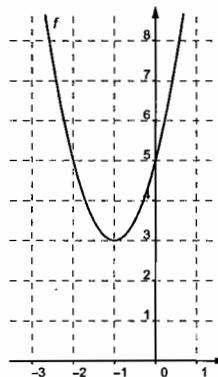
A)



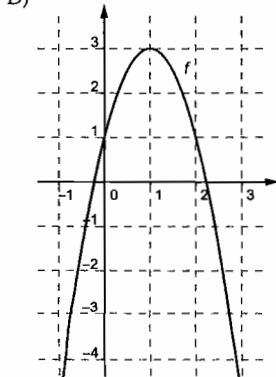
B)



C)



D)



Rješenje: B.

$$f(x) = -2 \cdot (x - 1)^2 - 3$$

$$f(x) = a \cdot (x - x_0)^2 + y_0$$

Tjeme ima koordinate $(x_0, y_0) = (1, -3)$, dok je $a = -2$, pa je parabola okrenuta otvorom prema dolje.

Primjer 9.

Graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$ nastaje translacijom grafra $g(x) = (x - 1)^2$:

- A) dolje za 4 jed.,
- B) gore za 4 jed.,
- C) lijevo za 4 jed.,
- D) desno za 4 jed.

Rješenje: A.

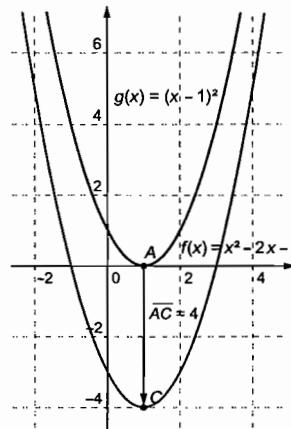
Izrazimo jednadžbu pripadne parabole u tjemnom obliku.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-12 - 4}{4} = -\frac{16}{4} = -4$$

$$f(x) = (x - 1)^2 - 4$$

Odavde se vidi da funkcija $f(x) = x^2 - 2x - 3$ nastaje translacijom grafra $g(x) = (x - 1)^2$ po *viša razina (A)*

**Primjer 10.**

Ako je slika funkcije

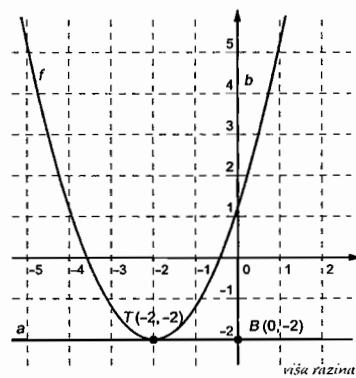
$$f(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{16}{5}x + \frac{6}{5}$$

onda funkcija ima minimum u točki s ordinatom:

- A) -2,
- B) $\frac{6}{5}$,
- C) 2,
- D) 3.

Rješenje: A.

Treba znati da je slika zadane funkcije interval $[y_0, +\infty)$ za $a > 0$, pa je traženi minimum jednak -2.



viša razina (A)

Primjer 11.

Funkcija $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ za $x = -1$

poprima istu vrijednost kao i za:

- A) $x = 3$,
- B) $x = 1$,
- C) $x = 7$,
- D) $x = 0$.

Rješenje: A.

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) + 1 = 2 + 4 + 1 = 7$$

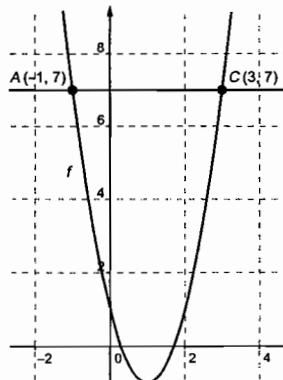
$$2x^2 - 4x + 1 = 7$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 | :2$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}, \quad x_1 = 3, x_2 = -1$$

Dakle, $x = 3$.



Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

U koordinatnom sustavu nacrtaj graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ i na njemu označi točku čija je apscisa $x = -2$.

Rješenje:

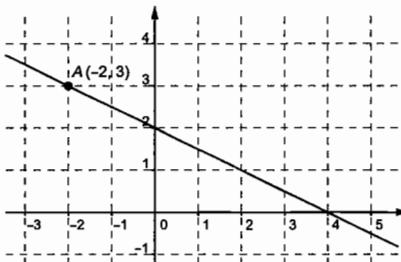
Odredimo najprije sjecišta grafa zadane funkcije s koordinatnim osima.

Za $x = 0$ slijedi $y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$, tj. $T_1(0, 2)$ sjecište je grafa funkcije s y -osi.

Za $y = 0$ slijedi

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot x + 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x = 2 \mid \cdot 2 \Rightarrow x = 4,$$

tj. $T_2(4, 0)$ sjecište je grafa funkcije s x -osi.
Tražena točka je točka A.



Primjer 2.

Priloženu tablicu za funkciju $f(x) = -2x + 1$ dopunimo podatcima o rastu ili padu funkcije i vrijednosti funkcije (koristi se oznakama \nearrow , \searrow , $+\infty$, $-\infty$), pa opiši tijek te funkcije.

x	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$
$f(x)$			

Rješenje:

x	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	$-\infty$

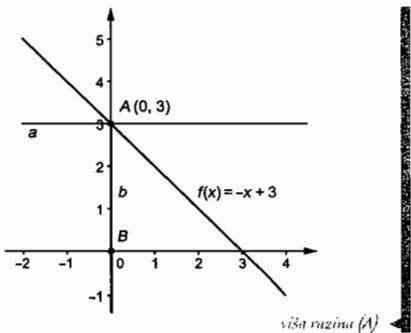
Računajući vrijednosti funkcije u nekoliko odabralih brojeva, uočavamo da za $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$, što znači da funkcija pada (\searrow).

Primjer 3.

Odredimo sliku funkcije $f(x) = -x + 3$ ako je njezina domena ograničena na skup \mathbb{R}^+ .

Rješenje:

Slika funkcije je $[-\infty, 3]$.



vruć razina (A)

▶ Primjer 4.

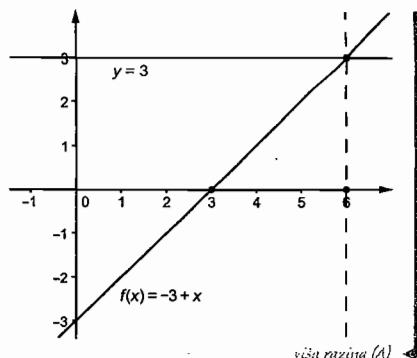
Odredimo domenu funkcije

 $f(x) = -3 + x$ ako se za sliku funkcije uzme $(-\infty, 3]$.

Rješenje:

Nacrtajmo graf zadane funkcije.

$$Df = (-\infty, 6]$$



▶ Primjer 5.

Odredimo sliku funkcije $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Rješenje:

Zadana funkcija u tjemenu pripadne parabole postiže svoj minimum. Potrebno je izračunati taj minimum y_0 i tada je tražena slika funkcije skup $[y_0, +\infty)$.

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{24 - 25}{4} = -\frac{1}{4}$$

Dakle, slika funkcije $f(x) = x^2 - 5x + 6$ interval je $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

▶ Primjer 6.

U priloženoj tablici opišimo tijek funkcije $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$.

x	$-\infty$	$x_0 =$	$+\infty$
$f(x)$		$y_0 =$	

Rješenje:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2 \cdot (-2)} = \frac{7}{4}$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{24 - 49}{-8} = \frac{25}{8}$$

x	$-\infty$	$x_0 = \frac{7}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$y_0 = \frac{25}{8}$	$-\infty$

viša razina (V)

▶ Primjer 7.

Za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi $a = 1$, a nultočke su $(3, 0)$ i $(1, 0)$. Odredite tu funkciju.

Rješenje:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = (x - 3)(x - 1) = x^2 - 4x + 3$$

viša razina (V)

Primjer 8.

Odredimo kvadratnu funkciju ako točke $A(4, -2)$, $B(6, 0)$ i $C(8, 6)$ pripadaju njezinu grafu.

Rješenje:

Ako zadane točke pripadaju grafu tražene funkcije, onda vrijedi:

$$a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = -2$$

$$a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 0$$

$$a \cdot 8^2 + b \cdot 8 + c = 6$$

$$\underline{16a + 4b + c = -2}$$

$$\underline{36a + 6b + c = 0}$$

$$\underline{64a + 8b + c = 6}$$

$$16a + 4b - 36a - 6b = -2$$

$$\underline{64a + 8b - 36a - 6b = 6}$$

$$-20a - 2b = -2$$

$$\underline{28a + 2b = 6}$$

$$8a = 4 \mid : 8$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$-20a - 2b = -2$$

$$-20 \cdot \frac{1}{2} - 2b = -2$$

$$b = -4$$

$$36a + 6b + c = 0$$

$$c = -36a - 6b$$

$$c = 6$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6.$$

viša razina (A)

Primjer 9.

Na slici je prikazan graf kvadratne funkcije.

Napišimo pripadni analitički izraz.

Rješenje:

Slike se može odčitati tjemelj (3, 2), pa ako zapišemo jednadžbu pripadne parabole u tjemrenom obliku, dobit ćemo:

$$f(x) = a(x - 3)^2 + 2.$$

Slike je moguće odčitati i točku (5, 0)

uz pomoć koje možemo odrediti a :

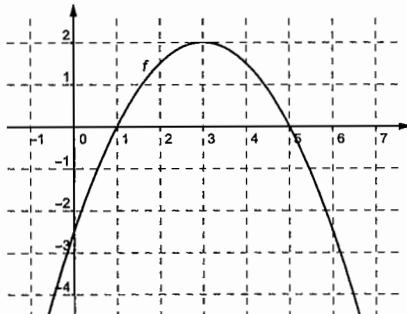
$$0 = a \cdot (5 - 3)^2 + 2$$

$$0 = 4a + 2$$

$$-4a = 2 \mid : (-4)$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}.$$



► Primjer 10. ►

Odredimo m tako da funkcija $f(x) = -2x^2 + m \cdot x + 2$ poprimi maksimalnu vrijednost za $x = 4$.

Rješenje:

Budući da je $a = -2$, dakle $a < 0$, za x_0 funkcija postiže maksimum y_0 . Iz formule za apscisu tjemena odredimo traženu vrijednost za m .

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$4 = -\frac{m}{2 \cdot (-2)}$$

$$4 = \frac{m}{4} \mid \cdot 4$$

$$m = 16$$

$$f(x) = -2x^2 + 16 \cdot x + 2$$

viša razina (A)

Primjer 11.

Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = -4x^2 - 6x + 1$.

S dobivene slike odčitajte negativno rješenje jednadžbe $f(x) = -3$.

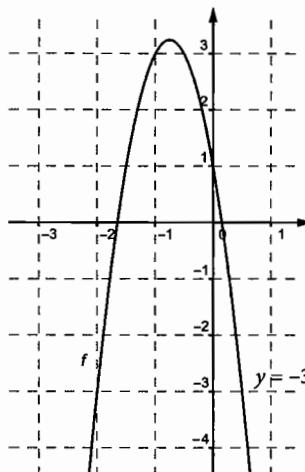
Rješenje:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot (-4)} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-16 - 36}{-16} = \frac{-52}{-16} = \frac{13}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 16}}{-8} = \frac{-3 \mp \sqrt{13}}{4}$$

$$f(-2) = -3, \text{ dakle } x = -2.$$



• 2.4. Funkcija apsolutne vrijednosti. Funkcija drugog korijena. Polinomi i racionalne funkcije •

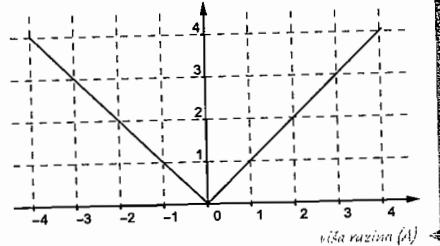
Zadatci višestrukog izbora

► Primjer 1.

Na slici je prikazan graf funkcije

- A) $y = -|x|$, B) $|y| = |x|$,
C) $y = |x|$, D) $y = x$.

Rješenje: C.



► Primjer 2.

Funkcija $f(x) = |x - 1|$ raste na intervalu:

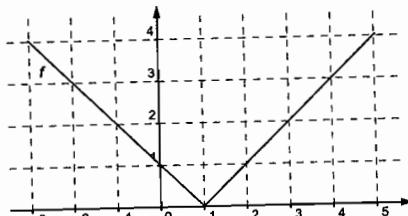
- A) $(-\infty, 0)$, B) $(1, +\infty)$,
C) $(0, +\infty)$, D) $(-\infty, 1)$.

Rješenje: B

Prema definiciji funkcije apsolutne

vrijednosti, vrijedi: $f(x) = \begin{cases} x-1; & x > 1 \\ 0; & x = 1 \\ -x+1; & x < 1 \end{cases}$

Funkcija raste od $(1, +\infty)$ jer za sve $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ vrijedi $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.



► Primjer 3.

Koja od tablica odgovara funkciji $f(x) = |x - 2|$?

A)

x

-1

0

B)

x

0

-3

C)

x

-1

2

D)

x

-1

-2

Rješenje: B.

Izračunajmo: $f(0) = |0 - 2| = |-2| = 2$
 $f(-3) = |-3 - 2| = |-5| = 5$

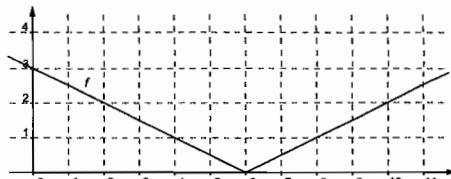
► Primjer 4. ►

Funkcija na slici ima domenu:

- A) $(6, +\infty)$, B) \mathbb{R} ,
C) $(-\infty, 6)$, D) \emptyset .

Rješenje: B.

Sa slike se vidi da je funkcija definirana na cijelom skupu \mathbb{R} .



viša razina (f1)

► Primjer 5. ►

Slika (skup vrijednosti funkcije) funkcije $f(x) = |3x - 1| - 3$ jest:

- A) $(-\infty, 3]$, B) $(-\infty, -2]$,
C) $[-3, +\infty)$, D) $[-2, +\infty)$.

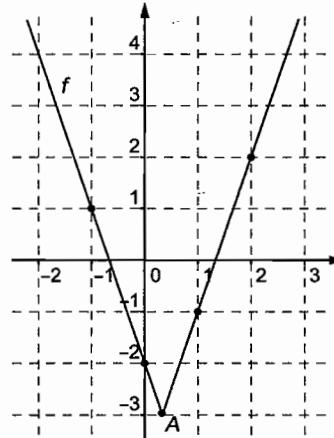
Rješenje: C.

Nacrtajmo funkciju $f(x) = |3x - 1| - 3$.

Odredimo točke tabično:

x	0	-1	1	2
$f(x)$	-2	1	-1	2

Sa slike se vidi da je slika zadane funkcije interval $[-3, +\infty)$.

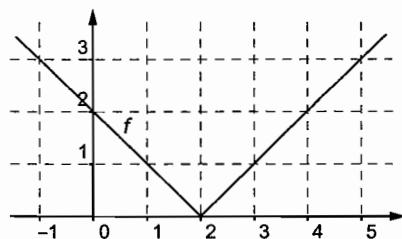


viša razina (A)

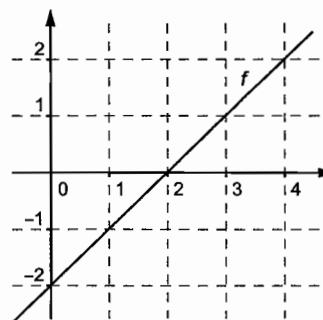
► Primjer 6. ►

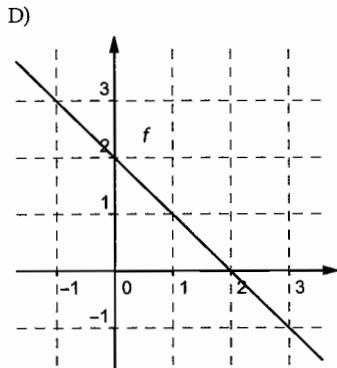
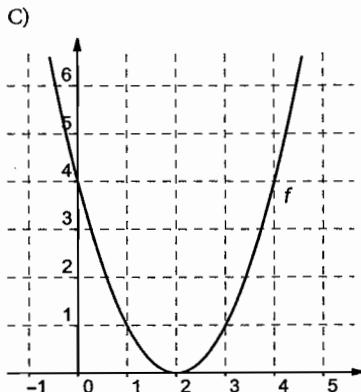
Koji od grafova prikazuje funkciju $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$?

A)



B)





Rješenje: A.

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 4x + 4)} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$$

viša razina (A)

► Primjer 7. ►►

Domena funkcije $f(x) = \sqrt{|x - 3| - |8 - x|}$ jest:

- A) \mathbb{R} , B) \emptyset , C) $\left[\frac{11}{2}, +\infty\right)$, D) $\left[\frac{11}{2}, 8\right]$.

Rješenje: C.

Prema definiciji funkcije drugog korijena, mora biti:
 $|x - 3| - |8 - x| \geq 0$.

Riješimo sada nejednadžbu tako da najprije nađemo točke u kojima funkcija mijenja predznak:

$$\begin{array}{lll} x - 3 = 0 & 8 - x = 0 \\ x = 3 & -x = -8 \\ & x = 8 \end{array}$$

Dakle, moguća su tri slučaja:

$$\begin{array}{lll} x \leq 3 & 3 \leq x \leq 8 & x \geq 8 \\ -x + 3 - (8 - x) \geq 0 & x - 3 - (8 - x) \geq 0 & x - 3 - (-8 + x) \geq 0 \\ -5 \geq 0 & x \geq \frac{11}{2} & 5 \geq 0 \\ \text{nema rješenja} & x \in \left[\frac{11}{2}, 8\right] & x \in [8, +\infty) \end{array}$$

Rješenje je, dakle, unija rješenja iz drugoga i trećeg slučaja: $\left[\frac{11}{2}, +\infty\right)$.

viša razina (A)

► Primjer 8. ►►

Jednadžba grafra kubne funkcije $f(x) = ax^3 + b$ koji prolazi točkama A(-1, -2) i B(2, 1) jest:

- A) $y = x^3 - \frac{1}{3}$, B) $y = -3x^3 + 25$, C) $y = x^3 - 5$, D) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}$.

Rješenje: D.

Uz pomoć točaka grafa tražene funkcije postavimo sustav jednadžbi:

$$-2 = a \cdot (-1)^3 + b$$

$$1 = a \cdot 2^3 + b$$

$$\underline{-2 = -a + b}$$

$$\underline{1 = 8a + b}$$

$$\underline{-3 = -9a / : (-9)}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 - 8a = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$$

viša razina (A)

Primjer 9.

Odredi koja je od sljedećih četiriju funkcija parna.

A) $f(x) = x^3 + 5$, B) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$, C) $f(x) = x^3 + 3x$, D) $f(x) = x^3$

Rješenje: B.

Ispitajmo parnost:

$$f(-x) = (-x)^3 + 5 = -x^3 + 5 \quad \text{ni parna ni neparna}$$

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = f(x) \quad \text{parna}$$

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x) = -x^3 - 3x = -f(x) \quad \text{neparna}$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \quad \text{neparna}$$

viša razina (A)

Primjer 10.Domena funkcije $f(x) = \frac{5-3x}{x^2-9} - \frac{1-7x}{2x^2+6x}$ jest:

A) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, B) $\mathbb{R} \setminus \{0, 3, -3\}$, C) \mathbb{R} , D) $\mathbb{R} \setminus \{3, -3\}$.

Rješenje: B.

Mora vrijediti:

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3) \neq 0$$

$$2x^2 + 6 - 2x(x + 3) \neq 0$$

Odredimo x za koji funkcija nije definirana izjednačavajući nazivnike s nulom.

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 3, -3\}$$

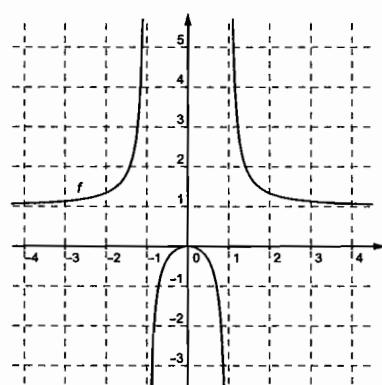
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

viša razina (A)

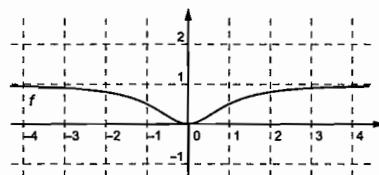
► Primjer 11. ►

Koji od sljedećih četiriju grafova odgovara funkciji $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$?

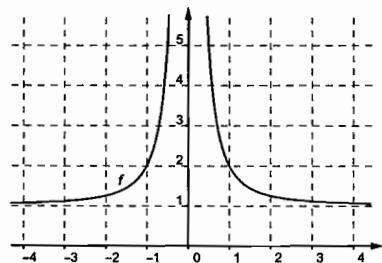
A)



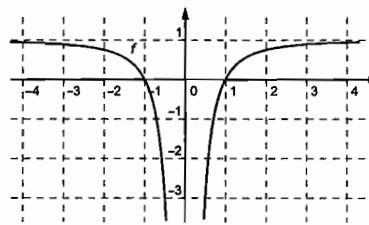
B)



C)



D)



Rješenje: A.

Uočite da zadana funkcija nije definirana za $x = -1$ i $x = 1$, a to vrijedi samo za funkciju čiji je graf prikazan na slici A).

viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Odredimo domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$.

Rješenje:

Prema definiciji funkcije drugoga korijena, $\frac{x+1}{x+2}$ mora biti veće od nule ili jednako nuli.

Riješimo, dakle, nejednadžbu:

$$\frac{x+1}{x+2} \geq 0$$

I. slučaj

$$x+1 \geq 0$$

$$x+2 > 0$$

$$x \geq -1$$

$$x > -2$$

$$x \in [-1, +\infty)$$

II. slučaj

$$x+1 \leq 0$$

$$x+2 < 0$$

$$x \leq -1$$

$$x < -2$$

$$x \in (-\infty, -2)$$

$$D_f = (-\infty, -2) \cup [-1, +\infty)$$

Primjer 2.

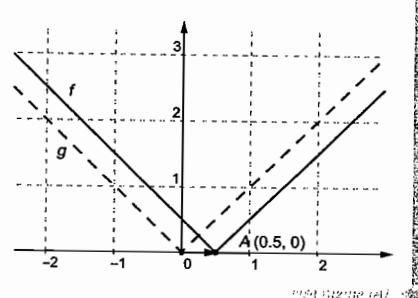
Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, pa odredimo područje definicije i sliku te funkcije.

Rješenje:

Graf funkcije $f(x) = |x - a|$ nastaje translacijom grafa funkcije $g(x) = |x|$ po osi x udesno za a jedinicu.

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$K_f = [0, +\infty)$$



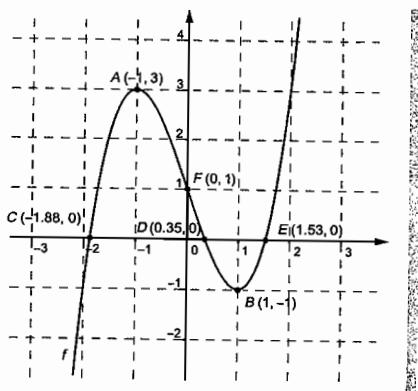
Primjer 3.

Za polinom trećeg stupnja čiji je graf prikazan na slici odredimo:

- intervale rasta i pada,
- sjecište grafa s y -osi,
- nultočke,
- maksimum ili minimum (ako postoji).

Rješenje:

- Funkcija raste na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$.
- Graf siječe y -os u točki $(0,1)$.
- Nultočke funkcije su $(-1.88, 0)$, $(0.35, 0)$, $(1.53, 0)$.
- Maksimum je jednak 3, a minimum -1.



▶ Primjer 4. ▶

Odredimo sve realne nultočke polinoma $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

Rješenje:

Polinom trećeg stupnja treba faktorizirati grupiranjem:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = x^2 \cdot (x - 2) + (x - 2) = (x - 2) \cdot (x^2 + 1).$$

Sada možemo izračunati $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, pa je $(2, 0)$ nultočka.

Za $x^2 + 1 = 0$ ne možemo dobiti realne nultočke jer je $D < 0$.

viša razina (A)

▶ Primjer 5. ▶

Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ odredimo:

- četiri funkcione vrijednosti,
- nultočke,
- sjecišta grafa s y -osi.
- U koordinatnom sustavu skicirajte graf.

Rješenje:

a) Na primjer:

$$f(-3) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(-3)^2 - 4} = \frac{1}{5}$$

$$f(-1) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(-1)^2 - 4} = -\frac{1}{3}$$

$$f(0) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(0)^2 - 4} = -\frac{1}{4}$$

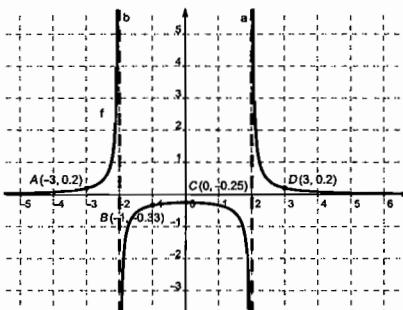
$$f(3) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(3)^2 - 4} = \frac{1}{5}$$

b) $\frac{1}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow$ nema nultočaka, ali

funkcija nije definirana za $x = 2$ i $x = -2$.

c) $f(0) = \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{(0)^2 - 4} = -\frac{1}{4}$

d)



viša razina (A)

• 2.5. Eksponencijalna i logaritamska funkcija •

Zadatci višestrukog izbora

► Primjer 1.

Odredimo točku koja pripada grafu funkcije $f(x) = 10^x \cdot 10^{-x+1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-x}$.

- A) (1, 9) B) $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$, C) (-1, 1), D) (1, 10)

Rješenje: C.

$$f(x) = 10^x \cdot 10^{-x+1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-x} = 10^{x-x+1} \cdot 10^x = 10^{x+1}$$

$$f(-1) = 10^{-1+1} = 10^0 = 1$$

viša razina (A)

► Primjer 2.

Ako je $\log_2 x = \log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 2 + 1$, onda je x jednako:

- A) $\frac{5}{2}$, B) $2\sqrt{5}$, C) $5\sqrt{2}$, D) $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

Rješenje: C.

$$\log_2 x = \log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 2 + 1$$

$$\log_2 x = \log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 2 + \log_2 2$$

$$\log_2 x = \log_2 5 + \frac{1}{2} \log_2 2$$

$$\log_2 x = \log_2 5 + \log_2 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_2 x = \log_2 (5 \cdot \sqrt{2})$$

$$x = 5 \cdot \sqrt{2}$$

viša razina (A)

► Primjer 3.

Funkcija $f(x) = 5^{2x+6}$ jednaka je funkciji:

- A) 25^{x+3} , B) $2 \cdot 5^{x+3}$, C) $5^{2x} + 3$, D) 25^{x+6} .

Rješenje: A.

$$5^{2x+6} = 5^{2(x+3)} = 25^{x+3}$$

viša razina (A)

► Primjer 4.

Funkcija $f(x) = \log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x$ za sve x iz svoje domene jednaka je izrazu:

- A) $\log_2 \frac{1}{x}$, B) $\log_2 x^2$, C) 0, D) $\log x$.

Rješenje: B.

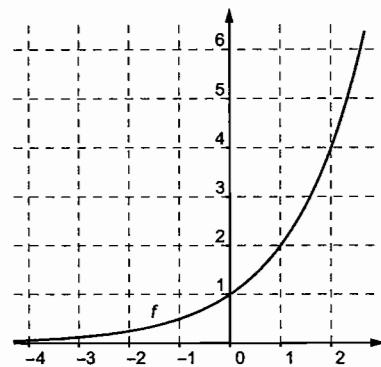
$$\log_2 x - \log_{\frac{1}{2}} x = \log_2 x - \log_{(2^{-1})} x = \log_2 x + \log_2 x = \log_2 x^2$$

viša razina (A)

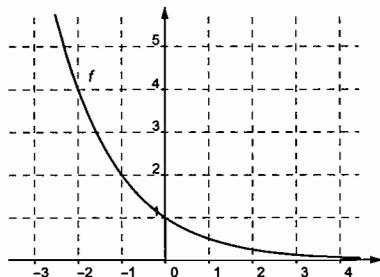
Primjer 5.

Grafički prikaz funkcije $f(x) = -2^x$ jest:

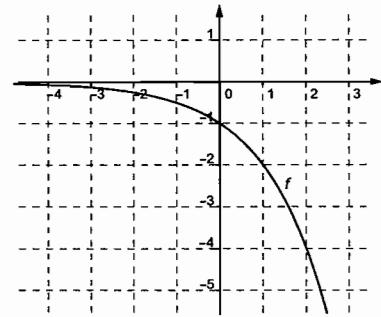
A)



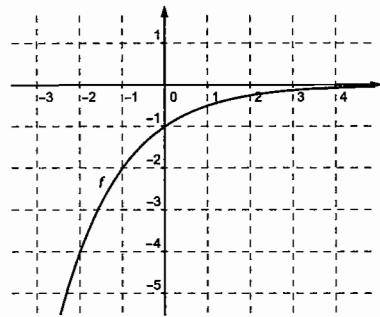
B)



C)



D)



Rješenje: C.

viša razina (A)

Primjer 6.

Domena funkcije $f(x) = \log \frac{x+1}{x-1}$ jest:

- A) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, B) R, C) $(-1, 1)$, D) $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

Rješenje: A.

$$\frac{x+1}{x-1} > 0 \quad x-1 \neq 0$$

I. slučaj

$$x+1 > 0$$

$$\underline{x-1 > 0}$$

$$x > -1$$

$$x > 1$$

$$x \in (1, +\infty)$$

II. slučaj

$$x+1 < 0$$

$$\underline{x-1 < 0}$$

$$x < -1$$

$$x < 1$$

$$x \in (-\infty, -1)$$

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

► Primjer 7. ►

Na slici je prikazan graf funkcije:

- A) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, B) $\log_2 x$,
 C) 2^x , D) $\log_{\frac{1}{2}} x$.

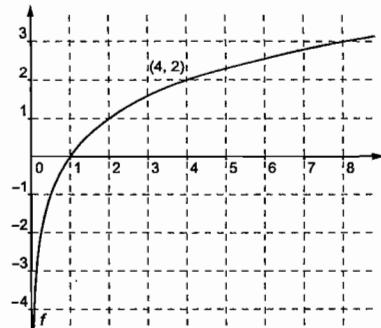
Rješenje: B.

S grafom odčitajmo točku funkcije $(4, 2)$.

Po obliku grafika i nekim svojstvima
 (npr. po prolasku grafika kroz točku $(1, 0)$)
 zaključujemo da je riječ o strogo rastućoj
 logaritamskoj funkciji.

Dakle, treba samo odrediti bazu:

$\log_x 4 = 2 \Rightarrow$ prema definiciji logaritamske funkcije utvrđujemo da je baza 2. viša razina (A)



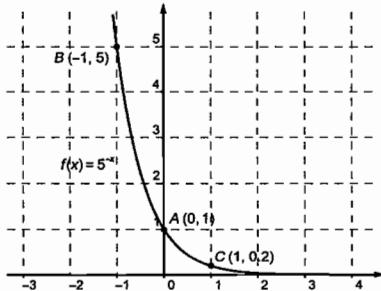
► Primjer 1. ►

Zadana je funkcija $f(x) = 5^{-x}$. Popunimo tablicu, pa uz pomoć dobivenih rezultata zadatu funkciju prikažimo grafički.

x	0	-2	
$f(x)$	5	$\frac{1}{5}$	

S grafom odčitaj: a) domenu funkcije,

- b) sliku funkcije,
 c) je li funkcija strogo rastuća ili strogo padajuća,
 d) sjecišta grafra funkcije s koordinatnim osima.



Rješenje:

x	0	-2	-1	1
$f(x)$	1	25	5	$\frac{1}{5}$

- a) \mathbb{R}
 b) $(0, +\infty)$
 c) Strogo padajuća.
 d) Graf zadane funkcije ne siječe os $0x$.
 e) Sjedište s osi y : $(0, 1)$. viša razina (A)

► Primjer 2. ►

Iz tablice odredimo funkciju $f(x) = a^x$.

x	0	2	-1
$f(x)$	1	5^2	5

Rješenje:

$$a^{-1} = 5$$

$$\frac{1}{a} = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x = 5^{-x}$$

viša razina (A)

► Primjer 3. ►

Ukupan broj šarana u ribogojilištu dan je formulom: $R(t) = 1\,600 \cdot (1.14)^t$, u kojoj je t broj mjeseci protekao od pokretanja ribogojilišta.

- Koliko je bilo šarana u ribogojilištu pri njegovu pokretanju?
- Koliko šarana ima u ribogojilištu nakon pet mjeseci?

Rješenje:

a) $R(0) = 1\,600 \cdot (1.14)^0 = 1\,600$ b) $R(5) = 1\,600 \cdot (1.14)^5 = 3\,081$

viša razina (A)

► Primjer 4. ►

Koliko je $f(5)$ ako je $f(x) = f(x) = \frac{\log_5 x}{\log_{25} x} + \log_{\frac{1}{5}} x$?

Rješenje:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\log_5 x}{\log_{25} x} + \log_{\frac{1}{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_{5^2} x} + \log_{\frac{1}{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 x^2} + \log_{5^{-1}} x = \\&= \frac{\log_5 x}{2 \log_5 x} - \log_5 x = 2 - \log_5 x \Rightarrow f(5) = 2 - \log_5 5 = 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

viša razina (A)

► Primjer 5. ►

Izračunajte $3^{\log_3 18 - 2}$.

Rješenje:

$$3^{\log_3 18 - 2} = 3^{\log_3 18 - 2 \log_3 3} = 3^{\log_3 18 - \log_3 9} = 3^{\log_3 \frac{18}{9}} = 3^{\log_3 2} = 2$$

viša razina (A)

► Primjer 6. ►

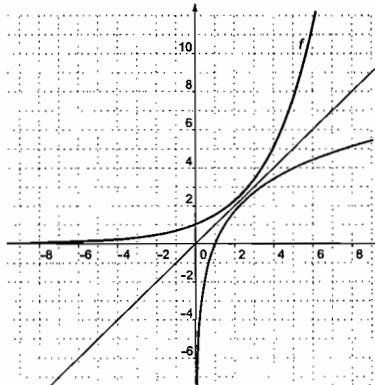
Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Grafički odredimo inverznu funkciju.

Rješenje:

x	1	-1	0	2	-2
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{9}$
(x)					

Graf funkcije inverzne zadanoj funkciji simetričan je grafu zadane funkcije s obzirom na pravac $y = x$.



viša razina (A)

► Primjer 7. ►

Ako je $x = \log_3 7$ i $y = \log_3 4$, koliko je $\frac{4+x}{y+2 \cdot x}$?

Rješenje:

$$\begin{aligned}\frac{4+x}{y+2 \cdot x} &= \frac{4+\log_3 7}{\log_3 4 + 2 \cdot \log_3 7} = \frac{4 \log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 4 + \log_3 49} = \frac{\log_3 3^4 + \log_3 7}{\log_3(4 \cdot 49)} = \\&= \frac{\log_3(3^4 \cdot 7)}{\log_3(4 \cdot 49)} = \frac{\log_3 567}{\log_3 196} = \log_{196} 567\end{aligned}$$

viša razina (A)

2.6. Trigonometrijske funkcije

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Odaberimo kut za koji tangens nije definiran.

- A) 360° B) 90° C) 180° D) -220°

Rješenje: B.

Funkcija $f(t) = \operatorname{tg} t$, nije definirana za $t = \frac{\pi}{2} + k\pi = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$, pri čemu je $k \in \mathbb{Z}$, dakle raspisimo zadane kutove.

$$360^\circ = 0^\circ + 2 \cdot 180^\circ$$

$$90^\circ = 90^\circ + 0 \cdot 180^\circ \quad \text{tangens nije definiran}$$

$$180^\circ = 0^\circ + 1 \cdot 180^\circ$$

$$-220^\circ = -40^\circ - 1 \cdot 180^\circ$$

viša razina (A)

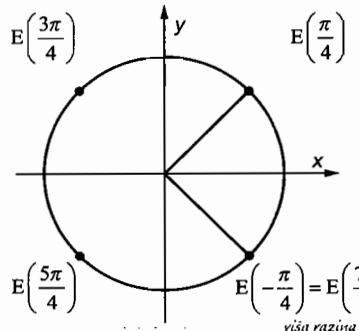
Primjer 2.

Na brojevnoj kružnici odredimo točku jednaku $E\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

- A) $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ B) $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$
C) $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ D) $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Rješenje: C.

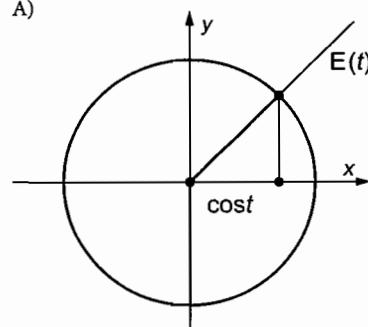
Nacrtajmo točke na brojevnoj kružnici.



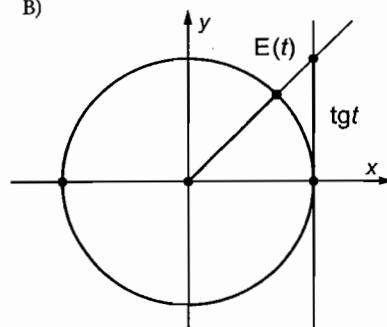
Primjer 3.

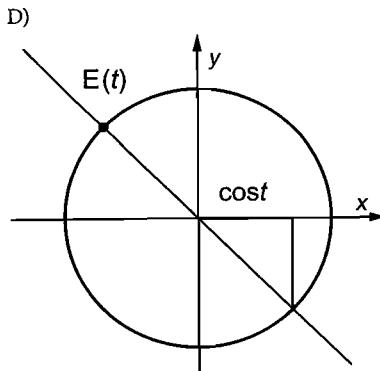
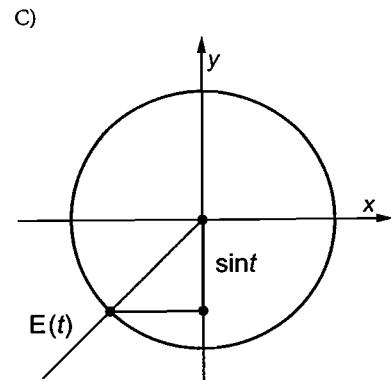
Izbacimo netočnu sliku.

A)



B)

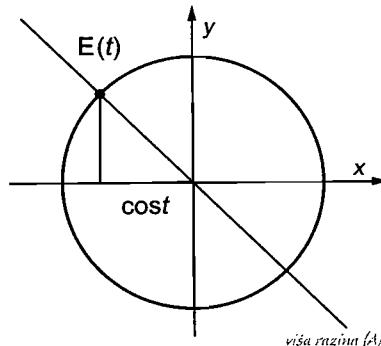




Rješenje: D.

Samo je na slici D napravljena pogreška i apscisa koja odgovara cost nalazi se na pogrešnom dijelu osi x .

Pogledajmo ispravnu sliku.



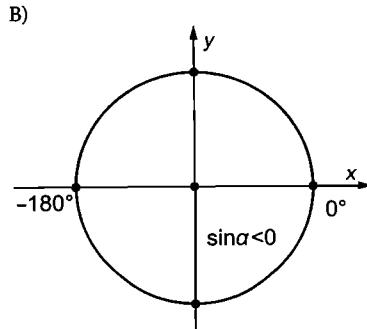
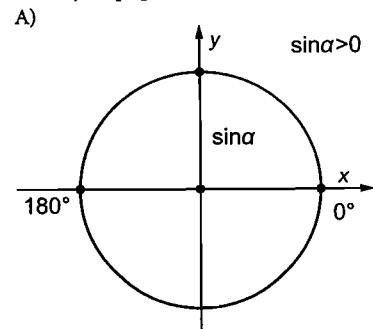
► Primjer 4.

Izbacimo netočnu izjavu.

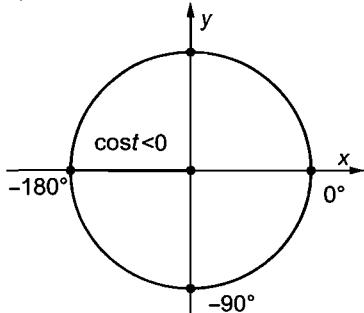
- A) Funkcija sinus pozitivna je za kutove α iz intervala $(0^\circ, 180^\circ)$.
- B) Funkcija sinus negativna je za kutove α iz intervala $(-180^\circ, 0^\circ)$.
- C) Funkcija kosinus negativna je za kutove α iz intervala $(-180^\circ, -90^\circ)$.
- D) Funkcija kosinus pozitivna je za kutove α iz intervala $(90^\circ, 180^\circ)$.

Rješenje: D.

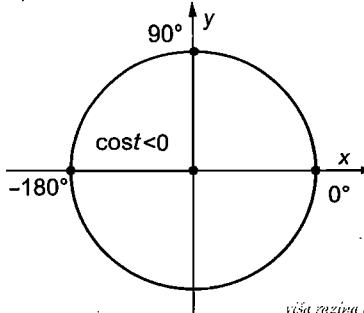
Nacrtajmo pripadne slike.



C)



D)



viša razina (A)

Primjer 5.

$$\text{Izračunajmo } \cos \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{2\pi}{3}.$$

- A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) 0 C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1

Rješenje: B.

$$\cos \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

viša razina (A)

Primjer 6.

Ako je $x = \frac{3\pi}{4}$ i $y = \frac{2\pi}{3}$, izračunajmo: $\frac{\cos x - \sin y}{\cos y + \sin x}$.

- A) $-(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + 1)$ B) 0 C) nije definirano D) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + 1)$

Rješenje: A.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \sin y}{\cos y + \sin x} &= \frac{\cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{2\pi}{3}}{\cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}}{-\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{2}} = \\ &= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = -\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 7.

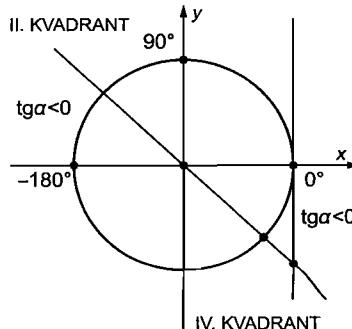
Ako je $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$,

onda je α jednak:

- A) $\frac{5\pi}{4}$, B) $-\frac{3\pi}{4}$,
C) $\frac{3\pi}{4}$, D) nije moguće.

Rješenje: D.

Nije moguće. Tangens je negativan za kutove iz II. i IV. kvadranta, a u uvjetima je zadano da je kut iz III. kvadranta.





► **Primjer 8.** ►►

Od ponuđenih izraza odaberimo izraz jednak $\cos 53^\circ$.

- A) $\cos(-303^\circ)$ B) $\cos 773^\circ$ C) $\cos(-395^\circ)$ D) $-\cos 773^\circ$

Rješenje: B.

Koristeći se periodičnošću funkcije kosinus, $\cos \alpha = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ)$, $k \in \mathbb{Z}$, dobivamo:

$$\cos(-303^\circ) = \cos 57^\circ$$

$$\cos 773^\circ = \cos(2 \cdot 360^\circ + 53^\circ) = \cos 53^\circ$$

$$\cos(-395^\circ) = \cos(-360^\circ - 35^\circ) = \cos(-35^\circ) = \cos 325^\circ$$

$$-\cos 773^\circ = -\cos 53^\circ$$

viša razina (A)

► **Primjer 9.** ►►

Od ponuđenih izraza odaberimo onaj jednak $\operatorname{tg} 160^\circ$.

- A) $\operatorname{tg} 40^\circ$ B) $-\operatorname{tg} 120^\circ$ C) $\operatorname{tg} 260^\circ$ D) $\operatorname{tg} 340^\circ$

Rješenje: D.

Uz $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ)$ imamo: $\operatorname{tg} 340^\circ = \operatorname{tg}(160^\circ + 180^\circ) = \operatorname{tg} 160^\circ$.

viša razina (A)

► **Primjer 10.** ►►

Ako je $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ i $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, onda je $\operatorname{tg} \alpha$ jednako:

- A) 0, B) -1, C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rješenje: C.

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{za } \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

viša razina (A)

► **Primjer 11.** ►►

Ako je $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, onda je $\frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha}$ jednako:

- A) $2 - \sqrt{3}$, B) $\sqrt{3} - 2$, C) $\frac{1}{2}$, D) $\sqrt{3}$.

Rješenje: A.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Za } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ je } \sin \alpha = \frac{1}{2}, \text{ pa slijedi: } \frac{1+\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

viša razina (A)

► Primjer 12. ►

Koja je od sljedećih četiriju funkcija parna?

- A) $\operatorname{tg} x$ B) $\sin x \cdot \cos x$ C) $\sin x + \cos x$ D) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$

Rješenje: D.

$\operatorname{tg} x$ je neparna funkcija jer je omjer neparne i parne funkcije

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cdot \cos x = -f(x) \quad \text{neparna}$$

$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x$ ni parna ni neparna

$$f(-x) = \operatorname{tg}(-x) \cdot \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{tg} x \cdot (-\operatorname{ctg} x) = f(x) \quad \text{parna}$$

viša razina (A)

► Primjer 13. ►

Odaberimo točnu tvrdnju.

- A) Broj $\frac{2\pi}{3}$ temeljni je period funkcije $f(x) = \cos \frac{x}{3}$.
 B) Broj π temeljni je period funkcije $f(t) = \sin 3t$.
 C) Broj 3π temeljni je period funkcije $f(x) = \cos \frac{2x}{3}$.
 D) Broj $\frac{\pi}{2}$ temeljni je period funkcije $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Rješenje: C.

Vrijedi $\cos(x + P) = \cos x$.

$$\frac{2P}{3} = 2k\pi \Rightarrow 2P = 6k\pi \Rightarrow P = 3\pi$$

Sličnom provjerom za ostale izraze zaključujemo da su ostale tri tvrdnje neistinite.

viša razina (A)

► Primjer 14. ►

$\sin \frac{101\pi}{6}$ jednako je:

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, B) $-\frac{1}{2}$, C) $\frac{1}{2}$, D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rješenje: C.

$$\sin \frac{101\pi}{6} = \sin \left(\frac{5\pi}{6} + 8 \cdot 2\pi \right) = \sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

viša razina (A)

► Primjer 15. ►

Vrijednost funkcije $f(x) = 125^{\log_8 \sin x}$ za $x = \frac{\pi}{4}$ iznosi:

- A) 125, B) 5, C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, D) $-\frac{1}{6}$.

Rješenje: C.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 125^{\log_8 \sin \frac{\pi}{4}} = 125^{\log_8 \frac{\sqrt{2}}{2}} = 125^{\log_8 2^{-\frac{1}{2}}} = 125^{\frac{1}{3} \log_2 2^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$= 125^{-\frac{1}{6} \log_2 2} = 125^{-\frac{1}{6}} = (5^3)^{-\frac{1}{6}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

viša razina (A)

► Primjer 16. ▷

Ako je $f(x - \pi) = 2 \cos \frac{x}{2}$, onda je $f(2x)$ jednako:

- A) $2 \cos(\pi - x)$, B) $2 \sin x$, C) $-2 \sin x$, D) $2 \cos(x + \pi)$.

Rješenje: C.

$$y = x - \pi$$

$$x = y + \pi \Rightarrow 2 \cdot x = 2 \cdot (y + \pi)$$

$$f(x) = 2 \cos \frac{2y + \pi}{2} = 2 \cos \left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = -2 \sin \frac{y}{2}, \text{ pa je } f(2 \cdot x) = -2 \sin x.$$

► Primjer 17. ▷

Izraz $\frac{\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x - \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}$ jednak je:

- A) $\sin x$, B) $\frac{1 - \sin x}{\cos x}$, C) $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, D) $1 - \sin x$.

Rješenje: B.

$$\frac{\sin^2 x \cdot \cos x + \cos^3 x - \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x)}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

► Primjer 18. ▷

$\sin \frac{7\pi}{12}$ jednako je:

- A) $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$, B) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, C) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, D) 1.

Rješenje: C.

Koristit ćemo se adicijskom formulom $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$.

$$\begin{aligned} \sin \frac{7\pi}{12} &= \sin \left(\frac{4\pi + 3\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

► Primjer 19. ▷

$\operatorname{tg} 15^\circ$ jednako je:

- A) $\sqrt{3} + 1$, B) $2 - \sqrt{3}$, C) $\frac{1}{2}$, D) $2 + \sqrt{3}$.

Rješenje: B.

Koristit ćemo se adicijskom formulom $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$.

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

► Primjer 20. ►

Izračunajmo $\cos \frac{7\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{7\pi}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{2}$.

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, B) 1, C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, D) 0.

Rješenje: A.

$$\cos \frac{7\pi}{4} \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{7\pi}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = \cos \left(\frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} \right) = \cos \frac{7\pi - 6\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Primijenili smo formulu $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$.

viša razina (A)

► Primjer 21. ►

Izračunajmo $\cos 105^\circ \cdot \sin 75^\circ$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) 0 D) $\frac{1}{4}$

Rješenje: B.

Koristeći se formulom pretvorbe umnoška u zbroj, dobivamo:

$$\cos 105^\circ \cdot \sin 75^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(105^\circ + 75^\circ) - \sin(105^\circ - 75^\circ)] = \frac{1}{2} [\sin 180^\circ - \sin 30^\circ] = \frac{1}{2} \left[0 - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{4}$$

viša razina (A)

► Primjer 22. ►

Izračunajmo $\frac{\cos 35^\circ + \cos 85^\circ}{\cos 65^\circ}$.

- A) $\operatorname{tg} 35^\circ$ B) $\cos 24^\circ$ C) $\operatorname{ctg} 25^\circ$ D) $\operatorname{tg} 60^\circ$

Rješenje: C.

Koristeći se formulom pretvorbe zbroja u umnožak, dobivamo:

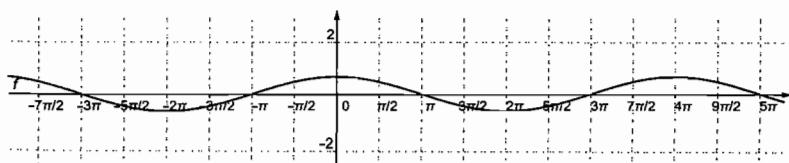
$$\begin{aligned} \frac{\cos 35^\circ + \cos 85^\circ}{\cos 65^\circ} &= \frac{2 \cos \frac{35^\circ + 85^\circ}{2} \cos \frac{35^\circ - 85^\circ}{2}}{\cos 65^\circ} = \frac{2 \cos 60^\circ \cos(-25^\circ)}{\cos 65^\circ} = \\ &= \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos(-25^\circ)}{\cos(90^\circ - 25^\circ)} = \frac{2 \cos 60^\circ \cos 25^\circ}{\cos 90^\circ \cdot \cos 25^\circ + \sin 90^\circ \cdot \sin 25^\circ} = \frac{2 \cos 60^\circ \cdot \cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ = \operatorname{ctg} 25^\circ. \end{aligned}$$

viša razina (A)

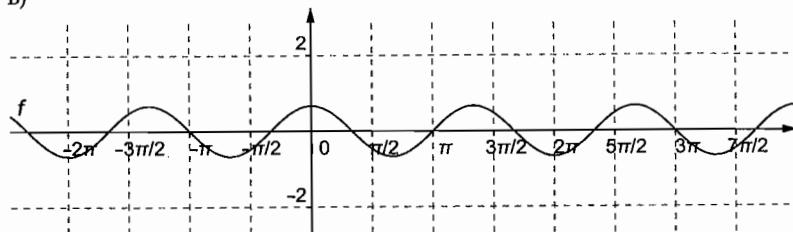
► Primjer 23. ►

Koja od slika prikazuje graf funkcije $f(x) = \frac{2}{3} \cos \frac{x}{2}$?

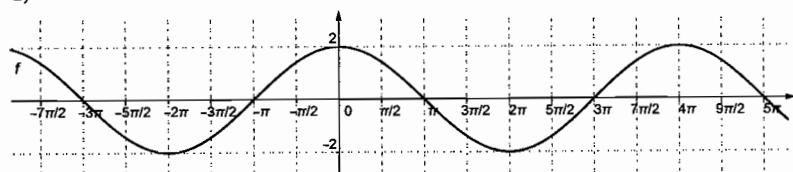
A)



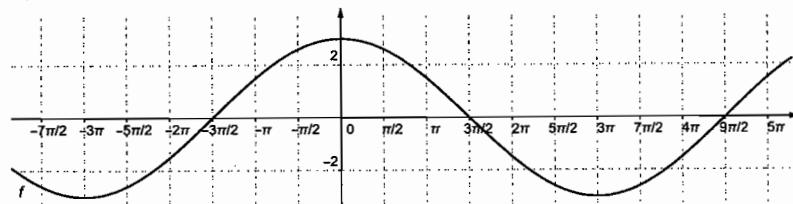
B)



C)



D)



Rješenje: A.

$$A = \frac{2}{3} \quad P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad \omega = \frac{1}{2}$$

viša razina (A)

► Primjer 24. ►

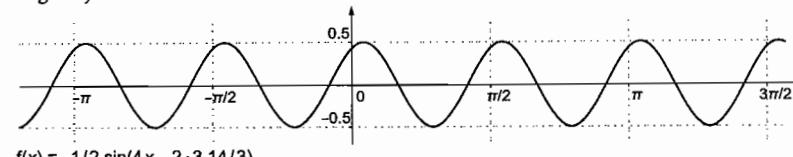
Slika funkcije $f(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$ interval je:

- A) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$, B) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, C) $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$, D) $[-2, 2]$.

Rješenje: B.

Funkcija $f(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$ ima maksimum $\frac{1}{2}$, a minimum $-\frac{1}{2}$.

Pogledajmo sliku.



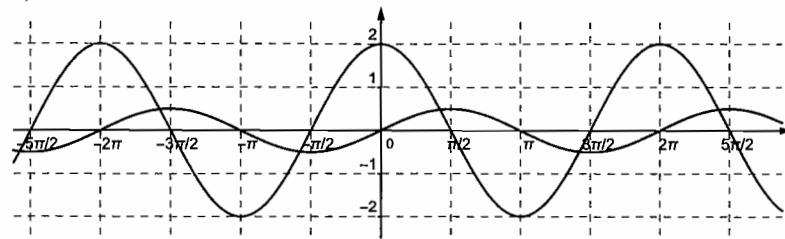
$$f(x) = -\frac{1}{2} \sin(4x - 2 \cdot 3.14/3)$$

viša razina (A)

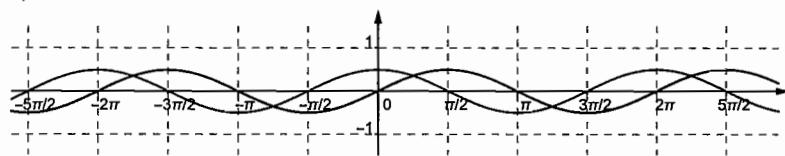
Primjer 25.

Koja slika prikazuje rješenja jednadžbe $\frac{1}{2} \sin x = 2 \cos x$ na intervalu od $[-\pi, \pi]$?

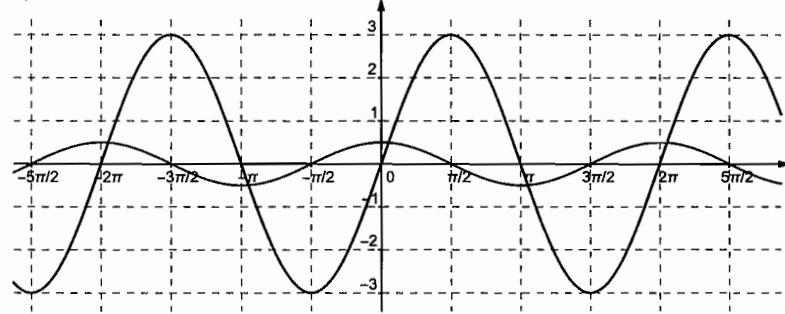
A)



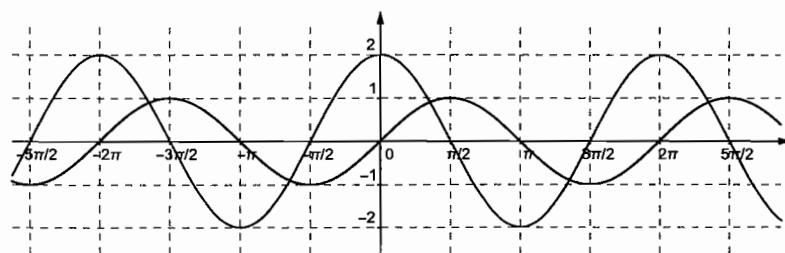
B)



C)



D)



Rješenje: A.

Najlakše je izračunati amplitude funkcija $A_f = \frac{1}{2}$ i $A_g = 2$.

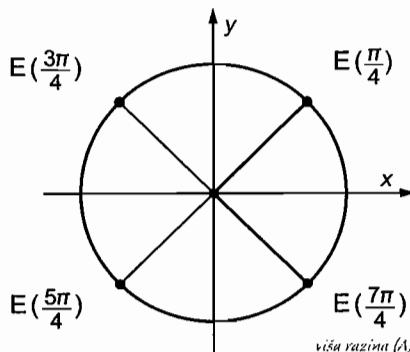
viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

► Primjer 1. ►

Na jediničnoj kružnici označimo točku definiranu kutem $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

Rješenje:



viša razina (A)

► Primjer 2. ►

Priloženu tablicu popunimo predznacima.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
----------	---------------	---------------	----------------------------

$\frac{3\pi}{4}$

225°

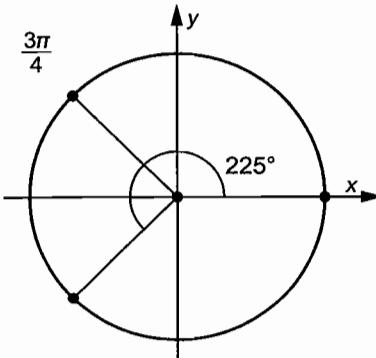
Rješenje:

Pogledajmo sliku i položaj točaka na jediničnoj kružnici određenih zadanim kutovima. Prema kvadrantu u kojem se nalaze i definiciji funkcija, određujemo predznake.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
----------	---------------	---------------	----------------------------

$\frac{3\pi}{4}$

$225^\circ = \frac{7\pi}{4}$	-	-	+
------------------------------	---	---	---



viša razina (A)

► Primjer 3. ►

U kojemu se kvadrantu nalazi argument u izrazu $\sin 880^\circ$?

Rješenje:

Funkcija sinus je periodična i njezin temeljni je period $2\pi = 360^\circ$.

Dakle, vrijedi:

$$\sin 880^\circ = \sin (2 \cdot 360^\circ + 160^\circ) = \sin 160^\circ.$$

Kut od 160° nalazi se u II. kvadrantu (između 90° i 180°).

viša razina (A)

Primjer 4.

Popunimo priloženu tablicu.

α	-860°	754°	$1\ 315^\circ$
----------	--------------	-------------	----------------

$$\operatorname{tg} \alpha$$

Rješenje:

Uz pomoć periodičnosti funkcije tangens moramo odrediti kvadrant kojemu pripada svaki od zadanih kutova.

$$-860^\circ = -(4 \cdot 180^\circ + 140^\circ) = -140^\circ \quad \text{III. kvadrant}$$

$$754^\circ = 4 \cdot 180^\circ + 34^\circ = 34^\circ \quad \text{I. kvadrant}$$

$$1\ 315^\circ = 6 \cdot 180^\circ + 235^\circ = 235^\circ \quad \text{III. kvadrant}$$

α	-860°	754°	$1\ 315^\circ$
----------	--------------	-------------	----------------

$$\operatorname{tg} \alpha \quad + \quad + \quad +$$

vista razinom (A)

Primjer 5.

Primjenom identiteta $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ popunimo tablicu.

$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	0.8
---------------	----------------------	-----

$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{3}$
---------------	----------------------	---------------

Rješenje:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3} \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \pm \sqrt{\frac{7}{9}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\sin \alpha = 0.8 \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - 0.8^2} = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5} = \pm 0.6$$

$\sin \alpha$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	0.8
---------------	-------------------	---------------------------	----------------------	-----

$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\pm \frac{\sqrt{7}}{3}$	± 0.6
---------------	----------------------	---------------	--------------------------	-----------

Primjer 6.

Pojednostavimo izraz $\frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 10^\circ - 1}{\sin 10^\circ \cdot \cos 80^\circ - 1}$.

Rješenje:

Zbog identiteta:

1. $\cos(90^\circ - x) = \sin x$ vrijedi $\cos 80^\circ = \cos(90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$,
2. $\sin(90^\circ - x) = \cos x$ vrijedi $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$.

$$\frac{\sin 80^\circ \cdot \cos 10^\circ - 1}{\sin 10^\circ \cdot \cos 80^\circ - 1} = \frac{\sin 80^\circ \cdot \sin 80^\circ - 1}{\cos 80^\circ \cdot \cos 80^\circ - 1} = \frac{\sin^2 80^\circ - 1}{\cos^2 80^\circ - 1} = \operatorname{ctg}^2 80^\circ$$

viša razina (A)

Primjer 7.

Izraz $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos x}$ napišimo bez razlomka, pa izračunajmo $f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\sin 2x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x \cdot (1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \\&= \frac{2 \sin x \cos x \cdot (1 - \cos x)}{\sin^2 x} = 2 \operatorname{ctg} x \cdot (1 - \cos x)\end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left[1 - \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = -2 \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Stoga je } f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.$$

viša razina (A)

Primjer 8.

Koristeći se formulama redukcije izračunajmo sljedeći izraz $\cos 93^\circ + \cos 267^\circ - \cos 273^\circ$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\cos 93^\circ + \cos 267^\circ - \cos 273^\circ &= \cos(90^\circ + 3^\circ) + \cos(270^\circ - 3^\circ) - \cos(270^\circ + 3^\circ) = \\&= -\sin 3^\circ + (-\sin 3^\circ) - \sin 3^\circ = -3 \sin 3^\circ\end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 9.

Ako je $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$, koliko je $|\cos x - \sin x|$?

Rješenje:

Koristimo se jednakošću:

$$|\cos x - \sin x|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x, \text{ pa dobijemo:}$$

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

$$(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$|\cos x - \sin x| = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

viša razina (A)

► Primjer 10.

Koliko je $\sin(x+y)$ ako je $\cos x = \frac{1}{2}$ i $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ za $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ i $\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$?

Rješenje:

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos y = -\sqrt{1 - \sin^2 y} = -\sqrt{1 - \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

viša razina (A)

► Primjer 11.

Ako je $\cos x = 0.4$ uz $\frac{3\pi}{2} < x < 2$ i $\sin y = -0.2$ uz $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$, koliko je $\operatorname{ctg}(x-y)$?

Rješenje:

$$\operatorname{ctg}(x-y) = \frac{\operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y + 1}{\operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}y} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{21} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{21}}{21}\right) + 1}{\frac{2\sqrt{21}}{21} + 2\sqrt{6}} = \frac{21 - 4\sqrt{126}}{42\sqrt{6} + 2\sqrt{21}} = -0.21331$$

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\cos y = -\sqrt{1 - \sin^2 y} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\operatorname{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

$$\operatorname{ctg}y = \frac{\cos y}{\sin y} = 2\sqrt{6}$$

viša razina (A)

► Primjer 12.

Izračunajmo $\frac{\cos 25^\circ \cdot \cos 32^\circ + \cos 115^\circ \cdot \sin 212^\circ}{\sin 25^\circ \cdot \cos 85^\circ + \sin 115^\circ \cdot \sin 95^\circ}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \frac{\cos 25^\circ \cdot \cos 32^\circ + \cos 115^\circ \cdot \sin 212^\circ}{\sin 25^\circ \cdot \cos 85^\circ + \sin 115^\circ \cdot \sin 95^\circ} &= \frac{\cos 25^\circ \cdot \cos 32^\circ + \cos(90^\circ + 25^\circ) \cdot \sin(180^\circ + 32^\circ)}{\sin 25^\circ \cdot \cos(90^\circ - 5^\circ) + \sin(90^\circ + 25^\circ) \cdot \sin(90^\circ + 5^\circ)} \\ &= \frac{\cos 25^\circ \cdot \cos 32^\circ - \sin 25^\circ \cdot (-\sin 32^\circ)}{\sin 25^\circ \cdot \sin 5^\circ + \cos 25^\circ \cdot \cos 5^\circ} = \frac{\cos(25^\circ - 32^\circ)}{\cos(25^\circ - 5^\circ)} = \frac{\cos(-7^\circ)}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 7^\circ}{\cos 20^\circ} \end{aligned}$$

viša razina (A)

► Primjer 13.

Izračunajmo $\cos \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{24} \right) + \cos \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{24} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

viša razina (A)

► Primjer 14.

Prikažimo u obliku umnoška, pa izračunajmo $\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4}$.

Rješenje:

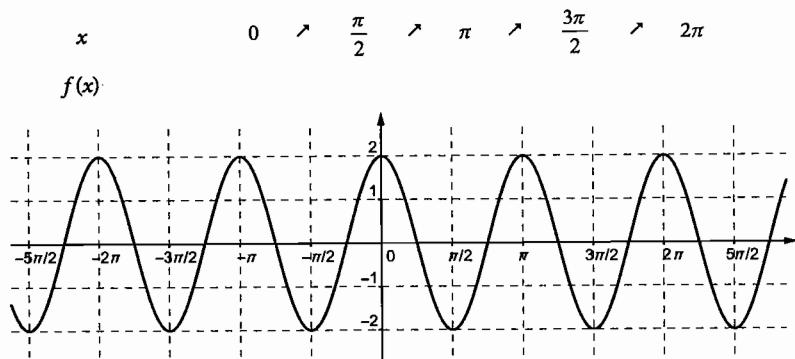
$$\sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{3\pi}{4} = 2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

viša razina (A)

Primjer 15.

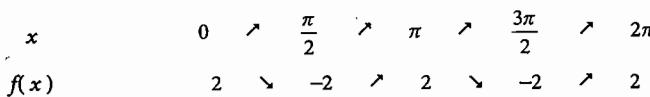
Iz grafa na slici odčitajmo ove podatke:

- nultočke pripadne funkcije u intervalu $[0, 2\pi]$,
- minimume funkcije na intervalu $[0, 2\pi]$, c) maksimume funkcije u intervalu $[0, 2\pi]$,
- temeljni period funkcije. e) U tablici opišimo tijek funkcije.



Rješenje:

- $\left(0, \frac{\pi}{4}\right); \left(0, \frac{3\pi}{4}\right); \left(0, \frac{5\pi}{4}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right); \left(\frac{3\pi}{2}, -2\right)$
- c) $(\pi, 2)$
- π
- e)



viši razina (A)

Primjer 16.

Za funkciju $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ odredimo period, nultočke, ekstreme i i skicirajmo graf trigonometrijske funkcije u koordinatnom sustavu.

Rješenje:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \text{ period}$$

Za $f(x) = A \sin(Bx + C)$ nultočke su dane izrazom $x_0 = \frac{k\pi - c}{B}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0 \rightarrow x - \frac{3\pi}{4} = k\pi \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ nultočke}$$

$$\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 1$$

$$x - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$x_k = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi = x - \frac{3\pi}{4}$$

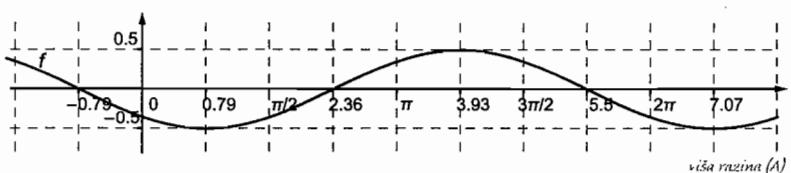
$$x_k = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + 2k$$

Maksimum

$$\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{1}{2} \right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Minimum

$$\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{1}{2} \right], \quad k \in \mathbb{Z}$$



► Primjer 17.

Za funkciju $f(x) = 2 \cos(3x - \frac{3\pi}{4})$ odredimo period, nultočke, ekstreme i skicirajmo graf trigonometrijske funkcije u koordinatnom sustavu.

Rješenje:

Uz pomoć formule $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ prevedimo funkciju u sinusoidu.

$$f(x) = 2 \cos(3x - \frac{3\pi}{4}) = 2 \sin(3x - \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = 2 \sin(3x - \frac{\pi}{4}).$$

Sad pronalazimo nultočke uz pomoć formule koju smo koristili u Primjeru 16.

$$\text{Za } f(x) = A \sin(Bx + C) \text{ nultočke su dane izrazom } x_0 = \frac{k\pi - c}{B}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Pa su tražene nultočke: } x_0 = (\frac{\pi}{12}, 0); \quad x_1 = (\frac{5\pi}{12}, 0); \quad x_3 = (\frac{9\pi}{12}, 0);$$

Ekstremi:

$$2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -2$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

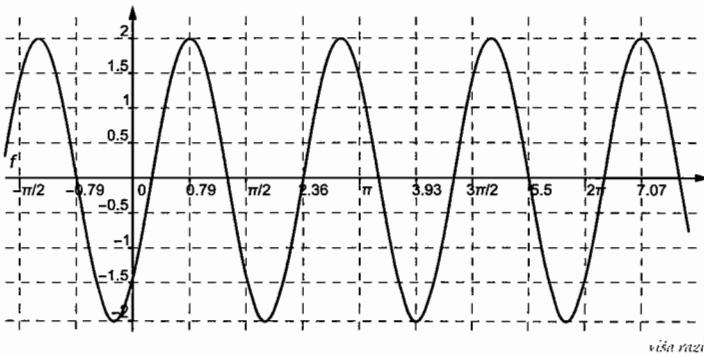
$$3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$



•2.7. Nizovi•

Zadatci višestrukog izbora

► **Primjer 1.**

Koji je od nizova zadani odrednicom kvadrati uzastopnih prirodnih brojeva?

- A) 1, 4, 9, 16, 25,... B) 2, 3, 5, 7, 11,... C) 2, 4, 6, 8, 10,... D) 1, 2, 3, 4, 5,...

Rješenje: A.

Prirodni brojevi: 1, 2, 3, 4, 5, 6...

Kvadrati prirodnih brojeva: 1, 4, 9, 16, 25, 36...

viša razina (A)

► **Primjer 2.**

Spoji niz $a_n = 2^n$ s njegovim opisom.

- A) niz uzastopnih potencija broja 2
 B) niz uzastopnih prirodnih brojeva
 C) niz uzastopnih parnih brojeva
 D) niz uzastopnih neparnih brojeva

Rješenje: A.

$$a_n = 2^n \quad a_1 = 2 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = 8 \quad a_4 = 16 \dots$$

viša razina (A)

► **Primjer 3.**

Koja formula zadaje niz: 10, 15, 20, 25, 30...:

- A) $n^2 - n$, B) $5(n + 1)$, C) $2n + 3$, D) $n - (n + 4)$?

Rješenje: B.

Za $n = 1, 2, 3, \dots$ računamo:

$$\begin{aligned} n^2 - n &\Rightarrow 0, 2, 6, 12, \dots \\ 5(n + 1) &\Rightarrow 10, 15, 20, 25, \dots \\ 2n + 3 &\Rightarrow 3, 5, 7, 9, 11, \dots \\ n - (n + 4) &\Rightarrow -4, -4, -4, \dots \end{aligned}$$

viša razina (A)

► **Primjer 4.**

Koji je od zadanih nizova aritmetički niz?

- A) $a_{n+1} = n + \frac{1}{2}$, n = 0, 1, 2, ... B) $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, n = 0, 1, 2, ...
 C) $a_{n+1} = 2n^2 + 1$, n = 0, 1, 2, ... D) $a_{n+1} = n^2 + 1$, n = 0, 1, 2, ...

Rješenje: A.

$$a_{n+1} = n + \frac{1}{2} \quad a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{3}{2} \quad a_3 = \frac{5}{2}, \dots \quad d = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

$$a_{n+1} = 2n^2 + 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_3 = 9, \dots$$

$$a_{n+1} = n^2 + 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 5, \dots$$

Aritmetički niz je onaj niz u kojemu je razlika svakih dvaju uzastopnih članova konstantna. Jedini niz s tim svojstvom jest niz pod A).

viša razina (A)

Primjer 5.

Koliko najmanje uzastopnih članova niza prirodnih brojeva, počevši od prvoga člana, treba zbrojiti da dobiveni zbroj bude veći ili jednak 250?

- A) 23 B) 21 C) 22 D) 20

Rješenje: C.

Formula za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jest $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Za niz prirodnih brojeva vrijedi $a_n = n$.

$$\frac{n}{2}(n+1) \geq 250 | \cdot 2$$

$$n(n+1) \geq 500$$

$$n^2 + n - 500 \geq 0 \Rightarrow n \in [21.87, +\infty) \Rightarrow \text{treba zbrojiti najmanje prva } 22 \text{ prirodna broja.}$$

viša razina (A)

Primjer 6.

Izdvojimo niz koji nije geometrijski, a za ostale nizove nađimo količnike.

- A) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ B) $1, 3, 9, 27, \dots$ C) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ D) $0.1, 0.01, 0.001, \dots$

Rješenje: C.

Niz je geometrijski ako je količnik svakog člana, osim prvoga, i člana neposredno ispred njega stalan. Taj se količnik označava s q .

$$A) 1 : (-1) = -1 \quad (-1) : 1 = (-1) \quad q = (-1)$$

$$B) 3 : 1 = 3 \quad 9 : 3 = 3 \quad q = 3$$

$$C) 4 : 1 = 4 \quad 9 : 4 = 2.25 \quad \text{nije geometrijski niz}$$

$$D) 0.01 : 0.1 = 0.1 \quad 0.001 : 0.01 = 0.1 \quad q = 0.1$$

viša razina (A)

Primjer 7.

Za geometrijski je niz zadano $a_1 = 12$, $q = 3$. Odredimo n za koji je $a_n = 324$.

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 8

Rješenje: B.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad 324 = 12 \cdot 3^{n-1}$$

$$27 = 3^{n-1}$$

$$3^3 = 3^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 3 \Rightarrow n = 4$$

viša razina (A)

► Primjer 8. ►

Koliki je zbroj svih potencija broja 3 koje su veće od 1000, a manje od 10 000?

- A) 59 049 B) 2 187 C) 8 748 D) 28 431

Rješenje: C.

$$1\ 000 \leq 3^n \leq 10\ 000$$

$$\log_3 1\ 000 \leq n \leq \log_3 10\ 000$$

$$n \in \{7, 8\}$$

$$3^7 + 3^8 = 8\ 748.$$

vruća razina (A)

► Primjer 9. ►

Zbroj geometrijskog reda $1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^6 + \dots$ jest:

- A) $\frac{8}{9}$, B) $\frac{9}{10}$, C) $\frac{10}{9}$, D) $\frac{9}{8}$.

Rješenje: B.

$$a_1 = 1 \quad q = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1} = -\frac{1}{9}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{9}{10}$$

vruća razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Nastavimo zadani niz: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Rješenje:

To je niz prostih brojeva, pa je sljedeći član niza 17.

Primjer 2.

Za niz zadani s $a_n = \begin{cases} \frac{n}{3}, & n \text{ paran} \\ 2n+1, & n \text{ neparan} \end{cases}$ popuni tablicu.

n	1	5	12	18
a_n				

Rješenje:

n	1	5	12	18
a_n	3	11	4	6

Primjer 3.

Za niz $0.5, -0.5, -1.5, -2.5, \dots$ napiši pravilo pridruživanja prema definiciji svaki je član aritmetička sredina svojih susjeda.

Rješenje:

$$a_1 = 0.5$$

$$a_2 = -0.5$$

$$a_3 = -1.5$$

$$d = a_3 - a_2 = -1.5 + 0.5 = -1$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 0.5 + (n-1) \cdot (-1)$$

$$= 0.5 - (n-1)$$

$$= 0.5 - n + 1$$

$$= 1.5 - n$$

viša razina (A)

Primjer 4.

Popunimo tablicu aritmetičkog niza.

d	a_1	a_3	a_5	a_7
-6	31			

Rješenje:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \Rightarrow a_n = 31 + (n-1) \cdot (-6) = 37 - 6 \cdot n$$

$$a_3 = 31 + 2 \cdot (-6) = 31 - 12 = 19$$

$$a_5 = 31 + 4 \cdot (-6) = 31 - 24 = 7$$

$$a_7 = 31 + 6 \cdot (-6) = 31 - 36 = -5$$

d	a_1	a_3	a_5	a_7
-6	31	19	7	-5

viša razina (A)

Primjer 5.

Neka je a_n aritmetički niz. Ako su zadani $a_8 = 14$ i $a_{17} = 23$, nađimo opći član niza.

Rješenje:

$$a_8 = 14 \Rightarrow 14 = a_1 + 7d$$

$$a_1 = 14 - 7d = 14 - 7 = 7$$

$$a_{17} = 23 \Rightarrow 23 = a_1 + 16d$$

$$a_1 = 7 + (n-1) \cdot 1$$

$$9 = 9d$$

$$a_n = n + 6$$

$$d = 1$$

viša razina (A)

Primjer 6.

Prizemlje zgrade visoko je 4 metra, a svaki kat iznad prizemlja 3 metra. Zgrada ukupno ima 12 katova (uključivši i prizemlje). Koliko je zgrada visoka?

Rješenje:

Podatke zapišimo u obliku aritmetičkog niza $a_n = 4 + (n-1) \cdot 3 = 3 \cdot n + 1$.

Tražena visina (u metrima) jednaka je: $a_{12} = 4 + 11 \cdot 3 = 37$ m.

viša razina (A)

► Primjer 7. ►►

Ako je niz 17, 51, 153, 459,... geometrijski, izračunajmo količnik i deseti član niza.

Rješenje:

$$a_1 = 17$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{51}{17} = 3$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_{10} = 17 \cdot 3^9 = 334\,611$$

viša razina (A)

► Primjer 8. ►►

Ako za geometrijski niz (a_n) vrijede jednakosti $a_1 + a_3 = 1\,285$ i $a_1 \cdot a_3 = 6\,400$, odredimo prvi član i količnik toga niza.

Rješenje:

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = 1\,285$$

$$\underline{a_1 \cdot a_1 \cdot q^2 = 6\,400}$$

$$a_1 \cdot (1 + q^2) = 1\,285$$

$$a_1^2 \cdot \left(\frac{1\,285}{a_1} - 1 \right) = 6\,400$$

$$1 + q^2 = \frac{1\,285}{a_1}$$

$$a_1^2 - 1\,285 a_1 - 6\,400 = 0$$

$$q^2 = \frac{1\,285}{a_1} - 1$$

$$a_1 = 1\,280, \quad a_1' = 5$$

$$q_1 = \frac{1}{16}, \quad q_1' = 16$$

viša razina (A)

► Primjer 9. ►►

Izračunajmo $S_1 + S_2$ ako je:

$$S_1 = 1 - \sin \alpha + \sin^2 \alpha - \sin^3 \alpha + \dots$$

$$S_2 = 1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha + \dots$$

Rješenje:

$$a_1 = 1$$

$$S_1 = \frac{1}{1 + \sin \alpha}$$

$$q = \frac{\sin^2 \alpha}{-\sin \alpha} = -\sin \alpha$$

$$a_1 = 1$$

$$S_2 = \frac{1}{1 - \cos \alpha}$$

$$q = \frac{\cos \alpha}{1} = \cos \alpha$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{1 + \sin \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 - \cos \alpha + \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)}$$

viša razina (A)

► Primjer 10. ►►

Zbroj beskonačnoga konvergentnog geometrijskog reda iznosi 10, a zbroj kvadrata njegovih članova 35. Nadimo prvi član niza.

Rješenje:

$$10 = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow a_1 = 10 \cdot (1 - q) = 10 \left(1 - \frac{13}{27} \right) = \frac{140}{27}$$

viša razina (A)

$$35 = \frac{a_1^2}{1-q^2}$$

$$35 = \frac{100 \cdot (1-q)}{1+q}$$

$$35 + 35q = 100 - 100q$$

$$135q = 65$$

$$q = \frac{13}{27}$$

viša razina (A)

• 2.8. Derivacija funkcije •

Zadatci višestrukog izbora

► Primjer 1. ►

Derivacija funkcije $f(x) = 3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - x + 1$ jest:

- A) $12x^3 - 3x^2 + x + 1$,
- B) $12x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$,
- C) $12x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$,
- D) $4x^3 - 3x^2 + 2x - x$.

Rješenje: C.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (x^4)' - f'(x) = 3 \cdot (x^4)' - \frac{1}{2}(x^3)' + (x^2)' - (x)' + (1)' \\ &= 3 \cdot 4x^3 - \frac{1}{2} \cdot 3x^2 + 2x - 1 + 0 \\ &= 12x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

viša razina (A)

► Primjer 2. ►

Pronađimo derivaciju funkcije $f(x) = -\frac{2}{x}$.

- A) -2
- B) $\frac{2}{x^2}$
- C) $-\frac{2}{x^2}$
- D) $-\frac{1}{x^2}$

Rješenje: B.

$$f'(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = -2 \cdot \frac{-(x)'}{x^2} = 2 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

Primjenili smo: $(c \cdot f(x))' = c \cdot [f(x)]'$

$$\left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}, \quad f(x) \neq 0$$

viša razina (A)

Primjer 3.

Derivacija funkcije $f(x) = x^4 - \sin \frac{\pi}{3}$ jest:

- A) $4x^3 + \cos \frac{\pi}{3}$, B) $12x^3 - \cos \frac{\pi}{3}$, C) $4x^3$, D) $12x^3 + \cos \frac{\pi}{3}$.

Rješenje: C.

$\sin \frac{\pi}{3}$ konstanta je pa je derivacija funkcije jednaka:

$$f'(x) = 4x^3 - \left(\sin \frac{\pi}{3} \right)' = 4x^3.$$

Primjer 4.

Derivacija funkcije $f(x) = 2\cos x + 4\sin x - \frac{\operatorname{tg} x}{2}$ jest:

- A) $-2\sin x + 4\cos x - \operatorname{ctg} x$,
 B) $-2\sin x + 4\cos x + \frac{\operatorname{ctg} x}{2}$,
 C) $-2\sin x - 4\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$,
 D) $-2\sin x + 4\cos x - \frac{1}{2\cos^2 x}$.

Rješenje: D.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (\cos x)' + 4 \cdot (\sin x)' - \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x)' = 2 \cdot (-\sin x) + 4 \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= -2\sin x + 4\cos x - \frac{1}{2\cos^2 x} \end{aligned}$$

više rješenja (A)

Primjer 5.

Derivacija funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ jest:

- A) $\frac{\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}$, B) $-\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$, C) 0, D) $-\operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$.

Rješenje: C.

Funkciju prije deriviranja možemo pojednostaviti:

$$f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1$$

$$f'(x) = 0$$

Primjer 6.

Derivacija funkcije $f(x) = \frac{2x-3}{x^3+4}$ iznosi:

- A) 0, B) $-\frac{3}{4}$, C) $\frac{2}{3x^2}$, D) $\frac{-4x^3+9x^2+8}{(x^3+4)^2}$.

Rješenje: D.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)' \cdot (x^3+4) - (2x-3) \cdot (x^3+4)'}{(x^3+4)^2} = \frac{2 \cdot (x^3+4) - 3x^2 \cdot (2x-3)}{(x^3+4)^2} = \\ &= \frac{2x^3+8-6x^3+9x^2}{(x^3+4)^2} = \frac{-4x^3+9x^2+8}{(x^3+4)^2} \end{aligned}$$

više rješenja (A)

► Primjer 7. ►

Derivacija složene funkcije $f(x) = 2 \cos(2x - \pi) - 1$ jest:

- A) -4, B) $4\sin(2x - \pi)$, C) $-4\sin(2x - \pi)$, D) $-4\sin 2x$.

Rješenje: C.

$$f'(x) = -2\sin(2x - \pi) \cdot (2x - \pi)' = -4\sin(2x - \pi)$$

Primjenili smo pravilo za deriviranje složene funkcije.

viša razina (A)

► Primjer 8. ►

Derivacija složene funkcije $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ jest:

- A) $-\frac{\sqrt{x-2}}{2 \cdot (x-2)^2}$, B) $\frac{\sqrt{x-2}}{2(x-2)^2}$, C) $-2\sqrt{x-2}$, D) $2\sqrt{x-2}$.

Rješenje: A.

Primjenimo pravila za deriviranje kvocijenta i deriviranje složene funkcije.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\left(\sqrt{x-2}\right)'}{\left(\sqrt{x-2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-2}} \cdot (x-2)'}{x-2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{\frac{x-2}{1}} = -\frac{1}{2(x-2)\cdot\sqrt{x-2}} = \\ &= -\frac{1}{2(x-2)\cdot\sqrt{x-2}} \cdot \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = -\frac{\sqrt{x-2}}{2(x-2)(x-2)} = -\frac{\sqrt{x-2}}{2(x-2)^2} \end{aligned}$$

viša razina (A)

► Primjer 9. ►

Jednadžba tangente položene na graf funkcije $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$ u njegovoj točki s apscisom -2 glasi:

- A) $y = -6x + 11$, B) $y = 14x - 17$, C) $y = 14x + 11$, D) $y = -6x + 2$.

Rješenje: C.

Tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0) toga grafa ima jednadžbu:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

$$f'(x) = -6x + 2$$

$$f'(-2) = -6 \cdot (-2) + 2 = 12 + 2 = 14$$

$$\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) = f(-2) = -3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 \\ &= -3 \cdot 4 - 4 - 1 = -17 \end{aligned}$$

$$y + 17 = 14 \cdot (x + 2)$$

$$y = 14x + 28 - 17$$

$$y = 14x + 11$$

viša razina (A)

► Primjer 10. ►

Jednadžba tangente na krivulju $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ u njezinoj točki s apscisom $\frac{\pi}{4}$ jest:

A) $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, B) $y = \sqrt{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}$,

C) $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, D) $y = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}$.

Rješenje: B.

Prema prethodnom primjeru:

$$f'(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi - \pi}{4}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y_0 = f(x_0) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \sqrt{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2}.$$

viša razina (A)

► Primjer 11. ►

Stacionarna točka funkcije $f(x) = x^2 - 4x - 2$ jest:

- A) (4, -2), B) (-2, 10), C) (2, -6), D) (2, 0).

Rješenje: C.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$f'(x) = 0$; realna su rješenja te jednadžbe apscise stacionarnih točaka

$$2x - 4 = 0$$

$$2x = 4$$

$$x = 2.$$

Nadimo još i ordinatu stacionarne točke uvrštavajući vrijednost $x = 2$ u analitički zapis funkcije.

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 2 = 4 - 8 - 2 = -6$$

viša razina (A)

► Primjer 12. ►

Globalni ekstrem funkcije $f(x) = x^2 - 3x + 2$ jest:

- A) maksimum $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, B) minimum $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$,

- C) minimum $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, D) maksimum $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Rješenje: B.

Nadimo derivaciju funkcije, a zatim je izjednačimo s nulom. Sva realna rješenje te jednadžbe stacionarne su točke i mogući ekstremi.

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{stacionarna točka}$$

Ispitajmo predznak druge derivacije u stacionarnoj točki. Ako je druga derivacija veća od nule, onda je stacionarna točka ujedno i lokalni minimum. Ako je druga derivacija manja od nule, onda je stacionarna točka ujedno i lokalni maksimum.

$f''(x) = 2 > 0$ lokalni minimum

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9 - 18 + 8}{4} = -\frac{1}{4}$$

viša razina (A)

► **Primjer 13.**

Funkcija $f(x) = 8x^2 - \ln x$ raste na:

- A) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, B) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, C) $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, D) $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

Rješenje: C.

$$f'(x) = 16x - \frac{1}{x} = \frac{16x^2 - 1}{x}$$

$f'(x) > 0$; intervali rasta koji su podskupovi domene funkcije $f(x)$ rješenja su te nejednadžbe $\frac{16x^2 - 1}{x} > 0$

I. slučaj

$$16x^2 - 1 > 0$$

$$x > 0$$

$$x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

II. slučaj

$$16x^2 - 1 < 0$$

$$x < 0$$

$$x \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

Prema definiciji logaritamske funkcije, logaritmand ne može biti negativan

ili 0, pa funkcija raste na intervalu $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

viša razina (A)

► **Primjer 14.**

Polinom $f(x) = (m-1) \cdot x^2 + (m+1) \cdot x - 4$ u $x = 1$ ima maksimum. Taj je maksimum jednak:

- A) 3, B) $-\frac{1}{3}$, C) $-\frac{10}{3}$, D) -4.

Rješenje: C.

$$f'(x) = 2x \cdot (m-1) + (m+1)$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x \cdot (m-1) + (m+1) = 0$$

$$x = \frac{m+1}{2 \cdot (1-m)}.$$

Za $x = 1$ slijedi $m = \frac{1}{3}$, pa je $f(1) = -\frac{10}{3}$, $f''(1) = \frac{-4}{3} < 0$.

viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \frac{x}{2x-5}$.

Rješenje:

$$f'(x) = \frac{x \cdot (2x-5) - x \cdot (2x-5)'}{(2x-5)^2} = \frac{2x-5-2x}{(2x-5)^2} = \frac{-5}{(2x-5)^2}$$

Primjer 2.

Izračunajmo $f'(4)$ ako je $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-x}{x-\sqrt{x}}$.

Rješenje:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x\sqrt{x}-x)' \cdot (x-\sqrt{x}) - (x\sqrt{x}-x) \cdot (x-\sqrt{x})'}{(x-\sqrt{x})^2} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} - 1\right) \cdot (x-\sqrt{x}) - (x\sqrt{x}-x) \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-\sqrt{x})^2} \\ f'(4) &= \frac{\left(\sqrt{4} + \frac{4}{2\sqrt{4}} - 1\right) \cdot (4-\sqrt{4}) - (4\sqrt{4}-4) \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{4}}\right)}{(4-\sqrt{4})^2} = \\ &= \frac{(2+1-1) \cdot (4-2) - (8-4) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)}{4} = \frac{2 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{3}{4}}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Primjer 3.

Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \cos(\sqrt{x-3})$.

Rješenje:

$$f'(x) = -\sin(\sqrt{x-3}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{-\sin\sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3}}$$

Primjer 4.

Napišimo jednadžbu normale na krivulju $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ u njezinoj točki s apscisom $\frac{\pi}{3}$.

Rješenje:

$$y' = \frac{-(\sqrt{\cos x})'}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x)}{\cos x} = \frac{\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x} \cdot \cos x}$$

$$k_t = y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{\cos \frac{\pi}{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ koeficijent smjera tangente}$$

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}; \text{ koeficijent smjera normale}$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{\cos \frac{\pi}{3}}} = \sqrt{2}$$

Jednadžba normale:

$$y - y_0 = k_t \cdot (x - x_0)$$

$$y - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{6}}{3} x + \frac{\pi \sqrt{6}}{9} + \sqrt{2}$$

vila razina (A)

Primjer 5.

Tangenta na krivulju $y = 4x^2 - 5x + 3$ u njezinoj točki s apscisom $x = -3$ zatvara trokut s koordinatnim osima. Odredimo površinu tog trokuta.

Rješenje:

$$y' = 8x - 5$$

$$y_0 = 4 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 3 = 54$$

$$k_t = y'(-3) = 8 \cdot (-3) - 5 = -29$$

$$y - y_0 = k_t \cdot (x - x_0)$$

$$y - 54 = -29 \cdot (x + 3)$$

$$y = -29x - 33, \text{ jednadžba tangente}$$

$$29x + y = -33 \mid : (-33)$$

$$\frac{x}{-33} + \frac{y}{-33} = 1$$

$$P = \frac{\left| -33 \cdot \left(-\frac{33}{29} \right) \right|}{2} = \frac{1089}{58} \approx 18.7759 \text{ kv. jed.}$$

Primjer 6.

Odredimo drugu derivaciju funkcije $f(x) = \sin x \cdot \ln x$.

Rješenje:

$$f'(x) = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \left(\frac{1}{x} \right) = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x \cdot \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} + \cos x \cdot \frac{1}{x} + \sin x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \\ &= -\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = \\ &= -\sin x \cdot \ln x + \frac{2\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \end{aligned}$$

Primjer 7.

Je li funkcija $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ u okolini točke s apscisom 3 rastuća ili padajuća?

Rješenje:

Da bismo utvrdili je li funkcija u okolini neke točke padajuća ili rastuća, moramo odrediti predznak prve derivacije u toj točki. Ako je $f'(x_0) > 0$, funkcija je rastuća. U suprotnome, funkcija je padajuća.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 = 3 \cdot 9 - 12 = 27 - 12 = 15 > 0; \text{ funkcija je rastuća}$$

Primjer 8.

Odredimo stacionarne točke, pa u tablici opiši tijek funkcije koristeći se prvom derivacijom funkcije $f(x) = x^2 + 3x + 12$

Rješenje:

1. Odredimo prvu derivaciju funkcije f :

$$f'(x) = 2 \cdot x + 3$$

2. Riješimo jednadžbu $f'(x) = 0$:

$$2 \cdot x + 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

3. Ispitajmo sada funkciju na intervalima monotonosti:

$$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \quad \text{npr. } f'(-2) = 2 \cdot (-2) + 3 = -1 < 0; \text{ funkcija pada}$$

$$\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \quad \text{npr. } f'(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3 > 0; \text{ funkcija raste.}$$

4. Tijek funkcije

	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
Predznak od f'	-	+	
Funkcija f	↘	↗	

viša razina (A)

Primjer 9.

Pronadimo ekstrem i ispitajmo njegov karakter koristeći se drugom derivacijom funkcije

$$f(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 7x - 3.$$

Rješenje:

Za određivanje ekstrema potrebno je riješiti jednadžbu $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{15}{2} \cdot 2x + 7 = 3x^2 - 15x + 7$$

$$3x^2 - 15x + 7 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = \frac{15 \pm \sqrt{141}}{6}$$

$$x_1 \approx 4.4791$$

$$\Rightarrow$$

$$f(4.4791) = -32.2526$$

$$x_2 \approx 0.5209, \text{ maksimum}$$

$$\Rightarrow$$

$$f(0.5209) = -1.2474$$

$$f''(x) = 6x - 15$$

$$f''(4.4791) = 11.8746 > 0, \text{ lokalni minimum} \quad (4.4791, -32.2526)$$

$$f''(0.5209) = -11.8746 < 0, \text{ lokalni maksimum} \quad (0.5209, -1.2474)$$

viša razina (A)

► Primjer 10. ►

Odredimo intervale konveksnosti i intervale konkavnosti, te točke pregiba za funkciju $f(x) = -x^3 + 3x$.

Rješenje:

$$f'(x) = -3x^2 + 3, \quad f''(x) = -6x.$$

Točku pregiba dobijemo kao rješenje jednadžbe $f''(x) = 0$.

Dakle, ta funkcija ima pregib u točki $(0, 0)$.

Funkcija je konkavna za $f''(x) > 0$, tj. na intervalu $(-\infty, 0)$.

Funkcija je konveksna za $f''(x) < 0$, tj. na intervalu $(0, +\infty)$.

viša razina (A)

► Primjer 11. ►

Odredimo interval konkavnosti funkcije $f(x) = 3x^3 - x$.

Rješenje:

$$f'(x) = 9x^2 - 1, \quad f''(x) = 18x$$

Funkcija je konkavna za $f''(x) > 0$, tj. $18x > 0$, $x \in (0, +\infty)$.

viša razina (A)

• 2.9. Funkcije – zadatci za vježbu •

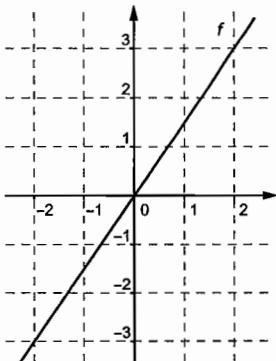
Zadaci višestrukog izbora

Rješenja zadataka potražite na str. 448.

- Za funkciju $f(x) = x^2 + 2x + 1$ izračunaj $f(\sqrt{2} - 1)$.
A) $2\sqrt{2}$ B) -2 , C) 2 , D) 1
- Za funkciju $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x-1}$ izračunaj $f\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$.
A) 2 B) 0 C) 1 D) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$
- Za funkciju $f(x) = \frac{\log_2(4x^3)}{\log_{\sqrt{2}}x - \log_{0,5}x}$ izračunaj $f(2)$.
A) $\frac{5}{3}$ B) 0 C) 5 D) $\frac{3}{5}$
- Za funkciju $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + 1}$ izračunaj $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
A) 3 B) $\sqrt{2} + 2$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$
- Za funkciju $f(x) = \frac{2 \operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + \operatorname{ctg} x}$ izračunaj $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.
A) $14 + 9\sqrt{3}$ B) $\frac{3\sqrt{4}(14 + 9\sqrt{3})}{74}$ C) $4\sqrt{3}$ D) $\frac{4\sqrt{3}(14 + 9\sqrt{3})}{141}$

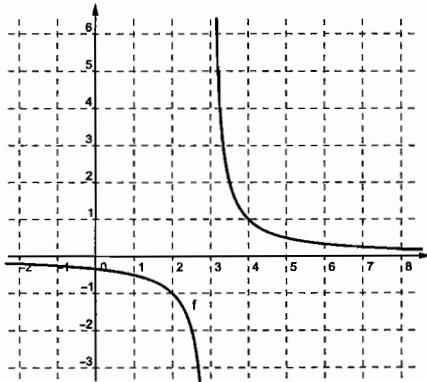
6. Područje definicije funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ jest:
 A) $(-4, 4)$, B) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, C) \mathbb{R} , D) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$.
7. Područje definicije funkcije $f(x) = \frac{2x-1}{4x^2-4x+1}$ jest:
 A) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$, B) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, C) \mathbb{R} , D) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.
8. Područje definicije funkcije $f(x) = \frac{2x-1}{\sin x}$ jest:
 A) $\langle k\pi, 2k\pi \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$, B) $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$, C) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$, D) \mathbb{R} .
9. Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+3}}$ jest:
 A) \emptyset , B) \mathbb{R} , C) $\langle -3, 1 \rangle$, D) $\langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.
10. Područje definicije funkcije $f(x) = \log_2 \left(\frac{2-x}{3x+2} \right)$ jest:
 A) $\left(-\frac{2}{3}, 2 \right)$, B) $\left(-\infty, -\frac{2}{3} \right) \cup \langle 2, +\infty \rangle$, C) \mathbb{R} , D) \emptyset .
11. Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$ jest:
 A) $\langle -\infty, -5 \rangle$, B) $\langle -5, 1 \rangle$, C) \mathbb{R} , D) $\langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.
12. Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{2 - |x-5|}$ jest:
 A) $\langle 3, 7 \rangle$, B) $\langle 5, 7 \rangle$, C) $[3, 7]$, D) $\langle 3, 5 \rangle$.
13. Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{2^{x-1}}$ jest:
 A) $\langle 1, +\infty \rangle$, B) \mathbb{R} , C) $\langle 0, +\infty \rangle$, D) \emptyset .
14. Područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1}$ jest:
 A) $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right)$, $k \in \mathbb{Z}$, B) \mathbb{R} , C) $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right)$, D) $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right)$.
15. Ako je $f(\sin x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, onda je $f\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)$ jednako:
 A) $\frac{3}{2}$, B) $-\frac{3}{2}$, C) -2 , D) 2 .
16. Ako je $f(\sin x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - 1$, onda je $f\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right)$ jednako:
 A) $-\frac{1}{2}$, B) -2 , C) 0 , D) 2 .

17. Sa slike iščitaj vrijednost funkcije za $x = -2$.



- A) 3 B) 0 C) -3 D) 2

18. Funkcija na slici postiže vrijednost 1 za argument jednak:



- A) -2, B) 4, C) 0, D) 1.

19. Ako je $f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{x^2}$, onda je $f(x)$ jednako:

A) $\frac{(x-1)^2}{x^2}$, B) $\frac{x^2-1}{x^2}$, C) $\frac{1-x^2}{x^2}$, D) $\frac{x^2}{(x-1)^2}$.

20. Ako je $f(1-t) = \frac{3t}{t-5}$, onda je $f(t)$ jednako:

A) $\frac{t-1}{t+4}$, B) $\frac{1-t}{4+t}$, C) $\frac{3t-3}{t+4}$, D) $\frac{t-3}{4+t}$.

21. Ako je $f(2x-1) = \frac{1}{x}$, onda je $f\left(\frac{1}{x}\right)$ jednako:

A) $\frac{1}{2x-1}$, B) $\frac{1}{x}$, C) $\frac{x+1}{2}$, D) $\frac{2x}{x+1}$.

22. Ako je $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ i $g(x) = -x^3 + x - 1$, onda je:

a) $f(x) + g(x)$ jednako:

A) $x^3 + x + 2$, B) $x^2 - x + 1$, C) $x^3 - x^2 + x + 2$, D) $x^3 - 2x^2 + x - 1$;

- b) $2f(x) - g(x)$ jednako:
- A) $x^3 - 3x^2 - 2$, B) $x^3 - 2x^2 + x - 7$, C) $4x^3 - 2x^2 - x + 1$, D) $5x^3 - 2x^2 - x + 7$;
- c) $f(x) \cdot g(x)$ jednako:
- A) $x^5 - 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$, B) $-2x^6 + x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x - 3$,
 C) $x^6 + 2x^4 + x^2 - 3$, D) $2x^6 + x^5 - 3x^2 + 2x - 3$;
- d) $g^2(x)$
- A) $x^5 + 2x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1$, B) $x^6 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 1$,
 C) $x^6 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1$, D) $x^5 - 2x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + 1$;
- e) $f(x) : g(x)$ jednako:
- A) -2 , B) nije djeljivo bez ostatka, C) $-2x$, D) 1 ;
- f) $-\frac{3}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x)$ jednako:
- A) $\frac{7}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$, B) $x^3 - x^2 + x + 2$,
 C) $-\frac{7}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2} - 5$, D) $-7x^3 + 3x^2 + x - 7$.
23. Ako je $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ i $g(x) = 3x - 2$, onda je $f(x) - 2g(x)$ jednako:
- A) $\frac{1}{2}x^2 - 7x + 6$, B) $\frac{1}{2}x^2 - 7x - 6$, C) $\frac{1}{2}x^2 - 5x - 5$, D) $-\frac{1}{2}x^2 + 5x + 5$.
24. Ako je $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x - x + \frac{1}{2}$ i $g(x) = 2x^3 - 2x$ onda je $\frac{1}{2}f(x) \cdot [-g(x)]$ jednako:
- A) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - \frac{x}{2}$, B) $-\frac{3}{2}x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - \frac{x}{2}$,
 C) $-\frac{3}{2}x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + \frac{x}{2}$, D) $3x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + \frac{x}{2}$.
25. Ostatak dijeljenja polinoma $f(x) = 6x^3 - 4x^2 + x - 2$ i $g(x) = 2x + 1$ jednak je:
- A) $-\frac{17}{4}$, B) -17 , C) 1 , D) \emptyset .
26. Ako je rezultat dijeljenja polinoma $f(x) = 2x^2 - 4x + \frac{7}{2}$ polinomom $g(x)$ jednak $2x - 1$ bez ostatka, onda je polinom $g(x)$ jednak:
- A) $x + 3$, B) $x - 2$, C) $x - \frac{3}{2}$, D) $x - \frac{2}{3}$.
27. Rezultat dijeljenja polinoma $f(x)$ polinomom $x - 2$ jednak je $2x^2 + 6$ bez ostatka. Polinom $f(x)$ jednak je:
- A) $x^3 - 4x^2 + 3x - 2$, B) $2x^3 - 4x^2 + 6x - 12$,
 C) $2x^3 - 4x^2 + 6x - 6$, D) ne može se riješiti.
28. Ako je $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, onda je $(f \circ g)(x)$ jednak:
- A) $\sqrt{(2x-3)^2 - 1}$, B) $\frac{2\sqrt{x^2 - 1}}{x^2 - 1}$, C) $\frac{2}{\sqrt{x^2 - 1}} - 3$, D) $2\sqrt{x^2 - 1} - 3$.

29. Ako je $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = x^2 - 2$, onda je $3(f \circ g)(x)$ jednako:

- A) $x^2 - 3$, B) $\frac{3}{x^2 - 2}$, C) $\frac{1}{x^2} - 2$, D) $x - \frac{1}{x}$.

30. Ako je $f(x) = f(x) = \frac{x-1}{2-x}$ i $g(x) = 2x^2 - 3$, onda je $(g \circ f)(-2)$ jednako:

- A) $\frac{8}{15}$, B) $-\frac{8}{15}$, C) $-\frac{15}{8}$, D) $\frac{15}{8}$.

31. Ako je $f(x) = 2\log_2(x-1)$ i $g(x) = \frac{1}{x}$, onda je $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$ jednako:

- A) $-\frac{1}{2}$, B) 0, C) 1, D) $\frac{1}{2}$.

32. Za polinom $f(x)$ drugog stupnja vrijede jednakosti $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$, i $f(0) = 3$. Taj je polinom jednak:

- A) $-3x^2 + x - 2$, B) $3x^2 - 2x + 1$, C) $-2x^2 + x + 3$, D) $x^2 - 2x + 3$.

33. Slika polinoma $f(x) = -2x^2 + x + 3$ jest:

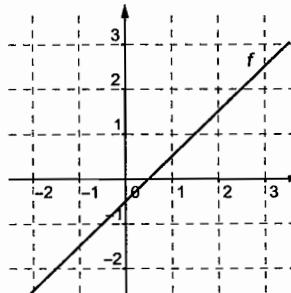
- A) $\langle 0, +\infty \rangle$, B) $\left(-\infty, \frac{25}{8}\right]$, C) $\left[\frac{25}{8}, +\infty\right)$, D) \mathbb{R} .

34. Polinom $f(x)$ drugog stupnja za koji vrijede jednakosti $f(-2) = 2$, $f(3) = 0$ i $f(-1) = 2$ jednak je:

- A) $\frac{1}{10}x^2 + 3x - \frac{9}{5}$, B) $-x^2 + 3x - 9$, C) $-x^2 + 3x + 18$, D) $-\frac{1}{10}x^2 - \frac{3}{10}x + \frac{9}{5}$.

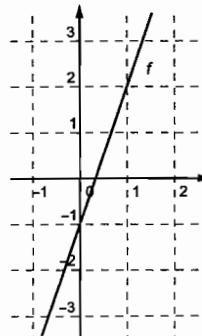
35. Graf na slici prikazuje funkciju:

- A) $f(x) = x - 2$,
B) $f(x) = x - \frac{1}{2}$,
C) $f(x) = 2x - 1$,
D) $f(x) = x + 1$.



36. Graf na slici prikazuje funkciju:

- A) $f(x) = x - 3$,
B) $f(x) = x - 1$,
C) $f(x) = 3x - 1$,
D) $f(x) = x + 1$.



37. Sjecište grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x - 3$ s osi x je u točki:

A) $(1, 0)$, B) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, C) $(-3, 0)$, D) $(9, 0)$.

38. Sjecište grafa funkcije $f(x) = 2x - \frac{5}{3}$ s osi x je u točki:

A) $(2, 0)$, B) $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$, C) $(-3, 0)$, D) $\left(\frac{5}{6}, 0\right)$.

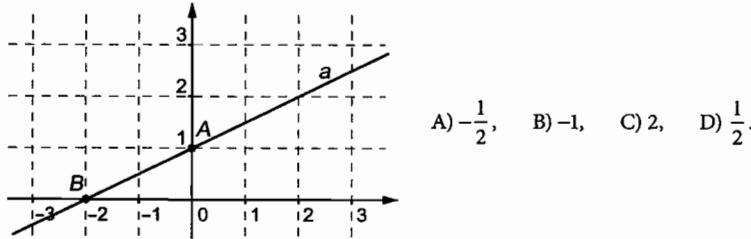
39. Površina trokuta što ga graf funkcije $f(x) = 2x - 3$ zatvara s koordinatnim osima jest:

A) $\frac{1}{2}$ kv. jed., B) $\frac{9}{4}$ kv. jed., C) $-\frac{9}{4}$ kv. jed., D) 1 kv. jed.

40. Površina trokuta koji graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$ zatvara s koordinatnim osima jest:

A) 25 kv. jed., B) 1 kv. jed., C) $\frac{5}{2}$ kv. jed., D) 5 kv. jed.

41. Koeficijent smjera pravca na slici je:



A) $-\frac{1}{2}$, B) -1 , C) 2 , D) $\frac{1}{2}$.

42. Koja od točaka pripada grafu funkcije $f(x) = -x + \frac{3}{2}$?

A) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ B) $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ C) $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ D) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

43. Linearna funkcija čijem grafu pripadaju točke $(3, -2)$ i $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ jest:

A) $f(x) = \frac{11}{2}x - \frac{5}{2}$, B) $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$, C) $f(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$, D) $f(x) = 5x + 11$.

44. Koja od točaka pripada grafu funkcije $f(x) = ax + b$ prikazane u sljedećoj tablici?

x	1	-2	0	3
$f(x)$	4	7	5	2

A) $(2, 3)$ B) $(-1, 7)$ C) $(-3, 9)$ D) $(4, 2)$

45. Koja od točaka pripada grafu funkcije $f(x) = ax + b$ prikazane u sljedećoj tablici?

x	0	2	4	-2
$f(x)$	-3	-2	-1	-4

- A) $\left(-3, -\frac{7}{2}\right)$ B) $\left(1, -\frac{5}{2}\right)$ C) $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ D) $(3, 0)$

46. Kojoj linearnej funkciji pripada tablica?

x	0	$\frac{1}{2}$	3
$f(x)$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$

- A) $f(x) = 2x - \frac{7}{2}$ B) $f(x) = x + \frac{5}{2}$ C) $f(x) = -x + \frac{7}{2}$ D) $f(x) = -2x + \frac{7}{2}$

47. Kojoj linearnej funkciji pripada tablica?

x	-1	0	2
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	2	3

- A) $f(x) = x + 2$ B) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ C) $f(x) = -\frac{x}{2} - 2$ D) $f(x) = -x + \frac{1}{2}$

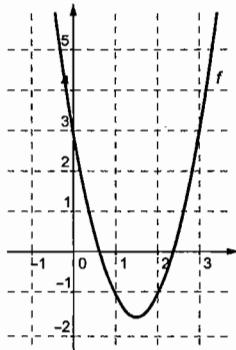
48. Slobodni koeficijent funkcije $f(x) = -3x^2 + \frac{x}{2} + c$ za koju vrijedi $f(-1) = \frac{1}{2}$ jest:

- A) 3, B) -3, C) 4, D) -4.

49. Koeficijent uz kvadratni član funkcije $f(x) = ax^2 + \frac{3}{2}x - 1$ za koju vrijedi $f(-2) = 3$ jest:

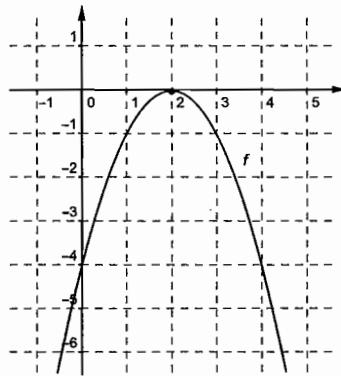
- A) $\frac{3}{4}$, B) $\frac{7}{4}$, C) $\frac{1}{4}$, D) $\frac{2}{3}$.

50. Koja dva izraza opisuju graf ove funkcije?



- A) $a < 0, D = 0$ B) $a > 0, D > 0$
C) $a < 0, D < 0$ D) $a < 0, D > 0$

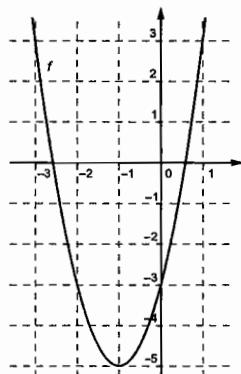
51. Koji od sljedećih četiriju parova izraza opisuje graf funkcije?



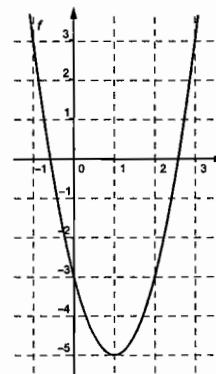
- A) $a > 0, D = 0$ B) $a > 0, D > 0$
 C) $a < 0, D < 0$ D) $a < 0, D = 0$

52. Koji od grafova prikazuje funkciju $f(x) = -2(x+1)^2 - 5$?

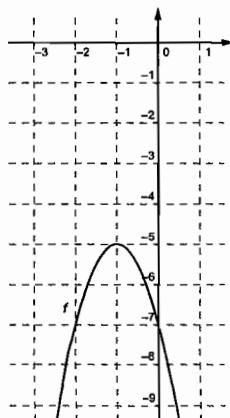
A)



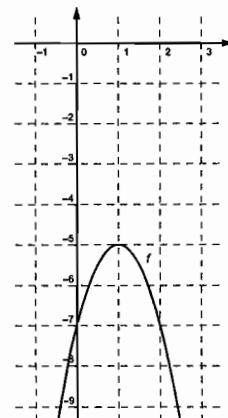
B)



C)

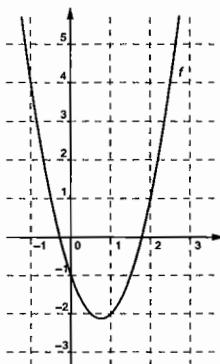


D)

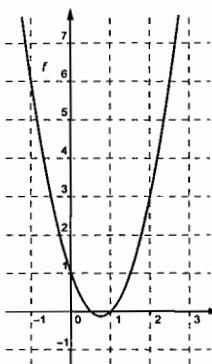


53. Koji od grafova prikazuje funkciju $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$?

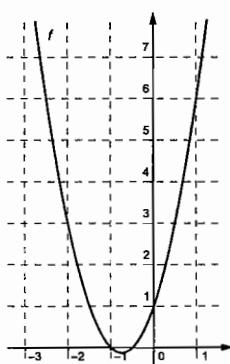
A)



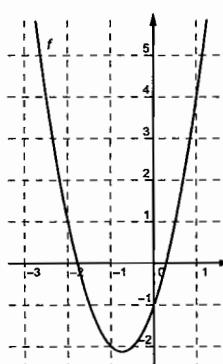
B)



C)



D)



54. Graf funkcije $f(x) = 2(x-1)^2 + 4$ nastaje translacijom grafa $g(x) = 2(x-1)^2$:

- A) udesno za 2, B) prema gore za 4, C) prema dolje za 4, D) ulijevo za 1.

55. Graf funkcije $f(x) = x^2 - 3x + 1$ nastaje translacijom grafa $g(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$:

- A) prema gore za $\frac{5}{4}$, B) prema dolje za $\frac{3}{4}$,
 C) prema dolje za $\frac{5}{4}$, D) prema gore za $\frac{3}{4}$.

56. Funkcija $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5}x - 1$ ima minimum u točki s ordinatom:

- A) 1, B) -1, C) $-\frac{49}{50}$, D) $-\frac{49}{50}$.

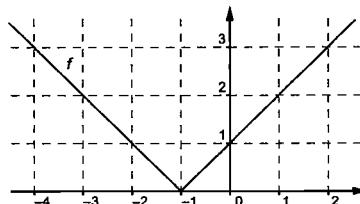
57. Funkcija $f(x) = -2x^2 + 5x - 1$ za $x = -2$ istu vrijednost ima kao i za x jednako:

- A) 0, B) -2, C) $\frac{9}{2}$, D) $\frac{2}{9}$.

58. Funkcija $f(x) = 3x^2 - 4x + 7$ za $x = -3$ ima istu vrijednost kao i za x jednako:

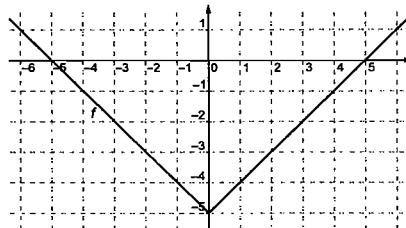
- A) 7, B) $\frac{13}{3}$, C) $\frac{3}{13}$, D) 1.

59. Na slici je prikazan graf funkcije:



- A) $y = |x + 1|$, B) $y = -|x| + 1$,
C) $y = |x| + 1$, D) $y = |x - 1|$.

60. Na slici je prikazan graf funkcije:



- A) $y = |x + 5|$, B) $y = |x| + 5$,
C) $y = |-x| - 5$, D) $y = -|x| + 5$.

61. Funkcija $f(x) = |x - 2|$ pada na intervalu:

- A) $(-\infty, -2)$, B) \mathbb{R} , C) $(-\infty, 2)$, D) $(2, +\infty)$.

62. Funkcija $f(x) = \left|x - \frac{3}{2}\right|$ raste na intervalu:

- A) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, B) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, C) $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, D) $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

63. Funkcija $f(x) = |x| - 3$ raste na intervalu:

- A) $(-\infty, 0)$, B) $(0, +\infty)$, C) $(3, +\infty)$, D) $(-3, +\infty)$.

64. Koja od tablica pripada funkciji $f(x) = |x| - 3$?

A)

B)

x	-2	0
$f(x)$	-1	-3

x	1	-3
$f(x)$	0	5

C)

D)

x	4	-1
$f(x)$	1	-4

x	2	3
$f(x)$	-1	6

65. Funkcija $f(x) = |x + 5|$ ima domenu:

- A) $(-\infty, -5)$, B) \mathbb{R} , C) $(5, +\infty)$, D) \emptyset .

66. Slika funkcije $f(x) = |2x - 5| + 3$ jest:

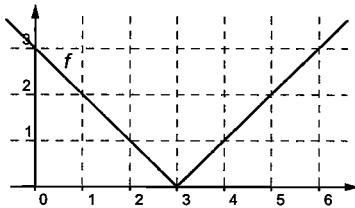
- A) $(-\infty, 3)$, B) $[-3, +\infty)$, C) $[3, +\infty)$, D) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

67. Slika funkcije $f(x) = |x + 5|$ jest:

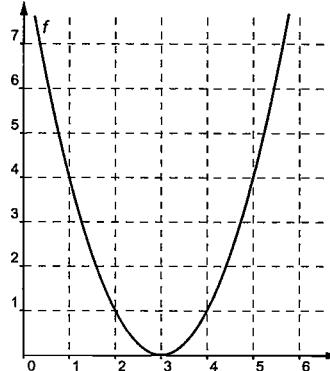
- A) $(-\infty, 5)$, B) $[0, +\infty)$, C) $[5, +\infty)$, D) $(-\infty, -5)$.

68. Koji od grafova prikazuje funkciju $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$?

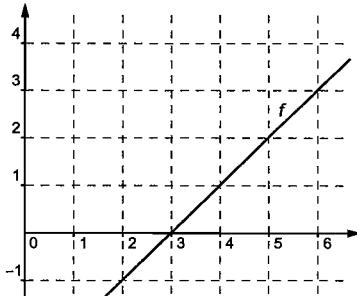
A)



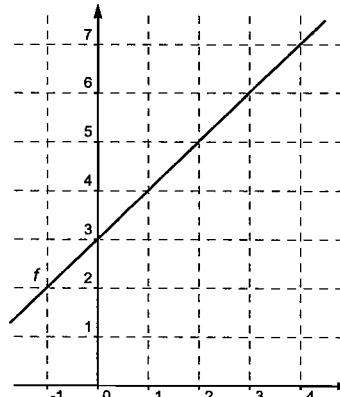
B)



C)



D)



69. Domena funkcije $f(x) = \sqrt{|x - 5|}$ jest:

- A) $(5, 0)$, B) \mathbb{R} , C) $(5, +\infty)$, D) $(-\infty, -5)$.

70. Domena funkcije $f(x) = \sqrt{|x + 1|} + \sqrt{|2 - x|}$ jest:

- A) $(-\infty, 1)$, B) $(2, +\infty)$, C) \mathbb{R} , D) $(1, 2)$.

71. Graf funkcije $f(x) = ax^3 + b$ prolazi točkama A(1, 0) i B(-2, 3). Analitički zapis funkcije $f(x)$ glasi:

- A) $f(x) = -3x^3 + 7$, B) $f(x) = -7x^3 + 3$, C) $f(x) = \frac{3}{7}x^3 - \frac{3}{7}$, D) $f(x) = 3x^3 - 3$.

72. Odredite koja je funkcija neparna.

- A) $f(x) = 3x^3 + x$ B) $f(x) = x^5 - 1$ C) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ D) $f(x) = x^2$

73. Domena funkcije $f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1}$ jest:

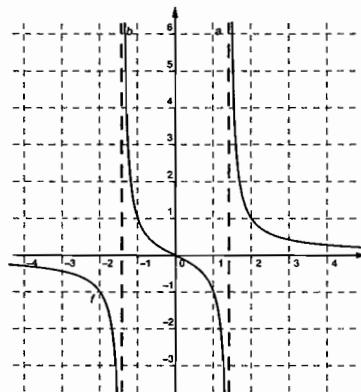
- A) \mathbb{R} , B) $(1, +\infty)$, C) $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, D) $(1, -1)$.

74. Domena funkcije $f(x) = \frac{2x}{x^2-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$ jest:

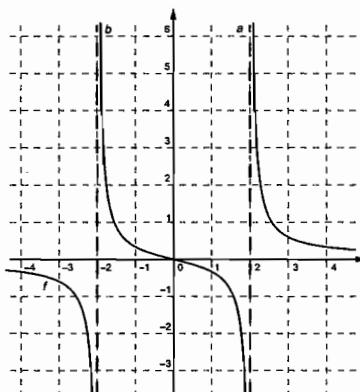
- A) $(-1, +\infty)$, B) $(-1, 1)$, C) \mathbb{R} , D) $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

75. Koji od grafova pripada funkciji $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$?

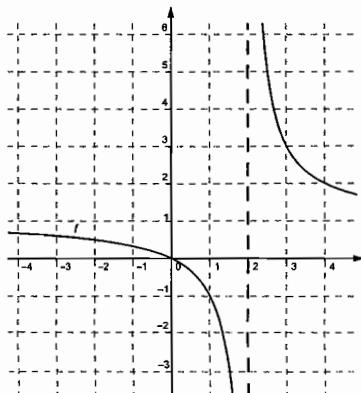
A)



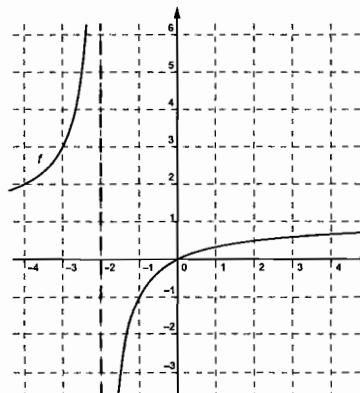
B)



C)

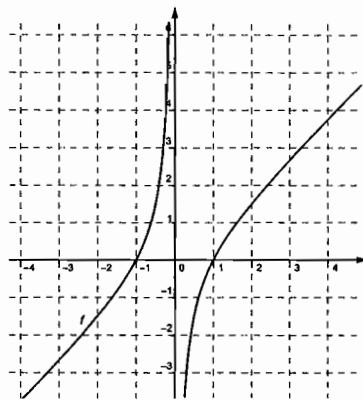


D)

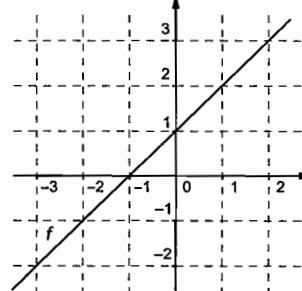


76. Koji od grafova pripada funkciji $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$?

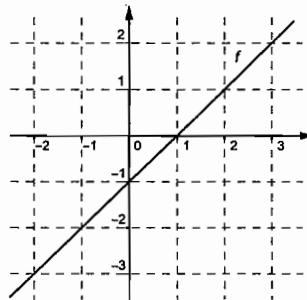
A)



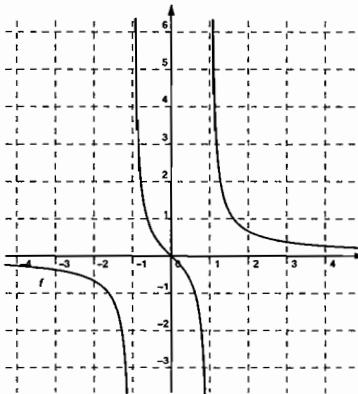
B)



C)



D)



77. Koja od točaka pripada funkciji $f(x) = 3^x \cdot 3^{x-1} \cdot \frac{1}{3}$?

- A) $(-1, 3)$, B) $(1, 3)$, C) $\left(0, \frac{1}{9}\right)$, D) $(0, 9)$

78. Odredite koja točka pripada funkciji $f(x) = \log_3 x$.

- A) $(1, 3)$, B) $(-1, 3)$, C) $(\frac{1}{3}, 1)$, D) $(3, 1)$

79. Ako je $\log_2 x = \log_2 3 - \log_2 2 + 4$, onda je x jednako:

- A) 6, B) 24, C) 11, D) 5.

80. Ako je $\log_5 x = 1 - \log_5 25 + \frac{1}{2} \log_5 5$, onda je x jednako:

- A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, B) $5\sqrt{5}$, C) $\sqrt{5}$, D) 5.

81. Funkcija $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^{x-6}$ jednaka je funkciji:

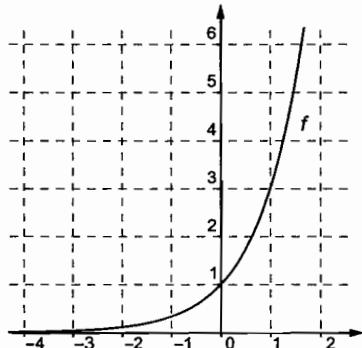
- A) 3^{6x-3} , B) 3^{6-x} , C) 3^{12-2x} , D) 3^{2x-12} .

82. Funkcija $f(x) = \log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x$ jednaka je funkciji:

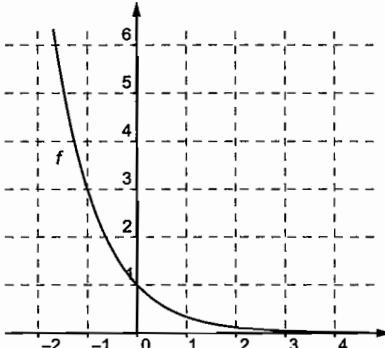
- A) $2\log_3 x$, B) $\log_3 x^3$, C) $\log_3 \sqrt[3]{x}$, D) $\log_3 3x$.

83. Funkcija $f(x) = 3^x$ prikazana je jednom od navedenih slika. Kojom?

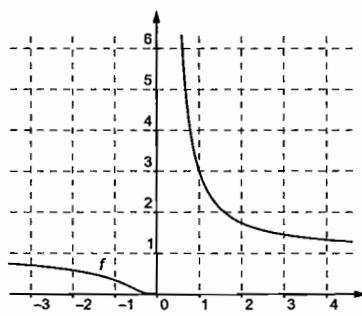
A)



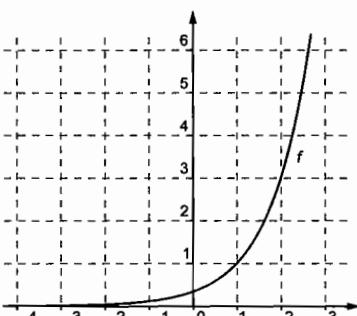
B)



C)

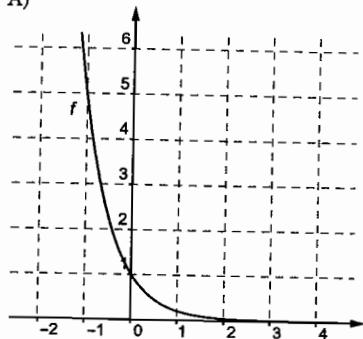


D)

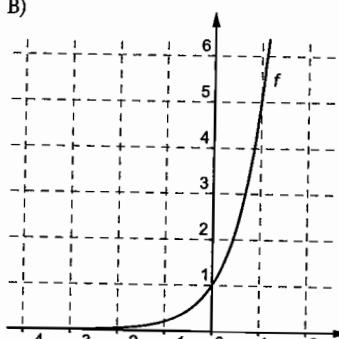


84. Koja slika odgovara funkciji $f(x) = \frac{1}{5^x}$?

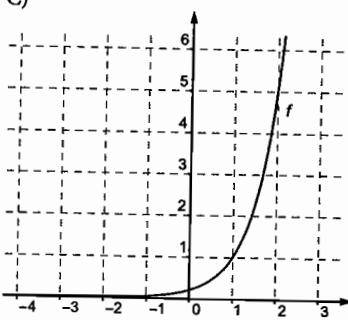
A)



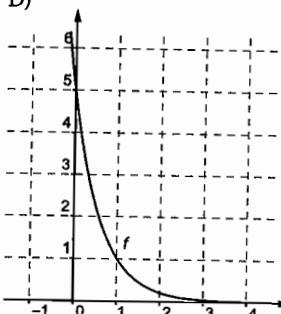
B)



C)



D)



85. Domena funkcije $f(x) = \log \frac{x-3}{x+1}$ jest:

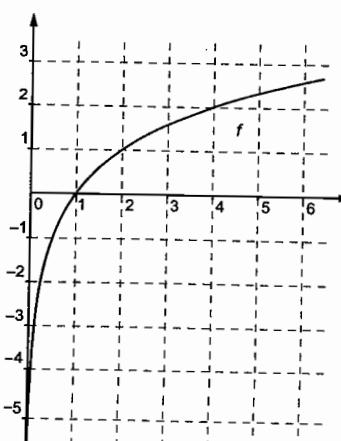
- A) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$, B) \mathbb{R} , C) $(-1, 3)$, D) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

86. Domena funkcije $f(x) = \log \frac{2x+5}{1-x}$ jest:

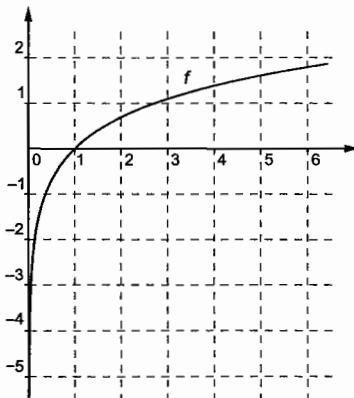
- A) $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$, B) $\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$,
 C) $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$, D) $(1, +\infty)$.

87. Na slici je graf funkcije:

- A) $\left(\frac{1}{2}\right)^x$,
 B) 2^x ,
 C) $\log_2 x$,
 D) $\log_{\frac{1}{2}} x$.



88. Na slici je graf funkcije:



- A) $\left(\frac{1}{e}\right)^x$, B) e^x , C) $\ln x$, D) $\log_{\frac{1}{e}} x$.

89. Odaberi kut za koji tangens nije definiran.

- A) -180° B) 225° C) 405° D) 810°

90. Odaberi kut za koji kotangens nije definiran.

- A) -225° B) 125° C) -720° D) 445°

91. Na brojevnoj kružnici odredi točku jednaku $E\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

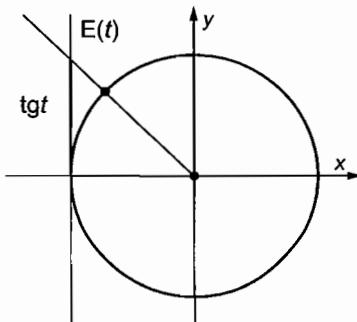
- A) $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ B) $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ C) $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ D) $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$

92. Na brojevnoj kružnici odredi točku jednaku $E\left(\frac{\pi}{11}\right)$.

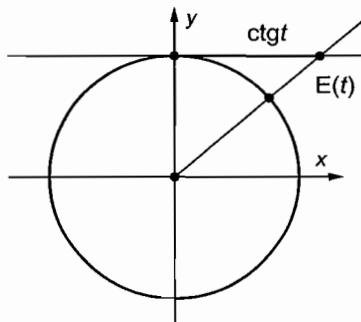
- A) $E\left(\frac{67\pi}{11}\right)$ B) $E\left(\frac{34\pi}{11}\right)$ C) $E\left(\frac{56\pi}{11}\right)$ D) $E\left(\frac{7\pi}{11}\right)$

93. Koja slika nije točna?

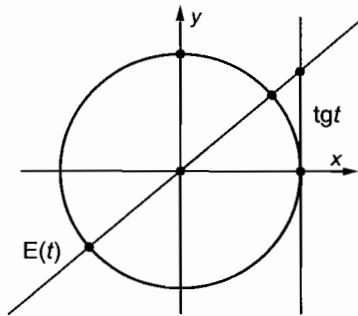
A)



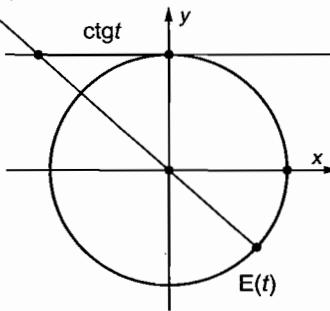
B)



C)



D)



94. Izbacite netočnu izjavu.

- A) Funkcija kosinus pozitivna je za kutove α iz intervala $(270^\circ, 360^\circ)$.
 B) Funkcija sinus negativna je za kutove α iz intervala $(-180^\circ, -270^\circ)$.
 C) Funkcija kosinus negativna je za kutove α iz intervala $(-90^\circ, -180^\circ)$.
 D) Funkcija sinus pozitivna je za kutove α iz intervala $(0^\circ, 180^\circ)$.

95. Izraz: $\cos \frac{3\pi}{4} \cdot \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} \cdot \sin \frac{3\pi}{4}$ jednak je:

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, B) $\frac{1}{2}$, C) 1, D) 0.

96. Izraz: $\frac{\cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ - \tg 30^\circ}{\ctg^2 45^\circ}$ jednak je:

- A) $\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$, B) $\frac{9-4\sqrt{3}}{12}$, C) $\frac{4\sqrt{3}-9}{12}$, D) $\frac{3-2\sqrt{3}}{4}$.

97. Ako je $x = \frac{5\pi}{4}$ i $y = \frac{\pi}{3}$, izračunaj $\frac{\cos x - \sin y}{\cos y + \sin x}$.

- A) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - 1)$, B) $\sqrt{2} - 1$, C) $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$, D) $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (1 + \sqrt{2})$

98. Ako je $x = \frac{5\pi}{4}$ i $y = \frac{\pi}{3}$, izračunaj $\frac{\cos x \cdot \sin y}{\cos x - \sin y}$.

- A) $\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$, B) $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}$, C) $\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$, D) $\frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2}$

99. Izraz $\frac{1 + \sin \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{6}}{1 + \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6}}$ jednak je:

- A) $2 - \sqrt{3}$, B) $2 + \sqrt{3}$, C) $3 - \sqrt{3}$, D) $\sqrt{3} + 3$.

100. Ako je $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, onda je α jednako:

- A) $\frac{2\pi}{3}$, B) $\frac{5\pi}{3}$, C) $\frac{\pi}{3}$, D) nema rješenja.

- 101.** Ako je $\operatorname{tg} \alpha = -1$ i $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, onda je α jednako:
- A) 0, B) $\frac{7\pi}{4}$, C) $\frac{\pi}{4}$, D) $\frac{5\pi}{4}$.
- 102.** Od ponuđenih izraza odaberi izraz jednak $\sin 25^\circ$.
- A) $-\sin 754^\circ$, B) $\sin 153^\circ$, C) $\sin 754^\circ$, D) $-\sin 335^\circ$.
- 103.** Od ponuđenih izraza odaberi onaj jednak $\operatorname{tg} 135^\circ$.
- A) $\operatorname{tg} 225^\circ$, B) $\operatorname{tg} 315^\circ$, C) $\operatorname{tg} (-225^\circ)$, D) $\operatorname{tg} (-135^\circ)$.
- 104.** Ako je $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, onda je $\sin \alpha$ jednak:
- A) $\frac{1}{2}$, B) $-\frac{1}{2}$, C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 105.** Ako je $\sin \alpha = 0.6$ i $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, onda je $\operatorname{tg} \alpha$ jednak:
- A) -0.75, B) $\frac{2}{3}$, C) 0.75, D) $\frac{4}{3}$.
- 106.** Ako je $\sin \alpha = -0.2$, onda je $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$ za $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ jednak:
- A) 1, B) $5 + 2\sqrt{6}$, C) $2\sqrt{6} - 5$, D) $5 - 2\sqrt{6}$.
- 107.** Koja je od sljedećih četiriju funkcija neparna?
- A) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$, B) $\sin^2 x$, C) $\sin x \cdot \cos x$, D) $\sin x \cdot \operatorname{ctg} x$
- 108.** Koja je tvrdnja točna?
- A) Broj 2π temeljni je period funkcije $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.
B) Broj $\frac{\pi}{2}$ temeljni je period funkcije $f(x) = \sin \frac{x}{2}$.
C) Broj 4π temeljni je period funkcije $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.
D) Broj $\frac{\pi}{2}$ temeljni je period funkcije $f(x) = \sin 2x$.
- 109.** Koja je tvrdnja točna?
- A) Period funkcije $f(x) = \sin x$ jest π . B) Period funkcije $f(x) = \cos x$ jest π .
C) Period funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$ jest π . D) Period funkcije $f(x) = \operatorname{ctg} x$ jest $\frac{\pi}{2}$.
- 110.** Koja je od sljedećih jednakosti istinita?
- A) $\sin^2 x = \cos^2 x - 1$ B) $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$
C) $\cos^2 x = \sin^2 x - 1$ D) $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$
- 111.** $\cos \frac{101\pi}{3}$ jednak je:
- A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, C) $\frac{1}{2}$, D) $-\frac{1}{2}$.

112. $\sin \frac{357\pi}{4}$ jednako je:

- A) $-\frac{1}{2}$, B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, C) $\frac{1}{2}$, D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

113. $\operatorname{tg}\left(-\frac{37\pi}{6}\right)$ jednako je:

- A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, B) $-\sqrt{3}$, C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, D) $\sqrt{3}$.

114. Vrijednost funkcije $f(x) = 3^{\frac{\log_2 \cos x}{2}}$ za $\frac{\pi}{4}$ jest:

- A) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, B) $-\sqrt{3}$, C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, D) $\sqrt{3}$.

115. Ako je $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin x$, onda je $f\left(\frac{x}{2}\right)$ jednako:

- A) $\cos x$, B) $2 \cos \frac{x}{2}$, C) $2 \cos x$, D) $\frac{\cos x}{2}$.

116. Ako je $f(x - \pi) = \cos \frac{x}{2}$, onda je $f\left(\frac{x}{2}\right)$ jednako:

- A) $-\cos \frac{x}{4}$, B) $-\sin \frac{x}{4}$, C) $\sin \frac{x}{4}$, D) $\cos \frac{x}{4}$.

117. Izraz $\frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} : \frac{1}{\cos x + 1}$ jednako je:

- A) $\frac{1}{\cos x}$, B) $\frac{1}{\sin x}$, C) 1, D) $\frac{\cos^2 x - 1}{\sin^2 x}$.

118. Izraz $\frac{\cos^2 x \cdot \sin x + \sin^3 x - \sin x \cos x}{\sin^2 x}$ jednako je:

- A) $1 - \operatorname{ctg} x$, B) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$, C) $1 - \operatorname{tg} x$, D) $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$.

119. $\cos \frac{7\pi}{12}$ jednako je:

- A) $\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}}$, B) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, C) $\frac{-\sqrt{6} + 2}{4}$, D) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

120. $\sin 15^\circ$ jednako je:

- A) $\frac{\sqrt{6} - 2}{4}$, B) $\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, C) $\frac{\sqrt{6} + 2}{4}$, D) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

121. $\operatorname{tg} 75^\circ$ jednako je:

- A) $2 + \sqrt{3}$, B) $2 - \sqrt{3}$, C) $\sqrt{3} - 2$, D) $\sqrt{3}$.

122. Izračunaj $\cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{4}$.

- A) $-\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

123. Izračunaj $\sin 135^\circ \cdot \cos 45^\circ$.

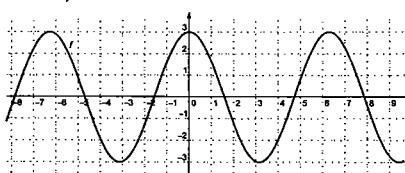
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

124. Izračunaj $\cos 135^\circ \cdot \sin 45^\circ$.

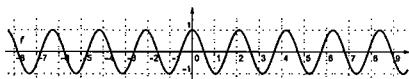
- A) $\frac{1}{2}$ B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\frac{1}{2}$

125. Koja od slika prikazuje graf funkcije $f(x) = \frac{\cos x}{3}$?

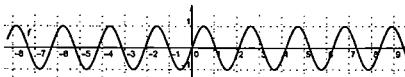
A)



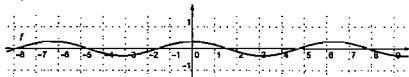
B)



C)

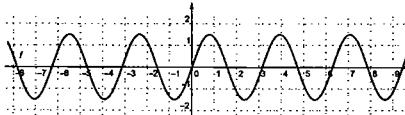


D)

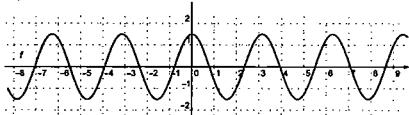


126. Koja od slika prikazuje graf funkcije $f(x) = \frac{3}{2} \sin 2x$?

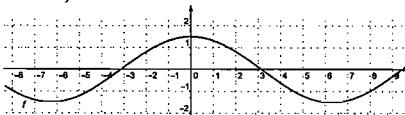
A)



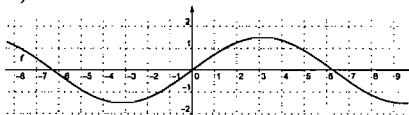
B)



C)

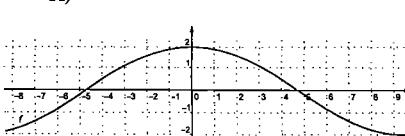


D)

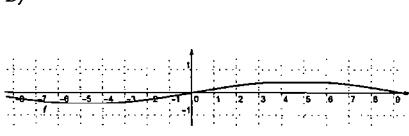


127. Koja od slika prikazuje graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{3}$?

A)



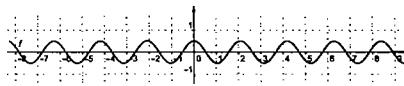
B)



C)



D)



128. Koja od slika prikazuje graf funkcije $f(x) = \frac{1}{3} \cos \frac{2x}{3}$?

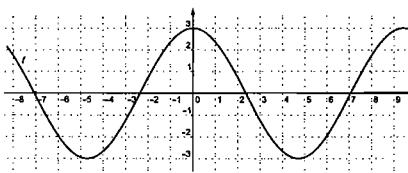
A)



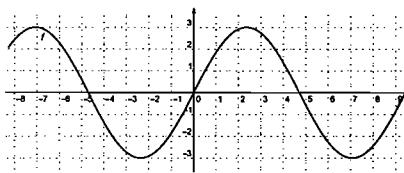
B)



C)



D)



129. Slika funkcije $f(x) = \frac{3}{2} \sin 2x$ jest:

- A) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$, B) $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, C) $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, D) $[-2, 2]$.

130. Maksimum funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{5}$ jest:

- A) 1, B) $\frac{1}{5}$, C) 5, D) $-\frac{1}{5}$.

131. Slika funkcije $f(x) = \frac{2 \cos x}{7}$ jest:

- A) $\left[-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}\right]$, B) $\left(-\infty, -\frac{2}{7}\right]$, C) $[-2, 2]$, D) $\left[-\frac{1}{7}, \frac{1}{7}\right]$.

132. Minimum funkcije $f(x) = \frac{1}{3} \sin \frac{2x}{3}$ jest:

- A) -3, B) $-\frac{1}{3}$, C) $\frac{1}{3}$, D) $\frac{2}{3}$.

133. Koji je od nizova zadan formulom $a_n = 2^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$?

- A) 1, 3, 7, 15, ... B) 1, -1, 1, -1, ... C) 1, 3, 5, 7, ... D) 2, 3, 5, 7, ...

134. Spoji niz zadan pravilom $a_n = 2n - 1$ s njegovim opisom:

- A) niz neparnih prirodnih brojeva, B) niz parnih prirodnih brojeva,
C) niz prostih prirodnih brojeva, D) niz prirodnih brojeva djeljivih s 2.

135. Koja formula opisuje niz 7, 9, 11, 13, ...?

- A) $2n + 5$ B) $3 \cdot (n + 1)$ C) $2n - n^2$ D) $n - (n - 2)$

- 136.** Koji je niz opisan formulom $a_n = 3 \cdot (n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$?
- A) 3, 6, 9, 12, ... B) 6, 9, 12, ... C) 1, 3, 6, 9, 12, ... D) 3, 3, 3, 3, ...
- 137.** Za aritmetički niz $a_{n+1} = n + \frac{1}{2}$ diferencija niza jednaka je:
- A) $\frac{1}{3}$, B) 1, C) $\frac{1}{2}$, D) $\frac{3}{2}$.
- 138.** Za aritmetički niz $a_{n+1} = \frac{3n+2}{5}$ diferencija niza jednaka je:
- A) $\frac{2}{3}$, B) $\frac{2}{5}$, C) $\frac{3}{5}$, D) $\frac{8}{5}$.
- 139.** Koliko najmanje uzastopnih članova niza prirodnih brojeva, počevši od prvoga, treba zbrojiti da dobiveni zbroj bude veći od 1 000?
- A) 43 B) 44 C) 45 D) 46
- 140.** Izdvoji niz koji nije geometrijski.
- A) $\frac{1}{2} \cdot 2^n$ B) $-3 \cdot 2^n$ C) $3 \cdot 2^n$ D) 1, 3, 5, 7, ...
- 141.** Ako je za geometrijski niz $a_1 = \frac{1}{3}$ i $q = \frac{2}{3}$, odredi za koji n vrijedi $a_n = \frac{32}{729}$.
- A) 5, B) 4, C) 6, D) 7.
- 142.** Ako je za geometrijski niz $a_1 = \frac{1}{2}$ i $q = 3$, odredi n za koji je $a_n = \frac{81}{2}$.
- A) 7 B) 4 C) 5 D) 6
- 143.** Koliki je zbroj svih potencija broja 5 koje su veće od 500, a manje od 5 000?
- A) 5 500 B) 625 C) 3 750 D) 3 125
- 144.** Zbroj geometrijskog reda $1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \left(\frac{1}{5}\right)^6 + \dots$ jest:
- A) $\frac{2}{25}$, B) $\frac{25}{24}$, C) $\frac{24}{25}$, D) $\frac{1}{25}$.
- 145.** Derivacija funkcije $f(x) = \frac{2}{x^2}$ jest:
- A) $\frac{4}{x^2}$, B) $\frac{4}{x^4}$, C) $\frac{4}{x^3}$, D) $-\frac{4}{x^3}$.
- 146.** Derivacija funkcije $f(x) = \frac{3}{\ln x}$ jest:
- A) $\frac{\ln x}{3x}$, B) $\frac{\ln x}{3}$, C) $\frac{3}{x \ln^2 x}$, D) $\frac{x}{3 \ln^2 x}$.
- 147.** Derivacija funkcije $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$ jest:
- A) $x^2 - x$, B) $3x^2 - 2x$, C) $x^2 - x^2$, D) $x^2 - 1$.

148. Derivacija funkcije $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + \frac{x}{2} + 5$ jest:

- A) $2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$, B) $x^2 - x + 1$, C) $6x^2 - 6x + \frac{1}{2}$, D) $4x^2 - 4x - \frac{1}{x}$.

149. Derivacija funkcije $f(x) = \ln x + \ln 3$ jest:

- A) $\frac{1}{x} + 3$, B) $\frac{1}{x}$, C) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3}$, D) $x + 3$.

150. Derivacija funkcije $f(x) = \frac{1}{x} + \sin \frac{\pi}{4}$ jest:

- A) $-\frac{1}{x^2} + \cos \frac{\pi}{4}$, B) $\frac{1}{x^2} - \cos \frac{\pi}{4}$, C) $-\frac{1}{x^2}$, D) $\ln x + \cos \frac{\pi}{4}$.

151. Derivacija funkcije $f(x) = 4\sin^2 x + 8\sin x + 3$ jest:

- A) $8\sin x \cos x + 8\cos x$, B) $8\sin x + 8\cos x$, C) 0, D) $8\sin x \cos x + 3$.

152. Derivacija funkcije $f(x) = \sin \sqrt{x^2 - 1}$ je

- A) $\frac{2x\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, B) $\frac{\cos \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$, C) $\frac{\cos x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, D) $\frac{x \cdot \cos \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

153. Deriviraj funkciju $f(x) = 2 - \cos(x - \pi)$.

- A) $\pi \sin x$, B) $1 - \sin(x - \pi)$, C) $\sin(x - \pi)$, D) $\pi \sin(x - \pi)$

154. Derivacija funkcije $f(x) = (x - 1)(x^2 - 4)$ jest:

- A) $2x^2 - 2x$, B) $x^2 - 4$, C) $3x^2 - 2x - 4$, D) $3x^2 - 6x$.

155. Derivacija funkcije $f(x) = (x - 3)(2x^3 - 2x)$ jest:

- A) $8x^3 + 18x^2 + 4x + 6$, B) $2x^3 - 2x + 6$, C) $-4x^3 - 4x + 6$, D) $8x^3 - 18x^2 - 4x + 6$.

156. Derivacija funkcije $f(x) = \cos x \cdot \sin x$ jest:

- A) 1, B) $\cos 2x$, C) $\sin 2x$, D) $\sin^2 x - \cos^2 x$.

157. Derivacija funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ jest:

- A) $\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$, B) $\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$, C) $-\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$, D) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

158. Derivacija funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ jest:

- A) $\frac{1}{\cos x - 1}$, B) $\frac{1}{\sin x - 1}$, C) $\frac{\sin x}{(1 - \cos x)^2}$, D) $\frac{-1}{(1 - \cos x)^2}$.

159. Derivacija složene funkcije $f(x) = (\sin x - \cos x)^2$ jest:

- A) $-2\sin 2x$, B) $-2\cos 2x$, C) $2\cos 2x$, D) $2\sin 2x$.

160. Derivacija složene funkcije $f(x) = \sqrt{\sin^3 x}$ jest:

- A) $\frac{3}{2} \cos x \sqrt{\sin x}$, B) $-\frac{3}{2} \cos x \sqrt{\sin x}$, C) $-\frac{3}{2} \sin x \sqrt{\cos x}$, D) $\frac{3}{2} \sin x \sqrt{\cos x}$.

161. Derivacija složene funkcije $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$ jest:

- A) $\frac{3}{2}\sqrt{x+1}$, B) $\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$, C) $\frac{3}{2}(x-1)$, D) $-\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$.

162. Derivacija složene funkcije $f(x) = \ln^2 x \cdot (x^2 - 1)$ jest:

- A) $2\ln x + 2x\ln x$, B) 4, C) $2\ln x \cdot (2x)$, D) $\frac{2}{x} \cdot (x^2 - 1)\ln x + 2x\ln^2 x$.

163. Jednadžba tangente položene na graf funkcije $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ u točki s apscisom 2 glasi:

- A) $y = 18x - 19$, B) $y = 18x - 36$, C) $y = 10x - 2$, D) $y = 2x + 1$.

164. Jednadžba tangente položene na graf funkcije $f(x) = -2x^2 + 5x - 1$ u točki krivulje s apscisom -1 glasi:

- A) $y = 5x - 1$, B) $y = -4x + 5$, C) $y = 9x + 9$, D) $y = 9x + 1$.

165. Jedanadžba tangente na krivulju $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ u točki krivulje s apscisom $\frac{\pi}{3}$ jest:

- A) $y = -\sqrt{3}x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$, B) $y = -\sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$, C) $y = -2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, D) $y = \frac{1}{2}$.

166. Jednadžba tangente na krivulju $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ u točki krivulje s apscisom $\frac{\pi}{4}$ jest:

- A) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, B) $y = 1$, C) $y = x - \frac{\pi}{4}$, D) $y = x - \frac{\pi}{4} + 1$.

167. Stacionarna točka funkcije $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ jest:

- A) $\left(-\frac{9}{8}, \frac{5}{4}\right)$, B) $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$, C) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{25}{4}\right)$, D) $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$.

168. Stacionarna točka funkcije $f(x) = 5x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ jest:

- A) $\left(-\frac{1}{20}, \frac{79}{80}\right)$, B) $\left(\frac{1}{20}, \frac{79}{80}\right)$, C) $\left(\frac{79}{80}, -\frac{1}{20}\right)$, D) $\left(-\frac{79}{80}, \frac{1}{20}\right)$.

169. Ekstrem funkcije $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ jest:

- A) minimum $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, B) minimum $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$,
 C) maksimum $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, D) maksimum $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

170. Ekstrem funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$ jest:

- A) maksimum $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$, B) minimum $\left(3, \frac{1}{2}\right)$,
 C) minimum $\left(3, -\frac{1}{2}\right)$, D) maksimum $\left(3, \frac{1}{2}\right)$.

171. Interval rasta funkcije $f(x) = x^2 - 3$ je:

- A) $(-\infty, -2)$, B) $(0, +\infty)$, C) $(-\infty, 0)$, D) $(2, +\infty)$.

172. Interval rasta funkcije $f(x) = 3x^2 + 3x - 3$ je:

- A) $(-\infty, \frac{1}{2})$, B) $(\frac{1}{2}, +\infty)$, C) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, D) $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

173. Polinom $f(x) = mx^2 + (m-1) \cdot x + 5$ u $x = -2$ ima maksimum. Taj je maksimum jednak:

- A) 5, B) $\frac{19}{3}$, C) $-\frac{2}{3}$, D) -2.

174. Polinom $f(x) = (m+1) \cdot x^2 - (m-1) \cdot x + 2$ u $x = 3$ ima maksimum. Taj je maksimum jednak:

- A) 2, B) $\frac{7}{5}$, C) $-\frac{4}{5}$, D) $-\frac{28}{5}$.

Zadatci kratkih odgovora

Rješenja zadataka potražite na str. 449.

1. Broj riba u ribnjaku možemo izračunati prema formuli: $f(x) = 400 \cdot 10^{0.02x}$, gdje je x vrijeme u mjesecima. Ribnjak je osnovan u siječnju 2009. Koliki je broj riba u njemu u travnju 2010.?

2. Popuni tablicu za funkciju $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
$f(x)$				

3. Popuni tablicu za funkciju $f(x) = -\frac{1}{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$				

4. Razlomljena funkcija zadana je kao:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2-x}; & x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x + 1; & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{Izračunaj } f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right), f\left(\frac{4}{3}\right)$$

5. Razlomljena funkcija zadana je kao:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x < \sqrt{3} \\ x^2 + 2; & x \geq \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{Izračunaj } f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3}), f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right)$$

6. Ispišite tablicu vrijednosti funkcije $f(x) = -\frac{x}{2} + 2$ za x u intervalu od -2 do 2 uz prirast od $\frac{1}{2}$.
7. Ispišite tablicu vrijednosti funkcije $f(x) = \operatorname{tg}x - 1$ za x u intervalu od $-\pi$ do 0 uz prirast od $\frac{\pi}{6}$.
8. Odredi područje definicije funkcije $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.
9. Odredi područje definicije funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+5}}$.
10. Odredi područje definicije funkcije $f(x) = \log_2(2x+3)$.
11. Odredi područje definicije funkcije $f(x) = \log_{x-1}(2x^2-3)$.
12. Ako je $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}$, odredi $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
13. Ako je $f(x-1) = \log_2(x-1)$, odredi $f(2)$.
14. Ako je $f(x) = \log_3\left(\frac{x-1}{x}\right)$, odredi $f(9)$.
15. U koordinatni sustav smjesti neke četiri cjelobrojne točke grafa funkcije $f(x) = \log_2\frac{1}{x}$.
16. U koordinatni sustav smjesti neke četiri točke grafa funkcije $f(x) = 2^{x-1}$.
17. Za $f(z) = 3 - z + z^2$ uz $z = 2i + 1$ odredite $2f(\bar{z})$.
18. Za polinome $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ i $g(x) = x - 1$ odredite:
- $(f+g)(x)$,
 - $(f-g)(x)$,
 - $(f \cdot g)(x)$,
 - $(f:g)(x)$,
 - $(f \circ g)(x)$,
 - $(g \circ f)(x)$.
19. Ako je $f(x) = 2^x - 1$ i $g(x) = x - 2$, izračunaj $2 \cdot ((f \circ g)(x))$.
20. Ako je $f(x) = \log_3(x-1)$ i $g(x) = 3+x$, izračunaj $(g \circ f)(10)$.
21. Za funkcije $f(x) = \frac{1}{3^x}$ i $g(x) = \log_3(x-1)$ odredi $(g \circ f)(x)$.
22. Za funkcije $f(x) = \sqrt{x+1}$ i $g(x) = 3^x$ odredi domenu funkcije $g(x) : f(x)$.
23. Odredi $a \in \mathbb{R}$ tako da polinom $f(x) = x^3 - ax^2 + 3x - 1$ bude djeljiv polinomom $g(x) = x + 1$.
24. Odredi $a \in \mathbb{R}$ tako da polinom $f(x) = ax^3 - 2x + 1$ bude djeljiv s $g(x) = x - 1$.
25. Ako je $(f \circ g)(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \neq 0$ i $g(x) = \ln x$, pronadi $f(x)$.
26. Ako je $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ i $f(x) = 2x + 3$, pronadi $g(x)$.

27. Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \sqrt{\log_2(x-1)}$.
28. Nađite inverznu funkciju funkcije $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$.
29. U koordinatnom sustavu nacrtaj graf funkcije $f(x) = -x + \frac{1}{3}$ i na njemu označi točku čija je apscisa $x = -2$.
30. U koordinatnom sustavu nacrtaj graf funkcije $f(x) = \frac{x}{4} + 3$ i na njemu označite točku sječišta grafa s osi y .
31. Dopuni priloženu tablicu za funkciju $f(x) = 3x + 2$ podacima o rastu ili padu funkcije i njezinim vrijednostima te opiši tijek funkcije.

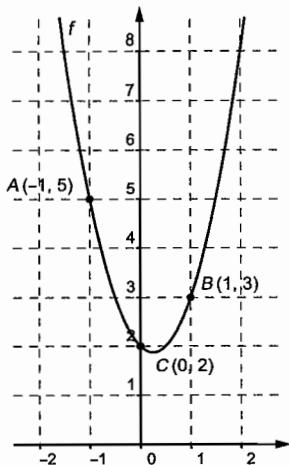
x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$f(x)$				

32. Dopuni priloženu tablicu za funkciju $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$ podacima o rastu ili padu funkcije i njezinim vrijednostima, te opiši tijek funkcije.

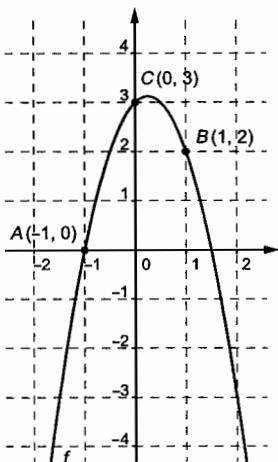
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$			

33. Odredi domenu funkcije $f(x) = \frac{x+2}{x}$ ako je funkcija definirana na $(-\infty, 0]$.
34. Odredi domenu funkcije $f(x) = \frac{-2x-1}{2}$ ako je funkcija definirana na $(-\infty, 3]$.
35. Odredite sliku funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$.
36. Odredite sliku funkcije $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$.
37. Opišite tijek funkcije $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$.
38. Opišite tijek funkcije $f(x) = 2x^2 - x + 3$.
39. Za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi $a = \frac{1}{2}$, a njezine su nultočke $(-3, 0)$ i $(2, 0)$. Odredi tu funkciju.
40. Za kvadratnu funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi $a = -2$, a njezine su nultočke $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ i $(-2, 0)$. Odredi tu funkciju.
41. Ako grafu kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ pripadaju točke $A(-2, 0)$, $B(-1, 1)$ i $C(2, 3)$, odredi tu funkciju.
42. Ako grafu kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ pripadaju točke $A(-3, 0)$, $B(1, -1)$ i $C(-2, 0)$, odredi tu funkciju.

43. Na slici je prikazan graf kvadratne funkcije.
Napiši pripadni zakon pridruživanja.

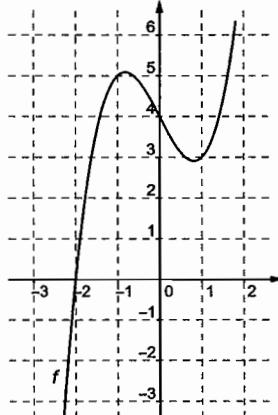


44. Na slici je prikazan graf kvadratne funkcije.
Napiši pripadni zakon pridruživanja.



45. Odredite $n \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x) = x^2 + nx - 4$ poprimi minimalnu vrijednost za $x = -2$.
46. Odredite $m \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x) = mx^2 - x + 5$ poprimi minimalnu vrijednost za $x = 3$.
47. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = -2x^2 + 6x - 1$. Sa slike odčitaj za koji x je $f(x) = 3$.
48. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$. Sa slike odčitaj za koji x je $f(x) = -3$.
49. Odredite domenu funkcije $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$.
50. Odredite domenu funkcije $f(x) = \frac{x}{-x^2 - 2x + 3}$.
51. Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$.

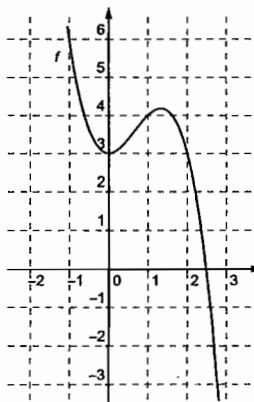
52. Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x}}$.
53. Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x-5}}$.
54. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |2x - 5|$.
55. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |\frac{1}{2}x + 2|$.
56. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x - 3|$.
57. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x + 5|$ i odredi područje definicije i sliku.
58. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |\frac{1}{2}x - 2|$ i odredi područje definicije i sliku.
59. Za polinom trećeg stupnja na slici odredite:



- a) intervale rasta i pada,
- b) sjecište grafa s osi y ,
- c) nultočke,
- d) maksimum i minimum ako postoje (približno do ± 0.5).

60. Za polinom trećeg stupnja na slici odredite:

- a) intervale rasta i pada,
- b) sjecište grafa s osi y ,
- c) nultočke funkcije (približno do ± 0.5),
- d) maksimum i minimum ako postoje (približno do ± 0.5).



61. Za polinom trećeg stupnja $f(x) = 2x^3 + 3x + 2x^2 + 3$ odredite nultočke.
62. Za polinom trećeg stupnja $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{5}{2}$ odredite nultočke.
63. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ odredite:
- neke četiri funkcjske vrijednosti,
 - nultočke,
 - sjecište pripadnoga grafa s osi y ,
 - U koordinatnom sustavu skicirajte graf.
64. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$ odredite:
- neke četiri funkcjske vrijednosti,
 - nultočke,
 - sjecište pripadnoga grafa s osi y ,
 - U koordinatnom sustavu skicirajte graf.
65. U koordinatnom sustavu prikaži funkciju $f(x) = \frac{1}{2^x}$ koristeći se tablicom.

x	0	-2	
$f(x)$		$\frac{1}{2}$	2

66. U koordinatnom sustavu prikaži funkciju $f(x) = 3^{x-1}$ koristeći se tablicom.

x	0	-2	
$f(x)$		$\frac{1}{9}$	3

67. S grafa funkcije iz zadatka 65. odčitaj:
- domenu funkcije,
 - sliku funkcije,
 - je li funkcija rastuća ili padajuća,
 - sjecišta s koordinatnim osima.
68. S grafa funkcije iz zadatka 66. odčitaj:
- domenu funkcije,
 - sliku funkcije,
 - je li funkcija rastuća ili padajuća,
 - sjecišta s koordinatnim osima.
69. Iz priložene tablice odredi funkciju $f(x) = a^{x-1}$.

x	0	-2	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$	3

70. Iz priložene tablice odredi funkciju $f(x) = a^x$.

x	-1	-2	2
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	25

71. Broj bakterija opisujemo funkcijom $f(t) = 10\ 000 \cdot 10^{0.4t}$, gdje je t broj sati protekao od početka promatranja.

- Koliko je bakterija na početku promatranja?
- Koliko je bakterija nakon četiri sata?

72. Koliko je $f(3)$ ako je $f(x) = \frac{\log_1 x}{\log_3 x} - \log_3 x$?

73. Koliko je $f(2)$ ako je $f(x) = \log_4 x - \frac{\log_{16} x}{\log_{\frac{1}{4}} x}$?

74. Izračunajte $5^{\log_3 12+3}$.

75. Izračunajte $2^{\log_2 10 - \log_4 5}$.

76. Nacrtaj inverznu funkciju funkcije $f(x) = \log_2 x$.

77. Nacrtaj inverznu funkciju funkcije $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

78. Ako je $x = \log_2 3$ i $y = \log_3 2$, koliko je $\frac{4-x}{y-x}$?

79. Ako je $x = \log_2 5$ i $y = \log_2 4$, koliko je $\frac{x-1}{y-x}$?

80. Na brojevnoj kružnici označi točku određenu kutem $\alpha = \frac{7\pi}{6}$.

81. Na brojevnoj kružnici označi točku određenu kutem $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

82. Na brojevnoj kružnici označi točku određenu kutem $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

83. Na brojevnoj kružnici označi točku određenu kutem $\alpha = \frac{13\pi}{3}$.

84. Priloženu tablicu popuni predznacima.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{5\pi}{4}$			
175°			
325°			
$\frac{7\pi}{4}$			

85. U kojem se kvadrantu nalazi kut od $1\ 252^\circ$?

86. U kojem se kvadrantu nalazi kut od 535° ?

87. Popuni tablicu odgovarajućim predznacima.

 α -560° 535° 275° $\operatorname{tg} \alpha$

88. Popuni tablicu odgovarajućim predznacima.

 α $1\ 350^\circ$ 735° $-1\ 053^\circ$ $\operatorname{ctg} \alpha$

89. Primjenom identiteta $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ popuni tablicu.

 $\sin \alpha$ $-\frac{2}{3}$

0.6

 $\cos \alpha$ $\frac{1}{7}$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

90. Popuni tablicu.

 $\sin \alpha$

0.3

 $\cos \alpha$

0.7

 $\operatorname{tg} \alpha$ $\operatorname{ctg} \alpha$

91. Pojednostavni izraz: $\frac{\sin 100^\circ \cdot \cos 10^\circ - 1}{\sin 10^\circ \cdot \cos 100^\circ - 1}$.

92. Pojednostavni izraz: $\frac{1 + \sin 225^\circ \cdot \cos 45^\circ}{1 + \sin 45^\circ \cdot \cos 225^\circ}$.

93. Za izraz $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{\sin x}$ izračunajte $f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

94. Za izraz $f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ izračunajte $2 \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

95. Riješi se razlomka u funkciji $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg} x}$ i izračunaj $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

96. Izračunaj sljedeći izraz: $\sin 93^\circ + \sin 267^\circ - \sin 273^\circ$.

97. Izračunaj sljedeći izraz: $\cos 171^\circ - \sin 171^\circ - \cos 189^\circ$.

98. Ako je $\sin x + \cos x = 1$, koliko je $|\sin x - \cos x|$?

99. Koliko je $\cos(x+y)$ ako je $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin y = \frac{1}{2}$ za $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ i $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$?

100. Koliko je $\sin(x-y)$ ako je $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ za $\frac{3\pi}{2} \leq x, y \leq 2\pi$?

101. Koliko je $\sin(x-y)$ ako je $\cos x = -\frac{1}{2}$ i $\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ za $\pi \leq x, y \leq \frac{3\pi}{2}$?

102. Ako je $\cos x = 0.3$ uz $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ i $\sin y = -0.5$ uz $\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$, koliko je $\operatorname{ctg}(x+y)$?

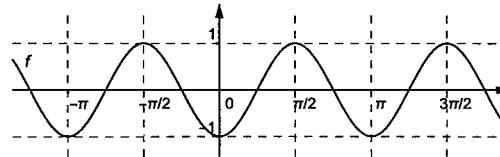
103. Ako je $\cos y = \frac{2}{3}$ uz $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ i $\sin x = \frac{1}{4}$ uz $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \pi$, koliko je $\operatorname{tg}(x-y)$?

104. Izračunaj $\sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24}$.

105. Izračunaj $\cos 75^\circ \cdot \sin 105^\circ$.

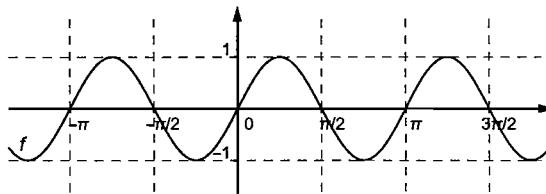
106. Iz grafa na slici za interval $[-\pi, \pi]$ odčitaj:

- a) nultočke,
- b) minimum,
- c) maksimum,
- d) temeljni period,
- e) intervale rasta i intervale pada.



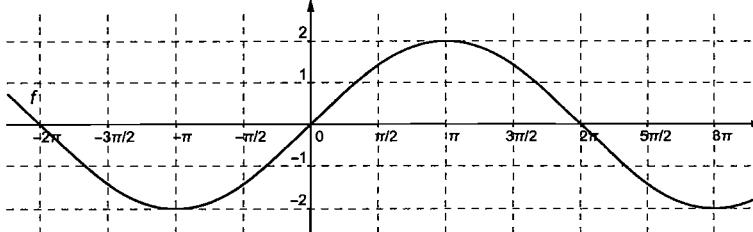
107. Iz grafa na slici za interval $[-\pi, \pi]$ odčitaj:

- a) nultočke,
- b) minimum,
- c) maksimum,
- d) temeljni period,
- e) intervale rasta i intervale pada.



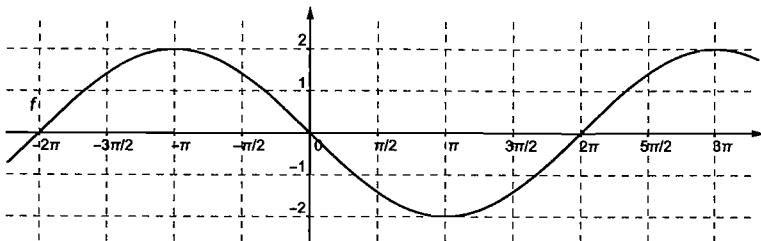
108. Iz grafa na slici za interval $[-\pi, \pi]$ očitaj:

- a) nultočke,
- b) minimum,
- c) maksimum,
- d) temeljni period,
- e) intervale rasta i intervale pada.



109. Iz grafa na slici za interval $[-\pi, \pi]$ odčitaj:

- a) nultočke,
- b) minimum,
- c) maksimum,
- d) temeljni period,
- e) intervale rasta i intervale pada.



110. Koristeći se grafičkom metodom odredi ukupan broj rješenja jednadžbe $\sin 2x = \cos \frac{x}{2}$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

111. Koristeći se grafičkom metodom odredi ukupan broj rješenja jednadžbe $\frac{1}{2} \sin 2x = \cos 2x$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

112. Odredi nultočke funkcije $f(x) = \frac{1}{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$ na intervalu $[0, \pi]$.

113. Odredi maksimum funkcije $f(x) = \frac{1}{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

114. Odredi minimum funkcije $f(x) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

115. Nastavi niz: 1, 4, 7, 10, 13, ...

116. Nastavi niz: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$

117. Za niz $a_n = \begin{cases} 2n, & n \text{ neparan} \\ \frac{n}{n-1}, & n \text{ paran} \end{cases}$ popuni tablicu.

n	2	7	8	3
a_n				

118. Za niz $a_n = \begin{cases} 3^n, & n \text{ neparan} \\ 3^{n-1}, & n \text{ paran} \end{cases}$ popuni tablicu.

n	3	4	2	1
a_n				

119. Za aritmetički niz (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ popuni tablicu.

d	a_1	a_3	a_5	a_8
-3	14			

120. Za aritmetički niz (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ popuni tablicu.

d	a_1	a_3	a_5	a_7	a_8
	7			13	

121. Prizemlje zgrade visoko je 3.5 metara, a svaki je kat visok 4 metra. Zgrada ima 15 katova. Koliko je zgrada visoka?

122. Ako je niz 12, 24, 48, ... geometrijski niz, izračunaj kvocijent i 7. član niza.

123. Ako je niz 7, 35, 175, ... geometrijski niz, izračunaj kvocijent i 11. član niza.

124. U geometrijskom nizu (a_n) , $n \in \mathbb{N}$ zadano je: $a_1 + a_3 = 235$ i $a_2 + a_4 = 753$. Odredi prvi član i kvocijent niza.

125. Izračunaj $S_1 - S_2$ ako je: $S_1 = 1 - \cos\alpha + \cos^2\alpha - \cos^3\alpha + \dots$
 $S_2 = 1 + \sin\alpha + \sin^2\alpha + \sin^3\alpha + \dots$

126. Zbroj beskonačnoga konvergentnog reda je $\frac{1}{2}$, a zbroj kvadrata njegovih članova 10. Izračunajte prvi član niza.

127. Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \frac{2}{x-5}$.

128. Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.

129. Izračunajmo $f'(x)$ ako je $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

130. Izračunajmo $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ ako je $f(x) = (x^2 - 1)(x + 3)$.

131. Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \sin(x - 3)^2$.

132. Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \cos\sqrt{x}$.

133. Napišite jednadžbu normale na krivulju $y = 2x^2$ u točki s apscisom -2 .

134. Napiši jednadžbu tangente na krivulju $y = \sqrt{x}$ u točki s apscisom 4 .

135. Odredite treću derivaciju funkcije $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$.

136. Odredite treću derivaciju funkcije $f(x) = \cos 2x$.

137. Je li funkcija $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ u okolini točke $x = -2$ rastuća ili padajuća?

138. Koristeći se derivacijom, odredite ekstreme funkcije $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ i ispitajte njihov karakter.

139. Odredi točke pregiba za $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$.

Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja

Osnovna razina

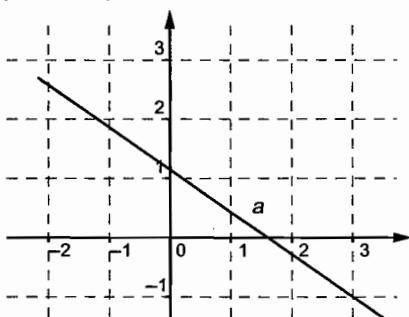
Legendu kratica naziva do sada održanih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja potražite na str. 78.

Rješenja zadataka potražite na str. 453.

- 1.** Funkcija prikazana na slici poprima vrijednost $y = -1$ za x jednako:

NI 2006. za OJK gimnazije

- A) -0,5, B) 1,2, C) 2, D) 3.

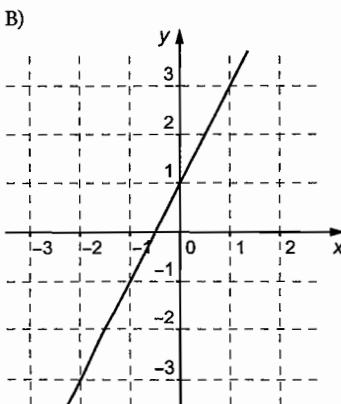
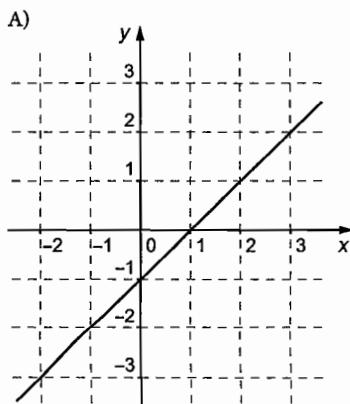


- 2.** Na kojoj je slici prikazan graf linearne funkcije zadane tablicom?

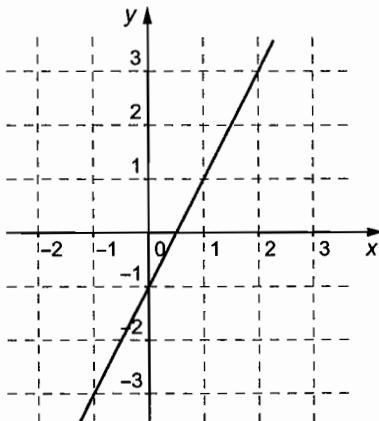
NI 2007. za strukovne škole

x	$f(x)$
-2	0
-1	1
0	2
1	3

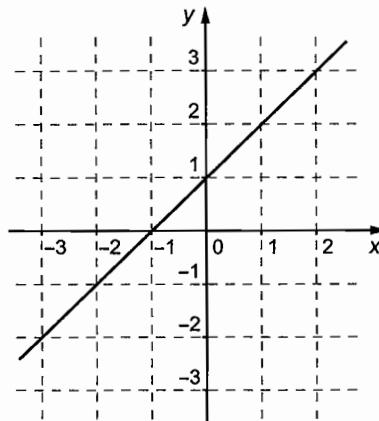
0	3
-1	2



C)



D)



3. U kojoj su tablici prikazane vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$? **NI 2006. za OJK gimnazije**

A)

x	0	-4
$f(x)$	-5	3

B)

x	0	12
$f(x)$	-5	-5

C)

x	0	-2
$f(x)$	-5	-8

D)

x	0	2
$f(x)$	-5	2

4. Koja tablica pripada funkciji $f(x) = 4x - x^2$?

DM, Ijeto 2010.

A)

x	-1	3	2
$f(x)$	5	3	-4

B)

x	-1	2	3
$f(x)$	-5	3	4

C)

x	-1	2	3
$f(x)$	5	4	-3

D)

x	-1	2	3
$f(x)$	-5	4	-3

5. Koja tablica pripada funkciji $f(x) = 2x - 3$?

DM, jesen 2010.

A)

x	-1	2	3
$f(x)$	-5	1	3

B)

x	-1	2	3
$f(x)$	-3	1	-3

C)

x	-1	2	3
$f(x)$	-3	-1	5

D)

x	-1	2	3
$f(x)$	3	-1	-5

6. U koordinatnom sustavu prikažite graf linearne funkcije $f(x) = x - 2$.

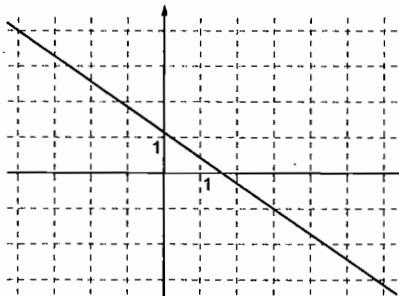
PM 2009.

7. U koordinatnom sustavu nacrtajte graf linearne funkcije $f(x) = -x - 1$.

PI 2009.

8. Koja od navedenih točaka pripada pravcu na slici?

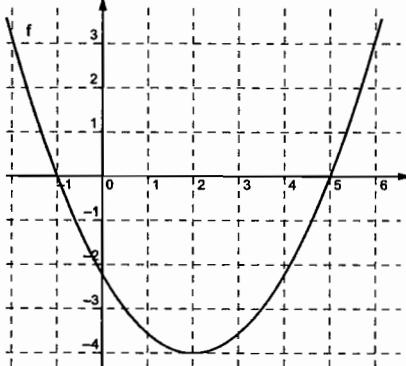
PM 2009.



- A) $(-1, 3)$, B) $(3, -1)$,
C) $(4, 3)$, D) $(4, -4)$.

9. Funkcija čiji je graf prikazan na slici postiže najmanju vrijednost:

NI 2008.

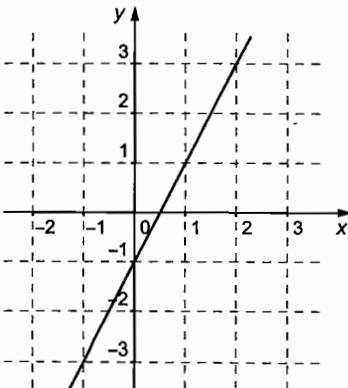


- A) za $x = 2$, B) za $x = -1$,
C) za $x = -2$, D) za $x = -4$.

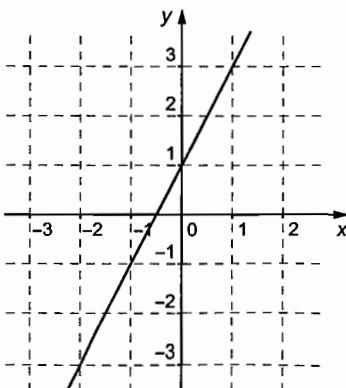
10. Koji graf prikazuje funkciju $f(x) = 2x - 1$?

PM 2009.

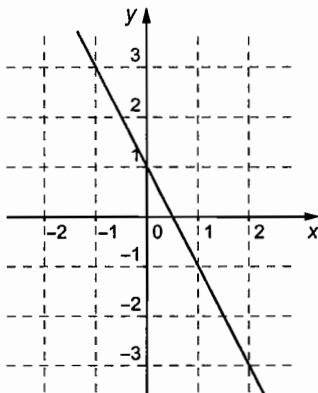
A)



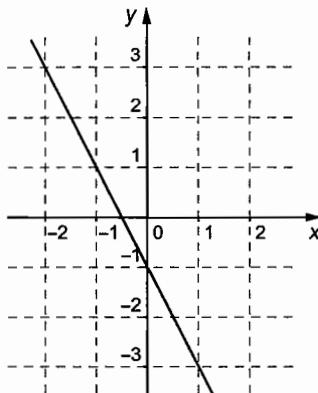
B)



C)

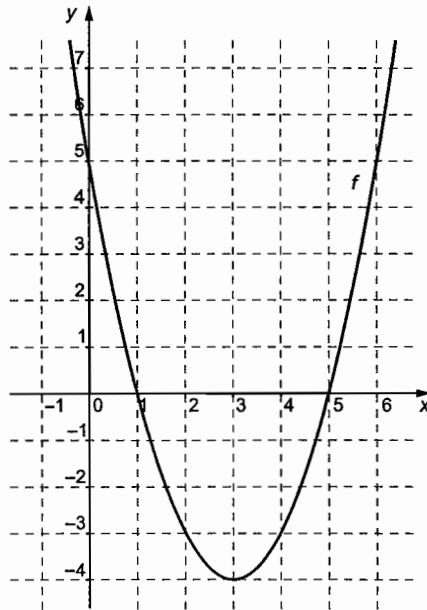


D)



11. Koju funkciju prikazuje sljedeći graf?

PM 2009.

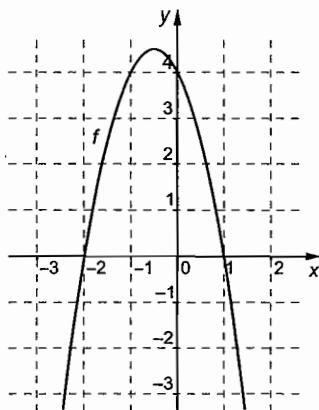


- A) $f(x) = (x + 3)^2 + 4$, B) $f(x) = (x + 3)^2 - 4$,
 C) $f(x) = (x - 3)^2 + 4$, D) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

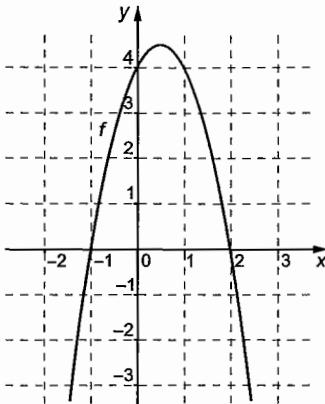
12. Na kojoj je slici prikazan graf funkcije $f(x) = -2(x + 2)(x - 1)$?

NI 2007. za gimnazije

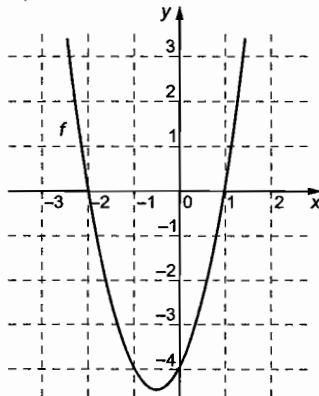
A)



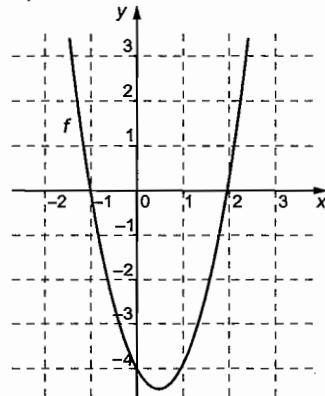
B)



C)



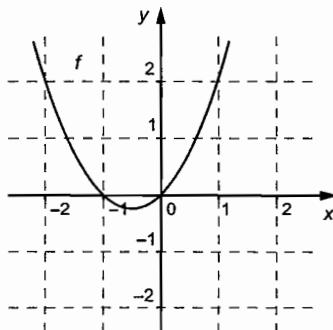
D)



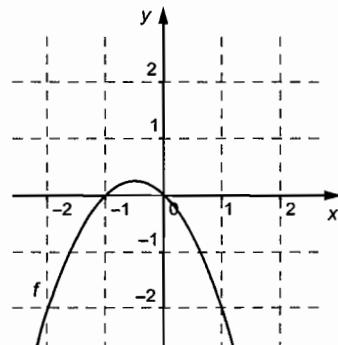
13. Koja od navedenih slika prikazuje graf funkcije $f(x) = -x^2 - x$?

PI 2009.

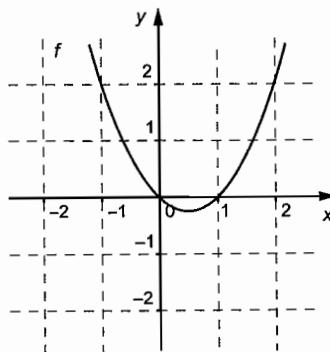
A)



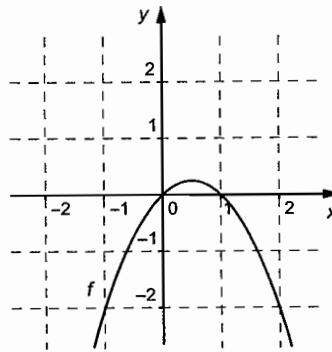
B)



C)



D)



14. Na slikama su grafovi funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$.

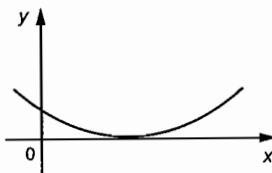
Za koju od njih vrijedi:

a je pozitivno,

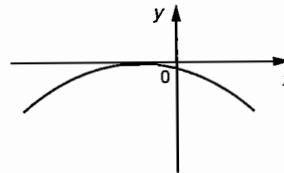
diskriminanta je negativna.

NI 2007. za gimnazije

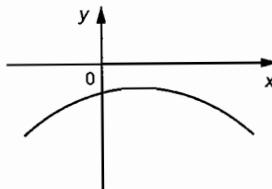
A)



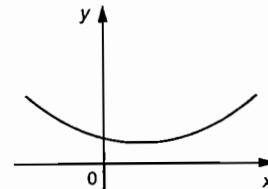
B)



C)



D)



15. Graf funkcije $f(x) = 2x - 4$ sijeće os apscisa u točki A,

a os ordinata u točki B.

Koje su koordinate točaka A i B?

DM, Ijeto 2010.

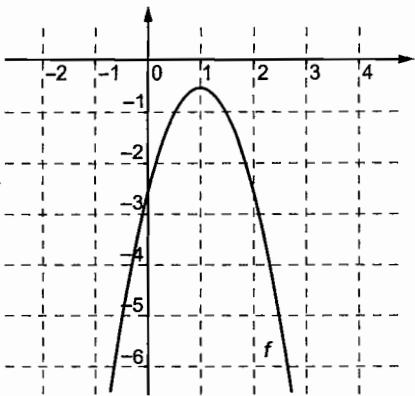
- A) A(2, 0), B(0, -4), B) A(0, 2), B(-4, 0), C) A(-4, 0), B(0, 2), D) A(0, -4), B(2, 0)

16. Na slici je graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Što od navedenoga vrijedi za vodeći koeficijent a i za diskriminantu D?

DM, Ijeto 2010.

- A) $a > 0, D > 0$ B) $a > 0, D < 0$ C) $a < 0, D > 0$ D) $a < 0, D < 0$



17. Luk ima jednadžbu $y = -0.3x^2 + 1.8x$, pri čemu je y udaljenost točke na luku od x -osi izražena metrima. Kolika je maksimalna visina luka?

DM, jesen 2010.

- A) 1.7 m B) 2.3 m C) 2.7 m D) 3.3 m

18. U koordinatnom sustavu prikažite graf funkcije

$$f(x) = -(x+1)(x-3).$$

NI 2008.

19. Odredite koordinate tjemena grafa funkcije $f(x) = x^2 + 2x - 8$ i sjecišta grafa s koordinatnim osima. Nacrtajte graf funkcije.

NI 2007. za gimnazije

Odgovor: tjeme: _____

sjecište s osi x : _____

sjecište s osi y : _____

20. Zadan je pravac p kojemu je jednadžba $y = \frac{3}{4}x - 2$.

NI 2006. za OJK gimnazije

a) Nacrtajte pravac p u koordinatnom sustavu.

b) Odredite udaljenost između točaka u kojima pravac p siječe koordinatne osi.

c) Odredite jednadžbu po volji odabranog pravca q koji u točki $(2, y)$ sijeće pravac p .

21. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 + 1$.

DM, jesen 2010.

Viša razina

1. Računala u jednoj učionici međusobno su povezana optičkim linijama.

Ukupan broj optičkih linija određen je funkcijom $I(n) = \frac{n(n-3)}{2} + n$,

u kojoj je n broj računala u učionici. Ako je ukupan broj linija 28, tada je broj računala u učionici jednak:

- A) -8, B) -7, C) 7, D) 8.

NI 2007. za gimnazije

2. Vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$ prikazane su u jednoj od tablica.

Kojoj?

NI 2006. za PM gimnazije

A)

x	0	-4
$f(x)$	-5	3

B)

x	0	12
$f(x)$	-5	-5

C)

x	0	-2
$f(x)$	-5	-8

D)

x	0	2
$f(x)$	-5	2

3. Pravcu zadanim tablicom

NI 2007. za gimnazije

x	0	3
y	-1	2

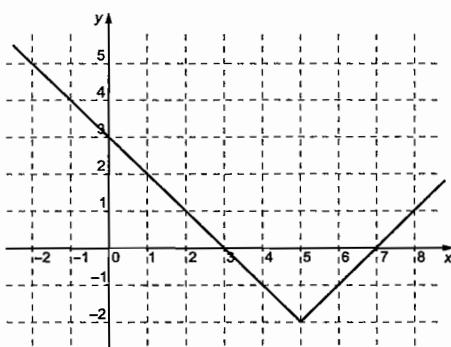
pripada točka:

- A) (-2, -3), B) (-2, -4), C) (-2, -5), D) (-2, -6).

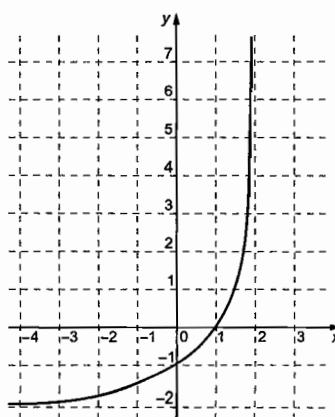
4. Koji od navedenih grafova prikazuje funkciju koja raste samo na intervalu $[0, 5]$?

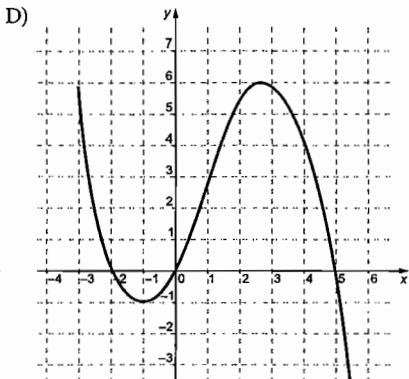
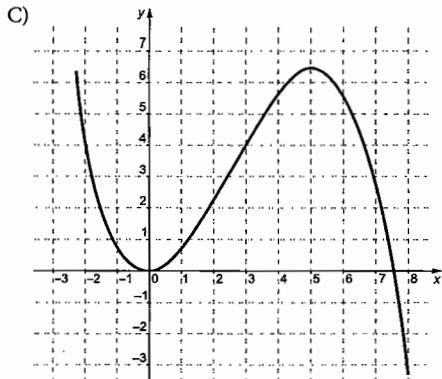
PM 2009.

A)



B)





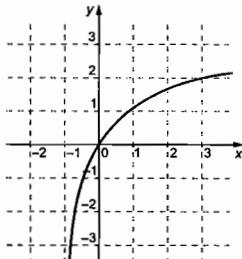
5. Pri penjanju na neku planinu izmjereno je da na svakih 100 metara visine temperatura zraka pada za 0.7°C . Na vrhu planine temperatura je iznosila 14.8°C . Istodobno je bila 26°C pri tlu na 0 m nadmorske visine. Kolika je visina te planine?

DM, ljeto 2010.

- A) 1 500 m, B) 1 600 m, C) 1 700 m, D) 1 800 m

6. Graf koje funkcije je prikazan na slici?

DM, jesen 2010.



- A) $f(x) = \frac{2}{3}x$ B) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x$
 C) $f(x) = 2^{\frac{1+x}{3}} - 2$ D) $f(x) = \log_2(x+1)$

7. a) Odredite domenu funkcije $f(x) = \frac{1}{x-7}$.

PI 2009.

b) Odredite domenu funkcije $h(x) = \frac{\log_5(x-4)}{x-7}$.

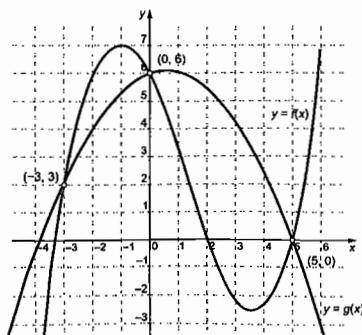
c) Odredite domenu funkcije $g(x) = \log_5(x-4)$.

8. Grafovi funkcija f i g prikazani su na slici

PI 2009.

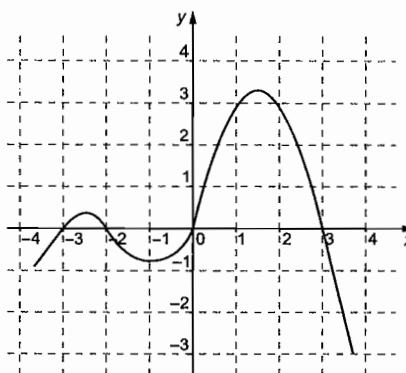
- a) Odredite što je veće $f(-2)$ ili $g(-2)$.

- b) Napišite skup rješenja nejednadžbe $f(x) \geq g(x)$.



9. Funkcija je zadana grafom.

NI 2008.



- a) Kakvoga je predznaka vrijednost funkcije za $x = -1$?
b) Na kojem skupu funkcija, čiji je graf na slici, poprima pozitivne vrijednosti?

10. Temperatura T (u C°) u stakleniku t sati nakon početka

sumraka dana je formulom $T(t) = \frac{1}{4}t^2 - 5t + 30$, $0 \leq t \leq 12$.

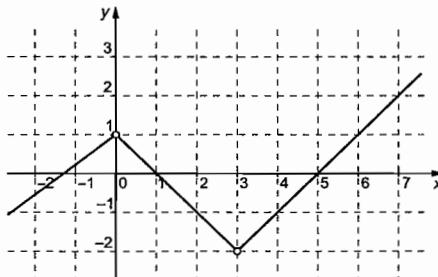
Pretpostavlja se da sumrak počinje u 19 sati.

PM 2009.

- a) Kolika je bila temperatura u 21 : 00 sat?
b) U koliko je sati temperatura bila minimalna?
c) Koliko je iznosila minimalna temperatura u stakleniku?

11. Na slici je graf funkcije f . U istome koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije g takve da je $g(x) = f(x) + 1$.

DM, ljeto 2010.



12. Kabelska televizija započela je s radom. Pokazalo se da su prve godine rada broj njezinih korisnika K i broj mjeseci t od početka

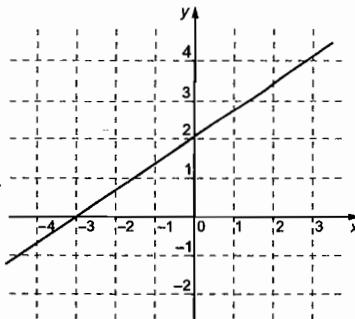
emitiranja povezani formulom: $K = \frac{20\,000(4t+1)}{t+1}$.

DM, ljeto 2010.

- a) Koliki je broj korisnika bio u trenutku početka rada te kabelske televizije?
b) Nakon koliko je mjeseci broj korisnika bio 70 000?
c) Napišite formulu ovisnosti broja mjeseci o broju korisnika. (Izrazite t uz pomoć K .)

13. Na slici je graf funkcije f . U istome koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije g tako da je $g(x) = -f(x)$.

DM, jesen 2010.



14. Zadane su funkcije $f(x) = \frac{2}{x+5}$ i $g(x) = 3x + 1$. Koliko je $(f \circ g)(3)$?

- A) $\frac{2}{15}$ B) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{7}{4}$

PI 2009.

15. Koja od navedenih funkcija nema nijednu nultočku?

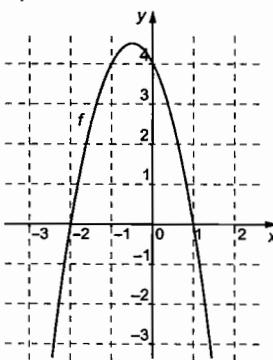
- A) $f(x) = 2(x-1)^2$, B) $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$, C) $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$, D) $f(x) = 2(x-1)(x-2)$

NI 2007. za gimnazije

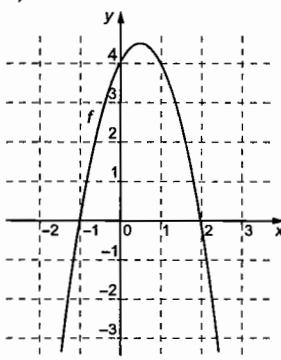
16. Na kojoj je slici prikazan graf funkcije $f(x) = -2(x+2)(x-1)$?

NI 2007. za gimnazije

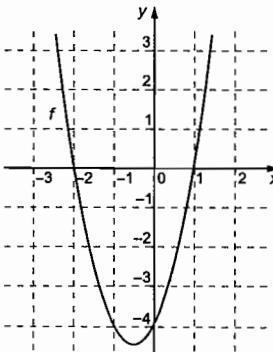
A)



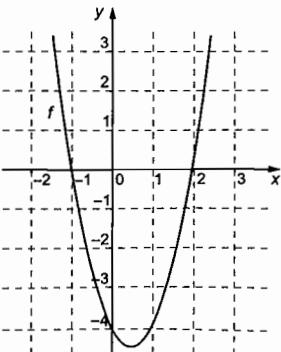
B)



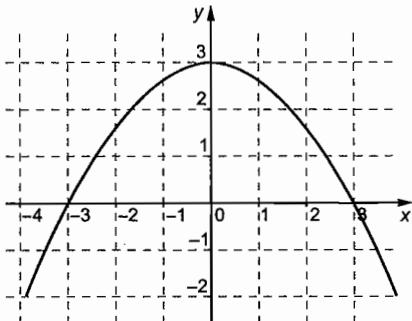
C)



D)



17. Funkcija $f(x) = ax^2 + c$ prikazana je grafom na slici. Koeficijent a jednak je: **PM 2009.**



- A) -3, B) $-\frac{1}{3}$, C) $\frac{1}{3}$, D) 3.

18. Funkcija $f(x) = -x^2 + bx + c$ ima nultočke 1 i 7.

Maksimalna vrijednost funkcije:

NI 2007. za gimnazije

- A) -9, B) 4, C) 9, D) 23.

19. Na slikama su grafovi funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$.

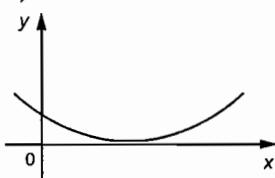
NI 2007. za gimnazije

Za koju od njih vrijedi:

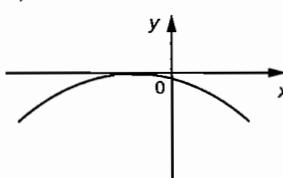
a je pozitivno

diskriminanta je negativna?

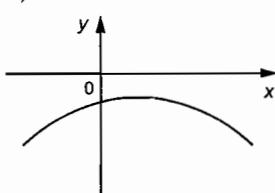
A)



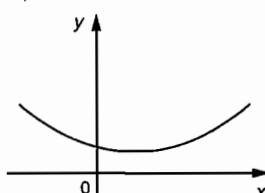
B)



C)



D)



20. Visina na kojoj se nalazi projektil t sekundi nakon ispaljivanja

dana je formulom $h(t) = -2(t-11)^2 + 310$ (h je izraženo metrima).

Koliko će sekundi projektil biti na visini iznad 182 m?

DM, jesen 2010.

- A) 4 B) 10 C) 16 D) 22

21. Na nogometnoj utakmici vratar ispucava loptu.

Putanja lopte opisana je funkcijom $h = -0.0126x^2 + 0.635x$,

gdje je h visina lopte iznad zemlje, a x horizontalna udaljenost od mesta ispucavanja. Veličine h i x izražene su metrima.

NI 2007. za gimnazije

- a) Na kojoj je visini lopta kad je njezina horizontalna udaljenost od mjesta ispučavanja 15 m?
 b) Na kojoj udaljenosti od mjesta ispučavanja lopta pada na zemlju?
 c) Koju najveću visinu lopta postiže?

22. Odredite drugu nultočku funkcije $f(x) = a(x - 3)^2 + 2$
 ako joj je jedna nultočka -1 .

NI 2007. za gimnazije

23. Zadana je funkcija $f(x) = ax^2 + 3x - 4.5$

NI 2008.

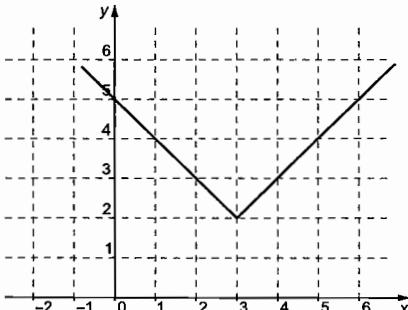
a) Odredite sjecište grafa funkcije s y -osi.

b) Najveća vrijednost funkcije $f(x) = ax^2 + 3x - 4.5$ jednaka je -1 . Odredite a .

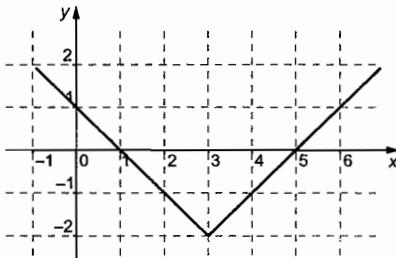
24. Napišite neku kvadratnu funkciju čiji graf prolazi točkom $(2, 3)$. **NI 2007. za gimnazije**

25. Koja slika predviđa graf funkcije $f(x) = |x + 3| + 2$? **NI 2006. za PM gimnazije**

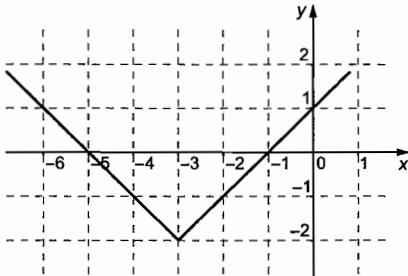
A)



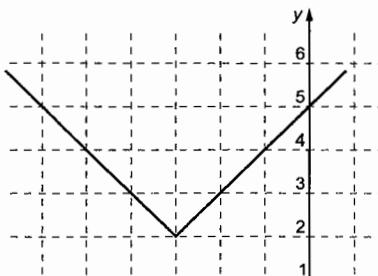
B)



C)



D)



26. U koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcija:

NI 2008.

a) $f(x) = x^2 - 1$, b) $g(x) = |x^2 - 1|$.

27. Odredite koordinate tjemena funkcije $f(x) = x^2 + 2x - 8$ i
 sjecišta grafa s koordinatnim osima. Nacrtajte graf funkcije.

NI 2007. za gimnazije

28. Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{5}(x^3 + 2x^2 - 15x)$.

PI 2009.

a) Odredite nultočke te funkcije.

- b) Odredite derivaciju funkcije $f'(x)$.
 c) Odredite interval (intervale) na kojima navedena funkcija raste.
 d) Odredite lokalne ekstreme te funkcije.
 e) Nacrtajte graf te funkcije rabeći rezultate prethodnih podzadataka.

29. Izraz $\log_2 4a + \log_2 2a^2$ jednak je:

PM 2009.

- A) $3 + 3\log_2 a$, B) $2a + 2$, C) $4 + 3\log_2 a$, D) $4a + 3$.

30. Ako je $\log_a x = s$ i $\log_a y^2 = t$, koliko je $\log_a \frac{x}{y}$?

PI 2009.

- A) $\frac{s}{t}$, B) $\frac{s-t}{2}$, C) $s - \frac{t}{2}$, D) $\sqrt{s} - \frac{t}{2}$

31. Koji je skup domena funkcije $f(x) = \log(2x + 4)$?

DM, ljeto 2010.

- A) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$, B) $(-\infty, -2)$, C) $(-2, +\infty)$, D) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

32. Koji je skup domena funkcije $f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x}\right) - \log(x+2)$?

DM, jesen 2010.

- A) $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$, B) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, C) $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$, D) $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$.

33. Ako je $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ i $\sin t = 0.6$, koliko je $\cos t$?

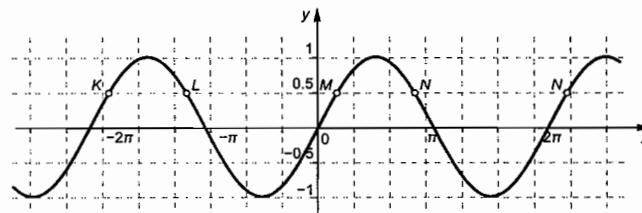
PI 2009.

- A) -0.8 B) -0.4 C) 0.4 D) 0.8

34. Koja od navedenih jednadžbi kao rješenja ima apscise istaknutih točaka K, L, M, N, P na slici?

PI 2009.

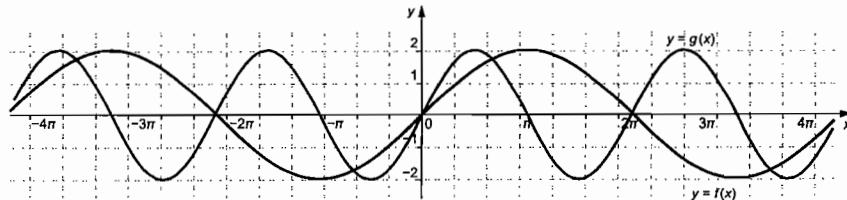
- A) $2\sin x - 1 = 0$, B) $2\sin x + 1 = 0$, C) $2\cos x - 1 = 0$, D) $2\cos x + 1 = 0$



35. Za koju vrijednost x iz intervala $[0, \pi]$ funkcija $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ nije definirana? **NI 2008.**

36. Na slici su prikazani grafovi trigonometrijskih funkcija f i g .

NI 2008.



a) Odredite funkcije.

b) Odčitajte s grafa koliko rješenja ima jednadžba $f(x) = g(x)$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

37.

a) Odredite $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

PM 2009.

b) Za $x = \frac{7\pi}{4}$ odredite vrijednost funkcije $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x + 1}$.

38.

PM 2009.

a) Odredite amplitudu i period funkcije $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$ te sve nultočke iz intervala $[0, 6\pi]$.

b) Na intervalu $[0, 6\pi]$ nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$.

c) Na brojevnoj kružnici označite sve točke $E(t)$ za koje je $\sin t = \frac{1}{2}$.

d) Neka je $\sin t = -0.6$ i $t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Koliko je $\sin 2t$?

e) Ako je $\operatorname{tg} x = a$, izračunajte $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

39. a) Odredite temeljni period funkcije $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

DM, jesen 2010.

b) Kolika je maksimalna vrijednost funkcije $g(x) = -3\sin x + 9$?

40. Posljednji, 25. red stadiona može primiti 2 048 gledatelja.

Svaki prethodni red prima 20 gledatelja manje.

PI 2009.

a) Koliko gledatelja može primiti prvi red stadiona?

b) Koliko je gledatelja na stadionu ako je on popunjeno do posljednjeg mesta?

c) Svečana loža stadiona može primiti 225 gledatelja, a smještena je unutar područja od 5. do 10. reda. Svaki njezin red, počevši od najnižega, ima pet sjedala više od prethodnoga. Koliko mesta za gledatelje ima u prvom redu lože?

41. Turistički autobus za razgledavanje grada uveo je nov način plaćanja karata. Prvi putnik koji uđe u autobus plaća 83 kune, a svaki sljedeći 3 kune manje.

NI 2007. za strukovne škole

a) Koliko je svoju kartu platilo osmi putnik?

b) Odredite formula $C(n)$ za cijenu u kunama koju je platilo n -ti putnik.

c) Koji je po redu ušao putnik koji je platilo 32 kn?

d) Koliki je najveći mogući broj putnika koji pri ulasku u autobus moraju platiti karte?

42.

DM, Ijeto 2010.

a) U aritmetičkom nizu $-12, -5, 2, \dots$ odredite zbroj prvih 50 članova.

b) Tri pozitivna broja čine geometrijski niz. Umnožak prvoga i trećeg člana jest 1.44. Koji je drugi član toga niza?

• 3. JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

3.1. Linearne jednadžbe i nejednadžbe	199
3.2. Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe	205
3.3. Jednadžbe i nejednadžbe s absolutnim vrijednostima i korijenom ...	212
3.4. Jednostavnije polinomske i racionalne jednadžbe i nejednadžbe ...	218
3.5. Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe	221
3.6. Trigonometrijske jednadžbe	231
3.7. Sustavi jednadžbi	236
3.8. Jednadžbe i nejednadžbe – zadaci za vježbu	241
Zadaci višestrukog izbora	241
Zadaci kratkog odgovora	256
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	261
Osnovna razina	261
Viša razina	263

• 3.1. Linearne jednadžbe i nejednadžbe •

Zadaci višestrukog izbora

Primjer 1.

Kojem intervalu pripada rješenje jednadžbe $3x - 7 = 5x$?

- A) $x \in \left\langle \frac{-7}{2}, -3 \right\rangle$ B) $x \in (-3, +\infty)$ C) $x \in (-4, -2)$ D) $x \in \left[-\infty, \frac{-7}{2} \right]$

Rješenje: C.

$$3x - 7 = 5x$$

$$3x - 5x = 7$$

$$-2x = 7$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Primjer 2.

Rješenje jednadžbe $x - 5(x + 2) = -1 - x$ jest:

- A) $\frac{3}{5}$, B) 3, C) $\frac{11}{3}$, D) -3.

Rješenje: D.

$$x - 5(x + 2) = -1 - x$$

$$x - 5x - 10 = -1 - x$$

$$x - 5x + x = -1 + 10$$

$$-3x = 9$$

$$x = -3$$

Primjer 3.

Rješenje jednadžbe $\frac{x+2}{3} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{2x-1}{6} \right) = \frac{x}{2}$ jest:

- A) $\frac{1}{2}$, B) $-\frac{1}{2}$, C) $\frac{3}{2}$, D) $-\frac{3}{2}$.

Rješenje: C.

$$\frac{x+2}{3} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{2x-1}{6} \right) = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x+2}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{2x-1}{6} = \frac{x}{2} \quad | \cdot 6$$

$$2(x+2) - 3x + (2x-1) = 3x$$

$$2x + 4 - 3x + 2x - 1 = 3x$$

$$2x - 3x + 2x - 3x = -4 + 1$$

$$-2x = -3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Primjer 4.

Rješenje jednadžbe $\frac{4+x}{8} = 2 - \frac{3-4x}{5}$ jest:

- A) $\frac{3}{4}$, B) $-\frac{4}{3}$, C) $\frac{4}{3}$, D) $-\frac{3}{4}$.

Rješenje: B.

$$\frac{4+x}{8} = 2 - \frac{3-4x}{5} \quad | \cdot 40$$

$$5(4+x) = 80 - 8(3-4x)$$

$$20 + 5x = 80 - 24 + 32x$$

$$5x - 32x = 80 - 24 - 20$$

$$-27x = 36$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Primjer 5.

Rješenje jednadžbe $x+2 = 2ax - 1$, u ovisnosti o parametru a , iznosi:

- A) $\frac{3}{2a}$, B) $-\frac{3}{2a-1}$, C) $\frac{3}{2a-1}$, D) $\frac{3}{1-2a}$.

Rješenje: C.

$$x+2 = 2ax - 1$$

$$x - 2ax = -1 - 2$$

$$x(1-2a) = -3$$

$$x = \frac{-3}{1-2a} \qquad a \neq \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{-3}{-(2a-1)}$$

$$x = \frac{3}{2a-1}$$

► **Primjer 6.** ►

Ako jednadžba $3m - mx = 6m - 3x$ ima cjelobrojno rješenje, tada jedno od rješenja za $m \in \mathbb{Z}$ iznosi:

- A) -1, B) -2, C) 1, D) 3.

Rješenje: B.

$$3m - mx = 6m - 3x$$

$$3x - mx = 6m - 3m$$

$$x(3 - m) = 3m$$

$$x = \frac{3m}{3 - m}$$

$$x = (3m) : (3 - m) = (3m) : (-m + 3) = -3 + \frac{9}{3 - m}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (3 - m) | 9$$

$$\Rightarrow m \in \{-6, 0, 2, 4, 6, 12\}$$

$$\Rightarrow x \in \{-12, -6, -4, -2, 0, 6\}$$

Pojašnjenje:

$$\text{za } m = -6 \Rightarrow x = -3 + \frac{9}{3 - (-6)} = -2$$

$$\text{za } m = 0 \Rightarrow x = -3 + \frac{9}{3 - 0} = 0$$

$$\text{za } m = 2 \Rightarrow x = -3 + \frac{9}{3 - 2} = 6$$

$$\text{za } m = 4 \Rightarrow x = -3 + \frac{9}{3 - 4} = -12$$

$$\text{za } m = 6 \Rightarrow x = -3 + \frac{9}{3 - 6} = -6$$

$$\text{za } m = 12 \Rightarrow x = -3 + \frac{9}{3 - 12} = -4$$

vruća razina (A)

Primjer 7.

Sva rješenja nejednadžbe $7 - 4x < 0$ su:

- A) $x < 0$, B) $x > \frac{7}{4}$, C) $x < \frac{7}{4}$, D) $x < -\frac{7}{4}$.

Rješenje: B.

$$7 - 4x < 0$$

$$\begin{aligned} -4x &< -7 & | :(-4) \\ x &> \frac{7}{4} \\ x &\in \left(\frac{7}{4}, +\infty \right) \end{aligned}$$

Primjer 8.

Rješenje nejednadžbe $3x + 1 \geq x + 7$ jest interval:

- A) $(-\infty, 3)$, B) $[3, +\infty)$, C) $(3, +\infty)$, D) $(-\infty, 3]$

Rješenje: B.

$$3x + 1 \geq x + 7$$

$$3x - x \geq 7 - 1$$

$$2x \geq 6 \quad | :2$$

$$x \geq 3$$

$$x \in [3, +\infty)$$

Primjer 9.

Rješenje nejednadžbe $\frac{1}{5}x + 6 > x$ jest interval:

- A) $\left(-\infty, \frac{15}{2}\right]$, B) $\left[\frac{15}{2}, +\infty\right)$, C) $(7.5, +\infty)$, D) $(-\infty, 7.5)$.

Rješenje: D.

$$\frac{1}{5}x + 6 > x \mid \cdot 5$$

$$x + 30 > 5x$$

$$x - 5x > -30$$

$$-4x > -30 \mid : (-4)$$

$$x < \frac{-30}{-4}$$

$$x < \frac{15}{2} \quad \text{ili} \quad x < 7.5$$

$$x \in \left(-\infty, \frac{15}{2}\right)$$

Primjer 10.

Rješenje nejednadžbe $3 - (y - 5)(y + 7) < y - (y + 2)^2$ jest:

- A) $(-\infty, -14)$, B) $(-42, +\infty)$, C) $(-\infty, -42)$, D) $(14, +\infty)$.

Rješenje: C.

Najprije pomnožimo brojeve u zagradama na lijevoj strani nejednadžbe, a zatim odredimo kvadrat binoma na desnoj strani.

$$3 - (y - 5)(y + 7) < y - (y + 2)^2$$

$$3 - (y^2 + 7y - 5y - 35) < y - (y^2 + 4y + 4)$$

$$3 - y^2 - 7y + 5y + 35 < y - y^2 - 4y - 4$$

$$-y^2 + y^2 - 7y + 5y - y + 4y < -4 - 3 - 35$$

$$y < -42$$

$$y \in (-\infty, -42)$$

viši razina (A)

Primjer 11.

Koji interval sadržava skup svih rješenja nejednadžbe $5x + 11 \leq 3x - 5$?

- A) $(-\infty, -8]$ B) $(-8, +\infty)$ C) $(-8, 8)$ D) $(-\infty, -8)$

Rješenje: A.

$$5x + 11 \leq 3x - 5$$

$$5x - 3x \leq -5 - 11$$

$$2x \leq -16 \mid : 2$$

$$x \leq -8$$

$$x \in (-\infty, -8]$$

viši razina (A)

Primjer 12.

Od ponuđenih brojeva samo jedan pripada skupu svih rješenja nejednadžbe $x + 3(x - 1) < 2 - x$.

Koji je to broj?

- A) $\frac{7}{5}$ B) -1 C) $\frac{11}{3}$ D) 1

Rješenje: B.

$$\begin{aligned}x + 3(x - 1) &< 2 - x \\x + 3x - 3 &< 2 - x \\x + 3x + x &< 2 + 3 \\5x < 5 \quad | :5 \\x &< 1\end{aligned}$$

► **Primjer 13.** ►

Koji od ponuđenih brojeva može biti rješenje nejednadžbe $\frac{x+2}{3} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{2x-1}{6}\right) > \frac{x}{6}$?
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $-\frac{3}{2}$ D) 2

Rješenje: C.

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{3} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{2x-1}{6}\right) &> \frac{x}{6} \\ \frac{x+2}{3} - \frac{1}{2}x - \frac{2x-1}{6} &> \frac{x}{6} \quad | \cdot 6 \\ 2(x+2) - 3x - (2x-1) &> x \\ 2x + 4 - 3x - 2x + 1 &> x \\ 2x - 3x - 2x - x &> -4 - 1 \\ -4x &> -5 \quad | :(-4) \\ x &< \frac{5}{4}\end{aligned}$$

viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Koliko iznosi kvadrat rješenja jednadžbe $7x + 5 = -2(x + 2)$?

Rješenje: $x^2 = 1$.

$$7x + 5 = -2(x + 2)$$

$$7x + 5 = -2x - 4$$

$$7x + 2x = -4 - 5$$

$$9x = -9$$

$$x = -1$$

$$x^2 = 1$$

Primjer 2.

Rješenje jednadžbe $3x - 5(2x - 3) = 3 - x$ jest _____.

Rješenje: $x = 2$.

$$3x - 5(2x - 3) = 3 - x$$

$$3x - 10x + 15 = 3 - x$$

$$3x - 10x + x = 3 - 15$$

$$-6x = -12$$

$$x = 2$$

Primjer 3.

Rješenje jednadžbe $\frac{x+1}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{3x-2}{6} = \frac{x}{3}$ jest _____.

Rješenje: $x = -\frac{7}{11}$.

$$\frac{x+1}{4} + \frac{3}{2}x - \frac{3x-2}{6} = \frac{x}{3} \quad | \cdot 12$$

$$3(x+1) + 6 \cdot 3x - 2(3x-2) = 4x$$

$$3x + 3 + 18x - 6x + 4 = 4x$$

$$3x + 18x - 6x - 4x = -3 - 4$$

$$11x = -7$$

$$x = -\frac{7}{11}$$

Primjer 4.

Rješenje jednadžbe $\frac{1+3x}{5} = \frac{17}{15} + \frac{3-4x}{3}$ jest _____.

Rješenje: $x = 1$.

$$\frac{1+3x}{5} = \frac{17}{15} + \frac{3-4x}{3} \quad | \cdot 15$$

$$3(1+3x) = 17 + 5(3-4x)$$

$$3 + 9x = 17 + 15 - 20x$$

$$9x + 20x = 17 + 15 - 3$$

$$29x = 29$$

$$x = 1$$

Primjer 5.

Rješenje nejednadžbe $2x - \frac{2-0.75x}{3} < 2$ jest _____.

Rješenje: $x < \frac{32}{27}$.

$$2x - \frac{2-0.75x}{3} < 2 \quad | \cdot 3$$

$$6x - \left(2 - \frac{3}{4}x\right) < 6$$

$$6x - 2 + \frac{3}{4}x < 6 \quad | \cdot 4$$

$$24x - 8 + 3x < 24$$

$$27x < 24 + 8$$

$$27x < 32 \quad | : 27$$

$$x < \frac{32}{27}, \quad \left(-\infty, \frac{32}{27}\right)$$

Primjer 6.

Rješenje nejednadžbe $5 - (3x + 7) < 2 - \frac{4x}{5}$ jest _____.

Rješenje: $x > -\frac{20}{11}$.

$$5 - (3x + 7) < 2 - \frac{4x}{5}$$

$$5 - 3x - 7 < 2 - \frac{4x}{5} \quad | \cdot 5$$

$$25 - 15x - 35 < 10 - 4x$$

$$-15x + 4x < 10 - 25 + 35$$

$$-11x < 20 \quad | : (-11)$$

$$x > -\frac{20}{11}, \quad \left(-\frac{20}{11}, +\infty \right)$$

► Primjer 7. ►

Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{x+1}{2} + \frac{3}{5}x - \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2}$ jest _____.

Rješenje: skup R.

$$\frac{x+1}{2} + \frac{3}{5}x - \frac{3x-2}{5} \geq \frac{x}{2} \quad | \cdot 10$$

$$5(x+1) + 2 \cdot 3x - 2(3x-2) \geq 5x$$

$$5x + 5 + 6x - 6x + 4 \geq 5x$$

$$5x + 6x - 6x - 5x \geq -5 - 4$$

$$0 \geq -9$$

Budući je ta tvrdnja za svaki realan broj x istinita, skup svih rješenja nejednadžbe je skup R.

viša razina (A)

• 3.2. Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe

Zadaci višestrukog izbora

Primjer 1.

Manje rješenje kvadratne jednadžbe

$$5x^2 - 8x = 0$$
 iznosi:

- A) $\frac{8}{5}$, B) $-\frac{8}{5}$, C) -8 , D) 0 .

Rješenje: D.

Ovo je nepotpuna kvadratna jednadžba koja se može rješavati faktorizacijom:

$$5x^2 - 8x = 0$$

$$x(5x - 8) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x - 8 = 0$$

$$5x = 8 \quad | : 5$$

$$x_2 = \frac{8}{5}$$

$$x_1 < x_2$$

Primjer 2.

Zbroj apsolutnih vrijednosti rješenja jednadžbe $7x^2 - 28 = 0$ iznosi:

- A) 0, B) 2, C) 4, D) 6.

Rješenje: C.

$$7x^2 - 28 = 0$$

$$7x^2 = 28 \quad | : 7$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = -2, x_2 = 2$$

$$|x_1| + |x_2| = |-2| + |2| = 2 + 2 = 4$$

Primjer 3.

Jednadžba $3x^2 + x + 5 = 0$ ima:

- A) dva različita realna rješenja, B) dva jednakaka realna rješenja,
C) dva konjugirano kompleksna rješenja, D) nema rješenja.

Rješenje: C.

Odredimo diskriminantu kvadratne jednadžbe prema formuli:

$$D = b^2 - 4ac.$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5 = 1 - 60 = -59$$

$$D < 0$$

Kako je $D < 0$, jednadžba ima dva konjugirano kompleksna rješenja.

Primjer 4.

Cjelobrojno rješenje kvadratne jednadžbe $3x^2 - 10x - 8 = 0$ iznosi:

- A) 2, B) 4, C) -4, D) -2.

Rješenje: B.

$$3x^2 - 10x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

► **Primjer 5.** ►

Aritmetička sredina korijena jednadžbe $2x^2 + 5x - 3 = 0$ iznosi:

- A) $\frac{3}{4}$, B) $\frac{5}{4}$, C) $\frac{1}{2}$, D) $-\frac{5}{4}$.

Rješenje: D.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{-5}{2}}{2} = \frac{-5}{4}$$

vija razina (A)

► **Primjer 6.** ►

Za koje vrijednosti realnog parametra k kvadratna jednadžba $kx^2 + (k^2 + 2k)x - 12 = 0$ ima međusobno suprotna rješenja?

- A) $k = 0$ B) $k = -2$ C) $k = 2$ D) $k \in \{0, -2\}$

Rješenje: B.

Jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ ima međusobno suprotna rješenja ako i samo ako je $b = 0$.

$$b = k^2 + 2k \quad \text{uvjet: } k \neq 0$$

$$k^2 + 2k = 0$$

$$k(k + 2) = 0$$

$$k_1 = 0; k_2 = -2$$

vija razina (B)

► **Primjer 7.** ►

Kvadratna jednadžba čija su rješenja $x_1 = 3$ i $x_2 = -2$ glasi:

- A) $x^2 - x - 6 = 0$, B) $x^2 + x - 6 = 0$, C) $x^2 - x + 6 = 0$, D) $x^2 + x + 6 = 0$.

Rješenje: A.

Prema Vièteovim formulama dobivamo:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 3 - 2 = 1 \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot (-2) = -6 \Rightarrow c = -6.$$

$$a = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0.$$

viša razina (A)

► **Primjer 8.**

Koja je od navedenih tvrdnji točna za rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 5x - 6 = 0$?

- A) $x_1 + x_2 = 6$ B) $x_1 + x_2 = -5$ C) $x_1 + x_2 = 5$ D) $x_1 + x_2 = -6$

Rješenje: C.

Prema Vièteovim formulama dobivamo: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.

$$\text{U našoj je jednadžbi } a = 1 \text{ i } b = -5, \text{ dakle: } x_1 + x_2 = \frac{-(-5)}{1} = 5.$$

viša razina (A)

► **Primjer 9.**

Ako je -3 jedno rješenje kvadratne jednadžbe $px^2 - 2x + 5 = 0$, koliki je realni parametar p ?

- A) -1 B) $-\frac{11}{9}$ C) -2 D) 2

Rješenje: B.

Rješenje se dobije uvrštavanjem $x = -3$ u zadanu jednadžbu.

viša razina (A)

► **Primjer 10.**

Skup svih realnih brojeva x za koje

vrijedi nejednakost $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} < 0$ jest:

- A) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, B) $(-3, 1)$,
C) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$, D) $[-3, 1]$.

Rješenje: B.

Prvi način rješavanja:

$$\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} < 0 \quad | \cdot 2$$

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

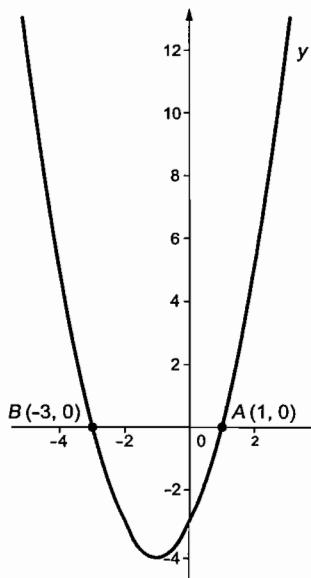
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 1$$

$$x \in (-3, 1).$$



Drugi način rješavanja:

$$x^2 + 2x - 3 < 0$$

1.

$$x^2 - x + 3x - 3 < 0$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

2.

$$x(x-1) + 3(x-1) < 0$$

$$x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$$

$$x-1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

$$(x-1)(x+3) < 0$$

\Rightarrow nema rješenja

$$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

$$x \in (-3, 1).$$

viša razina (A)

Primjer 11.

Jednadžba $x^2 - mx + 9 = 0$ nema realnih rješenja za:

- A) $m \in [6, +\infty)$, B) $m \in (-\infty, 6) \cup (6, +\infty)$, C) $m \in (-6, 6)$, D) $m \in [-6, 6]$.

Rješenje: C.

Jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ nema realnih rješenja ako i samo ako je $D < 0$, tj. $b^2 - 4ac < 0$:
 $(-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 < 0$

$$m^2 < 36$$

$$|m| < 6$$

$$m \in (-6, 6).$$

Primjer 12.

Ako jedno rješenje normirane kvadratne jednadžbe $x^2 + bx + c = 0$ s realnim koeficijentima iznosi $x_1 = 2 - i$, koliki je umnožak svih rješenja te jednadžbe?

Rješenje: D.

Rješenja su konjugirano kompleksni brojevi, te je $x_2 = 2 + i$.

Imamo:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= (2 - i)(2 + i) = 2^2 - i^2 = \\ &= 4 - (-1) = 4 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Primjer 13.

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe

$$4x^2 + 36 = 0$$

- jest:
 A) 0, B) 6, C) -6, D) -3.

Rješenje: A.

$$4x^2 + 36 = 0$$

$$4x^2 = -36$$

$$x^2 = -9$$

$$x_{1,2} = \pm 3i$$

$$x_1 + x_2 = 3i - 3i = 0$$

Iz Vièteovih formula slijedi da je zbroj rješenja svake nepotpune kvadratne jednadžbe uvijek jednak 0.

Zadaci kratkih odgovora

Primjer 1.

Odredimo realan parametar k tako da jednadžba $5(x^2 - 1) + k = (k + 1)x$ ima jedno rješenje 0.

Rješenje: $k = 5$.

Jednadžba će imati jedno rješenje jednako nuli ako je slobodni član jednak nuli.

$$5(x^2 - 1) + k = (k + 1)x$$

$$5x^2 - 5 + k = (k + 1)x$$

$$5x^2 - (k + 1)x + (k - 5) = 0$$

Dakle: $k - 5 = 0 \Rightarrow k = 5$.

Primjer 2.

Odredimo zbroj apsolutnih vrijednosti rješenja jednadžbe $(x+3)(x-3)=7$.

Rješenje: 8.

$$(x+3)(x-3)=7$$

$$x^2 - 9 = 7$$

$$x^2 = 16$$

$$x_{1,2} = \pm 4$$

$$|x_1| + |x_2| = |4| + |-4| = 4 + 4 = 8$$

► Primjer 3. ►

Odredimo kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima čija su rješenja: $-\frac{1}{3}$ i 5.

Rješenje: $3x^2 - 14x - 5 = 0$.

Prema Vièteovim formulama: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -\left(-\frac{1}{3} + 5\right) = -\frac{-1+15}{3} = -\frac{14}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \cdot 5 = -\frac{5}{3}.$$

Te vrijednosti uvrstimo u normiranu kvadratnu jednadžbu: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$:

$$\Rightarrow x^2 - \frac{14}{3}x - \frac{5}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$3x^2 - 14x - 5 = 0.$$

viša razina (A)

► Primjer 4. ►

Odredimo neku kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima čije je jedno

$$\text{rješenje } x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i.$$

Rješenje: $36x^2 + 24x + 13 = 0$.

Rješenja su konjugirano kompleksni brojevi, pa je drugo rješenje $x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i$.

Prema Vièteovim formulama dobivamo:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}i\right) \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{4}i^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{4+9}{36} = \frac{13}{36}.$$

Te vrijednosti uvrstimo u normiranu kvadratnu jednadžbu: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{36} = 0 \quad | \cdot 36$$

$$36x^2 + 24x + 13 = 0.$$

viša razina (A)

► Primjer 5. ►

Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine korijena jednadžbe $x^2 - 10x + 16 = 0$

iznosi _____.

Rješenje: 9.

Koeficijenti jednadžbe $x^2 - 10x + 16 = 0$ jesu $a = 1, b = -10, c = 16$.

$$\text{Aritmetička sredina rješenja: } A = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{-b}{a}}{2} = \frac{\frac{-(-10)}{1}}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

$$\text{Geometrijska sredina rješenja: } G = \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{16}{1}} = \sqrt{16} = 4.$$

$$A + G = 5 + 4 = 9.$$

Primjer 6.

Za jednadžbu $x^2 - 7x - 8 = 0$ odredimo:

- a) $x_1 + x_2$, b) $x_1 \cdot x_2$, c) $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$.

Rješenje:

- a) $x_1 + x_2 = 7$ b) $x_1 \cdot x_2 = -8$ c) $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = -45$

$$\text{Prema Vièteovim formulama: } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Koeficijenti jednadžbe $x^2 - 7x - 8 = 0$ su $a = 1, b = -7, c = -8$.

$$\text{a) } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7 \quad \text{b) } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-8}{1} = -8$$

$$\text{c) } (2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 4x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 = 4x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 4 \\ = 4 \cdot (-8) - 2 \cdot 7 + 1 = -32 - 14 + 1 = -45$$

Primjer 7.

Rješenja jednadžbe $(x - 4)(x + 4) - (x - 6)(x + 6) = (x - 2)^2 - 2x$ jesu _____.

Rješenje: $x_1 = 8, x_2 = -2$.

$$(x - 4)(x + 4) - (x - 6)(x + 6) = (x - 2)^2 - 2x$$

$$x^2 - 16 - (x^2 - 36) = x^2 - 4x + 4 - 2x$$

$$x^2 - 16 - x^2 + 36 = x^2 - 4x + 4 - 2x$$

$$20 = x^2 - 6x + 4$$

$$x^2 - 6x + 4 - 20 = 0$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{100}}{2}.$$

$$x_1 = \frac{6+10}{2} = \frac{16}{2} = 8, \quad x_2 = \frac{6-10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Primjer 8.

Riješimo nejednadžbu: $x^2 \geq 4$.

Rješenje: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

1. način rješavanja:

$$x^2 \geq 4$$

1.

2.

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

$$x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

$$(x-2)(x+2) \geq 0$$

$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$x+2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$$

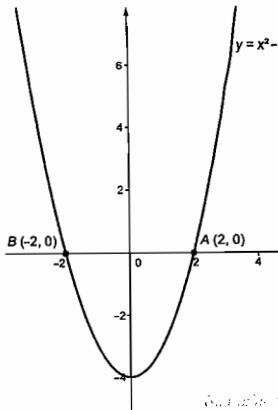
$$\Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

$$\Rightarrow x \in [2, +\infty)$$

$$x \in (-\infty, -2]$$

2. način rješavanja:

Odredimo nultočke te skiciramo graf funkcije $f(x) = x^2 - 4$. Nakon toga iz grafa odčitamo vrijednosti varijable x za koje je vrijednost funkcije nenegativna.



Primjer 9.

Odredimo sva rješenja jednadžbe $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$.

$$\text{Rješenje: } x_1 = \sqrt{2}; \quad x_2 = -\sqrt{2}; \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

To je bikvadratna jednadžba, pa je rješavamo uvođenjem supstitucije $x^2 = t$:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2, \quad t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_{1,2}^2 = t_1 \quad x_{3,4}^2 = t_2$$

$$x_{1,2}^2 = 2 \quad \left| \begin{array}{l} x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \\ x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

$$x_{3,4}^2 = \frac{1}{2} \quad \left| \begin{array}{l} x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

Primjer 10.

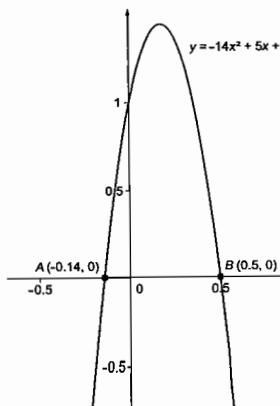
Odredimo skup onih rješenja nejednadžbe $-14x^2 + 5x + 1 \geq 0$ za koje vrijedi $x > 0$.

$$\text{Rješenje: } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right].$$

Odredimo nultočke, te skiciramo graf funkcije $f(x) = -14x^2 + 5x + 1$. Nakon toga odčitamo samo pozitivne vrijednosti varijable x .

$$-14x^2 + 5x + 1 \geq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-14) \cdot 1}}{-28} =$$



$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{-28} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{-28} = \frac{-5 \pm 9}{-28}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{7}$$

$$x > 0 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$$

viša razina (A)

Primjer 11.Odredimo skup svih rješenja nejednadžbe $25 - x^2 \leq 0$.Rješenje: $x \in (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$.

$$-x^2 + 25 \leq 0$$

$$-x^2 \leq -25$$

$$x^2 \geq 25$$

$$|x| \geq 5$$

$$x \in (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$$

viša razina (A)

• 3.3. Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima i korijenom •

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.Zbroj svih rješenja jednadžbe $|2x - 3| = x + 2$ jest:

- A) 8, B) 2, C) $\frac{25}{3}$, D) ništa od navedenoga.

Rješenje: D.

Uvjet: $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$|2x - 3| = x + 2$$

1. slučaj: 2. slučaj:

za $2x - 3 \geq 0$:za $2x - 3 < 0$:

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 5 + \frac{1}{3} = \frac{16}{3}.$$

$$2x - 3 = x + 2$$

$$2x - 3 = -x - 2$$

$$2x - x = 2 + 3$$

$$2x + x = -2 + 3$$

$$x_1 = 5$$

$$3x = 1 \quad | :3$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

viša razina (A)

Primjer 2.Sva rješenja jednadžbe $5x - 3|x| = 2$ leže u intervalu:

- A) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, B) $(1, +\infty)$, C) $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, D) $[1, +\infty)$.

Rješenje: D.

$$5x - 3|x| = 2$$

$$-3|x| = 2 - 5x \quad | \cdot (-1)$$

$$3|x| = 5x - 2$$

$$\text{uvjet: } 5x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{5}.$$

1. slučaj:

za $x > 0$:

$$3x = 5x - 2$$

$$3x - 5x = -2$$

$$-2x = -2 \quad | :(-2)$$

$$x_1 = 1$$

2. slučaj:

za $x < 0$:

$$-3x = 5x - 2$$

$$-8x = -2 \quad | :(-8) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{1}{4}$$

S obzirom na uvjet, x_2 nije rješenje jednadžbe, pa jednadžba ima jedinstveno rješenje $x = 1$.

viša razina (A)

Primjer 3.Rješenje nejednadžbe $|5x - 1| < 4$ iznosi:

$$\text{A) } x \in (-\infty, 1), \quad \text{B) } x \in \left(\frac{3}{5}, +\infty\right), \quad \text{C) } x \in \left(\frac{3}{5}, 1\right), \quad \text{D) } x \in [1, +\infty).$$

Rješenje: C.Nejednadžbu $|x| \leq a$ rješavamo prema pravilu:

$$\begin{cases} -a \leq x \leq a & \text{za } a > 0 \\ x = 0 & \text{za } a = 0 \\ \text{nema rješenja} & \text{za } a < 0 \end{cases}$$

Budući da je $a = 4$, primijenimo pravilo, a nakon toga rješavamo kao sustav nejednadžbi $-4 < 5x - 1 < 4$.

$$-4 < 5x - 1 < 4 \quad | +1$$

$$-4 + 1 < 5x - 1 + 1 < 4 + 1$$

$$-3 < 5x < 5 \quad | :5$$

$$\frac{-3}{5} < x < 1$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{5}, 1\right)$$

viša razina (A)

Primjer 4.Količnik manjega i većeg rješenja jednadžbe $|2x - 3| = x - 2$ jest:

$$\text{A) } \frac{5}{3}, \quad \text{B) } 1, \quad \text{C) } \frac{3}{5}, \quad \text{D) jednadžba nema rješenja.}$$

Rješenje: D.

$$|2x - 3| = x - 2$$

uvjet: $x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

1. slučaj:

$$\text{za } 2x - 3 > 0:$$

$$2x - 3 = x - 2$$

$$2x - x = -2 + 3$$

$$x_1 = 1$$

2. slučaj:

$$\text{za } 2x - 3 < 0:$$

$$2x - 3 = -x + 2$$

$$2x + x = 2 + 3$$

$$3x = 5$$

$$x_2 = \frac{5}{3}$$

Kako su $x_1 < 2$ i $x_2 < 2$, jednadžba nema rješenja.

Primjer 5.

Sva rješenja jednadžbe $|x - 3| = -x + 5$ su iz intervala:

- A) $(-\infty, -5)$, B) $(5, +\infty)$, C) $(-\infty, 5]$, D) jednadžba nema rješenja.

Rješenje: C.

uvjet:

$$-x + 5 \geq 0$$

$$-x \geq -5 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \leq 5$$

1. slučaj:

$$\text{za } x - 3 > 0:$$

$$x - 3 = -x + 5$$

$$x + x = 5 + 3$$

$$2x = 8 \quad | :2$$

$$x_1 = 4$$

2. slučaj:

$$\text{za } x - 3 < 0:$$

$$x - 3 = x - 5$$

$$x - x = -5 + 3$$

$$0 = -2.$$

Jednadžba ima jedinstveno rješenje: $x = 4; x \in (-\infty, 5]$

Primjer 6.

Koja je od navedenih tvrdnji istinita za sva rješenja jednadžbe $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-5} = 2$?

- A) $x_1 + x_2 > 12$ B) $x_1 \cdot x_2 \geq 12$ C) $x_1 \cdot x_2 < 12$ D) $x_1 + x_2 < 10$.

Rješenje: B.

uvjeti:

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-5} = 2 \quad |^2$$

$$(\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-5})^2 = 4$$

$$\sqrt{5x-1}^2 - 2 \cdot \sqrt{5x-1} \cdot \sqrt{3x-5} + \sqrt{3x-5}^2 = 4$$

$$5x - 1 - 2\sqrt{(5x-1)(3x-5)} + 3x - 5 = 4$$

$$-2\sqrt{15x^2 - 25x - 3x + 5} = -8x + 10 \quad |:(-2)$$

$$\sqrt{15x^2 - 28x + 5} = 4x - 5 \quad |^2$$

$$15x^2 - 28x + 5 = (4x - 5)^2$$

$$15x^2 - 28x + 5 = 16x^2 - 40x + 25$$

$$x^2 - 12x + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 12; \quad x_1 \cdot x_2 = 20$$

Primjer 7.Jednadžba $12 + |5x + 3| = 0$ ima rješenje:

- A) -3, B) nema rješenja, C) 3, D) 0.

Rješenje: B.

$$12 + |5x + 3| = 0$$

$$|5x + 3| = -12$$

Budući da apsolutna vrijednost realnog broja ne može biti negativan realni broj, jednadžba nema rješenja.

Primjer 8.Recipročna vrijednost umnoška svih rješenja jednadžbe $2\sqrt{x^2 - 9} = 6$ iznosi:

- A) $-\frac{1}{18}$, B) 18, C) 3, D) $\frac{1}{18}$.

Rješenje: A.

$$2\sqrt{x^2 - 9} = 6 \mid :2$$

$$\sqrt{x^2 - 9} = 3 \mid ^2$$

$$x^2 - 9 = 9$$

$$x^2 = 18$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{18}$$

$$(x_1 \cdot x_2)^{-1} = -\frac{1}{18}$$

uvjeti:

$$x^2 - 9 \geq 0$$

$$\rightarrow x^2 \geq 9$$

$$\rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty]$$

Primjer 9.Broj suprotan rješenju jednadžbe $\sqrt{2x-1} - \sqrt{5+2x} = 3$ jest:

- A) $\frac{5}{8}$, B) nema rješenja, C) $-\frac{5}{8}$, D) $\frac{8}{5}$.

Rješenje: B.

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{5+2x} = 3 \mid ^2$$

$$(\sqrt{2x-1} - \sqrt{5+2x})^2 = 9$$

$$\sqrt{2x-1}^2 - 2 \cdot \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{5+2x} + \sqrt{5+2x}^2 = 9$$

$$2x-1 - 2\sqrt{(2x-1)(5+2x)} + 5+2x = 9$$

$$-2\sqrt{10x+4x^2-5-2x} = -4x+5$$

$$2\sqrt{4x^2+8x-5} = -5+4x \mid ^2$$

$$4(4x^2+8x-5) = (-5+4x)^2$$

$$16x^2+32x-20 = 25-40x+16x^2$$

$$72x = 45$$

$$x = \frac{5}{8}$$

Provjerimo li provjeru, uočit ćemo da rješenje ne zadovoljava jednadžbu. Razlog je činjenica da je u početnoj jednadžbi umanjenik manji od umanjitelja, tj. da je $2x-1 < 5+2x$, te je nemoguće da razlika bude pozitivna.

uvjeti:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ 5+2x \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Zadatci kratkih odgovora

► Primjer 1. ►

Riješimo iracionalnu jednadžbu: $\sqrt{4x-7} - \sqrt{x+5} = 0$.

Rješenje: $x = 4$.

$$\begin{aligned}\sqrt{4x-7} - \sqrt{x+5} &= 0 \\ \sqrt{4x-7} - \sqrt{x+5} &= 0 \quad |^2 \\ 4x-7 &= x+5 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4\end{aligned}$$

uvjeti:

$$\begin{cases} 4x-7 \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{7}{4} \\ x+5 \geq 0 \rightarrow x \geq -5 \end{cases} \rightarrow x \geq \frac{7}{4}$$

viša razina (A)

► Primjer 2. ►

Napišimo rješenja jednadžbe $\left| \frac{3x+7}{2} \right| = 5$.

Rješenje: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-17}{3}$.

$$\text{za } \frac{3x+7}{2} \geq 0:$$

$$\frac{3x+7}{2} = 5 \quad | \cdot 2$$

$$3x+7 = 10$$

$$3x = 3 \quad | :3$$

$$x_1 = 1$$

$$\text{za } \frac{3x+7}{2} < 0:$$

$$\frac{3x+7}{2} = -5 \quad | \cdot 2$$

$$3x+7 = -10$$

$$3x = -17 \quad | :3$$

$$x_2 = \frac{-17}{3}$$

viša razina (A)

Primjer 3.

Odredimo zbroj apsolutnih vrijednosti rješenja jednadžbe $|5x+3| = \frac{|3-\sqrt{2}|}{|\sqrt{3}-3| + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Rješenje: $\frac{6}{5}$.

Najprije treba odrediti apsolutne vrijednosti izraza na desnoj strani jednadžbe:

$$3 > \sqrt{2} \Rightarrow 3 - \sqrt{2} > 0 \Rightarrow |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} < 3 \Rightarrow \sqrt{3} - 3 < 0 \Rightarrow |\sqrt{3} - 3| = -(\sqrt{3} - 3) = 3 - \sqrt{3}$$

$$|5x+3| = \frac{|3-\sqrt{2}|}{|\sqrt{3}-3| + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

1. slučaj:

$$\text{za } 5x+3 > 0:$$

$$5x+3 = 1$$

$$5x = -2 \quad | :5$$

$$x_1 = -\frac{2}{5}$$

2. slučaj:

$$\text{za } 5x+3 > 0:$$

$$5x+3 = -1$$

$$5x = -4 \quad | :5$$

$$x_2 = -\frac{4}{5}$$

$$|5x+3| = \frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$|5x+3| = \frac{3-\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$|5x+3| = \frac{3-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{3}$$

$$|5x+3| = 1$$

$$|x_1| + |x_2| = \left| \frac{-2}{5} \right| + \left| \frac{-4}{5} \right| = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

Primjer 4.

Kvadrat rješenja jednadžbe $4\sqrt{x-1} - x = 3$ iznosi: _____.

Rješenje: 25.

$$4\sqrt{x-1} - x = 3$$

$$4\sqrt{x-1} = x + 3 \quad |^2$$

$$16(x-1) = (x+3)^2$$

$$16x - 16 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x-5)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = 5$$

$$x^2 = 25$$

uvjet:

$$x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

viša razina (A)

Primjer 5.

Kvadratni korijen zbroja rješenja iracionalne jednadžbe $5 - 3\sqrt{2x+4} = 3 - x$ iznosi: _____.

Rješenje: $\sqrt{14}$.

$$5 - 3\sqrt{2x+4} = 3 - x$$

$$-3\sqrt{2x+4} = 3 - x - 5$$

$$-3\sqrt{2x+4} = -x - 2 \quad | \cdot (-1)$$

$$3\sqrt{2x+4} = x + 2 \quad |^2$$

$$9(2x+4) = x^2 + 4x + 4$$

$$18x + 36 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 - 14x - 32 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot (-32)}}{2} = \frac{14 \pm 18}{2}$$

$$x_1 = 16$$

$$x_2 = -2$$

$$\sqrt{16 + (-2)} = \sqrt{14}$$

uvjeti:

$$\begin{cases} 2x+7 \geq 0 & \rightarrow x \geq -\frac{7}{2} \rightarrow x \geq -2 \\ x+2 \geq 0 & \rightarrow x \geq -2 \end{cases}$$

viša razina (A)

Primjer 6.

Riješimo iracionalnu jednadžbu $\sqrt{5 - \sqrt{2 - \sqrt{6x+1}}} = 2$.

Rješenje: 0.

$$\sqrt{5 - \sqrt{2 - \sqrt{6x+1}}} = 2 \quad |^2$$

$$5 - \sqrt{2 - \sqrt{6x+1}} = 4$$

$$-\sqrt{2 - \sqrt{6x+1}} = -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{6x+1}} = 1 \quad |^2$$

$$2 - \sqrt{6x+1} = 1$$

$$-\sqrt{6x+1} = -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\sqrt{6x+1} = 1 \quad |^2$$

$$6x+1 = 1$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

Dobiveno rješenje je potrebno uvrstiti u početnu jednadžbu i provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti jednadžbe.

viša razina (A)

► Primjer 7.

Riješimo iracionalnu jednadžbu $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+4} = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+5}$.

Rješenje: Jednadžba nema rješenja.

$$\begin{aligned}\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+4} &= \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+5} \\ \sqrt{(x-3)(x+4)} &= \sqrt{(x-2)(x+5)} \\ x^2 + 4x - 3x - 12 &= x^2 + 5x - 2x - 10 \\ -2x &= 2 \\ x &= -1\end{aligned}$$

Provjerom možemo zaključiti da, prema uvjetima, broj -1 ne može biti rješenje jednadžbe.

vidi razinu (A)

uvjeti:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0 & \rightarrow x \geq 3 \\ x+4 \geq 0 & \rightarrow x \geq -4 \\ x-2 \geq 0 & \rightarrow x \geq 2 \\ x+5 \geq 0 & \rightarrow x \geq -5 \end{cases} \rightarrow x \geq 3$$

• 3.4. Jednostavnije polinomske i racionalne jednadžbe i nejednadžbe

Zadatci višestrukog izbora

► Primjer 1.

Jednadžba ima smisla ako vrijedi: $\frac{x}{x-1} - \frac{7x}{x+2} + 6 = 0$

- A) $x \neq 2$, B) $x \neq -1, 2$, C) $x \neq 1, -2$, D) $x \neq 1$.

Rješenje: C.

Rješenje zadatka dobijemo iz uvjeta da nazivnici razlomaka ne mogu biti jednaki 0.

$$x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

$$x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq -2.$$

vidi razinu (A)

► Primjer 2.

Realno rješenje jednadžbe $\frac{1}{3x-9} - \frac{8}{2x-6} - \frac{1}{3} = 0$ iznosi:

- A) $x = -3$, B) $x = 8$, C) $x = \frac{3}{2}$, D) ništa od navedenoga.

Rješenje: D.

$$\frac{1}{3x-9} - \frac{8}{2x-6} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\frac{1}{3(x-3)} - \frac{8}{2(x-3)} - \frac{1}{3} = 0$$

Rješenje mora zadovoljiti uvjet $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.

$$\frac{1}{3(x-3)} - \frac{8}{2(x-3)} - \frac{1}{3} = 0 \quad | \cdot 6(x-3)$$

$$2 - 24 - 2(x-3) = 0$$

$$-22 - 2x + 6 = 0$$

$$-2x = 22 - 6$$

$$-2x = 16 \quad | : (-2)$$

$$x = -8$$

vidi razinu (A)

Primjer 3.

Sva su rješenja nejednadžbe: $\frac{2x^2}{3x+1} < 0$

- A) veća od 0, B) manja od 0, C) veća od -3, D) manja od -3.

Rješenje: B.

Budući da je brojnik razlomka uvijek nenegativan realni broj, mora biti:

$$3x + 1 < 0$$

$$3x < -1$$

$$x < -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3} \right).$$

Uči razinu (A)

Primjer 4.

Koju od danih jednadžbi zadovoljava $x = \sqrt[4]{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3}-1}$?

- A) $x^2 + 4 = 0$ B) $x^4 + 4 = 0$ C) $x^2 - 4 = 0$ D) $x^4 - 2 = 0$

Rješenje: D.

$$x = \sqrt[4]{\sqrt{3}+1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{3}-1}$$

$$x = \sqrt[4]{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$x = \sqrt[4]{(\sqrt{3})^2 - 1^2}$$

$$x = \sqrt[4]{2} \quad \boxed{4}$$

$$x^4 = 2$$

$$x^4 - 2 = 0$$

Primjer 5.

Zbroj svih rješenja jednadžbe $x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = 0$ iznosi:

- A) 3, B) 0, C) -6, D) -3.

Rješenje: A.

Jednadžba se može rješavati faktorizacijom.

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x = 0$$

$$x^3(x - 3) - 4x(x - 3) = 0$$

$$(x - 3)(x^3 - 4x) = 0$$

$$x(x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3; x_3 = 2; x_4 = -2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

Uči razinu (A)

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Određimo kvadrat rješenja jednadžbe $\frac{2x-3}{x+5} = -2$.

Rješenje: $\frac{49}{16}$.

Prije rješavanja postavimo uvjet $x+5 \neq 0 \Rightarrow x \neq -5$ jer nazivnik razlomka ne može biti jednak 0.

$$\frac{2x-3}{x+5} = -2 \quad | \cdot (x+5)$$

$$2x-3 = -2(x+5)$$

$$2x-3 = -2x-10$$

$$2x+2x = -10+3$$

$$4x = -7 \quad | :4$$

$$x = \frac{-7}{4}$$

$$x^2 = \left(\frac{-7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

viša razina (A)

Primjer 2.

Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{1}{2x} > 1$ jest _____.

Rješenje: $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Budući da je brojnik pozitivan realni broj, nazivnik mora biti pozitivan broj $x > 0$.

Također treba voditi brigu o uvjetu $x \neq 0$.

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{2x} > 1 & 1. \text{ slučaj:} & 2. \text{ slučaj:} \\ 2x & 1-2x > 0 & 1-2x < 0 \\ \frac{1}{2x}-1 > 0 & \frac{2x > 0}{x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)} & \frac{2x < 0}{x \in \emptyset}, \text{ tj. u ovom slučaju jednadžba nema rješenja} \\ \frac{1-2x}{2x} > 0 & & \end{array}$$

viša razina (A)

Primjer 3.

Skup svih rješenja nejednadžbe $x(5x-2) > 0$ napišimo s pomoću intervala.

Rješenje: $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$.

Budući da je umnožak dvaju faktora veći od nule kada su ili oba pozitivna ili oba negativna, razlikujemo dva slučaja:

1. slučaj:

$$x < 0 \text{ i } 5x - 2 < 0$$

$$x < 0 \text{ i } 5x < 2$$

$$x < 0 \text{ i } x < \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$x \in (-\infty, 0)$$

2. slučaj:

$$x > 0 \text{ i } 5x - 2 > 0$$

$$x > 0 \text{ i } 5x > 2$$

$$x > 0 \text{ i } x > \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow x > \frac{2}{5}$$

$$x \in \left(\frac{2}{5}, +\infty \right).$$

Konačno je rješenje unija dobivenih rješenja: $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{5}, +\infty \right)$.

viša razina (A)

3.5. Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe

Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1. Rješenje jednadžbe $8^{-\frac{5}{x}} = 32$ jest:

- A) 1, B) -3, C) -1, D) 3.

Rješenje: B.

$$8^{-\frac{5}{x}} = 32$$

$$(2^3)^{-\frac{5}{x}} = 2^5$$

$$2^{-\frac{15}{x}} = 2^5$$

$$-\frac{15}{x} = 5 \quad | \cdot x$$

$$5x = -15 \quad | : 5$$

$$x = -3$$

Primjer 2. Rješenje jednadžbe $16^{1-2x} = \frac{1}{4}$

zapišimo u obliku decimalnog broja.

- A) -0.75 B) 1.3 C) 0.75 D) 1.25

Rješenje: C.

$$16^{1-2x} = \frac{1}{4}$$

$$(2^4)^{1-2x} = 2^{-2}$$

$$2^{4-8x} = 2^{-2}$$

$$4 - 8x = -2$$

$$-8x = -6 \quad | : (-8)$$

$$x = \frac{3}{4} = 0.75$$

Primjer 3.

Kvadrat rješenja jednadžbe $3^{2x+1} = \sqrt{27}$ iznosi:

- A) 4, B) 3, C) $\frac{1}{4}$, D) $\frac{1}{16}$.

Rješenje: D.

$$3^{2x+1} = \sqrt{27}$$

$$3^{2x+1} = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$2x+1 = \frac{3}{2} \quad | \cdot 2$$

$$4x+2 = 3$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

Primjer 4.

Recipročna vrijednost rješenja

jednadžbe $3 \cdot 25^{x-2} = 375$ jest:

- A) $\frac{7}{2}$, B) $\frac{5}{2}$, C) $\frac{2}{7}$ D) 5.

Rješenje: C.

$$3 \cdot 25^{x-2} = 375 \quad | : 3$$

$$25^{x-2} = 125$$

$$(5^2)^{x-2} = 5^3$$

$$5^{2x-4} = 5^3$$

$$2x - 4 = 3$$

$$2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

$$x^{-1} = \frac{2}{7}$$

Primjer 6.Rješenje jednadžbe $8 \cdot 9^{x+2} = 24$ nalazi se u intervalu :

- A) $(-\infty, -3)$, B) $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, C) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$, D) $[1, 3]$.

Rješenje: C.

$$8 \cdot 9^{x+2} = 24 \quad | : 8$$

$$(3^2)^{x+2} = 3$$

$$3^{2x+4} = 3$$

$$2x + 4 = 1$$

$$2x = -3 \quad | : 2$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

Primjer 7.Rješenje nejednadžbe $0.2^x < 25$ jest:

- A) $x \in (-\infty, -2)$, B) $x \in (-2, +\infty)$, C) $x \in (-\infty, 2)$, D) $x \in (2, +\infty)$.

Rješenje: B.

$$0.2^x < 25$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x < 5^2$$

Primjer 5.Rješenje jednadžbe $5^{x+1} + 5^{2+x} = 30$ jest:

- A) $x = 0$, B) $x = 2$,
C) $x = 1$, D) ništa od navedenoga.

Rješenje: A.

$$5^{x+1} + 5^{2+x} = 30$$

$$5^x \cdot 5 + 5^2 \cdot 5^x = 30$$

$$5^x(5 + 25) = 30$$

$$30 \cdot 5^x = 30 \quad | : 30$$

$$5^x = 1$$

$$x = 0$$

$$\begin{aligned} 5^{-x} &< 5^2 \\ -x &< 2 \mid \cdot (-1) \\ x &> -2 \end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 8.

Odredimo vrijednost $3x$ ako vrijedi: $3^x + 3^{x+1} = 324$.

- A) 4 B) 9 C) 12 D) 15

Rješenje: C.

$$3^x + 3^{x+1} = 324$$

$$3^x + 3^x \cdot 3 = 324$$

$$3^x(1 + 3) = 324$$

$$4 \cdot 3^x = 324 \mid : 4$$

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

$$x = 4$$

$$3x = 12$$

Primjer 9.

Odredimo umnožak svih rješenja jednadžbe $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

- A) 4 B) 2 C) -2 D) 0

Rješenje: D.

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

zamijenimo: $2^x = t$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$t_2 = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Rightarrow x_2 = 0.$$

viša razina (A)

Primjer 10.

Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\frac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}} = \frac{2}{3}$ iznosi:

- A) -1, B) 2, C) 1, D) 3.

Rješenje: B.

$$\begin{aligned} \frac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}} &= \frac{2}{3} & \frac{5^{2x} - 1}{5^{2x} + 1} &= \frac{2}{3} \\ \frac{5^x - \frac{1}{5^x}}{5^x + \frac{1}{5^x}} &= \frac{2}{3} & 3(5^{2x} - 1) &= 2(5^{2x} + 1) \\ \frac{5^{2x} - 1}{5^{2x} + 1} &= \frac{2}{3} & 3 \cdot 5^{2x} - 3 &= 2 \cdot 5^{2x} + 2 \\ \frac{5^{2x} - 1}{5^{2x} + 1} &= \frac{2}{3} & 3 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} &= 2 + 3 \\ \frac{5^{2x} - 1}{5^x} &= \frac{2}{3} & 5^{2x} &= 5 \\ \frac{5^{2x} - 1}{5^{2x} + 1} &= \frac{2}{3} & 2x &= 1 \\ \frac{5^x}{5^x} &= \frac{1}{2} & x &= \frac{1}{2} \\ x^{-1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} & x^{-1} &= 2 \end{aligned}$$

viša razina (A)

Primjer 11.

Rješenje jednadžbe $\left(2^{-5} \cdot \sqrt[3]{2}\right)^x = 8^{3-2x}$ leži u intervalu:

- A) $[7, +\infty)$, B) $(-\infty, 6)$, C) $[5, 6.75]$, D) $\left(\frac{27}{4}, 8\right)$.

Rješenje: C.

$$\left(2^{-5} \cdot \sqrt[3]{2}\right)^x = 8^{3-2x}$$

$$\left(2^{-5} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right)^x = (2^3)^{3-2x}$$

$$\left(2^{-\frac{14}{3}}\right)^x = 2^{9-6x}$$

$$2^{-\frac{14}{3}x} = 2^{9-6x}$$

$$-\frac{14}{3}x = 9 - 6x \quad | \cdot 3$$

$$-14x = 27 - 18x$$

$$4x = 27$$

$$x = \frac{27}{4} = 6.75$$

Primjer 12.

Rješenje nejednadžbe $\frac{1}{5^{x-2}} \geq 125$ jest:

- A) $x \in (-\infty, -1]$, B) $x \in [-1, +\infty)$, C) $x \in (5, +\infty)$, D) $x \in (-\infty, -1)$.

Rješenje: A.

$$\frac{1}{5^{x-2}} \geq 125$$

$$5^{-x+2} \geq 5^3$$

$$-x + 2 \geq 3$$

$$-x \geq -1 \quad | \cdot (-1)$$

$$x \leq 1$$

$$x \in (-\infty, -1]$$

viša razina (A)

Primjer 13.

Skupu svih rješenja nejednadžbe $\sqrt{0.81^x} > 27$ pripada broj:

- A) 5, B) 0, C) -30, D) -100.

Rješenje: D.

$$\sqrt{0.81^x} > 27$$

$$0.81^{\frac{x}{2}} > 27$$

$$(0.9^2)^{\frac{x}{2}} > 27$$

$$0.9^x > 27$$

$$0.9 < 1 \Rightarrow$$

$$x < \log_{0.9} 27$$

$$x < \frac{\log 27}{\log 0.9}$$

$$x < -31.28$$

viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1. Odredite rješenje jednadžbe $49^{x-2} = \sqrt{343}$.

Rješenje: $\frac{11}{4}$.

$$49^{x-2} = \sqrt{343}.$$

$$(7^2)^{x-2} = \sqrt{7^3}$$

$$7^{2x-4} = 7^{\frac{3}{2}}$$

$$2x - 4 = \frac{3}{2} \quad | \cdot 2$$

$$4x - 8 = 3$$

$$4x = 11$$

$$x = \frac{11}{4}$$

Primjer 3.

Odredite kvadrat rješenja jednadžbe $27^{3x+1} = 1$.

Rješenje: $\frac{1}{9}$.

$$27^{3x+1} = 1$$

$$3x + 1 = 0$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

Primjer 2.

Kvadrat rješenja jednadžbe

$$16^{\frac{x+3}{2}} = 128 \text{ iznosi } \underline{\hspace{2cm}}.$$

Rješenje: $\frac{25}{4}$.

$$16^{\frac{x+3}{2}} = 128$$

$$(2^4)^{\frac{x+3}{2}} = 2^7$$

$$2^{4 \cdot \frac{x+3}{2}} = 2^7$$

$$2x + 12 = 7$$

$$2x = -5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

$$x^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Primjer 4.

Rješenje jednadžbe $2^{x+2} + 2^{x-1} = \frac{9}{2}$

je $\underline{\hspace{2cm}}$.

Rješenje: 0.

$$2^{x+2} + 2^{x-1} = \frac{9}{2}$$

$$2^x \cdot 2^2 + 2^x \cdot 2^{-1} = \frac{9}{2}$$

$$4 \cdot 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^x = \frac{9}{2} \quad | \cdot 2$$

$$8 \cdot 2^x + 1 \cdot 2^x = 9$$

$$2^x(8 + 1) = 9$$

$$9 \cdot 2^x = 9 \quad | : 9$$

$$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

► **Primjer 5.** ►

Skup svih rješenja nejednadžbe $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} > 81$ jest $\underline{\hspace{2cm}}$.

Rješenje: $(4, +\infty)$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} > 81$$

$$3^x > 3^4$$

$$x > 4$$

$$x \in (4, +\infty)$$

viši razina (A)

Primjer 6.

Rješenje jednadžbe $3 \cdot 5^{2x} + 25^{x-1} + 25^{x+1} = 701$ jest _____.

Rješenje: 1.

$$3 \cdot 5^{2x} + 25^{x-1} + 25^{x+1} = 701$$

$$3 \cdot 5^{2x} + 5^{2(x-1)} + 5^{2(x+1)} = 701$$

$$3 \cdot 5^{2x} + 5^{2x+2} + 5^{2x-2} = 701$$

$$3 \cdot 5^{2x} + 25 \cdot 5^{2x} + \frac{1}{25} \cdot 5^{2x} = 701$$

$$5^{2x} \left(3 + 25 + \frac{1}{25} \right) = 701$$

$$\frac{701}{25} \cdot 5^{2x} = 701 \quad \left| \cdot \frac{25}{701} \right.$$

$$5^{2x} = 5^2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Primjer 7.

Rješenje nejednadžbe $0.001^{-x+2} < \frac{1}{100}$ napišimo u obliku nejednakosti.

Rješenje: $x < \frac{4}{3}$.

$$0.001^{-x+2} < \frac{1}{100}$$

$$(10^{-3})^{-x+2} < 10^{-2}$$

$$10^{3x-6} < 10^{-2}$$

$$3x - 6 < -2$$

$$3x < 4$$

$$x < \frac{4}{3}$$

Logaritamske jednadžbe i nejednadžbe**Zadatci višestrukog izbora****Primjer 1.**

Odredimo kvadrat rješenja jednadžbe $\log_3 x = 5$.

- A) 3^{10} B) 3^5 C) 5^3 D) 5^6

Rješenje: A.

$$\log_3 x = 5$$

uvjet: $x > 0$

$$x = 3^5$$

$$x^2 = 3^{10}$$

Primjer 2.

Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\log_x 125 = 3$ iznosi:

- A) 5, B) -5, C) $\frac{1}{5}$, D) $-\frac{1}{5}$.

Rješenje: C.

$$\log_x 125 = 3$$

$$x^3 = 125$$

$$x^3 = 5^3$$

$$x = 5$$

$$x^{-1} = \frac{1}{5}$$

uvjet: $x > 0$ **Primjer 3.**Odredimo trokrotnik rješenja jednadžbe $7^x = 9$. Rješenje zaokružimo na tri decimale.

- A) 1.129 B) 3.387 C) 0.886 D) 2.657

Rješenje: B.

$$7^x = 9 \mid \log_7$$

$$\log_7 7^x = \log_7 9$$

$$x \log_7 7 = \log_7 9$$

$$x = \log_7 9 = \frac{\log 9}{\log 7}$$

$$x = 1.129150068 \approx 1.129$$

$$3x = 3.387450204 \approx 3.387$$

Primjer 4.Rješenje jednadžbe $\log_7 343 = x$ jest:

- A) 3, B) 3
- ⁷
- , C) 7
- ³
- , D) 5.

Rješenje: A.

$$\log_7 343 = x$$

$$7^x = 343$$

$$7^x = 7^3$$

$$x = 3$$

Primjer 5.Rješenje jednadžbe $\log_2(5x - 2) = 3$ jest:

- A) -2, B) 2, C) 3, D) 0.

Rješenje: B.

$$\log_2(5x - 2) = 3$$

$$\text{uvjet: } 5x - 2 > 0 \rightarrow x > \frac{2}{5}$$

$$5x - 2 = 2^3$$

$$5x = 8 + 2$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

Primjer 6.Rješenje jednadžbe $\log(5x + 4) - 1 = 2\log x$ jest:

- A) -2, B) 0.93, C) 3, D) -3.

Rješenje: B.

$$\log(5x + 4) - 1 = 2\log x$$

$$\log(5x+4) - \log 10 = \log x^2$$

$$\log \frac{5x-4}{10} = \log x^2$$

$$\frac{5x+4}{10} = x^2 \quad | \cdot 10$$

$$5x+4 = 10x^2$$

$$10x^2 - 5x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 10 \cdot (-4)}}{20} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 160}}{20} = \frac{5 \pm \sqrt{185}}{20}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{185}}{20} \approx 0.93$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{185}}{20} \approx -0.43.$$

uvjeti:

$$\begin{cases} 5x+4 > 0 \rightarrow x > -\frac{4}{5} \\ x > 0 \end{cases} \rightarrow x > 0$$

Kako jednadžba mora zadovoljiti uvjet $x > 0$, točno je samo pozitivno rješenje.

viša razina (A)

► Primjer 7. ►

Rješenje nejednadžbe $6^x < 7$ napiši u obliku intervala.

- A) $x \in (-\infty, 1.2)$ B) $x \in (-\infty, \log_6 7)$ C) $x \in (-\infty, \log_7 6)$ D) $x \in \left[\frac{6}{7}, 1\right]$

Rješenje: B.

$$6^x < 7 \mid \log$$

$$\log 6^x < \log 7$$

$$x \log 6 < \log 7 \mid \log 6$$

$$x < \frac{\log 7}{\log 6} \text{ ili } x < \log_6 7$$

viša razina (A)

► Primjer 8. ►

Rješenje jednadžbe $9^{\frac{1}{4} \log_3 x} = 25$ jest:

- A) 81, B) nema rješenja, C) 625, D) 64.

Rješenje: C.

$$9^{\frac{1}{4} \log_3 x} = 25 \quad \text{uvjet: } x > 0$$

$$3^{\frac{2}{4} \log_3 x} = 25$$

$$3^{\frac{1}{2} \log_3 x} = 25$$

$$3^{\log_3 \sqrt{x}} = 25$$

$$\sqrt{x} = 25 \quad |^2$$

$$x = 625$$

viša razina (A)

► Primjer 9. ►

Kvadrat rješenja jednadžbe $\log_5 [\log_2 (9 - 2^x) + 22 - x] = 2$ iznosi:

- A) 5, B) 2, C) 1, D) 0.

Rješenje: D.

$$\log_5 [\log_2 (9 - 2^x) + 22 - x] = 2$$

$$\begin{aligned}
 \log_2(9 - 2^x) + 22 - x &= 5^2 \\
 \log_2(9 - 2^x) &= 25 - 22 + x \\
 \log_2(9 - 2^x) &= 3 + x \\
 9 - 2^x &= 2^{3+x} \\
 9 - 2^x &= 2^3 \cdot 2^x \\
 9 - 2^x &= 8 \cdot 2^x \\
 9 \cdot 2^x &= 9 \\
 2^x &= 1 \\
 x &= 0 \\
 x^2 &= 0
 \end{aligned}$$

Dobiveno rješenje je potrebno uvrstiti u početnu jednadžbu i provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti jednadžbe.

više razuma (v)

Zadatci kratkih odgovora

► Primjer 1. ►

Kvadrat rješenja jednadžbe $\log_5 x = 4$ odredimo kao potenciju broja 5.

Rješenje: 5^8 .

$$\begin{aligned}
 \log_5 x &= 4 && \text{uvjet: } x > 0 \\
 x &= 5^4 \\
 x^2 &= (5^4)^2 = 5^8
 \end{aligned}$$

više razuma (v)

► Primjer 2. ►

Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\log_x 216 = 3$ iznosi _____.

Rješenje: $\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned}
 \log_x 216 &= 3 && \text{uvjet: } x > 0 \\
 x^3 &= 216 \\
 x^3 &= 6^3 \\
 x &= 6 \\
 x^{-1} &= 6^{-1} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

više razuma (v)

► Primjer 3. ►

Rješenje jednadžbe $\log_4 64 = x$ jest _____.

Rješenje: 3.

$$\begin{aligned}
 \log_4 64 &= x \\
 4^x &= 64 \\
 4^x &= 4^3 \\
 x &= 3
 \end{aligned}$$

više razuma (v)

► Primjer 4. ►

Odredimo eksponent u potenciji 5^t , tako da vrijednost potencije iznosi 12. Rezultat zaokružimo na tri decimale.

Rješenje: $t = 1.544$ ($t = \log_5 12$).

$$5^t = 12 \mid \log_5$$

$$\log_5 5^t = \log_5 12$$

$$t \log_5 5 = \log_5 12$$

$$t = \log_5 12 = \frac{\log 12}{\log 5}$$

$$t = 1.543959 \approx 1.544$$

Primjer 5.

Sva su rješenja jednadžbe $\log(x^2 - 3x) = 1$ _____.

Rješenje: $x_1 = -2, x_2 = 5$.

Rješenje mora zadovoljiti uvjet: $x^2 - 3x > 0$.

$$\log(x^2 - 3x) = 1$$

$$\log(x^2 - 3x) = \log 10$$

$$x^2 - 3x = 10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 5$$

Moramo provjeriti valjanost uvjeta:

$$(-2)^2 - 3 \cdot (-2) = 4 + 6 = 10 > 0$$

$5^2 - 3 \cdot 5 = 25 - 15 = 10 > 0$, dakle oba rješenja zadovoljavaju uvjete.

Primjer 6.

Koliko realnih rješenja ima jednadžba $\log(x - 7) - \log x = \log 3$?

Rješenje: Jednadžba nema realnih rješenja.

Rješenje mora zadovoljiti uvjete: $x - 7 > 0$ i $x > 0 \Rightarrow x > 7$.

$$\log(x - 7) - \log x = \log 3$$

$$\log \frac{x-7}{x} = \log 3$$

$$\frac{x-7}{x} = 3 \quad | \cdot x$$

$$x - 7 = 3x$$

$$x - 3x = 7$$

$$-2x = 7$$

$$x = -\frac{7}{2}$$

Jednadžba nema rješenja jer nije zadovoljen uvjet $x > 7$.

Primjer 7.

Rješenje nejednadžbe $8^x > 3$ napišimo u obliku intervala.

Rješenje: $(\log_8 3, +\infty)$.

$$8^x > 3 \mid \log$$

$$\log 8^x > \log 3$$

$x \log 8 > \log 3 \mid : \log 8$

$$x > \frac{\log 3}{\log 8} \text{ ili } x > \log_8 3$$

$$x \in (\log_8 3, +\infty)$$

Usporedbena (3)

Primjer 8.

Zbroj svih rješenja jednadžbe $25^x - 4 \cdot 5^x + 3 = 0$ iznosi _____.

Rješenje: $\log_5 3$.

$$25^x - 4 \cdot 5^x + 3 = 0$$

$$5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 3 = 0$$

zamijenimo: $5^x = t$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 3$$

$$5^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$5^x = 3 \Rightarrow x_2 = \log_5 3$$

$$x_1 + x_2 = \log_5 3$$

Usporedbena (4)

• 3.6. Trigonometrijske jednadžbe

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Na brojevnoj kružnici prikažimo sva rješenja jednadžbe $\sin x = -\frac{1}{2}$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Rješenje: $x = -\frac{\pi}{6}$.

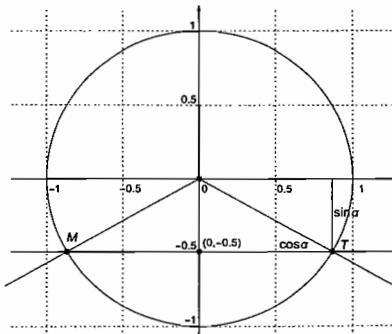
Iz definicije trigonometrijskih funkcija kuta proizlazi:

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{-\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$$

Jednadžba u danom intervalu ima jedinstveno rješenje.



Usporedbena

► Primjer 2. ►

Odredimo opće rješenje

$$\text{jednadžbe } \operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

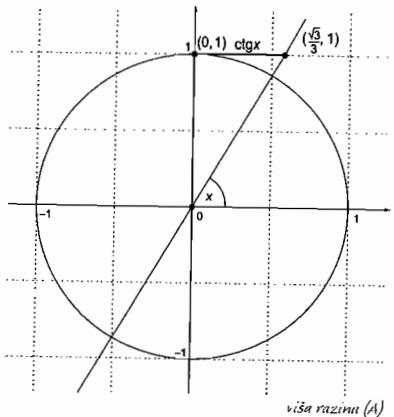
$$\text{Rješenje: } x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Iz definicije trigonometrijskih funkcija kuta proizlazi:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



viša razina (A)

► Primjer 3. ►

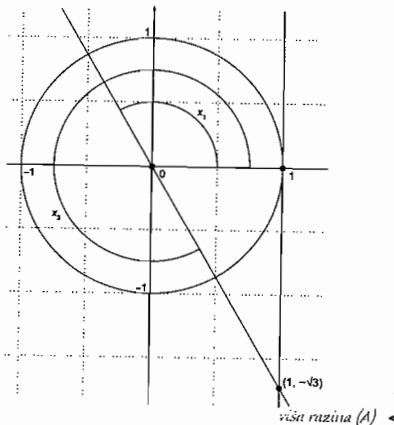
Na brojevnoj kružnici prikažimo sva rješenja jednadžbe $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$.

$$\text{Rješenje: } x_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{-\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



viša razina (A)

► Primjer 4. ►

Opće rješenje jednadžbe $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

jest _____.

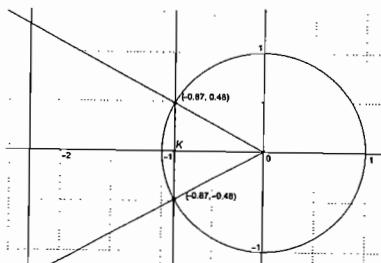
$$\text{Rješenje: } x_1 = \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ i } \cos \frac{-5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\text{ili: } \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$1. \text{ slučaj: } \Rightarrow 3x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad | :3$$

$$x_1 = \frac{5\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$2. \text{ slučaj: } \Rightarrow 3x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad | :3$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

viša razina (A)

► Primjer 5. ►

Odredimo rješenje jednadžbe $2 \cos 6x - 1 = 0$ na intervalu $[0, 2\pi]$.

$$\text{Rješenje: } x_1 = \frac{\pi}{18}, x_2 = \frac{5\pi}{18}, x_3 = \frac{7\pi}{18}, x_4 = \frac{11\pi}{18}, x_5 = \frac{13\pi}{18}, x_6 = \frac{17\pi}{18}, x_7 = \frac{19\pi}{18},$$

$$x_8 = \frac{23\pi}{18}, x_9 = \frac{25\pi}{18}, x_{10} = \frac{29\pi}{18}, x_{11} = \frac{31\pi}{18}, x_{12} = \frac{35\pi}{18}.$$

1. slučaj: $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	2. slučaj: $\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$
$2 \cos 6x - 1 = 0$	$\Rightarrow 6x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad :6$
$2 \cos 6x = 1$	$\Rightarrow 6x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad :6$
$\cos 6x = \frac{1}{2}$	$x_1 = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$
	$x_2 = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}.$

viša razina (A)

► Primjer 6. ►

Riješimo jednadžbu $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Rješenje: } x_1 = \frac{-\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

1. slučaj: $\sin \frac{-\pi}{6} = -\frac{1}{2}$	2. slučaj: $\sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow 2x = \frac{-\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad :2$	$\Rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad :2$
$x_1 = \frac{-\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$x_2 = \frac{7\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

viša razina (A)

► Primjer 7. ►

Riješimo jednadžbu $\cos x - 2 \sin x = 0$.

$$\text{Rješenje: } x = 26^\circ 33' 54'' + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x - 2 \sin x = 0$$

$$2 \sin x = \cos x \quad | :2 \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \quad | \operatorname{arctg}$$

$$x = 26^\circ 33' 54'' + k \cdot 180^\circ; k \in \mathbb{Z}$$

viša razina (A)

► Primjer 8. ►

Odredimo sva rješenja jednadžbe $2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x - 2 = 0$.

$$\text{Rješenje: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Primjenjujemo osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$2 \sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) - 2 = 0$$

$$2 \sin^2 x - 3 + 3 \sin^2 x - 2 = 0$$

$$5 \sin^2 x - 5 = 0$$

$$5 \sin^2 x = 5$$

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= 1 \\ \sin x &= \pm 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) &= 1 \quad \sin\left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = -1 \\ x_1 &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z} \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Sva rješenja možemo općenito zapisati u obliku $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

vidi razvijeni (f)

► Primjer 9. ►

Odredimo rješenja jednadžbe $\cos 2x - \cos x = 0$.

$$\text{Rješenje: } x_1 = k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}; x_{2,3} = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Primjenjujemo pravilo za kosinus dvostrukog kuta ($\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$), te osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

$$\cos 2x - \cos x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x = 0$$

$$t_1 = 1$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x_1 = k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

$$x_{2,3} = \pm \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

vidi razvijeni (f)

► Primjer 10. ►

Odredimo rješenje jednadžbe $3\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

Rješenje: $x \approx 2.2 \text{ rad}$.

$$3\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$$

$$\text{zamjena: } \cos x = t$$

$$3t^2 - 5t - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6}$$

$$t_1 = 2.25733$$

$$t_2 = -0.59067$$

$$\cos x = 2.25733 \Rightarrow \text{nemoguće}$$

$$\cos x = -0.59067$$

$$x_{1,2} \approx 2.2 \text{ rad}$$

vidi razvijeni (f)

Primjer 11.

Odredimo rješenja jednadžbe $\sin\left(3x + \frac{\pi}{18}\right) = 1$.

Rješenje: $x = \frac{4\pi}{27} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{18}\right) = 1 \quad \mid \arcsin$$

$$3x + \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} + k \cdot 2\pi$$

$$3x = \frac{4\pi}{9} + k \cdot 2\pi \quad \mid :3$$

$$x = \frac{4\pi}{27} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}.$$

vježba razinu (A)

Primjer 12.

Odredimo rješenja jednadžbe $\sqrt{3} + 2\cos 7x = 0$.

Rješenje: $x = \pm \frac{5\pi}{42} + k \cdot \frac{2\pi}{7}; k \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt{3} + 2\cos 7x = 0$$

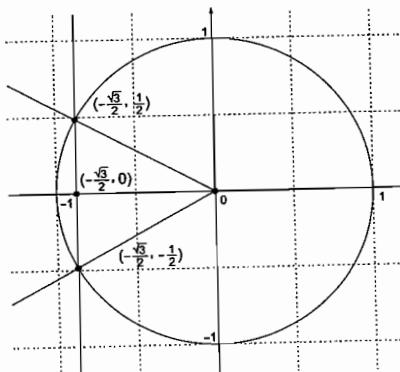
$$2\cos 7x = -\sqrt{3} \quad \mid :2$$

$$\cos 7x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 7x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \mid \arccos$$

$$7x = \pm \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad \mid :7$$

$$x = \pm \frac{5\pi}{42} + k \cdot \frac{2\pi}{7}; k \in \mathbb{Z}$$



vježba razinu (A)

• 3.7. Sustavi jednadžbi •

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Rješenje sustava jednadžbi $\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ x - 5y = -9 \end{cases}$ uređeni je par:

- A) (1,-2), B) (2,1), C) (-19,-2), D) (1,2).

Rješenje: D.

Metoda suprotnih koeficijenata:

$$3x + 4y = 11$$

$$x - 5y = -9 \quad | \cdot (-3)$$

$$\begin{array}{rcl} 3x + 4y = 11 \\ -3x + 15y = 27 \end{array} \quad | +$$

$$19y = 11 + 27$$

$$19y = 38 \quad | : 19$$

$$y = 2$$

$$x - 5 \cdot 2 = -9$$

$$x = -9 + 10$$

$$x = 1$$

Rješenje: (1, 2)

Metoda supstitucije:

$$3x + 4y = 11$$

$$x - 5y = -9 \Rightarrow x = -9 + 5y$$

$$3(-9 + 5y) + 4y = 11$$

$$-27 + 15y + 4y = 11$$

$$19y = 11 + 27$$

$$19y = 38 \quad | : 19$$

$$y = 2$$

$$x = -9 + 5 \cdot 2$$

$$x = 1$$

Rješenje: (1, 2)

Metoda komparacije:

$$3x + 4y = 11 \Rightarrow 4y = -3x + 11 \Rightarrow y = \frac{-3x + 11}{4}$$

$$x - 5y = -9 \Rightarrow 5y = x + 9 \Rightarrow y = \frac{x + 9}{5}$$

$$\frac{-3x + 11}{4} = \frac{x + 9}{5}$$

$$5(-3x + 11) = 4(x + 9)$$

$$-15x + 55 = 4x + 36$$

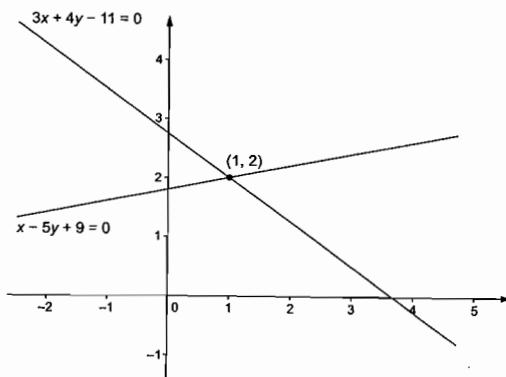
$$-15x - 4x = 36 - 55$$

$$-19x = -19$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{x + 9}{5} = \frac{1 + 9}{5} = 2 \Rightarrow \text{Rješenje: } (1, 2)$$

Grafičko rješenje sustava:



Primjer 2.

Cjelobrojna nepoznanica u sustavu jednadžbi $\begin{cases} x+4y=8 \\ 5x-6y=27 \end{cases}$ iznosi:

- A) 2, B) 4, C) 6, D) 8.

Rješenje: C.

$$\begin{array}{rcl} x+4y=8 & | \cdot (-5) & \\ 5x-6y=27 & & \\ \hline -5x-20y=-40 & \left. + \right. & \\ 5x-6y=27 & & \\ \hline -26y=-13 & | :(-26) & \\ y=\frac{1}{2} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x &= 8 - 4y \\ x &= 8 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 6 \end{aligned}$$

$$\text{Rješenje: } \left(6, \frac{1}{2} \right)$$

Primjer 3.

Zbroj svih komponenti rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases} 2x-y=6 \\ x+4y=-6 \end{cases}$ iznosi:

- A) 0, B) 2, C) 4, D) -2.

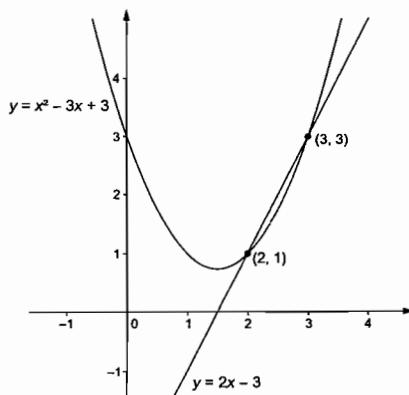
Rješenje: A.

$$\begin{aligned} 2x-y &= 6 \\ x+4y &= -6 \Rightarrow x = -6 - 4y \\ 2(-6 - 4y) - y &= 6 \\ -12 - 8y - y &= 6 \\ -9y &= 6 + 12 \\ -9y &= 18 \quad | :(-9) \\ y &= -2 \\ x &= -6 - 4 \cdot (-2) \\ x &= -6 + 8 = 2 \\ (x, y) &= (2, -2) \end{aligned}$$

Primjer 4.

Sustav jednadžbi $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=x^2-3x+3 \end{cases}$ ima rješenja u:

- A) I. kvadrantu,
C) II. i III. kvadrantu,
- B) I. i II. kvadrantu,
D) I. i IV. kvadrantu.

Grafičko rješenje sustava:**Rješenje:** A.

Takav je sustav najjednostavnije rješavati metodom komparacije.

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=x^2-3x+3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x^2-3x+3 &= 2x-3 \\ x^2-5x+6 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \\ x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

$$y = 2x-3$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \cdot 2 - 3 = 1 \\ y_2 &= 2 \cdot 3 - 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{Rješenje: } \begin{cases} (2, 1) \\ (3, 3) \end{cases}$$

Primjer 5.

Sustav $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$ u skupu realnih brojeva:

- A) ima jedno rješenje,
- B) ima dva rješenja,
- C) nema rješenja,
- D) ima beskonačno mnogo rješenja.

Rješenje: C.

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$$

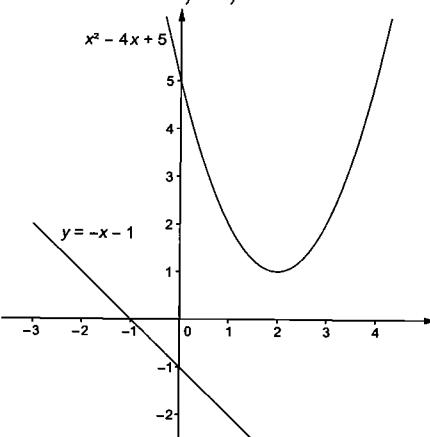
$$x^2 - 4x + 5 = -x - 1$$

$$x^2 - 3x + 6 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-24}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2} \notin \mathbb{R}$$

Stoga sustav nema realnih rješenja.

Grafičko rješenje:

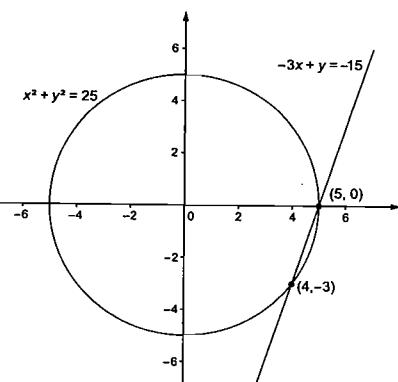
**Primjer 6.**

Rješenje sustava $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$ bez ijedne negativne komponente nalazi se:

- A) na osi ordinata,
- B) na osi apscisa,
- C) u ishodištu,
- D) u I. kvadrantu.

Rješenje: B.

Grafičko rješenje:



Algebarsko rješenje:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x - y = 15 \Rightarrow y = 3x - 15 \end{cases}$$

$$x^2 + (3x - 15)^2 = 25$$

$$x^2 + 9x^2 - 90x + 225 = 25$$

$$10x^2 - 90x + 200 = 0 \quad | :10 \quad y_1 = 3 \cdot 4 - 15 = -3$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0 \quad y_2 = 3 \cdot 5 - 15 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-4 \cdot 1 \cdot 20}}{2}$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 5$$

Rješenje: $\begin{cases} (4, -3) \\ (5, 0) \end{cases}$

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Riješimo sustav jednadžbi $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$ bilo kojom metodom.

Rješenje: $(-3, -\frac{5}{2})$.

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x - 1 \quad | \cdot 2$$

$$3x + 4 = x - 2$$

$$2x = -6$$

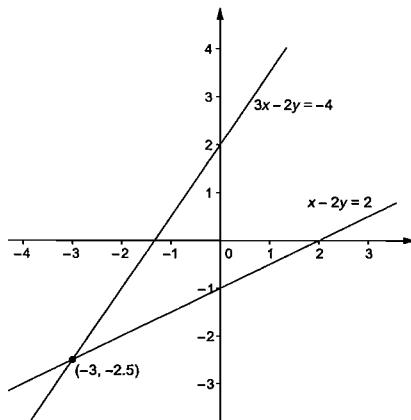
$$x = -3$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (-3) - 1$$

$$y = -\frac{5}{2}$$

Rj $(-3, -\frac{5}{2})$.

Grafičko rješenje:



Primjer 2.

Riješimo sustav jednadžbi $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$ metodom komparacije.

Rješenje: $(9, 5)$.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - 1 \\ y = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$$

$$\frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3}x + 2 \quad | \cdot 3$$

$$2x - 3 = x + 6$$

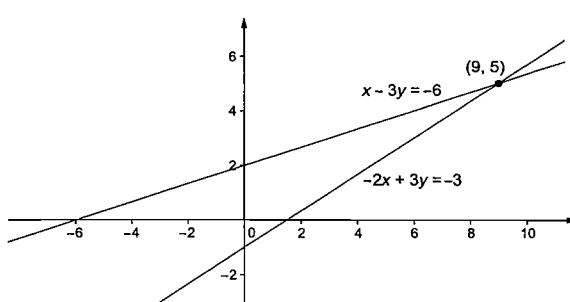
$$x = 9$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot 9 + 2$$

$$y = 5$$

$(x, y) = (9, 5)$

Grafičko rješenje:

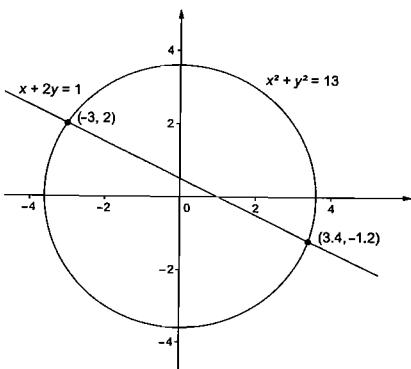


Primjer 3.

Riješimo sustav jednadžbi $\begin{cases} x+2y=1 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$ algebarski i grafički.

Rješenje: $\begin{cases} \left(\frac{17}{5}, -\frac{6}{5}\right) \\ (-3, 2) \end{cases}$

Grafičko rješenje:



Algebarsko rješenje:

$$\begin{aligned} x+2y=1 &\Rightarrow x=1-2y \\ x^2+y^2=13 & \\ (1-2y)^2+y^2 &= 13 \\ 1-4y+4y^2+y^2 &= 13 \\ 5y^2-4y-12 &= 0 \\ y_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16+240}}{10} = \frac{4 \pm 16}{10} \\ y_1 &= -\frac{6}{5}; y_2 = 2 \\ x_1 &= 1-2 \cdot \frac{-6}{5} = \frac{17}{5} \\ x_2 &= 1-2 \cdot 2 = -3 \end{aligned}$$

Primjer 4.

Riješimo sustav jednadžbi $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2} \\ \sin x - \sin y = 1 \end{cases}$.

Rješenje:

$$\left\{ (x, y) \middle| x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, y = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (x, y) \middle| x = k \cdot 2\pi, y = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Razliku sinusa transformiramo u umnožak: $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$, te dalje rješavamo metodom supstitucije.

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 1$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 1$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

$$2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\cos \frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

1. slučaj:

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$x+y = \frac{\pi}{2} + k \cdot 4\pi$$

$$x-y = \frac{\pi}{2}$$

$$2x = \pi + k \cdot 4\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$y_1 = x_1 - \frac{\pi}{2} = k \cdot 2\pi$$

$$\left\{ (x, y) \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, y = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$Rj : \left\{ (x, y) \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, y = k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid x = k \cdot 2\pi, y = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

viša razina (A)

2. slučaj:

$$\frac{x+y}{2} = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$$

$$x+y = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 4\pi$$

$$x-y = \frac{\pi}{2}$$

$$2x = k \cdot 4\pi$$

$$x_2 = k \cdot 2\pi$$

$$y_2 = x_2 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$\left\{ (x, y) \mid x = k \cdot 2\pi, y = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

3.8. Jednadžbe i nejednadžbe – zadaci za vježbu

Zadaci višestrukog izbora

Rješenja zadataka potražite na str. 457.

- Kojem intervalu pripada rješenje jednadžbe $-2x - 14 = 5x$?

A) $\left(-\frac{7}{2}, 1\right)$ B) $(-2, +\infty)$ C) $(-4, -2)$ D) $\left[-\infty, \frac{-7}{2}\right)$
- Kojem intervalu pripada rješenje jednadžbe $5x - 4 = -3x$?

A) $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ B) $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C) $(-\infty, -2)$ D) $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right)$
- Kojem intervalu pripada rješenje jednadžbe $-8x + 4 = -x - 5$?

A) $\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$ B) $(2, +\infty)$ C) $(-\infty, 0)$ D) $\left[-\infty, \frac{7}{2}\right)$
- Rješenje jednadžbe $2x - 8(x - 1) = 3 - x$ jest:

A) $\frac{11}{5}$, B) 1, C) $-\frac{4}{5}$, D) -1.
- Rješenje jednadžbe $2x - (3x - 2) = -1 - 4x$ jest:

A) 1, B) -3, C) $\frac{1}{3}$, D) -1.
- Rješenje jednadžbe $-7(2x - 1) + 6x = -11 - 2x$ jest:

A) $\frac{1}{6}$, B) 3, C) $\frac{1}{3}$, D) -3.

7. Rješenje jednadžbe $\frac{5x+1}{4} - \left(\frac{2}{3}x + \frac{2x-1}{2} \right) = \frac{x}{3}$ jest:

- A) $-\frac{5}{7}$, B) 0, C) $\frac{3}{2}$, D) 1.

8. Rješenje jednadžbe $\frac{4x-2}{5} - \left(\frac{3}{2}x - \frac{x+3}{4} \right) = -\frac{4x}{5}$ jest:

- A) -1, B) $-\frac{1}{2}$, C) 1, D) $-\frac{1}{10}$.

9. Rješenje jednadžbe $\frac{-x+5}{4} - \left(-\frac{1}{3}x + \frac{x-2}{6} \right) = \frac{2x+4}{12}$ jest:

- A) -5, B) $-\frac{1}{6}$, C) $\frac{1}{5}$, D) 5.

10. Rješenje jednadžbe $\frac{3-3x}{6} = 4 - \frac{2-4x}{7}$ jest:

- A) 2, B) $-\frac{4}{7}$, C) 45, D) -3.

11. Rješenje jednadžbe $\frac{7+x}{5} = 4 - \frac{11-5x}{7}$ jest:

- A) 2 B) $\frac{1}{2}$, C) -2, D) $-\frac{50}{9}$.

12. Rješenje jednadžbe $\frac{3+x}{10} = -1 - \frac{1-x}{3}$ jest:

- A) 7, B) $-\frac{1}{30}$, C) $\frac{1}{7}$, D) $\frac{3}{10}$.

13. Rješenje jednadžbe $3x + 2 = 2ax - 1$ u ovisnosti o parametru a iznosi:

- A) $-\frac{3}{a}$, B) $-\frac{3}{3-2a}$, C) $\frac{-3}{2a-3}$, D) $\frac{3}{3-2a}$.

14. Rješenje jednadžbe $2x - 1 = ax + 2$ u ovisnosti o parametru a iznosi:

- A) $\frac{3}{a-2}$, B) $-\frac{3}{2-a}$, C) $\frac{1}{2-a}$, D) $\frac{-3}{a-2}$.

15. Rješenje jednadžbe $x - 4 = -ax + 1$ u ovisnosti o parametru a iznosi:

- A) $-\frac{5}{a+1}$, B) $-\frac{5}{a-1}$, C) $\frac{5}{-a-1}$, D) $\frac{5}{2+a}$.

16. Ako jednadžba $7m - mx = 3m + 5x$ ima cijelobrojno rješenje (gdje je $m \in \mathbb{Z}$ cijelobrojni parametar), jedno od njezinih rješenja iznosi:

- A) -1, B) 2, C) 1, D) 3.

17. Ako jednadžba $2m - mx = 3m + 2x$ ima cijelobrojno rješenje (gdje je $m \in \mathbb{Z}$ cijelobrojni parametar), jedno od njezinih rješenja iznosi:

- A) 1, B) -2, C) -1, D) 3.

18. Ako jednadžba $5m + mx = 2m - 4x$ ima cijelobrojno rješenje (gdje je $m \in \mathbb{Z}$ cijelobrojni parametar), jedno od njezinih rješenja iznosi:
- A) 5, B) 2, C) -3, D) -2.
19. Jednadžba $\frac{x}{x+1} - \frac{7x}{x-3} + 6 = 0$ ima smisla ako vrijedi:
- A) $x \neq 1$, B) $x \neq -1, 3$, C) $x \neq 1, -3$, D) $x \neq 3$.
20. Realno rješenje jednadžbe $\frac{1}{5x-10} - \frac{8}{2x-4} - \frac{1}{15} = 0$ jest:
- A) $x = -59$, B) $x = -55$, C) $x = \frac{3}{2}$, D) nema realnih rješenja.
21. Sva su rješenja nejednadžbe $3 - 9x < 0$:
- A) veća od 0, B) veća od $\frac{7}{4}$, C) manja od $\frac{7}{4}$, D) manja od $-\frac{1}{3}$.
22. Sva su rješenja nejednadžbe $-5 - 2x > 0$:
- A) veća od -1, B) veća od $-\frac{7}{4}$, C) manja od $\frac{7}{4}$, D) manja od -3.
23. Sva su rješenja nejednadžbe $-3x + 1 \leq 2$:
- A) veća od 3, B) veća od $-\frac{7}{4}$, C) manja od 0, D) manja od $-\frac{1}{3}$.
24. Rješenje nejednadžbe $2x + 5 \geq -x - 7$ jest:
- A) $x \in (-\infty, 4]$, B) $x \in [-4, +\infty)$, C) $x \in \langle -4, +\infty \rangle$, D) $x \in \langle -\infty, -4 \rangle$.
25. Rješenje nejednadžbe $5x - 1 \leq 2x - 7$ jest:
- A) $x \in (-\infty, -2)$, B) $x \in [-2, +\infty)$, C) $x \in \langle -2, +\infty \rangle$, D) $x \in \langle -\infty, -2 \rangle$.
26. Rješenje nejednadžbe $-2x - 6 < -x - 2$ jest:
- A) $x \in (-\infty, -4)$, B) $x \in [-4, +\infty)$, C) $x \in \langle -4, +\infty \rangle$, D) $x \in \langle -\infty, -4 \rangle$.
27. Rješenje nejednadžbe $\frac{2}{5}x + 4 > x$ jest:
- A) $x \in \left(-\infty, \frac{20}{3}\right)$, B) $x \in \left[\frac{-20}{3}, +\infty\right)$, C) $x \in \left(\frac{20}{3}, +\infty\right)$, D) $x \in \langle -\infty, 20 \rangle$.
28. Rješenje nejednadžbe $\frac{3}{4}x + 5 < 2x$ jest:
- A) $x \in (-\infty, 4]$, B) $x \in [4, +\infty)$, C) $x \in \langle 4, +\infty \rangle$, D) $x \in \langle -\infty, 4 \rangle$.
29. Rješenje nejednadžbe $\frac{2}{3}x - 3 \geq -x$ jest:
- A) $x \in \left(-\infty, \frac{9}{5}\right]$, B) $x \in \left[\frac{9}{5}, +\infty\right)$, C) $x \in \left(\frac{9}{5}, +\infty\right)$, D) $x \in \left(-\infty, \frac{9}{5}\right)$.

30. Rješenje nejednadžbe $4 - (y - 3)(y - 3) < y - (y - 2)^2 + 2$ jest:
- A) $y \in (-\infty, 3]$, B) $y \in [3, +\infty)$, C) $y \in (3, +\infty)$, D) $y \in (-\infty, 3)$.
31. Rješenje nejednadžbe $5 - (y - 4)(y + 4) < 3y - (y - 1)^2$ jest:
- A) $y \in (-\infty, -4.4)$, B) $y \in (4.4, +\infty)$, C) $y \in (-\infty, 4.4)$, D) $y \in \left(-\frac{22}{5}, +\infty\right)$.
32. Rješenje nejednadžbe $7y + (y + 3)(y - 3) > 4 + (y - 4)^2$ jest:
- A) $y \in \left(-\infty, \frac{29}{15}\right)$, B) $y \in \left(\frac{29}{15}, +\infty\right)$, C) $y \in (-\infty, 2)$, D) $y \in (2, +\infty)$.
33. Koji interval sadržava skup svih rješenja nejednadžbe $4x + 7 < -3x + 9$?
- A) $(-\infty, -3)$, B) $(-8, +\infty)$, C) $(-9, 9)$, D) $(-\infty, 8)$.
34. Koji interval sadržava skup svih rješenja nejednadžbe $7x - 15 < 4x - 12$?
- A) $(-\infty, -1)$, B) $(-\infty, 4)$, C) $(-1, 1)$, D) $(-6, +\infty)$.
35. Koji interval sadržava skup svih rješenja nejednadžbe $3x + 9 < 8x - 7$?
- A) $(-\infty, 3)$, B) $(3, +\infty)$, C) $(4, +\infty)$, D) $(-\infty, 4)$.
36. Od ponuđenih brojeva samo jedan pripada skupu svih rješenja nejednadžbe $2x - 3(x - 1) > 2 - 2x$. To je:
- A) $-\frac{7}{5}$, B) -1 , C) $\frac{11}{3}$, D) -3 .
37. Od ponuđenih brojeva samo jedan pripada skupu svih rješenja nejednadžbe $5x - 3(2x - 8) > 2 - 5x$. To je:
- A) $-\frac{11}{2}$, B) -5 , C) -11 , D) 0 .
38. Od ponuđenih brojeva samo jedan pripada skupu svih rješenja nejednadžbe $3x - (5x - 2) < 2 - x$. To je:
- A) $-\frac{7}{5}$, B) 1 , C) 0 , D) -11 .
39. Rješenju nejednadžbe $\frac{x+2}{2} - \left(\frac{-3}{2}x + \frac{x-2}{6}\right) > \frac{x}{6}$ pripada samo jedan od ponuđenih brojeva. Koji je to broj?
- A) -2 , B) $\frac{3}{2}$, C) $-\frac{8}{7}$, D) $-\frac{3}{2}$.
40. Rješenje nejednadžbe $\frac{3x+2}{5} - \left(\frac{1}{2}x - \frac{2x-1}{5}\right) > \frac{x}{10}$ može biti samo jedan od ponuđenih brojeva. Koji je to broj?
- A) 0.5 , B) $-\frac{5}{3}$, C) -0.5 , D) $-\frac{3}{2}$.
41. Rješenje nejednadžbe $\frac{x-4}{3} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{2x-1}{6}\right) < \frac{x}{4}$ može biti samo jedan od ponuđenih brojeva. Koji je to broj?
- A) -1.6 , B) $-\frac{5}{3}$, C) $-\frac{3}{2}$, D) -2 .

- 42.** Manje rješenje kvadratne jednadžbe $4x^2 - 7x = 0$ iznosi:
- A) 0, B) $-\frac{7}{4}$, C) -7 , D) $\frac{7}{4}$.
- 43.** Veće rješenje kvadratne jednadžbe $5x^2 + 2x = 0$ iznosi:
- B) $\frac{2}{5}$, B) $-\frac{2}{5}$, C) -5 , D) 0.
- 44.** Manje rješenje kvadratne jednadžbe $4x^2 + 6x = 0$ iznosi:
- A) $\frac{3}{2}$, B) $-\frac{3}{2}$, C) -3 , D) 0.
- 45.** Zbroj apsolutnih vrijednosti rješenja jednadžbe $8x^2 - 72 = 0$ iznosi:
- A) 0, B) 2, C) 4, D) 6.
- 46.** Apsolutna vrijednost zbroja svih rješenja jednadžbe $6x^2 - 48 = 0$ iznosi:
- B) 0, B) 2, C) 4, D) 6.
- 47.** Zbroj apsolutnih vrijednosti rješenja jednadžbe $5x^2 + 50 = 0$ iznosi:
- A) 0, B) 2, C) $2\sqrt{10}$, D) 20.
- 48.** Jednadžba $5x^2 + 2x + 5 = 0$ ima:
- A) dva različita realna rješenja, B) dva jednakata realna rješenja,
C) dva konjugirano kompleksna rješenja, D) jedno realno rješenje.
- 49.** Jednadžba $-2x^2 + 7x - 6 = 0$ ima:
- A) dva različita realna rješenja, B) dva jednakata realna rješenja,
C) dva konjugirano kompleksna rješenja, D) nema realnih rješenja.
- 50.** Jednadžba $x^2 - 6x + 9 = 0$ ima:
- A) dva različita realna rješenja, B) dva jednakata realna rješenja,
C) dva konjugirano kompleksna rješenja, D) nema realnih rješenja.
- 51.** Umnožak svih rješenja kvadratne jednadžbe $6x^2 - 13x + 6 = 0$ iznosi:
- A) 1, B) -3 , C) -4 , D) 2.
- 52.** Umnožak svih rješenja kvadratne jednadžbe $4x^2 + 13x - 12 = 0$ iznosi:
- A) 4, B) $\frac{3}{4}$, C) -3 , D) 3.
- 53.** Cjelobrojno rješenje kvadratne jednadžbe $2x^2 - 9x + 4 = 0$ iznosi:
- A) 2, B) 3, C) 4, D) 5.
- 54.** Aritmetička sredina korijena jednadžbe $3x^2 + 5x - 2 = 0$ iznosi:
- A) -2 , B) $\frac{5}{6}$, C) $\frac{1}{3}$, D) $-\frac{5}{6}$.

55. Aritmetička sredina korijena jednadžbe $-12x^2 - 13x + 4 = 0$ iznosi:
- A) $-\frac{13}{24}$, B) $-\frac{3}{4}$, C) $-\frac{13}{12}$, D) $-\frac{4}{3}$.
56. Aritmetička sredina korijena jednadžbe $x^2 + 9x + 14 = 0$ iznosi:
- A) $\frac{9}{2}$, B) $-\frac{9}{2}$, C) -9 , D) $-\frac{5}{2}$.
57. Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $kx^2 + (k^2 + 2k)x - 12 - 3k = 0$ ima jedno rješenje jednak 0?
- A) -12 B) -4 C) 3 D) $\{0, -4\}$
58. Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $kx^2 + (3k^2 - 9k)x - 5 = 0$ ima dva međusobno suprotna rješenja?
- A) $\{0, 3\}$ B) -3 C) 3 D) $\{0, -3\}$
59. Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $k^2x^2 + 2(k+2)x + 1 = 0$ ima točno jedno rješenje?
- A) -1 B) 1 C) 2 D) 3
60. Skup svih brojeva x za koje vrijedi $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \geq 0$ jest:
- A) $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$ B) $(-3, 1)$ C) $(-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$ D) $[-3, 1]$
61. Skup svih brojeva x za koje vrijedi $x^2 + 4x - 5 < 0$ jest:
- A) $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$ B) $(-5, 1)$ C) $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$ D) $[-5, 1]$
62. Skup svih brojeva x za koje vrijedi $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 \geq 0$ jest:
- A) $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$, B) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, C) $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, D) $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$.
63. Normirana jednadžba čija su rješenja $x_1 = -7$ i $x_2 = -3$ glasi:
- A) $x^2 - 10x - 21 = 0$, B) $x^2 - 21x + 10 = 0$,
C) $3x^2 - 7x + 10 = 0$, D) $x^2 + 10x + 21 = 0$.
64. Jednadžba čija su rješenja $x_1 = 4$ i $x_2 = -\frac{3}{2}$ jest:
- A) $2x^2 - 5x - 12 = 0$, B) $x^2 - 4x + \frac{3}{2} = 0$, C) $x^2 - x + 6 = 0$, D) $2x^2 + 5x + 12 = 0$.
65. Normirana jednadžba čija su rješenja $x_1 = 5$ i $x_2 = -3$ ima oblik:
- A) $x^2 - 2x - 10 = 0$, B) $x^2 + 2x - 15 = 0$, C) $x^2 - x + 15 = 0$, D) $x^2 - 2x - 15 = 0$.
66. Jednadžba $mx^2 - mx + 9 = 0$ nema realnih rješenja za:
- A) $m \in [36, +\infty)$, B) $m \in (-\infty, 36) \cup (36, +\infty)$, C) $m \in (0, 36)$, D) $m \in [0, 36]$.

67. Jednadžba $2mx^2 - mx + 3 = 0$ ima realna rješenja za:
- A) $m \in [24, +\infty)$ B) $m \in (-\infty, 0] \cup [24, +\infty)$ C) $m \in (0, 24)$ D) $m \in (-\infty, 0) \cup (24, +\infty)$
68. Jednadžba $4x^2 - 2mx + 1 = 0$ ima jedno realno rješenje za:
- A) $m = 0$, B) $m = 2$, C) $m = \pm 2$, D) $m = \pm 4$.
69. Ako jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + bx + c = 0$ s realnim koeficijentima iznosi $x_1 = -3 - 2i$, koliki je umnožak svih rješenja te jednadžbe?
- A) $x_1 \cdot x_2 = 5$ B) $x_1 \cdot x_2 = 13$ C) $x_1 \cdot x_2 = 6$ D) $x_1 \cdot x_2 = -5$
70. Ako jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + bx + c = 0$ s realnim koeficijentima iznosi $x_1 = 5 + i$, koliki je zbroj svih rješenja te jednadžbe?
- A) $x_1 + x_2 = -5$ B) $x_1 + x_2 = 12$ C) $x_1 + x_2 = 10$ D) $x_1 + x_2 = 6$
71. Ako jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + bx + c = 0$ s realnim koeficijentima iznosi $x_1 = 3 + i$, koliki je umnožak rješenja te jednadžbe?
- A) $x_1 \cdot x_2 = -6$ B) $x_1 \cdot x_2 = 5$ C) $x_1 \cdot x_2 = 7$ D) $x_1 \cdot x_2 = 10$
72. Koja je od navedenih tvrdnji točna za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $3x^2 - 6x + 2 = 0$:
- A) $x_1 + x_2 = 6$, B) $x_1 + x_2 = 2$, C) $x_1 + x_2 = -2$, D) $x_1 + x_2 = -3$?
73. Koja je od navedenih tvrdnji točna za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $-2x^2 - 8x + 3 = 0$:
- A) $x_1 + x_2 = 6$, B) $x_1 + x_2 = 4$, C) $x_1 + x_2 = -4$, D) $x_1 + x_2 = -6$?
74. Koja je od navedenih tvrdnji točna za rješenja x_1 i x_2 kvadratne jednadžbe $2x^2 + 12x - 6 = 0$:
- A) $x_1 + x_2 = 6$, B) $x_1 + x_2 = -5$, C) $x_1 + x_2 = 5$, D) $x_1 + x_2 = -6$?
75. Zbroj svih rješenja kvadratne jednadžbe $-3x^2 + 18 = 0$ jest:
- A) 0, B) 6, C) -6, D) -3.
76. Zbroj svih rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2 + 8x = 0$ jest:
- A) 4, B) -4, C) -6, D) 6.
77. Zbroj svih rješenja kvadratne jednadžbe $10x^2 + 25 = 0$ jest:
- A) 3, B) 6, C) 0, D) -3.
78. Ako su 3 i -2 rješenja kvadratne jednadžbe $px^2 - 2x - 12 = 0$, koliki je parametar p ?
- A) -1 B) -6 C) -2 D) 2
79. Ako su -6 i -2 rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2 + px + (p + 8) = 0$, koliki je parametar p ?
- A) 4 B) -8 C) 16 D) 2
80. Ako su -2.5 i -7 rješenja kvadratne jednadžbe $px^2 + 19x + 35 = 0$, koliki je parametar p ?
- A) 2 B) -6 C) -2 D) -9.5

81. Zbroj svih rješenja jednadžbe $|4x + 2| = x - 3$ jest:
- A) 8, B) $\frac{28}{15}$, C) $\frac{25}{3}$, D) ništa od navedenoga.
82. Zbroj svih rješenja jednadžbe $|4x - 12| = -x + 7$ jest:
- A) $\frac{5}{3}$, B) $\frac{19}{5}$, C) $\frac{82}{15}$, D) ništa od navedenoga.
83. Zbroj svih rješenja jednadžbe $|-x + 3| = 2x - 4$ jest:
- A) $\frac{7}{3}$, B) $\frac{9}{3}$, C) $\frac{10}{3}$, D) ništa od navedenoga.
84. Sva rješenja jednadžbe $3x - 4|x| = -2$ leže u intervalu:
- A) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, B) $(1, +\infty)$, C) $\left(-\frac{7}{4}, 5\right)$, D) $[1, +\infty)$.
85. Sva rješenja jednadžbe $-5x - 3|x| = -3$ leže u intervalu:
- A) $\left(-\infty, \frac{1}{8}\right)$, B) $(0, 1)$, C) $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, D) $[1, +\infty)$.
86. Sva rješenja jednadžbe $2x - 4|x| = 3$ leže u intervalu:
- A) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, B) $(1, +\infty)$, C) jednadžba nema rješenja, D) $[1, +\infty)$.
87. Rješenje nejednadžbe $|7x + 1| < 3$ glasi:
- A) $x \in \left(-\infty, \frac{4}{7}\right)$, B) $x \in \left(\frac{2}{7}, +\infty\right)$, C) $x \in \left(\frac{-4}{7}, \frac{2}{7}\right)$, D) $x \in \left[\frac{2}{7}, +\infty\right)$
88. Rješenje nejednadžbe $|3x + 5| < 3$ glasi:
- A) $x \in \left(-\infty, -\frac{8}{3}\right)$, B) $x \in \left(-\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, C) $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$, D) $x \in \left[-\frac{8}{3}, +\infty\right)$.
89. Rješenje nejednadžbe $|2x + 6| > 8$ jest:
- A) $x \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty)$, B) $x \in (1, +\infty)$, C) $x \in (-7, 1)$, D) $x \in [1, +\infty)$
90. Količnik većega i manjeg rješenja jednadžbe $|3x + 7| = -x + 2$ iznosi:
- A) $-\frac{5}{19}$, B) $\frac{19}{5}$, C) jednadžba nema rješenja, D) $\frac{5}{18}$.
91. Zbroj svih rješenja jednadžbe $|-2x + 3| = 5x - 1$ jednak je:
- A) $\frac{4}{7}$, B) $\frac{7}{6}$, C) $\frac{6}{7}$, D) jednadžba nema rješenja.
92. Količnik manjega i većeg rješenja jednadžbe $|4x + 5| = x - 1$ jest:
- A) $\frac{5}{3}$, B) 1, C) $\frac{3}{5}$, D) jednadžba nema rješenja.
93. Sva su rješenja jednadžbe $|2x - 3| = -x + 4$ iz intervala:
- A) $(-\infty, -5)$, B) $(5, +\infty)$, C) $(-\infty, 5]$, D) jednadžba nema rješenja.

- 94.** Sva su rješenja jednadžbe $|7x - 3| = -2x + 5$ iz intervala:
 A) $(-\infty, -1)$, B) $(0, +\infty)$, C) $(0, 2]$, D) $(-1, 1)$.
- 95.** Sva su rješenja jednadžbe $|-3x - 2| = -x - 4$ iz intervala:
 A) $(-\infty, -4)$, B) $[-3, 1]$, C) $(-\infty, -3]$, D) jednadžba nema rješenja.
- 96.** Jednadžba $7 + |2x - 3| = 0$ ima rješenje:
 A) -3 , B) nema rješenja, C) 3 , D) 0 .
- 97.** Jednadžba $20 + |-3x + 1| = 0$ ima rješenje:
 A) -7 , B) 7 , C) nema rješenja, D) 0 .
- 98.** Jednadžba $|5x + 3| + 23 = 0$ ima rješenje:
 A) nema rješenja, B) 4 , C) 3 , D) 4 .
- 99.** Recipročna vrijednost umnoška svih rješenja jednadžbe $\sqrt{5x^2 - 9} = 4$ iznosi:
 A) $-\frac{1}{5}$, B) 0.2 , C) 5 , D) -5 .
- 100.** Recipročna vrijednost umnoška svih rješenja jednadžbe $5\sqrt{x^2 - 9} = 25$ iznosi:
 A) $\frac{1}{34}$, B) -34 , C) 34 , D) $-\frac{1}{34}$.
- 101.** Recipročna vrijednost umnoška svih rješenja jednadžbe $3\sqrt{2x^2 - 1} = 21$ iznosi:
 A) -0.4 , B) 25 , C) -0.04 , D) $\frac{1}{25}$.
- 102.** Jednadžba $\frac{-x}{x+3} - \frac{3x}{2x-4} - 5 = 0$ ima smisla ako vrijedi:
 A) $x \neq 2$, B) $x \neq 3, -2$, C) $x \neq 1, -2$, D) $x \neq -3, 2$.
- 103.** Jednadžba $\frac{2x}{x^2 - 16} - \frac{x}{x+7} + 2 = 0$ ima smisla ako vrijedi:
 A) $x \neq -4, 4, -7$, B) $x \neq 16, 7$, C) $x \neq -7, 162$, D) $x \neq 1, -4, 7$.
- 104.** Realno rješenje jednadžbe $\frac{1+3x}{x-1} - \frac{8}{1-x^2} = \frac{3x-1}{x+1}$ iznosi:
 A) $x = -1$, B) $x = 1$, C) $x = 2$, D) nema realnih rješenja.
- 105.** Realno rješenje jednadžbe $\frac{1}{x-3} + \frac{2x}{5x^2 - 15x} = \frac{2}{x}$ iznosi:
 A) $x = 15$, B) $x = 10$, C) $x = 5$, D) nema realnih rješenja.
- 106.** Sva su rješenja nejednadžbe $\frac{4x+3}{-3x^2} > 0$:
 A) manja od 0 , B) veća od 0 , C) veća od -3 , D) manja od -3 .
- 107.** Sva su rješenja nejednadžbe $\frac{2x^2 - 8}{x^2} \geq 0$:
 A) veća od 0 , B) manja od 0 , C) veća od 2 , D) ništa od navedenoga.

108. Koju od danih jednadžbi zadovoljava $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} - 7} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} + 7}$?

- A) $x^6 + 45 = 0$ B) $x^3 + 45 = 0$ C) $x^3 - 45 = 0$ D) $x^6 - 45 = 0$

109. Koju od danih jednadžbi zadovoljava $x = \sqrt[3]{\sqrt{7} + 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{7} - 3}$?

- A) $x^5 - 2 = 0$ B) $x^{10} + 40 = 0$ C) $x^{10} - 2 = 0$ D) $x^5 + 2 = 0$

110. Zbroj svih rješenja jednadžbe $2x^3 - 8x^2 - 18x + 72 = 0$ iznosi:

- A) 3, B) 4, C) 6, D) 10.

111. Zbroj svih rješenja jednadžbe $3x^4 - 6x^3 - 5x^2 + 10x = 0$ iznosi:

- A) 2, B) 4, C) 6, D) -2.

112. Zbroj svih rješenja jednadžbe $x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 10x = 0$ iznosi:

- A) -5, B) 0, C) 5, D) -3.

113. Rješenje jednadžbe $27^{\frac{5}{x}} = 81$ jest:

- A) -3.75, B) -3, C) -1, D) 3.

114. Rješenje jednadžbe $16^{\frac{4}{-3x}} = \frac{1}{256}$ jest:

- A) 3, B) $\frac{2}{3}$, C) -2, D) $\frac{3}{2}$.

115. Rješenje jednadžbe $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{5}{x}} = 81$ iznosi:

- A) $\frac{4}{15}$, B) -3.75, C) -4, D) 3.75.

116. Rješenje jednadžbe $625^{3-2x} = 0.04$ zapiši u obliku decimalnog broja.

- B) -0.75 B) 1.75 C) 0.75 D) 1.25

117. Recipročnu vrijednost rješenja jednadžbe $27^{3x-4} = \frac{1}{9}$ zapiši u obliku decimalnog broja.

- A) -0.1 B) 0.1 C) 0.9 D) 1.11

118. Rješenje jednadžbe $125^{1-2x} = 0.2$ zapiši u obliku decimalnog broja.

- A) 1 B) 0.6 C) 0.75 D) 1.25

119. Kvadrat rješenja jednadžbe $4^{2x+1} = \sqrt{32}$ iznosi:

- A) $\frac{9}{8}$, B) $\frac{1}{8}$, C) $\frac{1}{4}$, D) $\frac{1}{64}$.

120. Kvadrat rješenja jednadžbe $5^{3x-4} = \sqrt{125}$ iznosi:

- A) $\frac{11}{6}$, B) $\frac{121}{36}$, C) $\frac{6}{11}$, D) $\frac{36}{11}$.

121. Kvadrat rješenja jednadžbe $0.5^{2x+1} = \sqrt[3]{32}$ iznosi:

- A) $\frac{16}{9}$, B) $\frac{4}{3}$, C) $-\frac{4}{3}$, D) $\frac{9}{16}$.

122. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $5 \cdot 8^{x-2} = 640$ jest:

- A) $\frac{13}{3}$, B) $\frac{1}{3}$, C) $\frac{3}{13}$, D) 3.

123. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $6 \cdot 81^{2x-3} = 2$ jest:

- A) $\frac{-11}{8}$, B) $\frac{11}{8}$, C) $\frac{-8}{11}$, D) $\frac{8}{11}$.

124. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $4 \cdot 0.125^{3-x} = 32$ jest:

- A) $\frac{-1}{4}$, B) $\frac{1}{4}$, C) 4, D) -4.

125. Rješenje jednadžbe $3^{2x+1} + 3^{-2+2x} = 28$ jest:

- A) $x = 0$, B) $x = 2$, C) $x = 1$, D) ništa od navedenoga.

126. Rješenje jednadžbe $2^{2x-3} + 4^{1+x} = 132$ jest:

- A) $x = 2.5$, B) $x = 2$, C) $x = 1$, D) ništa od navedenoga.

127. Rješenje jednadžbe $10^{x-1} + 0.1^{2-x} = 110$ jest:

- A) $x = 3$, B) $x = 2$, C) $x = 1$, D) ništa od navedenoga.

128. Rješenje jednadžbe $7 \cdot 9^{x+2} = 63$ nalazi se u intervalu:

- A) $(-\infty, -3)$, B) $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, C) $\left[-\infty, -\frac{3}{2}\right]$, D) $[1, 3]$.

129. Rješenje jednadžbe $5 \cdot 100^{x+2} = 0.005$ nalazi se u intervalu:

- A) $(-\infty, -3)$, B) $\left(-\frac{7}{2}, +\infty\right)$, C) $\left[-\infty, -\frac{9}{2}\right]$, D) $[1, 3]$.

130. Rješenje jednadžbe $3 \cdot 0.5^{x+2} = 48$ nalazi se u intervalu:

- A) $(-\infty, -6)$, B) $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, C) $\left[-\infty, -\frac{3}{2}\right]$, D) $[1, 3]$.

131. Rješenje nejednadžbe $5^x > 3$ napiši u obliku intervala:

- A) $(-\infty, 1.2)$, B) $\langle \log_5 3, +\infty \rangle$, C) $(-\infty, \log_5 3]$, D) $\left[\frac{3}{5}, 1\right]$.

132. Rješenje nejednadžbe $0.5^x < 64$ jest:

- A) $x \in (-\infty, -6)$, B) $x \in (6, +\infty)$, C) $x \in (-\infty, 6)$, D) $x \in (-6, +\infty)$.

133. Rješenje nejednadžbe $0.01^x > 100$ jest:

- A) $x \in (-\infty, -1)$, B) $x \in (-1, +\infty)$, C) $x \in (-\infty, 1)$, D) $x \in (1, +\infty)$.

134. Rješenje nejednadžbe $0.0016^x \geq 25$ jest:

- A) $x \in (-\infty, 0.5)$, B) $x \in (2, +\infty)$, C) $x \in (-\infty, -0.5]$, D) $x \in (-2, +\infty)$.

135. Odredite vrijednost $3x$ ako je $7^x + 7^{x+1} = 392$.

- A) 6 B) 9 C) 12 D) 15

136. Odredite vrijednost $3x$ ako vrijedi: $5^x - 5^{-2+x} = 120$.

- A) 3 B) -3 C) 6 D) 9

137. Odredite vrijednost $3x$, ako vrijedi: $6^{2x-2} + 3 \cdot 36^{x-1} = 4$.

- A) -3 B) 0 C) 3 D) 6

138. Odredite umnožak svih rješenja jednadžbe $4^{x+1} - 129 \cdot 2^x + 32 = 0$.

- A) 4 B) 8 C) -2 D) -10

139. Odredite umnožak svih rješenja jednadžbe $25^{x+1} - 3126 \cdot 5^x + 125 = 0$.

- A) 5 B) -6 C) -2 D) 3

140. Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$.

- A) 4 B) 2 C) -2 D) 0

141. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\frac{6^x - 6^{-x}}{6^x + 6^{-x}} = \frac{5}{7}$ iznosi:

- A) -1, B) 3, C) 2, D) 1.

142. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{4}{5}$ iznosi:

- A) -1, B) 2, C) 1, D) 3.

143. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^{3x} + 2^{-3x}} = \frac{3}{5}$ iznosi:

- A) -1, B) 2, C) 1, D) 3.

144. Rješenje jednadžbe $(3^{-2} \cdot \sqrt[3]{9})^x = 81^{3-2x}$ leži u intervalu:

- A) $[7, +\infty)$, B) $(-\infty, 6)$, C) $[5, 6.75]$, D) $\left(\frac{27}{4}, 8\right)$.

145. Rješenje jednadžbe $2^{-3x} \left(\sqrt[3]{8^3}\right)^x = 0.25^{x-2}$ leži u intervalu:

- A) $[7, +\infty)$, B) $(-\infty, 6)$, C) $[5, 6.75]$, D) $\left(\frac{27}{4}, 8\right)$.

146. Rješenje jednadžbe $(5^{-2} \cdot \sqrt[5]{125})^{2x} = 0.04^{x-1}$ leži u intervalu:

- A) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$, B) $(-\infty, -3)$, C) $[-5, -2.5]$, D) $\left(\frac{1}{4}, 8\right)$.

147. Rješenje nejednadžbe $\frac{1}{3^{2x-1}} \leq 81$ jest:

- A) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right]$, B) $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$, C) $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$, D) $x \in \left(-\frac{2}{3}, -1\right)$.

148. Rješenje nejednadžbe $0.2^{3x+1} > 625$ jest:

- A) $x \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right]$, B) $x \in \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right)$, C) $x \in (5, +\infty)$, D) $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$.

149. Skupu svih rješenja nejednadžbe $\sqrt[5]{0.008^{2x}} < 7$ pripada broj:

- A) -0.4, B) -1.5, C) -2.6, D) -3.7.

150. Skupu svih rješenja nejednadžbe $\sqrt{1.44^x} > 10$ pripada broj:

- A) 5, B) 0, C) 30, D) -100.

151. Odredite kvadrat rješenja jednadžbe $\log_5 x = 3$.

- A) $5^{\frac{1}{3}}$ B) 3^5 C) 5^3 D) 5^6

152. Odredite kvadrat rješenja jednadžbe $\log_2 x = \frac{1}{4}$.

- A) $\sqrt[4]{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 4 D) 16

153. Odredite kvadrat rješenja jednadžbe $\log x = 7$.

- A) 49 B) $\frac{1}{49}$ C) 10^7 D) 10^{14}

154. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\log_x 243 = -5$ iznosi:

- A) 3, B) -3, C) $\frac{1}{3}$, D) $-\frac{1}{3}$.

155. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\log_x 128 = 7$ iznosi:

- A) -2, B) $-\frac{1}{2}$, C) $\frac{1}{2}$, D) 2.

156. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\log_x \frac{1}{216} = -3$ iznosi:

- A) -6, B) 6, C) $-\frac{1}{6}$, D) $\frac{1}{6}$.

157. Odredite trokratnik rješenja jednadžbe $5^x = 8$. Zaokružite na tri decimale.

- A) 3.88 B) 1.293 C) 1.292 D) 3.876

158. Odredite trokratnik rješenja jednadžbe $11^x = 3$. Zaokružite na tri decimale.

- A) 0.4581 B) 1.374 C) 0.458 D) 1.375

159. Rješenje jednadžbe $\log_6 216 = x$ jest:

- A) 3, B) 36, C) 64, D) 6.

160. Rješenje jednadžbe $\log_{\frac{1}{5}} 625 = x$ jest:

- A) 4, B) $\frac{1}{4}$, C) -4, D) $-\frac{1}{4}$.

161. Rješenje jednadžbe $\log 0.0001 = x$ jest:

- A) $\frac{1}{4}$, B) 4, C) $-\frac{1}{4}$, D) -4.

162. Rješenje jednadžbe $\log_5 (2x - 3) = -1$ jest:

- A) -1, B) 1.6, C) 1.5, D) 1.

163. Rješenje jednadžbe $\log_3 (7x - 5) = 2$ jest:

- A) -2, B) 2, C) 3, D) -3.

164. Rješenje jednadžbe $\log(5x + 20) = 2$ jest:

- A) 16, B) 8, C) 4, D) 2.

165. Rješenja jednadžbe $\log(20 - 3x) + \log 2 = 2 \log 2x$ jesu:

- A) $x = \frac{5}{2}$, B) nema rješenja, C) $x_1 = 4$
 $x_2 = -\frac{5}{2}$, D) $x_1 = 6$
 $x_2 = -4$.

166. Rješenje jednadžbe $\log(x - 4) + 1 = \log(8x - 30)$ jest:

- A) -5, B) nema rješenja, C) 5, D) -3.

167. Rješenje jednadžbe $\log(x - 5) + 1 = \log(3x - 8)$ jest:

- A) 4, B) -4, C) -6, D) 6.

168. Rješenje nejednadžbe $9^x < 17$ napišite u obliku intervala.

- A) $x \in (-\infty, 1.2)$ B) $x \in (-\infty, \log_9 17)$ C) $x \in (-\infty, \log_9 17]$ D) $x \in \left[\frac{9}{17}, 1\right]$

169. Rješenje nejednadžbe $8^x > 5$ napišite u obliku intervala.

- A) $x \in [\log_8 5, +\infty)$ B) $x \in (\log_8 5, +\infty)$ C) $x \in (\log_5 8, +\infty)$ D) $x \in (-\infty, \log_5 8)$

170. Rješenje jednadžbe $25^{\frac{1}{\log_5 x}} = 4$ jest:

- A) 8, B) nema rješenja, C) 625, D) 64.

171. Rješenje jednadžbe $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{\log_2 x}} = 64$ jest:

- A) 8^3 , B) nema rješenja, C) $\frac{1}{8}$, D) $\frac{1}{8^3}$.

172. Kvadrat rješenja jednadžbe $\log_5 \log_{\frac{1}{2}} x = \log_5 10 - 1$ iznosi:

- A) 9^{-2} , B) 2^9 , C) 2^{-9} , D) 9^2 .

173. Cjelobrojna nepoznanica u sustavu jednadžbi $\begin{cases} 6x + y = 11 \\ -9x + 2y = 8 \end{cases}$ iznosi:

- A) 1, B) 3, C) 5, D) 7.

174. Cjelobrojna nepoznanica u sustavu jednadžbi $\begin{cases} 3x + 6y = -\frac{21}{2} \\ -x + 4y = 8 \end{cases}$ iznosi:

- A) -7, B) -5, C) -3, D) -1.

175. Rješenje sustava jednadžbi $\begin{cases} -5x + 3y = -11 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$ jest uređeni par:

- A) (1, -2), B) (2, 1), C) (-19, -2), D) (1, 2).

176. Rješenje sustava jednadžbi $\begin{cases} 2x - 3y = -23 \\ 3x - 2y = -27 \end{cases}$ uređeni je par:

- A) (3, 7), B) (-7, 3), C) (2, -3), D) (-2, 3).

177. Zbroj svih komponenti rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases} 5x - 3y = -20 \\ -2x - 2y = -13 \end{cases}$ iznosi:

- A) 0, B) 2, C) 6.5, D) -2.

178. Zbroj svih komponenti rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases} -5x - 3y = 4 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$ iznosi:

- A) 0, B) 2, C) 4, D) -2.

179. Rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = -2x^2 - x + 3 \end{cases}$ nalaze se u:

- A) I. kvadrantu, B) I. i II. kvadrantu,
C) II. i III. kvadrantu, D) I. i IV. kvadrantu.

180. Sustav jednadžbi: $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = 3x^2 - 4x + 1 \end{cases}$ ima rješenja u:

- A) I. kvadrantu, B) I. i II. kvadrantu,
C) II. i III. kvadrantu, D) I. i IV. kvadrantu.

181. Sustav $\begin{cases} y = 5x - 3 \\ y = 2x^2 - x + 2 \end{cases}$ u skupu realnih brojeva:

- A) ima jedno rješenje, B) ima dva rješenja,
C) nema rješenja, D) ima beskonačno mnogo rješenja.

182. Sustav $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x^2 + 3x - 1 \end{cases}$ u skupu realnih brojeva:

- A) ima jedno rješenje, B) ima dva rješenja,
C) nema rješenja, D) ima beskonačno mnogo rješenja.

183. Rješenje sustava $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ bez negativnih komponenti nalazi se:

- A) na osi ordinata, B) na osi apscisa, C) u ishodištu, D) u I. kvadrantu.

184. Rješenje sustava $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ 4x + 3y = 18 \end{cases}$ bez negativnih komponenti nalazi se:

- A) na osi ordinata, B) na osi apscisa, C) u ishodištu, D) u I. kvadrantu.

Zadaci kratkih odgovora

Rješenja zadataka potražite na str. 458.

1. Koliko iznosi kvadrat rješenja jednadžbe $10x + 7 = -3(x + 2)$?
2. Koliko iznosi kvadrat rješenja jednadžbe $6x + 9 = -4(-3x + 8) + 17$?
3. Rješenje jednadžbe $7x - 4(3x + 5) = 1 - 2x$ jest _____.
4. Rješenje jednadžbe $5x - 7(-x + 3) = 2x + 3(-2x + 9)$ jest _____.
5. Rješenje jednadžbe $\frac{2x-3}{3} + \frac{5}{4}x - \frac{x+2}{6} = \frac{3x}{2}$ jest _____.
6. Rješenje jednadžbe $\frac{2x-3}{5} - \frac{2}{3}x + \frac{2-x}{10} = \frac{x}{2}$ jest _____.
7. Rješenje jednadžbe $\frac{4-2x}{5} = 3 + \frac{6-x}{3}$ jest _____.
8. Rješenje jednadžbe $\frac{7-5x}{4} = 5 + \frac{10-x}{5}$ jest _____.
9. Odredite kvadrat rješenja jednadžbe $\frac{x-2}{x-7} = -4$.
10. Zadana je jednadžba $5x + 4 = ax + 1$.
 - Odredite rješenje te jednadžbe u ovisnosti o parametru a .
 - Za koje je vrijednosti parametra a rješenje jednadžbe prirodan broj?
 - Za koju vrijednost parametra a jednadžba nema rješenja?
11. Zadana je jednadžba $3x + a = 2ax - 1$.
 - Odredite rješenje te jednadžbe u ovisnosti o parametru a .
 - Za koje je vrijednosti parametra a rješenje jednadžbe prirodan broj?
 - Za koju vrijednost parametra a jednadžba nema rješenja?
 - Za koje je vrijednosti parametra a rješenje jednadžbe cijeli broj?
12. Rješenje nejednadžbe $5x - \frac{4x-2.5}{3} > 1.2$ jest _____.
13. Rješenje nejednadžbe $2 - (7x + 5) < 3 - \frac{2x}{3}$ jest _____.
14. Rješenje nejednadžbe $\frac{1-x}{3} + \frac{2}{5}x + \frac{7x-3}{10} \leq x$ jest _____.
15. Koliko rješenja ima nejednadžba:
 - $2x + 4 < -2x - 3$,
 - $-2x + 2 > -2x - 3$,
 - $-2x - 3 < -(2x + 3)$,
 - $5 + 2x < 2x$?
16. Koliko rješenja ima nejednadžba:
 - $4x < 4x - 3$,
 - $7x > x - 3$,
 - $2x - 8 < 2x - 8$,
 - $3x + 2 \geq 3x + 1$?

17. Rješenje nejednadžbe $5x - \frac{3+1.75x}{3} < -4$ jest _____.
18. Rješenje nejednadžbe $-12 - (5x - 4) < 3 - \frac{3x}{5}$ jest _____.
19. Odredite zbroj apsolutnih vrijednosti svih rješenja jednadžbe $(2x + 3)(2x - 3) = -5$.
20. Skup svih rješenja nejednadžbe $-\frac{1}{3x} > 4$ jest _____.
21. Rješenje nejednadžbe $3x(2x - 7) < 0$ napišite s pomoću intervala.
22. Rješenje nejednadžbe $\frac{2x+1}{3} + \frac{3}{7}x - \frac{x-2}{7} \geq \frac{4x}{3}$ jest _____.
23. Odredite realan broj k tako da jedno rješenje jednadžbe $2(x^2 + 1) - 2kx + 3k = 0$ bude jednak 0.
24. Za koje vrijednosti realnoga parametra k jednadžba $3k(x^2 - 1) + 6k(x + 1) = x$ ima dva različita realna rješenja?
25. Odredite realni broj k tako da jedno rješenje jednadžbe $7(x^2 + 2) + k = (2k + 1)k$ bude jednako 0.5
26. Odredite kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima kojoj su rješenja $\frac{3}{4}$ i -2 .
27. Odredite neku kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima kojoj je jedno rješenje $x_1 = 2 - \frac{5}{2}i$.
28. Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine korijena jednadžbe $x^2 - 9x + 8 = 0$ iznosi:
_____.
29. Za jednadžbu $3x^2 - 5x + 4 = 0$ odredite:
 a) $x_1 + x_2$, b) $x_1 \cdot x_2$, c) $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$.
30. Za jednadžbu $x^2 - 7x + 10 = 0$ odredite:
 a) $x_1 + x_2$, b) $x_1 \cdot x_2$, c) $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1)$.
31. Rješenja kvadratne jednadžbe: $(x + 5)(x - 5) - (2x + 3)(2x - 3) = (x + 5)^2 - 3(6x + 7)$
iznose: _____.
32. Rješenja kvadratne jednadžbe $(3 - x)(3 + x) - (2x - 1)(2x + 1) = -2(4x + x^2) - (2x + 3)^2$
iznose: _____.
33. Riješite nejednadžbu $x^2 + 15 \geq 0$.
34. Riješite nejednadžbu $2x^2 - 8 \leq 0$.

35. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
36. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 - x^2 - 20 = 0$.
37. Riješite nejednadžbu $x^2 \geq 9$.
38. Odredite skup svih onih rješenja nejednadžbe $6x^2 - x - 2 \geq 0$ za koje vrijedi $x > 0$.
39. Riješite nejednadžbu $x^2 + 1 < 0$.
40. Odredite rješenje nejednadžbe $36 - x^2 \leq 0$.
41. Umnožak dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva iznosi 483. Koji su to brojevi?
42. a) Riješite jednadžbu $3x^2 - 10x + 3 = 0$.
 b) Riješite nejednadžbu $3x^2 - 10x + 3 < 0$ i rješenje napišite u obliku intervala.
 c) Riješite nejednadžbu $3x^2 - 10x + 3 \geq 0$ i rješenje napišite u obliku intervala.
43. a) Riješite jednadžbu $2x^2 + 13x + 15 = 0$.
 b) Riješite nejednadžbu $2x^2 + 13x + 15 < 0$ i rješenje napišite u obliku intervala.
 c) Riješite nejednadžbu $2x^2 + 13x + 15 \geq 0$ i rješenje napišite u obliku intervala.
44. Napišite sva rješenja jednadžbe $\left| \frac{2x-4}{5} \right| = 8$.
45. Odredite zbroj apsolutnih vrijednosti svih rješenja jednadžbe

$$|2x+3| = \frac{-|2-3\sqrt{2}|}{|2\sqrt{3}-4|+2\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{2}}{8}.$$
46. Odredite zbroj apsolutnih vrijednosti svih rješenja jednadžbe

$$|5x+3| = \frac{|1-\sqrt{2}|}{|\sqrt{3}-3|+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left| \frac{-5\sqrt{2}}{6} \right|.$$
47. Odredite zbroj apsolutnih vrijednosti svih rješenja jednadžbe $3\sqrt{1-2x} + x = 7$.
48. Odredite kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima kojoj su rješenja $-\frac{1}{6}$ i 3.
49. Odredite neku kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima kojoj je jedno rješenje $x_1 = -\frac{2}{3} + i$.
50. Odredite kvadrat rješenja jednadžbe $\frac{-10-2x}{x+3} = -5$.
51. Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{-2}{3x} < 1$ jednak je _____.
52. Zbroj aritmetičke i geometrijske sredine korijena jednadžbe $x^2 + 8x + 7 = 0$ iznosi:
 _____.

53. Rješenje nejednadžbe napišite s pomoću intervala $2x(3x - 4) > 0$.
54. Zbroj svih rješenja jednadžbe $x^4 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ iznosi _____.
55. Odredite rješenje jednadžbe $81^{2x+1} = \sqrt{243}$.
56. Kvadrat zbroja svih rješenja jednadžbe $3\sqrt{2x+1} + x = -3$ iznosi _____.
57. Kvadrat rješenja jednadžbe $27^{\frac{2x}{3}-2} = \frac{1}{9}$ iznosi _____.
58. Rješenje jednadžbe $3^{2x-1} + 9^{x+1} = 28$ jest _____.
59. Kvadrat rješenja jednadžbe $54^{7x-3} = 1$ iznosi _____.
60. Odredite rješenje jednadžbe $36^{x-2} = \sqrt{216}$.
61. Kvadrat rješenja jednadžbe $125^{\frac{x}{3}-2} = 3125$ iznosi _____.
62. Kvadrat rješenja jednadžbe $52^{5x-1} = 1$ iznosi _____.
63. Rješenje nejednadžbe $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2x} < 625$ jest _____.
64. Rješenje jednadžbe $5^{2x-1} + 5^{2x+2} = 126$ jest _____.
65. Rješenje jednadžbe $4 \cdot 3^{2x} + 9^{x-2} + 9^{x+1} = 1054$ iznosi _____.
66. Rješenje nejednadžbe $11^x < 7$ napišite u obliku intervala.
67. Rješenje nejednadžbe $0.01^{2x-3} < \frac{1}{1000}$ napišite u obliku nejednakosti.
68. Skup svih rješenja nejednadžbe $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 2$ jest _____.
69. Rješenje jednadžbe $2 \cdot 3^{2x} + 9^{x-1} + 9^{x+1} = 900$ iznosi _____.
70. Odredite kvadrat rješenja jednadžbe $\log_x x = -5$.
71. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\log_x 128 = 7$ iznosi _____.
72. Zbroj svih rješenja jednadžbe $6 \cdot 36^x - 37 \cdot 6^x + 6 = 0$ iznosi _____.
73. Rješenje jednadžbe $\log_3 125 = x$ jest _____.
74. Odredite eksponent u potenciji 7 tako da vrijednost te potencije bude jednaka 30.
75. Odredite kvadrat rješenja jednadžbe $\log_8 x = 3$.
76. Sva rješenja jednadžbe $\log(3x^2 - 5x) = 1$ jesu: _____.
77. Koliko rješenja ima jednadžba $\log(2x - 4) - \log x = \log 3$?

78. Rješenje nejednadžbe $5^x > 8$ napišite u obliku intervala.
79. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\log(2x + 3) - \log 3x = 2 \log 3$ jednaka je _____.
80. Recipročna vrijednost rješenja jednadžbe $\log_x 3 \cdot 125 = 5$ iznosi _____.
81. Rješenje jednadžbe $\log_3 729 = x$ jest _____.
82. Sva rješenja jednadžbe $\log(x^2 + 21x) = 2$ jesu: _____.
83. Zbroj svih rješenja jednadžbe $25^x + 4 \cdot 5^x - 21 = 0$ iznosi _____.
84. Na brojevnoj kružnici prikažite sva rješenja jednadžbe $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
85. Odredite opće rješenje jednadžbe $\operatorname{tg} x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.
86. Na brojevnoj kružnici prikažite sva rješenja jednadžbe $\cos x = \frac{-1}{5}$ na intervalu $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.
87. Odredite opće rješenje jednadžbe $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.
88. Na brojevnoj kružnici prikažite sva rješenja jednadžbe $\operatorname{tg} x = -1$ na intervalu $(\pi, 2\pi)$.
89. Opće rješenje jednadžbe $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1$ jest _____.
90. Odredite opće rješenje jednadžbe $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$.
91. Opće rješenje jednadžbe $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ jest _____.
92. Odredite rješenje jednadžbe $\sqrt{3} \cos 5x + \frac{3}{2} = 0$.
93. Riješite jednadžbu $\cos x + 3\sin x = 0$.
94. Odredite sva rješenja jednadžbe $2\sin 5x - 1 = 0$ u intervalu $[0, 2\pi]$.
95. Odredite sva rješenja jednadžbe $5\sin^2 x - 2\cos^2 x - 3\sin x \cos x = 0$.
Uputa: početnu jednadžbu podijelite s $\cos^2 x$, pa ćete dobiti kvadratnu jednadžbu s nepoznanicom $\operatorname{tg} x$. Zatim uvedite supstituciju $\operatorname{tg} x = t$ i odredite $\operatorname{tg} x$.
96. Riješite jednadžbu $\sin 3x = -\frac{1}{2}$.
97. Odredite sva rješenja jednadžbe $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.
98. Odredite sva rješenja jednadžbe $4\sin^2 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$.
99. Riješite jednadžbu $2\cos x - 3\sin x = 0$.

100. Odredite rješenja jednadžbe $10 \cos^4 x - 7 \cos^2 x + 1 = 0$ na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

101. Odredite sva rješenja jednadžbe $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

102. Odredite sva rješenja jednadžbe $3 \cos 6x + 2\sqrt{3} = 0$.

103. Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ bilo kojom metodom.

104. Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 6 \end{cases}$ bilo kojom metodom.

105. Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x + 7 \\ y = -\frac{1}{3}x + 4 \end{cases}$ metodom komparacije.

106. Algebarski riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} 5x + y = -7 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$. Dobiveno rješenje provjerite grafički.

Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja

Legendu kratica naziva do sada održanih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja potražite na str. 78.

Rješenja zadataka potražite na str. 460.

Osnovna razina

1. Koji je interval rješenje nejednadžbe $1 - 2x < 3$?

PM 2009.

- A) $(1, +\infty)$ B) $(-\infty, -1)$ C) $(-1, +\infty)$ D) $(-\infty, 1)$

2. Koji od navedenih brojeva pripada skupu svih rješenja nejednadžbe $3 - 2x < 0$? **PI 2009.**

- A) 2 B) 1 C) -1 D) -2

3. Skupu svih rješenja nejednadžbe $3 - 2x < 0$ pripada broj : **NI 2007. za strukovne škole**

- A) 2, B) 1, C) -1, D) -2.

4. Kojoj je nejednadžbi rješenje $[2.5, +\infty)$?

NI 2006. za OJK gimnazije

- A) $5x - 2 \geq 0$ B) $2x - 5 \geq 0$ C) $5x - 2 < 0$ D) $2x - 5 > 0$

- 5.** Riješite jednadžbu $5x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - x$. PM 2009.
- 6.** Riješite jednadžbu $-5 + 4(x - 2) = 19 - 4x$. PI 2009.
- 7.** Riješite jednadžbu $4x - 2 = 30 - 4x$. NI 2007. za strukovne škole
- 8.** Riješite nejednadžbu $3 \cdot (2 + x) > 2$. NI 2008.
- 9. a)** Riješite jednadžbu $2(x + 1) + 4 = 2 - x$. DM, ljeto 2010.
- b)** Riješite nejednadžbu $\frac{5x - 3}{6} - \frac{3x}{2} > 1$.
- 10. a)** Riješite jednadžbu $x = \frac{4}{3}(x - 3)$ DM, jesen 2010.
- b)** Riješite nejednadžbu $\frac{x - 4}{3} - \frac{2x}{5} > 0$.
- 11.** Zbroj rješenja jednadžbe $\frac{1}{3}(x - 1)^2 - 3 = 0$ jest: NI 2007. za gimnazije
- A) -6, B) -2, C) 2, D) 6.
- 12.** Ako je $x_1 = 3$ jedno rješenje jednadžbe $2(x - 3m) \cdot (x + 5) = 0$, tada je m jednako: NI 2007. za gimnazije
- A) -3, B) -1, C) 1, D) 3.
- 13.** Riješite kvadratnu nejednadžbu $2x^2 - 3x + 2 = 0$. PM 2009.
- 14.** Riješite jednadžbu $2x^2 - 3x - 2 = 0$. NI 2008.
- 15.** Riješite jednadžbu $10x^2 - 3x - 1 = 0$. PM 2009.
- 16.** Riješite jednadžbu $(x - 1)(x + 5) = x^2$. NI 2008.
- 17.** Riješite jednadžbu $(x - 4)(3 + x) = 1 + (x - 3)^2$. NI 2006. za OJK gimnazije
- 18.** Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$.
U zapisu rješenja rabite $\sqrt{3}$ ne računajući njegovu vrijednost. DM, ljeto 2010.
- 19.** Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$.
U zapisu rješenja rabite $\sqrt{5}$ ne računajući njegovu vrijednost. DM, jesen 2010.
- 20.** U jednadžbi $100 \cdot 10^x = 0.01$, nepoznanica x jednaka je: PM 2009.
- A) -4, B) -3, C) -2, D) -1.
- 21.** Koja je od navedenih vrijednosti nepoznanice x rješenje jednadžbe $10^{x+1} = 0.1$? PI 2009.
- A) $x = -2$ B) $x = -1$ C) $x = 0$ D) $x = 1$
- 22.** Nepoznanica y iz sustava $3x + 4y + 5 = 0$ NI 2008.
 $7x - 8y + 16 = 0$ jednaka je:
- A) 3, B) $\frac{1}{4}$, C) $-\frac{1}{4}$, D) -3.

23. U rješenju sustava jednadžbi $2x + y = 32$

$$-2x + 3y = 40 \text{ nepoznanica } x \text{ jednaka je:}$$

- A) 18, B) 12, C) 7, D) 4.

24. Zbroj dvaju cijelih brojeva je 96, a njihova razlika 60. Jedan od tih brojeva je: **PM 2009.**

- A) 68, B) 73, C) 78, D) 86.

25. Riješite sustav: $5x + 4y = 24$

$$-3x + 6y = 15$$

PM 2009.

26. Riješite sustav jednadžbi: $2x + 3y = 3$

$$4x + y = 5.$$

PI 2009.

27. Riješite sustav jednadžbi $4x + 5y = 20$

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

NI 2006. za OJK gimnazije

28. Neka je $x^2 - y^2 = 75$ i $x + y = 15$.

NI 2008.

- a) Koliko je $x - y$? b) Koliko je $2x - 2y + 1$?

29. Za brojeve a i b vrijedi $a : b = 3 : 4$, $a + b = 21$. Odredite a .

NI 2008.

30. U sustavu jednadžbi $x = 2y + 4$

$$y = 2x + 7 \text{ izračunajte nepoznanicu } x.$$

DM, ljeto 2010.

31. U sustavu jednadžbi $x = \frac{3}{5} + 2y$

$$x = -\frac{2}{5} + 7y \text{ izračunajte nepoznanicu } y.$$

DM, jesen 2010.

Viša razina

1. Skupu svih rješenja nejednadžbe $3 - 2x < 0$ pripada broj:

NI 2007. za gimnazije

- A) 2, B) 1, C) -1, D) -2.

2. Jednadžba $2k + 5x + 3 = 0$ ima negativno rješenje za realne brojeve k za koje vrijedi:

NI 2006. za PM gimnazije

- A) $k > \frac{3}{2}$, B) $k < \frac{3}{2}$, C) $k < -\frac{3}{2}$, D) $k > -\frac{3}{2}$.

3. Koje je rješenje jednadžbe $x - [3x - (5 + x)] - 8 = 3(x + 2) - 1$?

DM, ljeto 2010.

- A) -3 B) -2 C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$

4. Riješite jednadžbu $-5 + 4(x - 2) = 19 - 4x$.

NI 2007. za gimnazije

5. Riješite jednadžbu $\frac{2x - 3}{x + 5} = -2$.

PM 2009.

6. Riješite jednadžbu $\frac{x}{2} = \frac{4x+1}{3} + 1$.

DM, jesen 2010.

7. Koja od navedenih tvrdnji vrijedi za kvadratnu jednadžbu $4x^2 - 12x + 9 = 0$? PI 2009.

- A) Jednadžba ima dva (različita) realna rješenja.
- B) Jednadžba ima samo jedno (dvostruko) realno rješenje.
- C) Jednadžba nema realnih rješenja.
- D) Jednadžba se ne može riješiti.

8. Ako je $x_1 = 3$ jedno rješenje jednadžbe $2(x - 3m) \cdot (x + 5) = 0$, tada je m jednako:

NI 2007. za gimnazije

- A) -3, B) -1, C) 1, D) 3.

9. Zbroj rješenja jednadžbe $\frac{1}{3}(x - 1)^2 - 3 = 0$ jest:

NI 2007. za gimnazije

- A) -6, B) -2, C) 2, D) 6.

10. Jednadžba $3x^2 + bx - 30 = 0$ ima rješenja $x = -2$ i $x = 5$. Tada je b jednako: NI 2008.

- A) 9, B) $\frac{1}{9}$, C) $-\frac{1}{9}$, D) -9.

11. Ako su -1 i $\frac{3}{5}$ rješenja jednadžbe $5x^2 + kx - 3 = 0$, koliko je k ? PM 2009.

- A) $k = 2$ B) $k = 1$ C) $k = -1$ D) $k = -2$

12. Ako je $x = \sqrt[3]{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$, onda je:

NI 2008.

- A) $x^3 + 2x - 3 = 0$, B) $x^3 - 2x + 3 = 0$, C) $x^3 - 3x + 2 = 0$, D) $x^3 + 3x - 2 = 0$.

13. Riješite jednadžbu $(4 - x)(3 + x) = 1 - (x - 3)^2$.

NI 2006. za PM gimnazije

14. Riješite jednadžbu $t^2 - t - 2 = 0$.

NI 2008.

15. Riješite nejednadžbu $\frac{x^2}{2+x} > 0$.

NI 2006. za PM gimnazije

16. Riješite nejednadžbu $x^2 + 2x \leq 3$.

NI 2007. za gimnazije

17. Riješite jednadžbu $x^2 - 4 > 0$.

NI 2008.

18. a) Riješite jednadžbu $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

PM 2009.

b) Riješite nejednadžbu $2x^2 - 5x + 2 < 0$.

19. a) Riješite jednadžbu $x(x - 2) = 0$.

PI 2009.

b) Riješite nejednadžbu $x(x - 2) > 0$.

20. Odredite vrijednost realnog broja k tako da rješenja jednadžbe $2x^2 + (k - 3)x - 5 = 0$ budu suprotni brojevi.

NI 2007. za gimnazije

21. a) Odredite zbroj rješenja jednadžbe $x^2 + x - 6 = 0$.

DM, ljetno 2010.

b) Napišite oba rješenja jednadžbe $\left| \frac{2x-1}{5} \right| = 1$.

22.

DM, ljeto 2010.

a) Riješite nejednadžbu $x^2 + 7x + 12 \geq 0$. Rješenje zapišite uz pomoć intervala.

b) Neka je a zadani realni broj. U sustavu jednadžbi $2x + 3y = a$

$$x + 2y + 2a = 0$$

odredite nepoznanicu y . (U rješenju će se pojaviti broj a .)

23. Riješite nejednadžbu $x^2 - 8x + 15 < 0$. Rješenje zapišite uz pomoć intervala. **DM, jesen 2010.**

24. Riješite nejednadžbu $|x - 2| > 3$.

Rješenje zapišite koristeći se intervalima.

NI 2007. za gimnazije

25. Odredite sva rješenja jednadžbe $x^4 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$.

NI 2007. za gimnazije

26. Rješenje jednadžbe $5 \cdot 9^{x+1} = 15$ nalazi se u intervalu:

PM 2009.

- A) $(-\infty, -2]$, B) $(-2, -1]$, C) $(-1, 2]$, D) $(2, \infty)$.

27. Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $7 \cdot 2^x - 4^x = 12$?

PI 2009.

- A) 2 B) 6 C) $\log_2 6$ D) $\log_2 9$

28. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $5^{x+2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 6$?

DM, ljeto 2010.

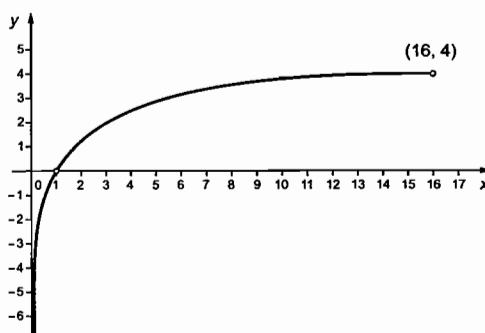
- A) -3 B) -2 C) -1 D) 0

29. Riješite jednadžbu $2 \cdot 2^{2x} + 4^{x+2} - 2 \cdot 4^{x-1} = 35$.

NI 2008.

30. Na slici je graf funkcije $f(x) = \log_b x$. Odredite b .

NI 2008.



31. Riješite nejednadžbu $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) \leq 3$.

Rješenje zapišite uz pomoć intervala.

DM, ljeto 2010.

32. a) Riješite jednadžbu $\log_3(x-3) = -2$.

DM, jesen 2010.

b) Riješite nejednadžbu $32^{x+1} \leq \frac{\sqrt{8}}{4}$.

33. Uz koji uvjet za realni broj $m \neq 0$ jednadžba $m \sin x - 1 = 0$ ima rješenja? **DM, ljeto 2010.**

- A) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ B) $m \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ C) $m \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ D) $m \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

34. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$ na intervalu $[0, \pi]$? DM, jesen 2010.

- A) $\frac{7\pi}{6}$ B) $\frac{5\pi}{3}$ C) $\frac{19\pi}{6}$ D) $\frac{13\pi}{3}$

35. Odredite dva rješenja jednadžbe $\sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ u intervalu $[0, 6\pi]$. PI 2009.

36. Odredite rješenja jednadžbe $\cos 2x - \cos x = 0$ iz intervala $[0, 2\pi]$. PM 2009.

37. a) Pojednostavnite $\sin(3960^\circ + \alpha)$. DM, Ijeto 2010.

b) Koje je rješenje jednadžbe $\sin(x-\pi)\sin(x+2\pi) = 3\cos(x+3\pi)\cos(x-4\pi)$ iz intervala $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$?

38. U rješenju sustava jednadžbi $2x + y = 32$ NI 2007. za gimnazije
 $-2x + 3y = 40$ nepoznanica x jednaka je:

- A) 18, B) 12, C) 7, D) 4.

39. U košari je 89 kuglica – neke su malene, a neke velike.

Svaka mala kuglica ima masu 2 g, a svaka velika 5 g.

Ukupna masa kuglica u košari je 256 g. Koliko je malih kuglica u košari? PI 2009.

- A) 115 B) 63 C) 26 D) 25

40. Sustav $(a+3)x - 3y = -1$ NI 2008.
 $8x + 13y = 4$ ima beskonačno mnogo rješenja ako je:

- A) $a = -5$, B) $a = -1$, C) $a = 1$, D) $a = 5$.

41. Pravac $y = x + 1$ i parabola $y = x^2 - 6x + 7$ sijeku se u točkama: NI 2007. za gimnazije

- A) (1, 2), (6, 7), B) (2, 1), (7, 6), C) (2, 3), (3, 4), D) (3, 2), (4, 3).

42. Riješite sustav jednadžbi: $4x + 5y = 20$ NI 2006. za PM gimnazije

$$y = \frac{1}{2}x - 2.$$

43. Zadani su pravci $y = -x + 1$ i $y = 3x$.

NI 2007. za gimnazije

U koordinatnom sustavu nacrtajte oba pravca.

Koliko rješenja ima sustav jednadžbi $y = -x + 1$

$$y = 3x?$$

44. Marija je za sedamnaesti rođendan dobila na dar buket od 17 ruža, bijelih i crvenih. Cijena bijele ruže je 8 kn, a crvene 9 kn.

PM 2009.

Koliko je u buketu bilo crvenih, a koliko bijelih ruža ako je buket plaćen 142 kn?

45. Zbroj duljina kateta pravokutnog trokuta je 170 cm, a površina mu je 2 208 cm². Odredite duljine stranica trokuta.

NI 2007. za gimnazije

46. Neka je a zadani realni broj. U sustavu jednadžbi $2x + 3y = a$

$$x + 2y + 7 = 0$$

DM, jesen 2010.

odredite nepoznanicu y . (U rješenju će se pojaviti broj a .)

• 4. GEOMETRIJA

4.1.	Elementarna geometrija.....	267
	Elementarna geometrija likova u ravnini.....	267
	Odnosi među geometrijskim objektima u prostoru.....	275
	Prizma, piramida, valjak, stožac, kugla	279
4.2.	Trigonometrija	288
	Trigonometrija pravokutnoga trokuta	288
	Trigonometrija raznostraničnoga trokuta.....	294
4.3.	Analitička geometrija.....	299
	Koordinatni sustav na pravcu i u ravnini.....	299
	Vektori.....	304
	Jednadžba pravca.....	309
	Krivulje drugog reda.....	316
4.4.	Geometrija – zadaci za vježbu.....	322
	Zadaci višestrukog izbora	322
	Zadaci kratkih odgovora	340
	Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita	
	Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	347
	Osnovna razina	347
	Viša razina	352

• 4.1. Elementarna geometrija •

Elementarna geometrija likova u ravnini

Zadaci višestrukog izbora

Primjer 1.

Koji je od sljedećih četiriju trokuta jednakokračan?

- A) $\alpha = 35^\circ, \beta = 105^\circ$ B) $\beta = 40^\circ, \gamma = 110^\circ$ C) $\alpha = 48^\circ, \gamma = 66^\circ$ D) $\beta = 50^\circ, \gamma = 55^\circ$

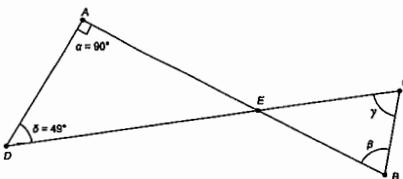
Rješenje: C.

Da bi trokut bio jednakokračan, mora imati dvije sukladne stranice, a nasuprot sukladnim stranicama nalaze se i sukladni kutovi. Zbroj mjera kutova u trokutu mora iznositi 180° . Da-
kle, samo u rješenju C) dva kuta trokuta imaju jednake mjere: $\beta = \gamma = 66^\circ$.

Primjer 2.

Pravokutan i jednakokračan trokut imaju zajednički vrh. Koliki je kut uz osnovicu jednakokračnog trokuta ako šiljasti kut pravokutnog trokuta uz kraću katetu iznosi 49° ?

- A) 49° B) 41° C) 69.5° D) 139°



Rješenje: C.

Kutovi u vrhu E su vršni, što znači da je zbroj preostale dvije kutne mjeru u oba trokuta jednak: $\alpha + \delta = \gamma + \beta$.

$$\beta = \gamma = \frac{\alpha + \delta}{2} = \frac{90^\circ + 49^\circ}{2} = \frac{139^\circ}{2} = 69.5^\circ = 69^\circ 30'.$$

Primjer 3.

Središte trokutu upisane kružnice nalazi se u sječištu:

- A) simetrala stranica, B) simetrala kutova, C) visina, D) težišnica.

Rješenje: B.

Primjer 4.

Prena duljini stranica, sve trokute dijelimo u tri skupine. Koja je skupina trokuta uljez?

- A) jednakokračni B) jednakostranični, C) pravokutni, D) raznostranični.

Rješenje: C.

Primjer 5.

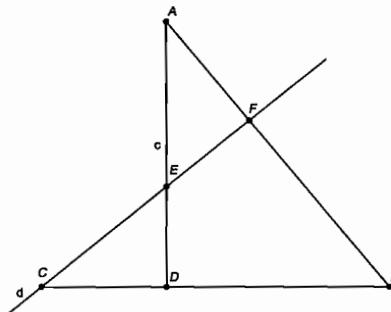
Za trokute na slici neka vrijedi $AB = BC$, $AD \perp BC$ i $AB \perp FC$. Trokuti ADB i BFC su:

- A) sukladni, B) slični,
C) jednaki, D) isti.

Rješenje: A.

Ti su trokuti prema poučku KSK sukladni. Iz uvjeta zadatka vidimo da vrijedi $|AB| = |BC|$, pa im je jedna stranica sukladna. Kut im je u vrhu B zajednički. Oba trokuta imaju po jedan pravi kut, što znači da se podudaraju u sva tri kuta.

$$|AB| = |BC| \Rightarrow \angle BDA \cong \angle CFB, \quad \angle ABC - zajednički \Rightarrow \Delta ADB \cong \Delta BFC.$$

**Primjer 6.**

Za trokut na slici gore vrijedi: $AB = BC$, $AD \perp BC$ i $AB \perp FC$. Trokuti CBF i DEC jesu:

- A) sukladni, B) slični,
C) jednaki, D) isti.

Rješenje: B.

Ti su trokuti prema poučku KKK slični, tj. imaju sva tri kuta sukladna. Dovoljno je dokazati da su dva kuta sukladna. Naime, zbroj kutova u trokutu je konstantan, pa ako se podudaraju dva para kutova, onda to vrijedi i za treći par. Trokuti CBF i DEC imaju zajednički kut u vrhu C i po jedan pravi kut.

$$\begin{aligned} \angle BCF &= \angle DCE \\ \angle CFB &\cong \angle EDC \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \angle FBC &\cong \angle CED \\ \angle CFB &\cong \angle EDC \end{aligned} \Rightarrow \Delta CBF \cong \Delta DEC$$

Primjer 7.

Koliko dijagonala ima pravilni deveterokut?

- A) 81 B) 54 C) 63 D) 27

Rješenje: D.

$$D = \frac{n \cdot (n-3)}{2} = \frac{9 \cdot (9-6)}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

Primjer 8.Koliko vrhova ima pravilni mnogokut čiji je zbroj unutarnjih kutova 1980° ?

- A) 11 B) 13 C) 15 D) 17

Rješenje: B.Primijenimo formulu: $K = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

$$K = (n - 2) \cdot 180^\circ \Rightarrow n - 2 = \frac{K}{180^\circ} \Rightarrow n = \frac{K}{180^\circ} + 2, \quad n = \frac{1980^\circ}{180^\circ} + 2 = 11 + 2 = 13$$

Primjer 9.Opsezi dvaju sličnih mnogokuta su 10 cm i 16 cm. Ako je površina prvog mnogokuta 15 cm^2 , kolika je površina drugog mnogokuta?

- A) 24 cm^2 B) 9.375 cm^2 C) 25.6 cm^2 D) 38.4 cm^2

Rješenje: D.Za slične mnogokute vrijedi $O' = k \cdot O$ i $P' = k^2 \cdot P$. (O' i O su opsezi, a P' i P površine tih mnogokuta, dok je $k > 0$.)

$$k = \frac{O'}{O} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5} \quad P' = \left(\frac{8}{5}\right)^2 \cdot 15 = \frac{64}{25} \cdot 15 = \frac{192}{5} = 38.4 \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

Primjer 10.Ako je hipotenuza pravokutnog trokuta tri puta veća od njegove katete a , tada katetu b možemo zapisati u obliku:

- A) $2a\sqrt{2}$, B) $a\sqrt{2}$, C) $2a$, D) $2\sqrt{2}$.

Rješenje: A.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = \sqrt{8a^2} = 2a\sqrt{2}$$

Primjer 11.

Odredimo površinu lika sa slike.

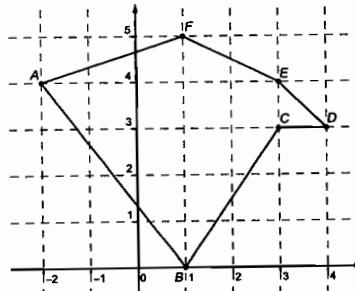
- A) 17 B) 16 C) 15 D) 14

Rješenje: D.

Jedan od načina za rješavanje jest da se lik podijeli na dijelove kojima se jednostavno računa površina, npr.:

$$\begin{aligned} P_1 &- \text{trokut } ABF; & P_2 &- \text{trapez } FBCE; \\ P_3 &- \text{trokut } CDE. \end{aligned}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{5 \cdot 3}{2} + \frac{5+1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} + 6 + \frac{1}{2} = 8 + 6 = 14.$$



Primjer 12.

Odredimo površinu lika sa slike ako znamo da je četverokut $AGDH$ kvadrat, a točka G polovište dužine \overline{AB} i $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$.

- A) 42 B) 30.5 C) 46 D) 48

Rješenje: B.

Možemo promatrati nekoliko dijelova, npr.

$$P_1 - \text{površina trapeza } EFGA;$$

$$P_2 - \text{površina trapeza } GBCD;$$

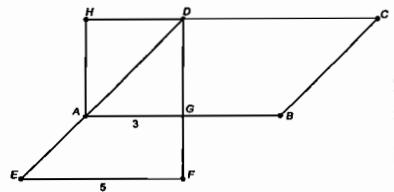
$$P_3 - \text{površina kvadrata } GBCD.$$

Kako su trokuti EFD i AGD slični, bit će

$$|FD| = 5 \text{ i } |FG| = 2.$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{5+3}{2} \cdot 2 + \frac{6+3}{2} \cdot 3 + 3^2 = 8 + \frac{9 \cdot 3}{2} + 9 = 30.5 \text{ kv. jed.}$$

viša razina (A)

**Primjer 13.**

Odredimo opseg i površinu kruga sa slike.

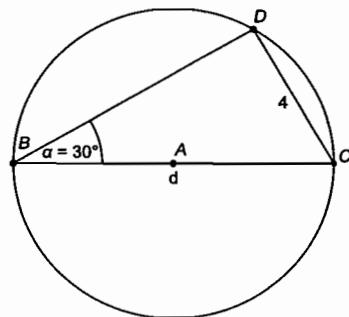
- A) $O = 4\pi, P = 16\pi$ B) $O = 8\pi, P = 16\pi$
C) $O = 8\pi, P = 64\pi$ D) $O = 4\pi, P = 64\pi$

Rješenje: B.

Budući da je trokut konstruiran nad promjerom kruga, prema Talesovu poučku taj je trokut pravokutan. Kako su mu kutovi 30° i 60° , možemo prepoznati da je naš trokut polovina jednakostraničnog trokuta, te je hipotenuza dvostruko dulja od kraće katete. Dakle, $r = 4$. (To možemo dobiti i iz formule $\sin 30^\circ = 4/r$ ili uočiti da je trokut ACD jednakostraničan jer je kut u vrhu $C 60^\circ$, a preostala su dva kuta jednakaka i zbroj im je 120° .)

$$O = 2\pi r = 8\pi$$

$$P = r^2\pi = 16\pi$$



viša razina (A)

Primjer 14.

Odredimo opseg osjenčanog lika sa slike.

- A) $O = 9 + 7.5\pi$ B) $O = 8\pi$
C) $O = 9$ D) $O = 30$

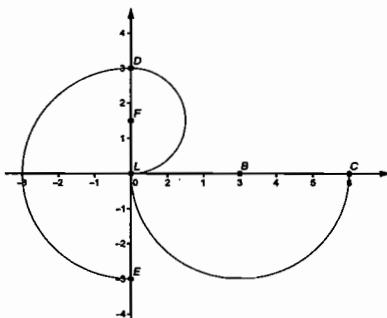
Rješenje: A.

Opseg se sastoji od tri kružna luka, tj. tri polukružnice, te dvije dužine. Polukružnica ima opseg $O = r\pi$.

$$O = O_1 + O_2 + O_3 + d_1 + d_2$$

$$O = r_1\pi + r_2\pi + r_3\pi + |EL| + |CL|$$

$$O = 3\pi + 1.5\pi + 3\pi + 3 + 6 = 9 + 7.5\pi$$



viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

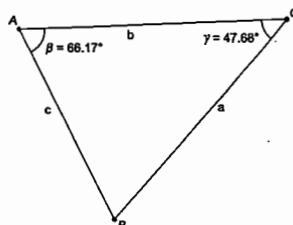
Primjer 1.

Je li trokut na slici jednakokračan?

Rješenje: Nije.

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - 113.85^\circ = 66.15^\circ$$

Kako u trokutu nema sukladnih kutova, nema ni jednakih stranica. Stoga trokut nije jednakokračan.



Primjer 2.

Iz danih kutova na slici odredite unutarnje kutove u vrhovima B i C ako je pravac p usporedan sa stranicom BC trokuta ABC.

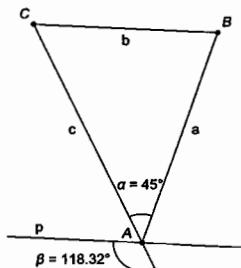
Rješenje:

$$\angle ACB = 61^\circ 40'48'', \angle CBA = 73^\circ 19'12''$$

Budući da je pravac p usporedan s BC, kut u vrhu C sukladan je sukladu kutu β , tj. kut u vrhu C i kut β suplementarni su i zbroju im je 180° .

$$\angle ACB = 180^\circ - 118.32^\circ = 61.68^\circ = 61^\circ 40'48''$$

$$\begin{aligned} \angle CBA &= 180^\circ - (45^\circ + 61^\circ 40'48'') = \\ &= 180^\circ - 106^\circ 40'48'' = 73^\circ 19'12'' \end{aligned}$$



Primjer 3.

Iz danih kutova na slici odredimo kutove u vrhovima B i C.

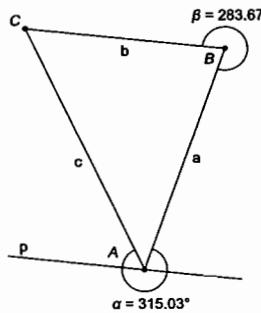
Rješenje:

$$\angle ACB = 58^\circ 42', \angle CBA = 76^\circ 19'48''$$

$$\angle CBA = 360^\circ - 283.67^\circ = 76.33^\circ = 76^\circ 19'48''$$

$$\angle BAC = 360^\circ - 315.03^\circ = 44.97^\circ = 44^\circ 58'12''$$

$$\angle ACB = 180^\circ - (76.33^\circ + 44.97^\circ) = 58.7^\circ = 58^\circ 42'$$



Primjer 4.

Ako je pravac na slici simetrala stranice BC, odredimo veličine kutova $\angle ADE$ i $\angle ACE$.

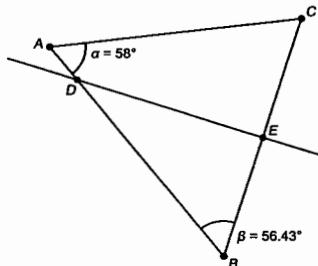
Rješenje:

Promotrimo trokut DBE. Kut $\angle ADE$ vanjski je kut toga trokuta i jednak je zbroju ostalih dvaju unutarnjih kutova. Kutovi u vrhu E pravi su jer je simetrala stranice okomita na stranicu.

$$\angle ADE = 90^\circ + 56.43^\circ = 146.43^\circ = 146^\circ 25'48''$$

$$\angle ACE = 360^\circ - (58^\circ + 146.43^\circ + 90^\circ) =$$

$$= 65.57^\circ = 65^\circ 34'12''$$



Primjer 5.

Ako je pravac p simetrala kuta $\angle CBA$, odredimo veličinu kuta $\angle BDC$ trokuta ABC .

Rješenje:

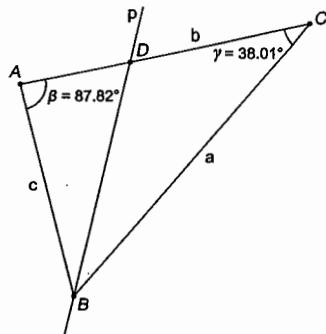
$$\angle BDC = 114^\circ 54' 18''$$

Najprije ćemo izračunati unutarnji kut u vrhu B , a nakon toga njegovu polovinu, jer ga simetrala raspolaži.

$$\angle CBA = 180^\circ - (38.01^\circ + 87.82^\circ) = 54^\circ 10' 12''$$

$$\angle CBD = 27^\circ 5' 6''$$

$$\angle BDC = 180^\circ - (38.01^\circ + 27^\circ 5' 6'') = 114^\circ 54' 18''$$

**Primjer 6.**

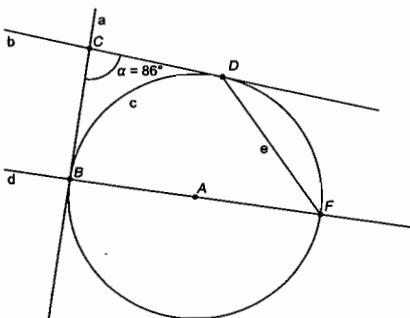
Odredimo veličinu kuta $\angle DFA$ sa slike.

Rješenje:

Kut $\angle DFA$ jednak je kutu $\angle DFB$. Kut $\angle DFB$ obodni je kut nad kružnim lukom \widehat{BD} te iznosi polovinu središnjeg kuta $\angle DAB$. Budući da je tangenta uvijek okomita na polujer, kutovi $\angle ABC$ i $\angle CDA$ su pravi, pa su kutovi α i $\angle DAB$ suplementarni.

$$\angle DAB = 180^\circ - 86^\circ = 94^\circ$$

$$\angle DFA = 94^\circ : 2 = 47^\circ$$

**Primjer 7.**

Ako su katete pravokutnoga trokuta 6 cm i 8 cm , a hipotenuza njemu sličnog trokuta 5 cm , odredimo površinu sličnog trokuta.

Rješenje: 6 cm^2

$$a = 6 \text{ cm}$$

$$b = 8 \text{ cm}$$

$$c' = 5 \text{ cm}$$

$$P' = ?$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

$$k = \frac{c'}{c} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$a' = \frac{1}{2} \cdot a = 3 \text{ cm}$$

$$b' = \frac{1}{2} \cdot b = 4 \text{ cm}$$

$$P' = \frac{a' \cdot b'}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$P' = 6 \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

Primjer 8.

Koliko stranica ima mnogokut kojemu je zbroj unutarnjih kutova 1440° ?

Rješenje: $n = 10$

Primjenimo formulu $K = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

$$K = (n - 2) \cdot 180^\circ \Rightarrow n - 2 = \frac{K}{180^\circ}$$

$$n = \frac{K}{180^\circ} + 2 \Rightarrow n = \frac{1440^\circ}{180^\circ} + 2 = 8 + 2 = 10$$

Primjer 9.

Polumjer opisane kružnice pravokutnoga trokuta ABC iznosi 12 cm. Hipotenuza njemu sličnog trokuta dvostruko je veća od jedne katete i iznosi 36 cm. Odredimo opseg trokuta ABC .

Rješenje: $O = 12(3 + \sqrt{3})$ cm

$$r = 12 \text{ cm}$$

$$c' = 36 \text{ cm}$$

$$\underline{a' = 18 \text{ cm}}$$

$$O = ?$$

$$b' = \sqrt{c'^2 - a'^2} = 18\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$c = 2r = 24 \text{ cm}$$

$$k = \frac{c'}{c} = \frac{36}{24} = \frac{3}{2}$$

$$a' = \frac{3}{2} \cdot a \Rightarrow a = \frac{2}{3} \cdot a' = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12 \text{ cm}$$

$$b' = \frac{3}{2} \cdot b \Rightarrow b = \frac{2}{3} \cdot b' = \frac{2}{3} \cdot 18\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$$

(Iz podatka da je u sličnom trokutu hipotenuza dvostruko veća od kraće katete, možemo zaključiti da to vrijedi i za početni trokut, te možemo odmah izračunati katete početnog trokuta, ne računajući koeficijent sličnosti.)

$$O = a + b + c = 12 + 12\sqrt{3} + 24 = 36 + 12\sqrt{3} \text{ cm} = 12(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}$$

Primjer 10.

Ako je $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ odredimo duljine $|DE|$ i $|BE|$.

Rješenje: $|DE| = 2.4$; $|BE| = 2.57$

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|EC|}{|BC|} \quad \text{i} \quad \frac{|EC|}{|BC|} = \frac{|DC|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|AC|} \Rightarrow$$

$$|DE| = \frac{|DC| \cdot |AB|}{|AC|} = \frac{6 \cdot 2}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

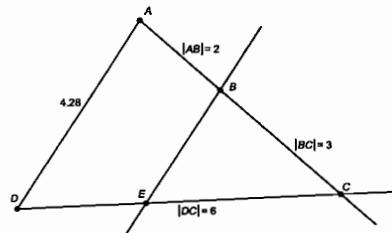
$$\frac{|BE|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|AC|} \Rightarrow$$

$$|BE| = \frac{|BC| \cdot |AD|}{|AC|} = \frac{3 \cdot 4.28}{5} = \frac{12.84}{5} = 2.568 \approx 2.57$$

$\Delta DCA \sim \Delta ECB$

$$\Rightarrow \frac{|AC|}{|DE| + |EC|} = \frac{|BC|}{|EC|}$$

$$\Rightarrow |DE| = \frac{|DC| \cdot |AB|}{|AC|} \text{ itd.}$$



Primjer 11.

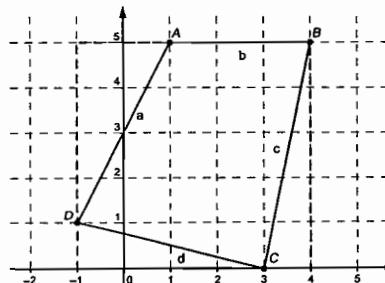
Odredimo površinu lika sa slike.

Rješenje:

$$P = 16.5 \text{ kv. jed.}$$

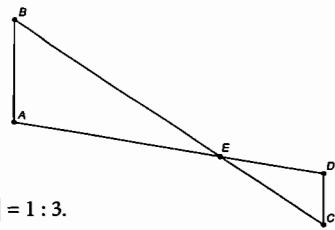
U ovom je zadatku najjednostavnije izračunati površinu kvadrata koji sadržava zadani lik, a nakon toga oduzeti površine triju pravokutnih trokuta koji su nam višak.

$$P = 5 \cdot 5 - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{5 \cdot 1}{2} - \frac{4 \cdot 2}{2} = 25 - 2 - 2.5 - 4 = 16.5 \text{ kv. jed.}$$



Primjer 12.

Ako vrijede tvrdnje $|AE| : |AD| = 2 : 3$,
 $AB \parallel CD$ i $|BC| = 15$, odredimo $|EC|$.



Rješenje: 5.

Trokuti ΔAEB i ΔDEC slični su:

$$\angle AEB = \angle CED; \angle ABE = \angle DCE; \angle EAB = \angle EDC.$$

$$\text{Iz } |AE| : |AD| = 2 : 3 \text{ slijedi } |ED| : |AD| = 1 : 3, |EC| : |BC| = 1 : 3.$$

$$\text{Dobivamo } |EC| = \frac{1}{3} |BC| = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5.$$

Primjer 13.

Odredimo vrijednosti kutova α , β i γ sa slike
ako je kut $\angle BSC = 90^\circ$.

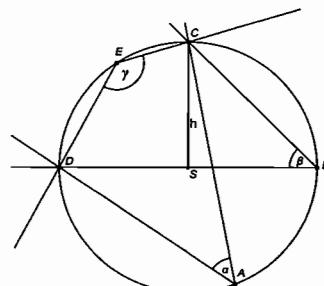
Rješenje:

$$\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ \text{ i } \gamma = 135^\circ$$

Prema poučku o obodnomu i središnjem
kutu, kutovi α i β imaju jednak kutnu mjeru,
a γ je njima suplementaran. Iz $\angle BSC = 90^\circ$
slijedi $\beta = 45^\circ$ dobivamo:

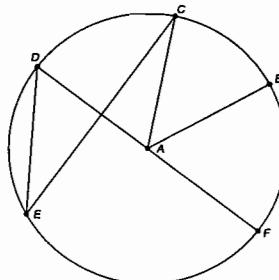
$$\alpha = \beta = 45^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \beta = 135^\circ.$$

**Primjer 14.**

Povežimo nazive dijelova kruga s odgovarajućom oznakom na slici.

\overline{AF}	- tetiva
\overline{EC}	- polumjer (radijus)
\overline{DF}	- promjer (dijametar)
$\angle CAD$	- obodni kut
$\angle CED$	- središnji kut



Rješenje:

\overline{AF}	- tetiva
\overline{EC}	- polumjer (radijus)
\overline{DF}	- promjer (dijametar)
$\angle CAD$	- obodni kut
$\angle CED$	- središnji kut

Primjer 15.

U pravokutnom je trapezu kraća osnovica (c) sukladna kraćem kraku. Šiljasti kut trapeza
iznosi 30° , a duljina kraće dijagonale $8\sqrt{2}$ cm. Odredimo površinu trapeza i duljinu duljeg
kraka.

Rješenje:

$$P = 32(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2, b = 16 \text{ cm}$$

$$c = d$$

$$e = 8\sqrt{2}$$

$e = d\sqrt{2}$ (e можемо проматрати као дјагоналу квадрата странице d)

$$d = \frac{e}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8$$

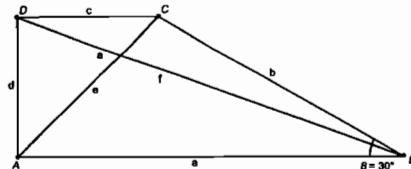
$$c = d = 8$$

$$\sin 30^\circ = \frac{8}{b} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 16 \text{ cm}$$

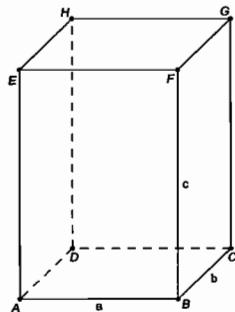
$$(a - c)^2 = b^2 - d^2 \quad \Rightarrow \quad a - c = \sqrt{b^2 - d^2} = \sqrt{16^2 - 8^2} = \sqrt{256 - 64} = 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$a = c + 8\sqrt{3} = 8 + 8\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{8+8\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 32(2+\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$



Odnosi među geometrijskim objektima u prostoru



Napomena:

U svim zadatcima u kojima se spominje kvadar $ABCDEFGH$, primjenjivati skicu kvadra sa slike lijevo.

Zadatci višestrukog izbora

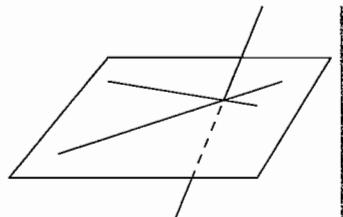
Primjer 1. ►

Koja je od navedenih tvrdnji istinita?

- A) Svi su pravci sadržani u ravnini.
 - B) Ravnina sadržava jedan od tri prikazana pravca.
 - C) Na slici su tri konkurentna pravca.
 - D) Na slici su tri komplanarna pravca.

Rješenje: C.

Istinita je tvrdnja pod C. Pravci su konkurentni, tj. sva tri pravca prolaze istom točkom.



Visiting (A)

Primjer 2. ▶

Bilo koje tri točke u prostoru:

- A) komplanarne su, B) konkurentne su, C) kolinearne su, D) paralelne su.

Rješenje: A.

Za svake tri točke postoji ravnina koja ih sadržava, a za točke koje leže u istoj ravnini kažemo da su komplanarne.

viša razina (A)

Primjer 3. ▶

Tri kolinearne točke određuju:

- A) ravninu, B) kut, C) pravac, D) prostor.

Rješenje: C.

viša razina (A)

Primjer 4. ▶

Koja od navedenih tvrdnji nije istinita? Dvije ravnine koje sadržavaju dva usporedna pravca mogu biti:

- A) usporedne,
B) sjeći se u nekom trećem pravcu koji je usporedan sa zadanim prvcima,
C) sjeći se u nekom trećem pravcu koji siječe zadane pravce,
D) okomite.

Rješenje: C.

viša razina (A)

Primjer 5. ▶

Pravci koji leže u paralelnim ravninama mogu biti:

- A) okomiti, B) komplanarni, C) konkurentni, D) usporedni.

Rješenje: D.

Samo za odgovor D pravci ne moraju biti sadržani u istoj ravnini, dok je za ostala tri ponuđena odgovora nužno da pravci pripadaju istoj ravnini.

viša razina (A)

Primjer 6. ▶

Svaka su dva konkurentna pravca:

- A) komplanarna, B) kolinearna, C) paralelna, D) mimosmjerna.

Rješenje: A.

Pravci su konkurentni ako prolaze istom točkom, a da bi to bilo moguće, moraju pripadati istoj ravnini (biti komplanarni).

viša razina (A)

Primjer 7. ▶

U presjeku ravnine kroz točke A , D i F i kvadra $ABCDEFGH$ nalazi se:

- A) trokut, B) kvadrat, C) pravokutnik, D) šesterokut.

Rješenje: C.

Ravnina koja sadržava tri vrha (A , D i F) kvadra sadržava i vrh G , a lik $AFGD$ je pravokutnik.

viša razina (A)

Primjer 8. ▶

Pravac CE ravninu ABD :

- A) probada, B) ne dodiruje, C) sadržan je u ravnini, D) usporedan je s ravninom.

Rješenje: A.

Kako je točka C jedina točka koja pripada pravcu CE , ali i ravnini ABD , ona je probodiste pravca i ravnine. Dakle, pravac CE probada ravninu ABD .

viša razina (A)

► Primjer 9. ►

Orthogonalna projekcija izvodnice uspravnog stošca na njegovu kružnu osnovku jest:
A) točka, B) promjer osnovke, C) polumjer osnovke, D) kružni luk.

Rješenje: C.

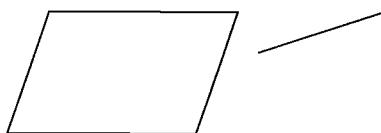
Odredimo li ortogonalne projekcije rubnih točaka izvodnice uspravnog stošca, vrh će se preslikati u središte osnovke, a točka koja je bila na osnovki ostaje na svome mjestu. Spojimo li te dvije točke, dobit ćemo polumjer osnovke.

viša razina (A)

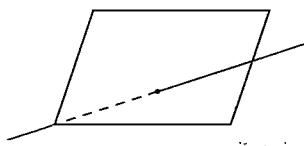
Zadatci kratkih odgovora

► Primjer 1. ►

Skiciraj probodište danog pravca i ravnine.



Rješenje:



viša razina (A)

► Primjer 2. ►

Ako je duljina brida osnovke pravilne uspravne trostrane piramide 5 cm, kolika je duljina ortogonalne projekcije bočnog brida na ravninu osnovke?

Rješenje: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

Orthogonalna projekcija bočnog brida bit će jednaka udaljenosti bilo kojega vrha osnovke od njezina težišta. Budući da je osnovka piramide jednakostaničan trokut, ta je udaljenost jednaka $\frac{2}{3}$ visine osnovke (u jednakostaničnom se trokutu težišnica i visina povučene iz istog vrha podudaraju).

$$d = \frac{2}{3} v_B = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{za } a = 5: \quad d = \frac{2}{3} v_B = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

viša razina (A)

► Primjer 3. ►

Točka A je od ravnine π udaljena za 17 cm, a točka B za 10 cm (A i B se nalaze s iste strane ravnine). Odredimo duljinu ortogonalne projekcije dužine \overline{AB} na ravninu π ako je $|\overline{AB}| = 13$ cm.

Rješenje: 10.95

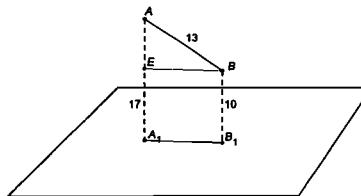
Promotrimo trokut ΔAEB na slici.

$$A_1B_1 \cong EB \Rightarrow |A_1B_1| = |EB|$$

$$|AE| = |AA_1| - |EA_1| = 17 - 10 = 7 \text{ cm}$$

Prema Pitagorinu poučku,

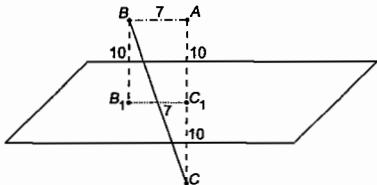
$$|A_1B_1| = \sqrt{13^2 - 7^2} = 2\sqrt{30} \approx 10.95 \text{ cm.}$$



viša razina (A)

► Primjer 4.

Kolika je udaljenost točaka B i C ako je duljina ortogonalne projekcije njihove spojnica na ravninu π $|B_1C_1| = 7$ cm, a obje su točke udaljene od ravnine π za 10 cm, ali se nalaze na suprotnim stranama s obzirom na ravninu?



viša razina (A)

Rješenje: 21.19 cm

Promatrajmo pravokutan trokut ΔABC . Tražena udaljenost jednaka je duljini hipotenuze BC , tj. $|BC| = \sqrt{(2 \cdot 10)^2 + 7^2} = \sqrt{449} \approx 21.19$ cm.

► Primjer 5.

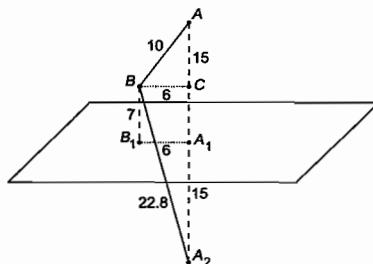
Ako je točka A udaljena od ravnine π 15 cm, a točka B 7 cm, odredimo duljinu dužine AB . Duljina njezine ortogonalne projekcije iznosi $|A_1B_1| = 6$ cm.

Rješenje:

Zadatak ima dva rješenja: 10 cm i 22.8 cm. Moguća su dva rješenja jer nije navedeno jesu li točke A i B s iste ili sa suprotnih strana ravnine π . Na slici možemo vidjeti grafičko rješenje. Dakle, moramo promatrati dva pravokutna trokuta: ΔABC i ΔCBA_2 .

$$|AB| = \sqrt{(15-7)^2 + 6^2} = 10 \text{ cm}$$

$$|AB_2| = \sqrt{(15+7)^2 + 6^2} = 2\sqrt{130} \approx 22.8 \text{ cm}$$



viša razina (A)

► Primjer 6.

Neka pravac AB probada ravninu π pod kutom od 30° . Odredimo udaljenost točaka A i B ako je duljina njihove ortogonalne projekcije na ravninu π jednaka $4\sqrt{3}$.

Rješenje: 8 cm

Ako podatke iz zadatka prikažemo na skici tako da je jedna od točaka pravca u probođisu, možemo uočiti pravokutan trokut ΔAB_1B , koji ima kuteve 30° , 60° i 90° . Za taj je trokut specifično da je on polovina jednakostraničnog trokuta, te mu je hipotenuza dvostruko veća od kraće katete. Ortogonalna

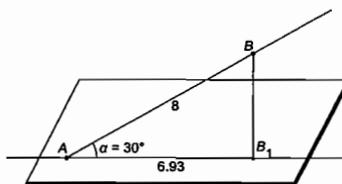
je projekcija jednaka $\frac{|AB|\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{|AB|\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \Rightarrow |AB| = 8.$$

Izračun možemo napraviti i tako da $|AB|$ označimo sa x , pri čemu je $|B_1B| = \frac{x}{2}$:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (4\sqrt{3})^2 \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + 48 \mid \cdot 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 192 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8.$$



viša razina (A)

Prizma, piramida, valjak, stožac, kugla

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Oplošje kocke čiji je obujam 216 cm^3 iznosi:

- B) 144 cm^2 , B) 216 cm^2 , C) 36 cm^2 , D) 16 cm^2 .

Rješenje: B.

$$V = 216 \text{ cm}^3$$

$$O = ?$$

$$V = a^3$$

$$a^3 = 216 \Rightarrow a = 6 \text{ cm}$$

$$O = 6a^2 = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ cm}^2$$

Primjer 2.

Oplošje kvadra iznosi 214 cm^2 . Kolika je visina toga kvadra ako su mu poznate duljine bridova $a = 6 \text{ cm}$ i $b = 5 \text{ cm}$?

- A) 7 cm B) 8 cm C) 9 cm D) 8.5 cm

Rješenje: A.

$$a = 6 \text{ cm}$$

$$O = 2(ab+ac+bc)$$

$$214 = 60 + 22c$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

$$214 = 2(6 \cdot 5 + 6 \cdot c + 5 \cdot c)$$

$$22c = 154$$

$$O = 214 \text{ cm}^2$$

$$214 = 2(30 + 11c)$$

$$c = 7 \text{ cm}$$

$$c = ?$$

Primjer 3.

Koliko iznosi obujam kocke koja ima oplošje jednako oplošju kvadra dimenzija: $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ i $c = 6 \text{ cm}$?

- A) 54 cm^3 B) $54\sqrt{2} \text{ cm}^3$ C) $54\sqrt{8} \text{ cm}^3$ D) 72 cm^3

Rješenje: B.

Označit ćemo duljinu brida kocke s a_1 .

$$O_{\text{kocke}} = O_{\text{kvadra}}$$

$$2(ab + ac + bc) = 6a_1^2 \Rightarrow a_1^2 = \frac{2(ab + ac + bc)}{6} = \frac{ab + ac + bc}{3}$$

$$a = 4 \text{ cm}$$

$$b = 3 \text{ cm}$$

$$c = 6 \text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{ab + ac + bc}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6}{3}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$V_{\text{kocke}} = ?$$

$$V_{\text{kocke}} = a_1^3 = (3\sqrt{2})^3 = 27\sqrt{8} = 54\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Primjer 4.

Ako je duljina prostorne dijagonale kocke $7\sqrt{3} \text{ cm}$, koliki joj je obujam?

- A) 189 cm^3 B) $343\sqrt{3} \text{ cm}^3$ C) $49\sqrt{3} \text{ cm}^3$ D) 343 cm^3

Rješenje: D.

$$D = 7\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$V = ?$$

$$D = a\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} = 7\sqrt{3} \Rightarrow a = 7 \text{ cm} \Rightarrow V = a^3 = 7^3 = 343 \text{ cm}^3$$

Primjer 5.

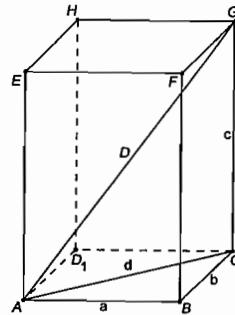
Odredimo površinu lika koji zatvaraju prostorna dijagonala kvadra, dijagonala osnovke i bočni brid kvadra ako su duljine bridova $a = 5 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$ i $c = 9 \text{ cm}$.

- A) 38.71 cm^2 B) 315 cm^2 C) 157.5 cm^2 D) 77.42 cm^2

Rješenje: A.

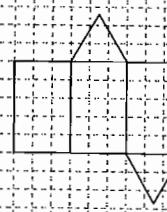
Skica će nam pomoći da vidimo kako je riječ o pravokutnom trokutu kojemu su katete dijagonala osnovke i bočni brid, a hipotenaza prostorna dijagonala kvadra.

$$P = \frac{d \cdot c}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot c}{2} = \frac{\sqrt{5^2 + 7^2} \cdot 9}{2} = \frac{9\sqrt{74}}{2} \approx 38.71 \text{ cm}^2.$$

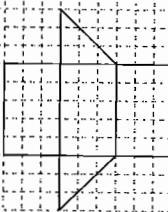
**Primjer 6.**

Koja je od ponuđenih mreža u koordinatnoj ravnini mreža uspravne pravilne trostrane prizme kojoj je duljina osnovnog brida 3 cm , a visina 5 cm ?

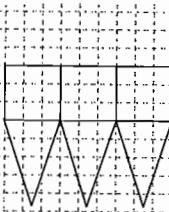
A)



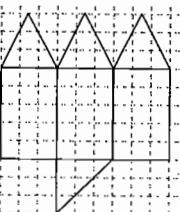
B)



C)



D)



Rješenje: A.

Primjer 7.

Odredimo obujam piramide ako je osnovka pravokutan trokut. Duljine kateta trokuta su 4 cm i 1.5 cm , a visina piramide je 7 cm .

- A) 6 cm^3 B) 7 cm^3 C) 8 cm^3 D) 9 cm^3

Rješenje: B.

$$a = 4 \text{ cm}$$

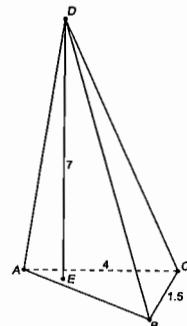
$$b = 1.5 \text{ cm}$$

$$h = 7 \text{ cm}$$

$$V = ?$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h; \quad B = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{a \cdot b}{2} \cdot h = \frac{4 \cdot 1.5 \cdot 7}{6} = 7 \text{ cm}^3$$

**Primjer 8.**

Koliki je polujmer kugle kojoj je obujam $288\pi \text{ cm}^3$?

- A) 7 cm B) 8 cm C) 6 cm D) 9 cm

Rješenje: C.

$$V = 288\pi \text{ cm}^3$$

$$R = ?$$

$$V = \frac{4}{3} R^3 \pi \quad \Rightarrow \quad R^3 = \frac{3V}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 288\pi}{4\pi}} = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ cm}$$

Primjer 9.

Pravilna četverostrana piramida ima oplošje koje je brojčano četiri puta veće od površine osnovke piramide. Omjer duljine osnovnog brida i oplošja piramide iznosi:

- A) $\frac{1}{4}$, B) $\frac{1}{4}a$, C) $4a$, D) $\frac{1}{4a}$.

Rješenje: D.

$$O = 4B \quad \Rightarrow \quad O = 4 \cdot a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{O} = \frac{1}{4a}.$$

Primjer 10. ►►

Odredimo obujam pravilne uspravne četverostrane piramide ako joj je visina 12 cm, a kut koji zatvara bočni brid s ravninom osnovke ima mjeru 62° . Rezultat zaokružimo na cijeli broj.

- A) 300 cm^3 B) 326 cm^3 C) 342 cm^3 D) 320 cm^3

Rješenje: B.

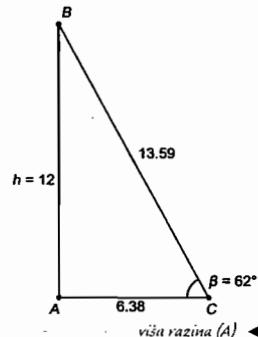
Iz skice karakterističnog trokuta možemo odrediti osnovni i bočni brid. U navedenom zadatku to je pravokutan trokut kojem je hipotenuza bočni brid, jedna kateta visina piramide, a druga kateta polovina dijagonale osnovke.

$$d = a\sqrt{2} \quad \frac{d}{2} = |AC| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2 \cdot |AC|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \cdot |AC|$$

$$\operatorname{tg} 62^\circ = \frac{h}{|AC|} \quad \Rightarrow \quad |AC| = \frac{h}{\operatorname{tg} 62^\circ} = \frac{12}{\operatorname{tg} 62^\circ} = 6.3805$$

$$a = \sqrt{2} \cdot |AC| = \sqrt{2} \cdot 6.389 = 9.0234 \text{ cm.}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9.0234^2 \cdot 12 = 326 \text{ cm}^3$$



Primjer 11. ►►

Pravilna uspravna šesterostранa prizma visine 4 cm i duljine osnovnog brida 3 cm presečena je ravninom koja prolazi duljom dijagonalom jedne osnovke i bridom druge. Površina presjeka prizme i ravnine zaokružena na jednu decimalnu iznosi:

- A) 12 cm^2 , B) 21.4 cm^2 , C) 21.5 cm^2 , D) 12.5 cm^2 .

Rješenje: C.

Presjek ravnine i prizme jednakokračni je trapez kojemu je jedna osnovica dulja dijagonala osnovke (\overline{AD}), a druga osnovni brid prizme (\overline{HI}). Krak trapeza je dijagonala pobočke (\overline{AH}).

$$a = 3 \text{ cm}$$

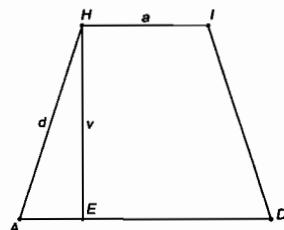
$$h = 4 \text{ cm}$$

$$P = ?$$

$$|AD| = 2a = 6 \text{ cm}, \quad |AH| = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm},$$

$$|HI| = 3 \text{ cm},$$

$$v = \sqrt{|AH|^2 - |AE|^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}, \quad P = \frac{|AD| + |HI|}{2} \cdot v = \frac{6+3}{2} \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{9\sqrt{91}}{4} \approx 21.46 \text{ cm}^2.$$



► Primjer 12. ►►

Površina osnovke uspravnog stošca je $676\pi \text{ cm}^2$, a visina stošca 60 cm. Polegnemo li stožac tako da mu izvodnica dodiruje horizontalnu podlogu, tada je najviša točka stošca udaljena od te podloge za:

- A) 47.7 cm, B) 52 cm, C) 50.6 cm, D) 45.5 cm.

Rješenje: A.

Promatramo jednakokračan trokut ΔABV , te vidimo da je tražena udaljenost visina trokuta iz vrha A na krak (izvodnicu stošca).

$$B = 676\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow r^2\pi = 676\pi \Rightarrow r^2 = 676 \Rightarrow r = 26 \text{ cm}$$

$$\underline{h = 60 \text{ cm}}$$

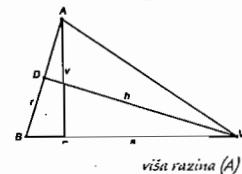
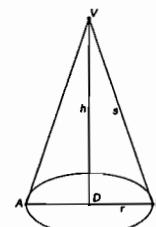
$$v = ?$$

Izjednačimo li formule za površinu trokuta

$$P = \frac{2r \cdot h}{2} \quad i \quad P = \frac{s \cdot v}{2} \Rightarrow 2r \cdot h = s \cdot v \Rightarrow v = \frac{2r \cdot h}{s}$$

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{26^2 + 60^2} = \sqrt{4276} \approx 65.39$$

$$v = \frac{2 \cdot 26 \cdot 60}{65.39} = 47.71 \text{ cm.}$$



► Primjer 13. ►►

Valjku obujma $80\pi \text{ cm}^3$ i visine 5 cm, povećamo polumjer za 2 cm. Koliko je oplošje novoga valjka?

- A) $19\pi \text{ cm}^2$ B) 195 cm^2 C) $132\pi \text{ cm}^2$ D) 192 cm^2

Rješenje: C.

$$V_1 = 80\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow r^2\pi \cdot h = 80\pi \Rightarrow r^2 \cdot 5 = 80 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4 \text{ cm}$$

$$h = 5 \text{ cm}$$

$$\underline{r_2 = r_1 + 2} \Rightarrow r_2 = 6 \text{ cm}$$

$$O_2 = ?$$

$$O_2 = 2B + P = 2 \cdot r_2^2\pi + 2 \cdot r_2\pi \cdot h = 2 \cdot 36\pi + 12\pi \cdot 5 = 132\pi \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

► Primjer 14. ►►

Ako valjak promjera osnovke 10 cm i visine 12 cm presječemo ravnninom okomitom na osnovku valjka tako da ga ravnina raspolažlja, koliko je oplošje novog tijela?

- A) 267 cm^2 B) 1171 cm^2 C) 466 cm^2 D) 387 cm^2

Rješenje: D.

$$O = 2r \cdot h + r^2\pi + r \cdot \pi \cdot h = 120 + 25\pi + 60\pi = 120 + 85\pi \approx 387 \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1.

Obujam kocke čije je oplošje 150 cm^2 iznosi: _____

Rješenje: 125 cm^3

$$\underline{O = 150 \text{ cm}^2}$$

$$V = ?$$

$$O = 6a^2 \Rightarrow 6a^2 = 150 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \text{ cm} \Rightarrow V = a^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$$

Primjer 2.

Obujam kvadra iznosi 270 cm^3 . Kolika je visina kvadra ako su mu poznate duljine $a = 6 \text{ cm}$ i $b = 5 \text{ cm}$?

Rješenje: 9 cm

$$a = 6 \text{ cm}$$

$$b = 5 \text{ cm}$$

$$\underline{V = 270 \text{ cm}^3}$$

$$c = ?$$

$$V = abc$$

$$270 = 6 \cdot 5 \cdot c,$$

$$270 = 30c,$$

$$c = 9 \text{ cm}$$

Primjer 4.

Ako je duljina prostorne dijagonale kocke $12\sqrt{3} \text{ cm}$, koliki joj je obujam?

Rješenje: $1\,728 \text{ cm}^3$

$$D = 12\sqrt{3}$$

$$V = ?$$

$$D = a\sqrt{3}$$

$$a\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$a = 12 \text{ cm}$$

$$V = a^3 = 12^3 = 1\,728 \text{ cm}^3$$

Primjer 3.

Koliko je oplošje kocke koja ima obujam jednak obujmu kvadra dimenzija $a = 4 \text{ cm}$, $b = 9 \text{ cm}$ i $c = 6 \text{ cm}$?

Rješenje: 216 cm^2

Označit ćemo duljinu brida kocke s a_1 .

$$V_{\text{kocke}} = V_{\text{kvadra}}$$

$$a = 4 \text{ cm}$$

$$b = 9 \text{ cm}$$

$$\underline{c = 6 \text{ cm}}$$

$$O_{\text{kocke}} = ?$$

$$abc = a_1^3$$

$$a_1^3 = 4 \cdot 9 \cdot 6 = 216 \text{ cm}^3$$

$$a_1 = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ cm}$$

$$O_{\text{kocke}} = 6a_1^2 = 6 \cdot 6^2 = 216 \text{ cm}^2.$$

Primjer 5.

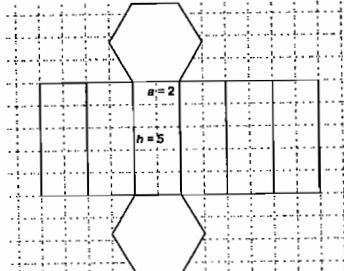
Odredimo površinu četverokuta koji čine dva brida i dvije usporedne dijagonale strana kocke ako je duljina brida kocke 20 cm .

Rješenje: 565.69 cm^2

Usporedne dijagonale strana kocke povezuju bridovi, pa je dobiveni lik pravokutnik. Jedna stranica pravokutnika je brid kocke, a druga je stranica dijagonala kocke.

$$P = a \cdot d = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = 20^2 \cdot \sqrt{2}$$

$$P = 565 \text{ cm}^2$$

**Primjer 6.**

U koordinatnoj ravnini skiciraj mrežu uspravne pravilne šesterostrane prizme kojoj je duljina osnovnog brida 2 cm , a visina 5 cm .

Rješenje:

Primjer 7.

Odredimo obujam piramide ako joj je osnovka jednakokračan trokut. Kraci trokuta imaju duljine 4 cm , a duljina osnovice je 1.5 cm . Visina piramide je 7 cm .

Rješenje: 6.88 cm^3

$$a = 1.5 \text{ cm}$$

$$b = 4 \text{ cm}$$

$$\underline{h = 7 \text{ cm}}$$

$$V = ?$$

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h; \quad B = \frac{a \cdot v_a}{2}; \quad v_a = \sqrt{4^2 - \left(\frac{1.5}{2}\right)^2} \approx 3.93 \text{ cm}.$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot h = \frac{1.5 \cdot 3.93 \cdot 7}{6} = 6.88 \text{ cm}^3$$

Primjer 8.

Koliki polujer ima kugla kojoj je obujam $2304\pi \text{ cm}^3$?

Rješenje: 12 cm

$$V = 2304\pi \text{ cm}^3$$

$R = ?$

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi \Rightarrow R^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2304\pi}{4\pi}} = \sqrt[3]{1728} = 12 \text{ cm}$$

Primjer 10.

Odredimo obujam pravilne uspravne četverostrane piramide ako joj je visina 20 cm, a kut koji zatvara pobočka s ravniom osnovke ima mjeru 50° .

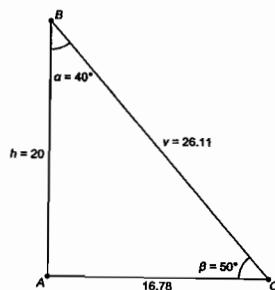
Rješenje: 7510.28 cm^3

Iz skice karakterističnog trokuta možemo odrediti osnovni i bočni brid. U ovom zadatku to je pravokutan trokut kojemu je hipotenuza visina pobočke, jedna kateta je visina piramide, a druga je kateta polovina osnovnoga brida.

$$\frac{a}{2} = |AC| \Rightarrow a = 2 \cdot |AC| = 2 \cdot 16.78 \approx 33.564 \text{ cm}$$

$$\tan 50^\circ = \frac{h}{|AC|} \Rightarrow |AC| = \frac{h}{\tan 50^\circ} = \frac{20}{\tan 50^\circ} = 16.782$$

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h = \frac{1}{3}a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 33.564^2 \cdot 20 = 7510.278 \text{ cm}^3$$

**Primjer 11.**

Pravilna uspravna šesterostранa prizma visine 14 cm i duljine osnovnog brida 5 cm prešječena je ravninom koja prolazi duljom dijagonalom jedne osnovke i bridom druge. Površina presjeka zaokružena na jednu decimalu jest: _____

Rješenje: 109.9 cm^2

Presjek ravnine i prizme jednakokračan je trapez kojemu je jedna osnovica dulja dijagonala osnovke (d), a druga osnovni brid prizme (a). Krak trapeza dijagonala je pobočke (d_1).

$$a = 5 \text{ cm}$$

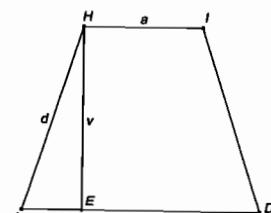
$$h = 14 \text{ cm}$$

$$P = ?$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{5^2 + 14^2} = 14.866 \text{ cm}$$

$$v = \sqrt{d_1^2 - \left(\frac{2a - a}{2}\right)^2} = \sqrt{14.866^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 14.65 \text{ cm}$$

$$P = \frac{10+5}{2} \cdot v = \frac{15}{2} \cdot 14.65 \approx 109.9 \text{ cm}^2.$$



visiti razinu (A)

Primjer 12.

Površina osnovke uspravnog stošca je $361\pi \text{ cm}^2$, a visina stošca 30 cm. Polegnemo li stožac tako da mu izvodnica dodiruje horizontalnu podlogu, onda je najviša točka stošca udaljena od te podloge za: _____

Rješenje: 32.1 cm

Promotrimo li jednakokračan trokut ΔABV , vidjet ćemo da je tražena udaljenost jednaka duljini visine trokuta iz vrha A na krak (izvodnicu stošca).

$$B = 361\pi \text{ cm}^2 \Rightarrow r^2\pi = 361\pi \Rightarrow r^2 = 361 \Rightarrow r = 19 \text{ cm}$$

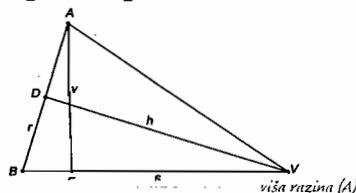
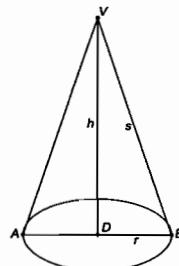
$$\underline{h = 30 \text{ cm}}$$

$$\underline{v = ?}$$

Izjednačimo li formule za površinu trokuta: $P = \frac{2r \cdot h}{2}$ i $P = \frac{s \cdot v}{2}$, dobit ćemo: $2r \cdot h = s \cdot v$, tj. $v = \frac{2r \cdot h}{s}$.

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{19^2 + 30^2} \approx 35.51 \text{ cm}$$

$$\text{Tada je } v = \frac{2 \cdot 19 \cdot 30}{35.51} = 32.1 \text{ cm.}$$

**Primjer 13.**

Valjku obujma $392\pi \text{ cm}^3$ i visine 8 cm povećamo polumjer osnovke za 1 cm. Koliko je oplošje novoga valjka?

Rješenje: $256\pi \text{ cm}^2$

$$V_1 = 392\pi \text{ cm}^3 \Rightarrow r^2\pi \cdot h = 392\pi \Rightarrow r^2 \cdot 8 = 392 \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r = 7 \text{ cm}$$

$$h = 8 \text{ cm}$$

$$\underline{r_2 = r_1 + 1} \Rightarrow r_2 = 8 \text{ cm}$$

$$\underline{O_2 = ?}$$

$$O_2 = 2B + P = 2 \cdot r_2^2\pi + 2 \cdot r_2\pi \cdot h = 2 \cdot 64\pi + 2 \cdot 8\pi \cdot 8 = 256\pi \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

Primjer 14.

Ako valjak promjera 24 cm i visine 16 cm presječemo ravninom okomitom na osnovku valjka tako da ga raspolažlja, koliko je oplošje novog tijela?

Rješenje:

$$1\ 439.58 \text{ cm}^3.$$

$$2r = 24 \text{ cm} \Rightarrow r = 12 \text{ cm}$$

$$\underline{h = 16 \text{ cm}}$$

$$\underline{O = ?}$$

$$O = 2r \cdot h + r^2\pi + r \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot 12 \cdot 16 + 12^2\pi + 12 \cdot 16\pi = 384 + 336\pi$$

$$O = 1\ 439.58 \text{ cm}^3$$

viša razina (A)

Primjer 15.

Pravilna četverostrana piramida kojoj su svi bridovi duljine $\sqrt{5}$ cm ima upisanu kuglu polumjera _____.

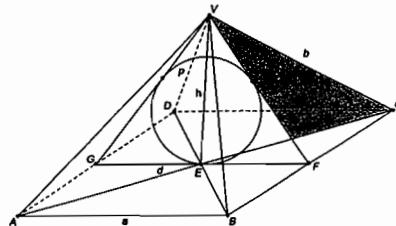
Rješenje: $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{5})$ cm

Na slici uočavamo pravokutne trokute ΔECV i ΔEFV te jednakokračan trokut ΔGFV . Osnovka piramide je kvadrat, a bočni bridovi jednake su duljine kao i osnovni: $a = b = \sqrt{5}$ cm.

Iz ΔECV odredimo visinu piramide:

$$\frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{10}{4}} = \sqrt{\frac{20-10}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$



Vidimo da je trokut ΔEFV jednakokračan jer je visina piramide jednaka polovini osnovnog brida. Duljinu $|VF|$ možemo odrediti iz ovih podataka ili uz pomoć pobočke koja je jednakostraničan trokut:

$$1. \text{ način: } |VF| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$2. \text{ način: } |VF| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Kugla upisana u piramidu imat će polumjer kao kružnica upisana jednakokračnom trokutu ΔGFV , čija je osnovica duljine $\sqrt{5}$ cm, a kraci $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm.

$$\text{Iz } P = r \cdot s \Rightarrow r = \frac{P}{s}$$

$$P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$s = \frac{O}{2} = \frac{\sqrt{5} + 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{5}}{2}$$

$$r = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{15} + \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{2}}{4(\sqrt{15} + \sqrt{5})} = \frac{5\sqrt{2}}{2(\sqrt{15} + \sqrt{5})} \cdot \frac{\sqrt{15} - \sqrt{5}}{\sqrt{15} - \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{2}(\sqrt{15} - \sqrt{5})}{2 \cdot 10} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{5}).$$

viša razina (A)

Primjer 16.

Neka je polumjer kruga 12 cm. Odredite površinu kružnog isječka kojemu je duljina pripadnog kružnog luka 7 cm.

Rješenje: $P = 42 \text{ cm}^2$

l – duljina kružnog luka

α – središnji kut

r – polumjer

P – površina kružnog isječka

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot l}{r\pi}$$

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{r^2\pi \cdot \frac{180 \cdot l}{r\pi}}{360} = \frac{180 \cdot r^2\pi \cdot l}{360 \cdot r \cdot \pi} = \frac{r \cdot l}{2} = \frac{12 \cdot 7}{2} = 42 \text{ cm}^2.$$

viša razina (A)

Primjer 17.

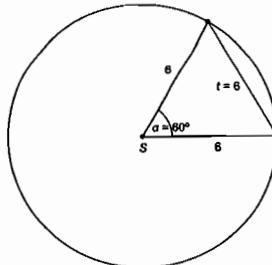
Izračunajte površinu kružnog odsječka koji u krugu promjera 12 cm odsjeca tetiva duljine 6 cm.

Rješenje: $P_o = 6\pi - 9\sqrt{3} \approx 3.26$ cm.

$$P_o = P_i - P_t = \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\pi \cdot 60}{360} - \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

$$P_o \approx 3.26 \text{ cm}$$

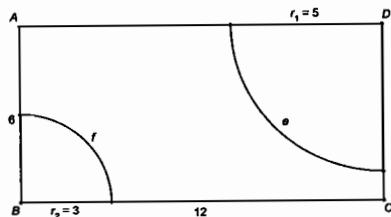
Kako je polumjer kruga jednake duljine kao i zadana tetiva, na skici možemo uočiti jednakostra- ničan trokut duljine stranice 6 cm. Traženu površinu kružnog odsječka možemo odrediti kao razliku površina kružnog isječka i jednakostrašničnoga trokuta. *viša razina (A)*

**Primjer 18.**

Određite opseg i površinu neosjenčanog dijela pravokutnika sa slike, ako su mu duljine stranica $|AB| = 6$ cm, $|BC| = 12$ cm.

Rješenje: $O = 4(5 + \pi) \approx 32.57$ cm;

$$P = 72 - 8.5\pi \text{ cm}^2 \approx 45.296 \text{ cm}^2$$



$$O = 3 + 9 + 1 + 7 + e + f = 20 + \frac{2r_1\pi}{4} + \frac{2r_2\pi}{4} = 20 + \frac{10\pi}{4} + \frac{6\pi}{4} = 20 + 4\pi \approx 32.57 \text{ cm}$$

$$P = 6 \cdot 12 - \frac{r_1^2\pi}{4} - \frac{r_2^2\pi}{4} = 72 - \frac{25\pi}{4} - \frac{9\pi}{4} = 72 - \frac{17\pi}{2} = 72 - 8.5\pi \approx 45.296 \text{ cm}.$$

viša razina (A)

Primjer 19.

Površina kružnog isječka je $\frac{27}{2}\pi \text{ cm}^2$. Izračunaj opseg kruga ako se duljina luka i polumjer odnose kao $\pi : 3$.

Rješenje: $O = 18\pi \text{ cm}$.

$$\left. \begin{array}{l} l:r = \pi:3 \Rightarrow 3 \cdot l = r \cdot \pi \Rightarrow l = \frac{r\pi}{3} \\ l = \frac{r\pi\alpha}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot l}{r\pi} \\ P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{r^2\pi \cdot \frac{180 \cdot l}{r\pi}}{360} = \frac{r \cdot l}{2} \Rightarrow l = \frac{2P}{r} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{r\pi}{3} = \frac{2P}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{6P}{\pi} = \frac{6 \cdot \frac{27}{2}\pi}{\pi} = 81 \text{ cm}^2 \\ r = 9 \text{ cm} \\ O = 2r\pi = 18\pi \text{ cm} \end{array}$$

viša razina (A)

Primjer 20.

Ako kružnom isječku površine $112\pi \text{ cm}^2$ povećamo pripadajući polumjer 1.5 puta, za koliko će se povećati duljina pripadajućeg kružnog luka?

Rješenje:

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot l}{r\pi} \quad P = \frac{r^2\pi\alpha}{360} = \frac{r^2\pi \cdot \frac{180 \cdot l}{r\pi}}{360} = \frac{180 \cdot r^2\pi \cdot l}{360 \cdot r \cdot \pi} = \frac{r \cdot l}{2} \Rightarrow l = \frac{2P}{r}$$

viša razina (A)

• 4.2. Trigonometrija •

Trigonometrija pravokutnoga trokuta

Zadatci višestrukog izbora

► Primjer 1. ►»

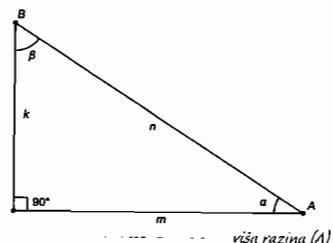
U trokutu na slici duljinu stranice m možemo izraziti kao:

- A) $m = n \cdot \sin \beta$, B) $m = n \cdot \sin \alpha$, C) $m = n \cdot \tan \beta$, D) $m = n \cdot \cot \beta$.

Rješenje: A.

Budući da je m kateta, a n hipotenuza danog trokuta, te dvije veličine mogu biti povezane funkcijama sinus ili kosinus. Kako u ponuđenim odgovorima imamo samo funkciju sinus, moramo uočiti da je kateta m nasuprot kutu β :

$$\sin \beta = \frac{m}{n} \Rightarrow m = n \sin \beta.$$



► Primjer 2. ►»

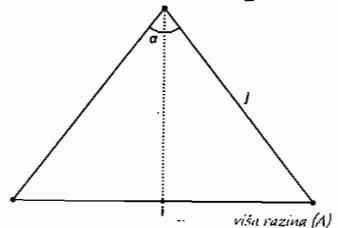
Kako bismo odredili duljinu osnovice jednakokračnog trokuta sa slike ako znamo duljinu kraka j i mjeru kuta α nasuprot osnovici?

- A) $i = j \sin \frac{\alpha}{2}$ B) $i = j \sin \alpha$ C) $i = j \cos \alpha$ D) $i = 2j \sin \frac{\alpha}{2}$

Rješenje: D.

Uočimo pravokutan trokut kojemu je poznat kut $\frac{\alpha}{2}$ i hipotenuza j , a njegova kateta polovina je osnovice.

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{i}{j} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{i}{2j} \Rightarrow i = 2j \sin \frac{\alpha}{2}$$



► Primjer 3. ►»

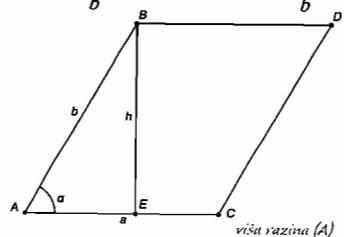
Kako bismo odredili šiljasti kut (α) paralelograma ako su mu poznati duljina stranice b i visina na stranicu a (h)?

- A) $\alpha = \arcsin \frac{b}{h}$ B) $\alpha = \arccos \frac{b}{h}$ C) $\alpha = \arcsin \frac{h}{b}$ D) $\alpha = \arccos \frac{h}{b}$

Rješenje: C.

Uočimo pravokutan trokut kojemu su zadani podaci iz zadatka, te tražimo trigonometrijsku funkciju koja povezuje poznate duljine sa traženim kutom.

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{h}{b}$$



► Primjer 4. ►

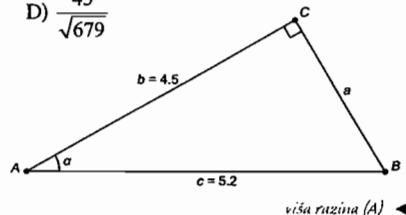
U trokutu na slici odredimo vrijednost $\tan \alpha$ ako je $|AB| = 5.2$ i $|AC| = 4.5$.

- A) $\frac{\sqrt{679}}{45}$ B) $\frac{45}{52}$ C) $\frac{52}{45}$ D) $\frac{45}{\sqrt{679}}$

Rješenje: A.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5.2^2 - 4.5^2} = \frac{\sqrt{679}}{10}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{679}}{10}}{4.5} = \frac{\sqrt{679}}{45}$$



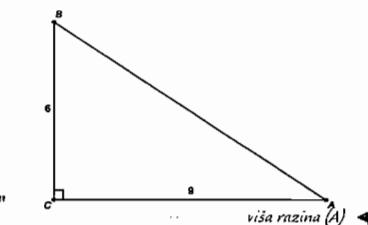
► Primjer 5. ►

Odredimo mjeru kuta pri vrhu A ako je $|AC| = 9$ i $|BC| = 6$.

- A) 0.6667° B) $33^\circ 41' 24''$
C) $0^\circ 40' 0''$ D) $56^\circ 18' 36''$

Rješenje: B.

$$\tan(\angle BAC) = \frac{6}{9} \Rightarrow \angle BAC = \arctg \frac{6}{9} = 33^\circ 41' 24''$$



► Primjer 6. ►

Odredimo opseg pravokutnika ako znamo da mu se dijagonale, čije su duljine $d = 8.4$ cm, sijeku pod kutem od 37° .

- A) 20.3 cm B) 21.3 cm C) 22.3 cm D) 19.3 cm

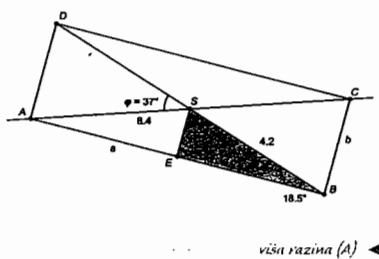
Rješenje: B.

Nacrtamo skicu te uočimo pravokutni trokut ABD (ili njemu sličan trokut EBS), uz pomoć kojega možemo odrediti duljine stranica, a zatim i opseg pravokutnika.

$$\sin 18.5^\circ = \frac{b}{8.4} \Rightarrow b = 8.4 \cdot \sin 18.5^\circ = 2.67$$

$$\cos 18.5^\circ = \frac{a}{8.4} \Rightarrow a = 8.4 \cdot \cos 18.5^\circ = 7.97$$

$$O = 2a + 2b = 2(a + b) = 21.28 \text{ cm}$$



► Primjer 7. ►

Odredimo površinu pravilnog deseterokuta ako je duljina brida njegove osnovke 3 cm.

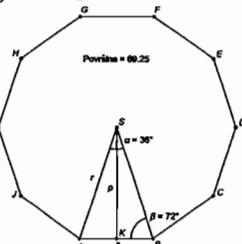
- A) 69.25 cm^2 B) 30 cm^2 C) 90 cm^2 D) 40.5 cm^2

Rješenje: A.

Površinu računamo prema formuli $P = 10 \cdot \frac{a \cdot \rho}{2}$,

u kojoj je a duljina osnovnog brida, a ρ polumjer deseterokutu upisane kružnice. Skiciramo li pravilni deseterokut, uočit ćemo karakteristični jednakokračni trokut kojemu odredimo kut nasuprot osnovice: $\alpha = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$, a kut uz osnovicu:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ, \text{ a kut uz osnovicu:}$$



$\beta = (180^\circ - \alpha) : 2 = 72^\circ$. Nakon toga rješavamo pravokutan i jednakokračan trokut te, na kraju, deseterokut.

$$\operatorname{tg} 72^\circ = \frac{\rho}{\frac{a}{2}} = \frac{2\rho}{a} \Rightarrow \rho = \frac{a \cdot \operatorname{tg} 72^\circ}{2}$$

$$P = 10 \cdot \frac{a \cdot \operatorname{tg} 72^\circ}{2} = \frac{5}{2} a^2 \quad \operatorname{tg} 72^\circ = 69.25 \text{ cm}^2$$

Primjer 8.

Koliki je polujmer kružnice ako znamo da je duljina jedne njezine teticve 4 cm, a pripadni obodni kut 38° ?

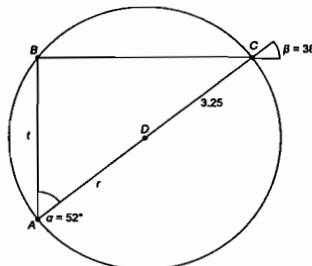
- A) 3.25 cm B) 3 cm C) 2.25 cm D) 2.5 cm

Rješenje: A.

Budući da su svi obodni kutovi nad istim kružnim lukom sukladni, napravimo skicu tako da jedan krak obodnog kuta nad kružnim lukom određenim zadanom teticom prolazi središtem kružnice. Prema Talesovu poučku, dobit ćemo da je ta kružnica opisana dobivenom pravokutnom trokutu, pa je polujmer kružnice jednak polovini duljine hipotenuze dobivenog trokuta.

$$\sin 38^\circ = \frac{t}{2r} \Rightarrow r = \frac{t}{2 \sin 38^\circ} = \frac{4}{2 \sin 38^\circ} = \frac{2}{\sin 38^\circ} = 3.2485 \approx 3.25 \text{ cm}$$

viša razina (A)



Primjer 9.

Odredimo površinu jednakokračnog trokuta sa slike ako znamo da je kut u vrhu A 20° , a visina na krak ima duljinu 3 cm.

- A) 6.5 cm^2 B) 7 cm^2 C) 7.5 cm^2 D) 8 cm^2

Rješenje: B.

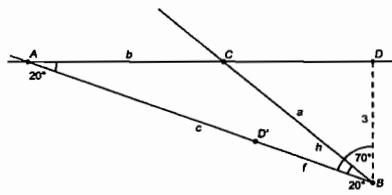
Uočimo pravokutne trokute ABD i CBD . Traženu površinu možemo dobiti kao razliku površina ovih dvaju trokuta: $P(ABC) = P(ABD) - P(CBD)$. Za računanje tih površina najprije trebamo odrediti mjeru kutova u vrhu B, a nakon toga duljine $|AC|$ i $|AD|$. Kako je trokut ABC jednakokračan, dobivamo $\angle ABC = 20^\circ$. Kako je trokut ABD pravokutan, proizlazi da je $\angle ABD = 70^\circ$, iz čega slijedi: $\angle CBD = 50^\circ$.

$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{|AD|}{3} \Rightarrow |AD| = 3 \operatorname{tg} 70^\circ \quad \operatorname{tg} 50^\circ = \frac{|CD|}{3} \Rightarrow |CD| = 3 \operatorname{tg} 50^\circ$$

$$P(ABC) = P(ABD) - P(CBD) = \frac{|AD| \cdot 3}{2} - \frac{|CD| \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}(|AD| - |CD|) = \frac{3}{2}(3 \operatorname{tg} 70^\circ - 3 \operatorname{tg} 50^\circ)$$

$$P(ABC) = \frac{9}{2}(\operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ) = 7 \text{ cm}^2$$

viša razina (B)



► Primjer 10. ►

Izračunajmo obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina osnovnog brida 4 cm, a bočni brid s ravnnom osnovke zatvara kut od 67° .

- A) 21.33 cm^2 B) 64 cm^2
 C) 35.54 cm^2 D) 75.39 cm^2

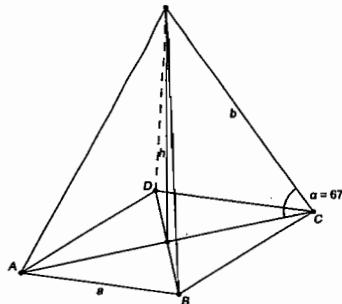
Rješenje: C.

Obujam izračunamo prema formuli

$V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$. Visinu h odredit ćemo iz karakterističnoga pravokutnog trokuta, a rezultat zaokružiti na dvije decimale.

$$\operatorname{tg} 67^\circ = \frac{h}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{2h}{a\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 67^\circ}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 67^\circ}{2} = 2\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 67^\circ \approx 6.66 \text{ cm}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} 67^\circ = 35.5379 \approx 35.54 \text{ cm}^3$$

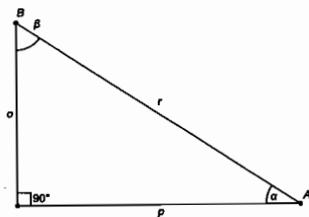


viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

► Primjer 1. ►

U trokutu na slici stranicu o izrazimo uz pomoć stranice p i kuta β .



$$\text{Rješenje: } o = \frac{p}{\operatorname{tg} \beta}; \quad o = p \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

Budući da su o i p katete, one mogu biti povezane funkcijama tangens ili kotangens.

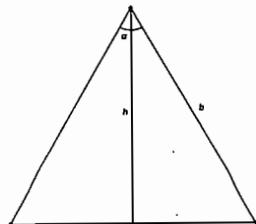
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{p}{o} \Rightarrow o = \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} \quad \text{ili}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{o}{p} \Rightarrow o = p \cdot \operatorname{ctg} \beta$$

viša razina (A)

► Primjer 2. ►

Kako bismo odredili duljinu kraka jednakokračnog trokuta ako znamo duljinu osnovice i mjeru kuta nasuprot njoj?



$$\text{Rješenje: } b = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Uočimo pravokutan trokut kojemu je poznat kut $\frac{\alpha}{2}$ i kateta $\frac{a}{2}$, dok je hipotenuza upravo krak jednakokračnog trokuta:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2b} \Rightarrow b = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

viša razina (A)

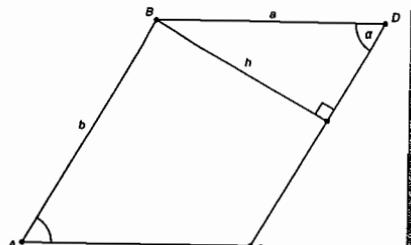
► Primjer 3.

Odredimo šiljasti kut (α) paralelograma ako je poznata duljina njegove stranice $a = 13$ i visina na stranicu b $h_b = 12$?

Rješenje: $\alpha = 67^\circ 22' 48''$

Uočimo pravokutni trokut kojemu su zadani podatci iz zadatka, te tražimo trigonometrijsku funkciju koja povezuje poznate duljine sa traženim kutom.

$$\sin \alpha = \frac{h_b}{a} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{h_b}{a} = 67^\circ 22' 48''$$



vidi razinu (4)

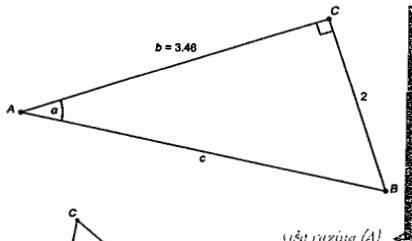
► Primjer 4.

U trokutu na slici odredi vrijednost $\sin \alpha$ ako je $|AC| = 3.46$ i $|BC| = 2$.

Rješenje: $\frac{1}{2}$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3.46^2} = 3.996 \approx 4$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



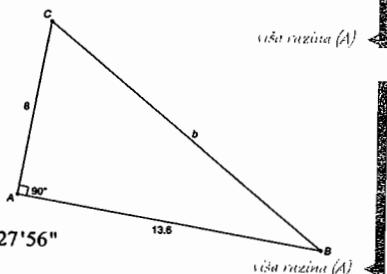
vidi razinu (4)

► Primjer 5.

Odredimo mjeru kuta u vrhu B ako je $|AB| = 13.6$ cm i $|AC| = 8$ cm.

Rješenje: $30^\circ 27' 56''$

$$\operatorname{tg}(\angle CBA) = \frac{8}{13.6} \Rightarrow \angle CBA = \operatorname{arctg} \frac{8}{13.6} = 30^\circ 27' 56''$$



vidi razinu (4)

► Primjer 6.

Odredimo duljinu dijagonale pravokutnika ako znamo da mu je opseg $o = 28$ cm, a kut među dijagonalama $\varphi = 62^\circ$.

Rješenje: 10.2 cm.

Da bismo odredili duljinu dijagonale, najprije ćemo odrediti duljine stranica pravokutnika. Uporabit ćemo formule za opseg i za tangens, te dobiti sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznance.

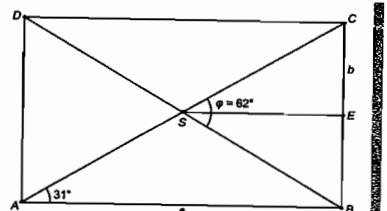
$$O = 2a + 2b = 2(a + b) = 28$$

$$a + b = 14$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = a \cdot \operatorname{tg} 31^\circ$$

$$a + a \cdot \operatorname{tg} 31^\circ = 14 \Rightarrow a(1 + \operatorname{tg} 31^\circ) = 14 \Rightarrow a = \frac{14}{1 + \operatorname{tg} 31^\circ} = 8.745 \text{ cm.}$$

$$b = \frac{14}{1 + \operatorname{tg} 31^\circ} \cdot \operatorname{tg} 31^\circ = 5.255 \text{ cm} \quad d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8.745^2 + 5.255^2} = 10.2 \text{ cm}$$



vidi razinu (4)

► Primjer 7.

Odredimo opseg pravilnom dvanaestokutu opisane kružnici ako je duljina brida njegove osnovice 2 cm.

Rješenje: 24.28 cm

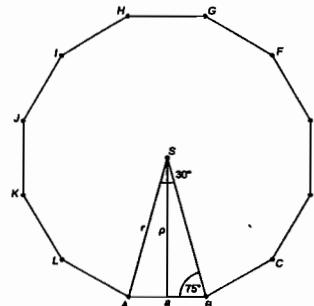
Polumjer opisane kružnice određujemo iz karakterističnoga jednakokračnog trokuta. Kut nasuprot osnovici toga trokuta jest:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ, \text{ a kutovi uz osnovicu jesu:}$$

$$\beta = (180^\circ - \alpha) : 2 = 75^\circ.$$

$$\cos 75^\circ = \frac{a}{r} = \frac{a}{2r} \Rightarrow r = \frac{a}{2 \cos 75^\circ} = \frac{2}{2 \cos 75^\circ} = \frac{1}{\cos 75^\circ} = 3.8637 \approx 3.86 \text{ cm.}$$

$$o = 2r\pi = \frac{2\pi}{\cos 75^\circ} = 24.27636 \approx 24.28 \text{ cm}$$



viša razina (A)

► Primjer 8.

Kolika je površina kruga ako znamo da je duljina jedne njegove teticе 7 cm, a njezin slijedajući središnji kut 106° ?

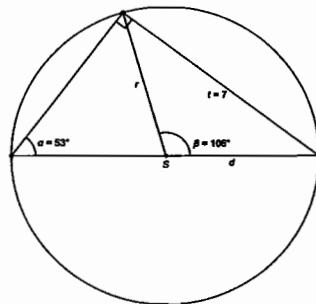
Rješenje: 60.34 cm^2

Zadatak možemo rješavati na više načina. Prvi je uz pomoć jednakokračnog trokuta kojemu je tetiva kružnice osnovica, a polumjeri kružnice kraći. Drugi, kraći način, jest da prodlujimo jedan polumjer i promatramo obodni kut nad istom teticom. Dobiveni je trokut prema Talesovu poučku pravokutan, pa, koristeći se njegovim elementima možemo odrediti traženi polumjer kruga, potom i traženu površinu kruga.

Prema poučku o obodnom i središnjem kutu dobivamo: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 106^\circ$, $\frac{1}{2} = 53^\circ$.

$$\sin 53^\circ = \frac{t}{2r} \Rightarrow r = \frac{t}{2 \sin 53^\circ} = \frac{7}{2 \sin 53^\circ} = 4.382 \approx 4.38 \text{ cm} \quad P = r^2\pi = 60.34 \text{ cm}^2$$

viša razina (A)



► Primjer 9.

Odredimo površinu jednakokračnog trapeza sa slike ako znamo da je kut u vrhu $A = 25^\circ$, krak je duljine 3 cm, a kraća osnovica 5 cm.

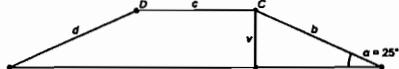
Rješenje: 9.8 cm^2

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v \quad \sin 25^\circ = \frac{v}{b} \Rightarrow v = b \cdot \sin 25^\circ = 3 \cdot \sin 25^\circ = 1.26785 \approx 1.27 \text{ cm}$$

$$\cos 25^\circ = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos 25^\circ = 3 \cdot \cos 25^\circ = 2.7189 \approx 2.72 \text{ cm}$$

$$a = 2x + c = 2 \cdot 2.72 + 5 = 10.4378 \approx 10.44 \text{ cm}$$

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{10.44+5}{2} \cdot 1.27 = 9.8044 \approx 9.8 \text{ cm}^2$$



viša razina (A)

► Primjer 10. ►

Odredimo kut koji izvodnica stošca zatvara s osi stošca ako je oplošje stošca 20 cm^2 , a površina njegova plašta 15 cm^2 .

Rješenje: $19^\circ 28' 16''$

$$O = 20 \text{ cm}^2$$

$$P = 15 \text{ cm}^2 \Rightarrow B = O - P = 5 \text{ cm}^2$$

$$\frac{\alpha}{2} = ?$$

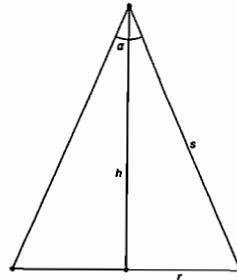
$$O = B + P$$

$$B = r^2\pi$$

$$P = r\pi s \Rightarrow s = \frac{P}{r\pi} \Rightarrow s = \frac{15}{r\pi}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s} = \frac{r}{\frac{15}{r\pi}} = \frac{r^2\pi}{15} = \frac{B}{P} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{1}{3} = 19^\circ 28' 16'' \Rightarrow \alpha = 38^\circ 56' 33''$$

viša razina (č)



Trigonometrija raznostraničnoga trokuta

Zadatci višestrukog izbora

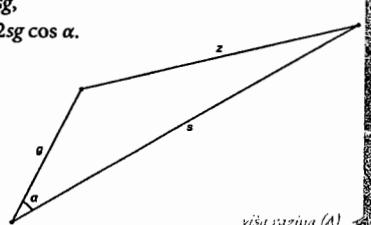
► Primjer 1. ►

Za trokut na slici vrijedi tvrdnja:

- A) $z^2 = s^2 - g^2$, B) $z^2 = s^2 + g^2 - 2sg$,
 C) $z^2 = s^2 + g^2 - 2sg \cos \alpha$, D) $z^2 = y^2 - y^2 + 2sg \cos \alpha$.

Rješenje: C.

Poučak o kosinusu daje nam formulu za izračun stranice trokuta ako je poznat kut nasuprot toj stranici te ostale dvije stranice. Ako taj poučak primijenimo na trokut sa slike, vrijedit će $z^2 = s^2 + g^2 - 2sg \cos \alpha$.



viša razina (A)

► Primjer 2. ►

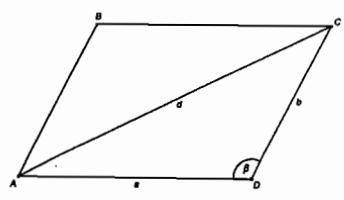
Za kut β paralelograma vrijedi:

- A) $\sin \beta = \frac{b}{d}$, B) $\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}$, C) $\cos \beta = \frac{a}{d}$, D) $\cos \beta = \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ab}$.

Rješenje: B.

Poučak o kosinusu daje nam formulu za izračun bilo kojega kuta trokuta ako su poznate sve tri stranice. Ako taj poučak primijenimo na trokut ADC sa slike, vrijedit će:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}.$$



viša razina (A)

Primjer 3. ►►

Zadan je trokut stranica $a = 12$ cm, $c = 17$ cm i kuta $\gamma = 52^\circ$. Kut β iznosi:
 A) $94^\circ 12' 13''$, B) $44^\circ 54' 3''$, C) $45^\circ 57''$, D) $83^\circ 5' 57''$.

Rješenje: A.

Prema poučku o sinusu, vrijedi:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{a \cdot \sin \gamma}{c} = 33^\circ 47' 47''$$

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (52^\circ + 33^\circ 47' 47'') = 94^\circ 12' 13''.$$

viša razina (A)

Primjer 4. ►►

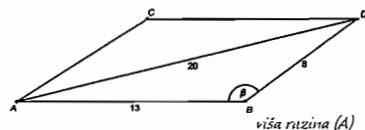
Koliki je veći kut paralelograma ako su duljine njegovih stranica $a = 8$ cm, $b = 13$ cm, a duljina veće dijagonale $e = 20$ cm?

- A) $\beta = 120^\circ 24' 23''$ B) $\beta = 156^\circ 25' 19''$ C) $\beta = 36^\circ 35' 37''$ D) $\beta = 143^\circ 24' 23''$

Rješenje: D.

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} = \frac{8^2 + 13^2 - 20^2}{2 \cdot 8 \cdot 13} = \frac{-167}{208} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 143^\circ 24' 23''$$



viša razina (A)

Primjer 5. ►►

Odredimo površinu kvadrata konstruiranoga nad stranicom a trokuta, kojemu su kutovi $\alpha = 35^\circ 42'$ i $\beta = 75^\circ 15'$, te stranica $c = 25$ cm. Rezultat zaokružimo na cijeli broj.

- A) 222 cm^2 B) 233 cm^2 C) 244 cm^2 D) 255 cm^2

Rješenje: C.

$$\gamma = 180^\circ - (35^\circ 42' + 75^\circ 15') = 69^\circ 3'$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = 15.62 \text{ cm} \Rightarrow a^2 = 15.62^2 \approx 244 \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

Primjer 6. ►►

Odredimo polujmer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice $a = 11$ cm i $b = 18$ cm zatvaraju kut od $68^\circ 30'$.

- A) 9.31 cm B) 8.66 cm C) 10.5 cm D) 9.9 cm

Rješenje: A.

$$a = 11$$

$$b = 18$$

$$\gamma = 68^\circ 30'$$

$$R = ?$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \Rightarrow R = \frac{c}{2 \sin \gamma} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}}{2 \sin \gamma} = 9.31 \text{ cm}.$$

Zadatak se može riješiti "koristeći formulu za površinu trokuta:

$$P = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4P} = \frac{abc}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab \sin \gamma} = \frac{c}{2 \sin \gamma}, \text{ što se svodi na prethodno rješenje.}$$

viša razina (A)

► Primjer 7.

Kolika je površina kruga upisanog trokutu stranice $a = 35$ cm i kutova uz nju $\beta = 62^\circ$ i $\gamma = 55^\circ$?

- A) 497.4 cm^2 B) 299.4 cm^2 C) 305.4 cm^2 D) 311.6 cm^2

Rješenje: B.

$$\begin{aligned} a &= 35 \text{ cm} & \alpha &= 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ \\ \beta &= 62^\circ & \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = 34.68 \text{ cm} \\ \underline{\gamma = 55^\circ} & & \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = 32.18 \text{ cm} \\ P_K &=? \end{aligned}$$

$$P_T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \frac{35+34.68+32.18}{2} = 50.93 \text{ cm}$$

$$P_T = \sqrt{50.93(50.93-35)(50.93-34.68)(50.93-32)} \approx 497.19 \text{ cm}^2$$

$$P_T = rs \Rightarrow r = \frac{P_T}{s} \quad P = rs \Rightarrow r = \frac{497.19}{50.93} = 9.76 \text{ cm}$$

$$P_K = r^2 \cdot \pi \quad P_K = 9.76^2 \pi = 299.4 \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

► Primjer 8.

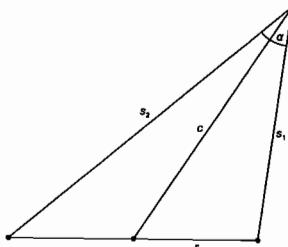
Ako najkraća izvodnica kosog stošca s najdužom izvodnicom toga stošca zatvara kut od 42° , odredimo površinu osnovke stošca. Izvodnice imaju duljine $s_1 = 17$ cm i $s_2 = 27.5$ cm.

- A) 238.88 cm^2 B) 646.92 cm^2
C) 367.11 cm^2 D) 275.23 cm^2

Rješenje: D.

$$2r = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 - 2s_1 s_2 \cos 42^\circ} = 18.72 \text{ cm} \Rightarrow r = 9.36 \text{ cm}$$

$$P = r^2 \cdot \pi \quad P = 9.36^2 \pi = 275.23 \text{ cm}^2$$



viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

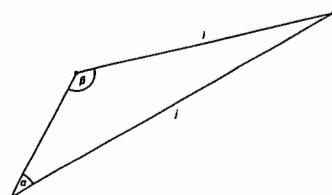
► Primjer 1.

Kako bismo izračunali stranicu i trokuta na slici kada bi bila poznata ostala tri podatka?

Rješenje: $i = \frac{j \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$

Poučak o sinusu daje nam formulu za izračun ostalih elemenata trokuta ako su zadane dvije stranice i kut nasuprot jednoj od njih ili dva kuta i bilo koja stranica. Ako taj poučak primijenimo na trokut sa slike, vrijedit će

$$\frac{i}{\sin \alpha} = \frac{j}{\sin \beta} \Rightarrow i = \frac{j \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}.$$



viša razina (A)

► Primjer 2. ►

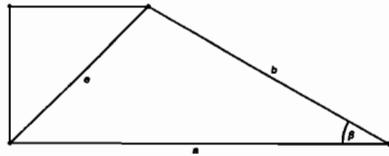
Trapezu na slici treba odrediti duljinu dijagonale ako znamo ostala tri elementa.

Rješenje: $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta}$

Poučak o kosinusu daje nam formulu za izračun ostalih elemenata trokuta ako su zadane dvije stranice i kut između njih. Ako taj poučak primijenimo na trokut sa

slike, vrijedit će $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta \Rightarrow e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta}$.

viša razina (A)



► Primjer 3. ►

Zadan je trokut stranica $b = 5.5$ cm, $c = 4$ cm i kutom $\beta = 53^\circ$. Koliki je kutn α ?

Rješenje: $\alpha = 91^\circ 29' 29''$

Prema poučku o sinusu, vrijedi:

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \beta}{b} \Rightarrow P = rs \Rightarrow r = \frac{497.19}{50.93} = 9.76 \text{ cm}$$

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (53^\circ + 33^\circ 30' 31'') = 91^\circ 29' 29''.$$

viša razina (A)

► Primjer 4. ►

Koliko iznosi manji kut paralelograma ako su duljine njegovih stranica $a = 14$ cm, $b = 9$ cm, a duljina kraće dijagonale $e = 10$ cm?

Rješenje: $45^\circ 22' 54''$

$$a = 14 \text{ cm}$$

$$b = 9 \text{ cm}$$

$$\frac{e = 10 \text{ cm}}{\alpha = ?} \quad \cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab} = \frac{14^2 + 9^2 - 10^2}{2 \cdot 14 \cdot 9} = \frac{59}{84} \Rightarrow \alpha = 45^\circ 22' 54''$$

viša razina (A)

► Primjer 5. ►

Odredimo površinu kvadrata konstruiranoga nad stranicom a trokuta kojemu su kutovi $\gamma = 93^\circ 50'$ i $\beta = 37^\circ 12'$, te stranica $b = 33$ cm. Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.

Rješenje: $1\,695 \text{ cm}^2$

$$\alpha = 180^\circ - (37^\circ 12' + 93^\circ 50') = 48^\circ 58'$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = 41.17 \text{ cm} \Rightarrow a^2 = 41.17^2 \approx 1\,695 \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

► Primjer 6. ►

Odredimo površinu kruga opisanog trokutu ako znamo da stranice $b = 14$ cm i $c = 17$ cm zatvaraju kut od $83^\circ 15'$.

Rješenje: $P = 341.58 \text{ cm}^2$

$$b = 14$$

$$c = 17 \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha} \Rightarrow a = \sqrt{14^2 + 17^2 - 2 \cdot 14 \cdot 17 \cos 83^\circ 15'} = 20.71 \text{ cm}$$

$$\frac{\alpha = 83^\circ 15'}{P = ?} \quad 2R = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{20.71}{2 \cdot \sin 83^\circ 15'} = 10.43 \text{ cm}$$

$$P = R^2 \pi = 341.58 \text{ cm}^2$$

viša razina (A)

► Primjer 7.

Koliki je dijаметар kružnice upisane trokutu stranica $c = 19$ cm i kutova uz nju $\beta = 51^\circ 51'$ i $\alpha = 80^\circ 12'$?

Rješenje: $d = 2 \cdot 5.89 = 11.78$ cm

$$c = 19 \text{ cm}$$

$$\beta = 51^\circ 51'$$

$$\underline{\alpha = 80^\circ 12'}$$

$$d = ?$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 47^\circ 57'$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = 25.21 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha} = 20.12 \text{ cm}$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow s = \frac{25.21 + 20.12 + 19}{2} = 32.165 \text{ cm}$$

$$P = \sqrt{32.165(32.165 - 25.21)(32.165 - 20.12)(32.165 - 19)} \approx 189.56 \text{ cm}^2$$

$$P = rs \Rightarrow r = \frac{P}{s} \quad P = rs \Rightarrow r = \frac{189.56}{32.165} = 5.89 \text{ cm}$$

$$d = 2 \cdot 5.89 = 11.78 \text{ cm.}$$

viša razina (A)

► Primjer 8.

Ako najduža izvodnica kosog stoča $s_2 = 20$ cm s ravninom osnovke zatvara kut od 45° , a najkrća izvodnica stoča ima duljinu $s_1 = 16.5$ cm, odredimo opseg osnovke stoča.

Rješenje: $O = 17.72$ cm ili $O = 71.13$ cm

$$\frac{s_1}{\sin \alpha} = \frac{s_2}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = \frac{s_2 \sin \alpha}{s_1} \Rightarrow \sin \beta = 0.8571 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 58^\circ 59' 31'' \\ \beta_2 = 121^\circ 27'' \end{cases}$$

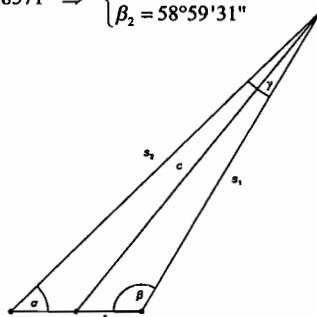
$$\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 13^\circ 59' 33''$$

$$\frac{s_1}{\sin \alpha} = \frac{2r}{\sin \gamma} \Rightarrow 2r = \frac{s_1 \sin \gamma}{\sin \alpha} = 5.64 \text{ cm}$$

$$r = 2.82 \text{ cm}$$

$$O_1 = 2r\pi \quad O_1 = 17.72 \text{ cm}$$

Za $\beta_2 = 121^\circ 27''$ dobiva se $O_2 = 71.13$ cm.



viša razina (A)

• 4.3. Analitička geometrija •

Koordinatni sustav na pravcu i u ravnini

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

U koordinatnom sustavu skicirajmo pravokutnik s vrhovima čije su koordinate $A(3, -4)$, $B(3, 2)$, $C(-2, 2)$ te mu odredimo vrh D . Koordinate vrha D jesu:

- A) $(3, -2)$, B) $(-2, -3)$,
C) $(-2, -4)$, D) $(-4, 3)$.

Rješenje: C.

Primjer 2.

Kolika je površina paralelograma sa slike?

- A) $P = 10$ B) $P = 20$
C) $P = 10\sqrt{5}$ D) $P = 5\sqrt{5}$

Rješenje: B.

Iz koordinatnog se sustava mogu odčitati duljina stranice a i duljina pripadne visine v .

$$a = 5$$

$$v = 4$$

$$P = ? \quad P = a \cdot v = 5 \cdot 4 = 20 \text{ kv. jed.}$$

Primjer 3.

Opseg trokuta sa slike iznosi:

- A) 30, B) $\sqrt{15} + \sqrt{20}$,
C) $\sqrt{17} + \sqrt{13}$, D) $\sqrt{17} + 3\sqrt{13}$.

Rješenje: D.

Opseg trokuta jednak je zbroju duljina stranica:

$$O = a + b + c.$$

Duljine stranica odredit ćemo prema formuli

$$|T_1T_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

$$A(-2, 5)$$

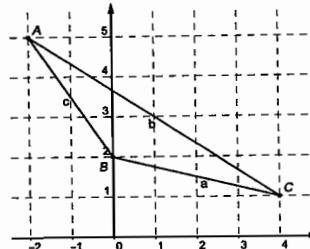
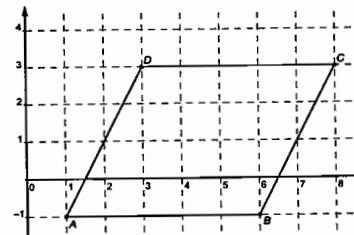
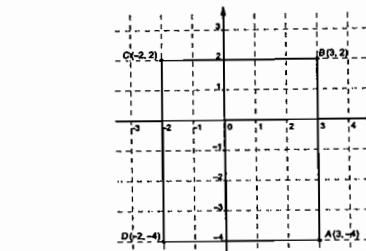
$$B(0, 2)$$

$$C(4, 1)$$

$$a = |BC| = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$b = |AC| = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$O = a + b + c = \sqrt{17} + 2\sqrt{13} + \sqrt{13} = \sqrt{17} + 3\sqrt{13} \text{ jed.}$$



Primjer 4.

Kolika je površina kvadrata ako su mu $A(7, 2)$ i $B(3, 5)$ susjedni vrhovi?

- A) 7 kv. jed. B) 5 kv. jed. C) 25 kv. jed. D) 16 kv. jed.

Rješenje: C.

Duljinu stranice kvadrata odredit ćemo kao međusobnu udaljenost točaka A i B .

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3-7)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$P = a^2 = 25 \text{ kv. jed.}$$

Primjer 5.

Kakav je trokut sa slike?

- A) raznostraničan B) jednakokračan
C) jednakostraničan

Rješenje: A.

Izračunajmo najprije duljine stranica trokuta.

$$A(-1, -2)$$

$$B(10, -4)$$

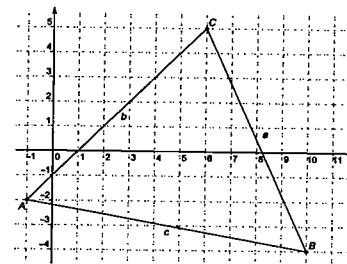
$$C(6, 5)$$

$$a = |BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(6-10)^2 + (5-(-4))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$$

$$b = |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (5-(-2))^2} = \sqrt{7^2 + 7^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98}$$

$$c = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(10-(-1))^2 + (-4-(-2))^2} = \sqrt{11^2 + (-2)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

Možemo zaključiti da je trokut raznostraničan.

**Primjer 6.**

Odredimo kordinate četvrtog vrha pravokutnika ako su koordinate ostalih triju vrhova $K(-1, -3)$, $L(5, 3)$ i $M(9, -1)$.

- A) $(2, -6)$ B) $(3, -7)$
C) $(-4, 1)$ D) $(15, 5)$

Rješenje: B.

Prikažimo točke u koordinatnom sustavu kako bismo uočili koje su spojnice točaka stranice, a koje dijagonale pravokutnika.

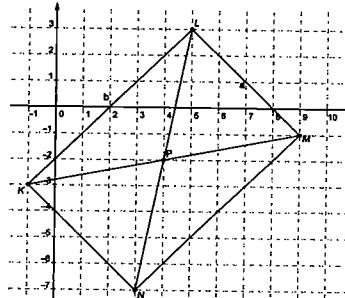
Promotrimo li točke u koordinatnom sustavu, uočit ćemo da je pravi kut u vrhu L . Četvrti vrh najjednostavnije možemo odrediti grafički. Računski možemo najprije odrediti polovište dijagonale KM . To je polovište ujedno polovište dijagonale LN , čiju točku N odredimo uz pomoć dobivenoga polovišta.

$$P_{KM} = \left(\frac{x_K + x_M}{2}, \frac{y_K + y_M}{2} \right) \quad P_{LN} = \left(\frac{x_L + x_N}{2}, \frac{y_L + y_N}{2} \right)$$

$$P_{KM} = P_{LN}$$

$$\frac{x_K + x_M}{2} = \frac{x_L + x_N}{2} \Rightarrow x_K + x_M = x_L + x_N \Rightarrow x_N = x_K + x_L = -1 + 9 - 5 = 3$$

$$\frac{y_K + y_M}{2} = \frac{y_L + y_N}{2} \Rightarrow y_K + y_M = y_L + y_N \Rightarrow y_N = y_K + y_M - y_L = -3 - 1 - 3 = -7 \quad \left. \right\} \Rightarrow N(3, -7)$$



Primjer 7.

Odredimo točku B ako su zadane točke $A(11, -12)$ i $P(-5, 3)$ polovište dužine \overline{AB} .

- A) $(-21, 18)$ B) $(3, -4.5)$ C) $(-0.5, -1)$ D) $(6, -9)$

Rješenje: A.

$$P_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = (-5, 3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_A + x_B}{2} = -5 &\Rightarrow x_A + x_B = -10 &\Rightarrow x_B = -x_A - 10 = -11 - 10 = -21 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = 3 &\Rightarrow y_A + y_B = 6 &\Rightarrow y_B = 6 - y_A = 6 + 12 = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(-21, 18)$$

Primjer 8.

Na osi apscisa nađimo točku koja je jednakoj udaljena od točaka $M(-1, 6)$ i $N(5, 4)$.

- A) $(3, 0)$ B) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ C) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ D) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

Rješenje: D.

$T(x_T, 0)$ – na osi apscisa svaka točka ima y -koordinatu jednaku 0.

$|MT| = |NT|$

$$\sqrt{(x_T - x_M)^2 + (y_T - y_M)^2} = \sqrt{(x_T - x_N)^2 + (y_T - y_N)^2}$$

$$\sqrt{(x_T - (-1))^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{(x_T - 5)^2 + (0 - 4)^2}$$

$$(x_T + 1)^2 + 36 = (x_T - 5)^2 + 16$$

$$x_T^2 + 2x_T + 1 + 36 = x_T^2 - 10x_T + 25 + 16 \Rightarrow 12x_T = 4 \Rightarrow x_T = \frac{1}{3} \Rightarrow T\left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

Primjer 9.

Odredimo površinu trokuta čije su koordinate $A(1, -1)$, $B(5, 3)$ i $C(7, 1)$.

- A) 6 B) 7
C) 8 D) 10

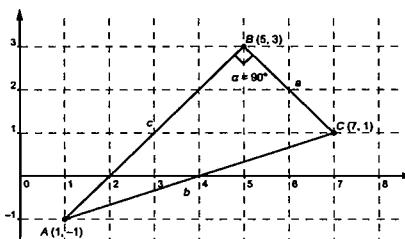
Rješenje: C.

Zadatak možemo rješavati na više načina. Na primjer:

- odrediti duljine svih stranica uz pomoć formule za udaljenost točaka, a nakon toga odrediti površinu prema Heronovoj formuli:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, s = \frac{a+b+c}{2},$$
- odrediti jednu stranicu i visinu na nju, u čemu može pomoći prikaz u koordinatnom sustavu, te primijeniti formulu $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$,
- prikazom u koordinatnom sustavu možemo uočiti je li riječ o pravokutnome ili o nekom drugom karakterističnom trokutu, te tražimo prikladnu formulu,
- možemo se koristiti formulom za računanje površine trokuta uz pomoć zadanih koordinata:

$$P = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$



Vidimo da je naš trokut pravokutan, što ćemo i provjeriti računski, uz pomoć Pitagorina po-učka:

$$a = |BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(7-5)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$b = |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(7-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$c = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8^2} + \sqrt{32^2} = \sqrt{40^2} \Rightarrow a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow \text{Trokut je pravokutan, s pravim kutom kod vrha } B.$$

$$P = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2} = 8 \text{ kv. jed.}$$

Bez primjene Pitagorina poučka:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |1 \cdot (3-1) + 5 \cdot (1+1) + 7 \cdot (-1-3)| = 8 \text{ kV. jed.}$$

Zadatci kratkih odgovora

Primier 1.

Duljine stranica trokuta ABC kojemu su vrhovi $A(2, 2)$, $B(6, 0)$ i $C(5, -2)$ jednake su

Rješenje: $\sqrt{5}, 5, 2\sqrt{5}$

$$a = |BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(5-6)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$b = |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$c = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Primjer 2.

Je li trokut pravokutan ako su mu koordinate vrhova $A(2, -3)$, $B(7, 2)$ i $C(-2, 0)$?

Rješenje: Nije.

$$a = |BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-2 - 7)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$$

$$b = |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 + 3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$c = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7-2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Najdulja stranica trokuta je a , a ako je trokut pravokutan, ta stranica mora biti njegova hipotenusa:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\sqrt{85^2} = 5^2 + \sqrt{50^2}$$

$$85 = 25 + 50$$

$$85 = 75.$$

Vidimo da obrat Pitagorina poučka ne vrijedi, pa trokut nije pravokutan.

Primjer 3.

Odredimo točku A ako su zadani točka $B(-2, -4)$ i polovište dužine \overline{AB} $P(3, 7)$.

Rješenje: A (8, 18)

$$P_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = (3, 7)$$

$$\frac{x_A + x_B}{2} = 3 \Rightarrow x_A + x_B = 6 \Rightarrow x_A = 6 - x_B = 6 - (-2) = 8$$

$$\frac{y_A + y_B}{2} = 7 \Rightarrow y_A + y_B = 14 \Rightarrow y_A = 14 - y_B = 14 - (-4) = 18$$

A(8, 18)

Primjer 4.

Odredimo opseg kvadrata kojemu su točke A(-1, 5) i B(7, 2) susjedni vrhovi.

Rješenje: $O = 4\sqrt{73}$

$$a = d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73}$$

$$O = 4a = 4\sqrt{73}$$

Primjer 5.

Površina trokuta ABC iznosi 4 kvadratne jedinice. Dva su njegova vrha u točkama A (1, 1), B (2, -2), a treći vrh, C, leži na osi x. Odredimo koordinate vrha C.

Rješenje: $C_1\left(-\frac{4}{3}, 0\right); C_2(4, 0)$

Točka C ima koordinate $C(x_C, 0)$.

Površina trokuta zadanoga koordinatama vrhova iznosi

$$P = \frac{1}{2} |x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|.$$

$$4 = \frac{1}{2} |1 \cdot (-2 - 0) + 2(0 - 1) + x_C(1 - (-2))|$$

$$4 = \frac{1}{2} |-2 - 2 + 3x_C|$$

$$|-4 + 3x_C| = 8 \Rightarrow \begin{cases} -4 + 3x_C = 8 \rightarrow 3x_C = 12 \rightarrow x_C = 4 \\ -4 + 3x_C = -8 \rightarrow 3x_C = -4 \rightarrow x_C = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad C_1\left(-\frac{4}{3}, 0\right); C_2(4, 0).$$

Primjer 6.

Površina trokuta ABC, kojemu su vrhovi A (2, 2), B (6, 0) i C (5, -2), jednaka je _____ kv. jed.

Rješenje: 5.

$$P = \frac{1}{2} |2(0 - (-2)) + 6(-2 - 2) + 5(2 - 0)| = \frac{1}{2} |4 - 24 + 10| = \frac{1}{2} |-10| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Primjer 7.

Na osi ordinata nađite točku koja je jednakom udaljena od točaka M (-2, 3) i N(6, -1).

Rješenje: T(0, -3)

$$T(0, y_T)$$

$$d(M, T) = d(N, T)$$

$$\sqrt{(x_T - x_M)^2 + (y_T - y_M)^2} = \sqrt{(x_T - x_N)^2 + (y_T - y_N)^2}$$

$$\sqrt{(0 - (-2))^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(0 - 6)^2 + (y - (-1))^2}$$

$$4 + (y - 3)^2 = 36 + (y + 1)^2 \Rightarrow 4 + y^2 - 6y + 9 = 36 + y^2 + 2y + 1 \Rightarrow -8y = 24 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow T(0, -3)$$

Primjer 8.

Koje su koordinate četvrtog vrha pravokutnika ako su poznate koordinate ostalih triju vrhova: $A(1, 4)$, $B(-2, 1)$ i $C(-1, 6)$.

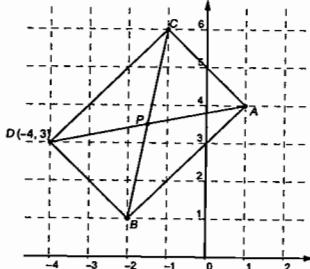
Rješenje: $D(-4, 3)$

$$P_{AD} = P_{BC}$$

$$\frac{x_A + x_D}{2} = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_A + x_D = x_B + x_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_D = x_B + x_C - x_A = -2 - 1 - 1 = -4$$

$$\frac{y_A + y_D}{2} = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_A + y_D = y_B + y_C \Rightarrow y_D = y_B + y_C - y_A = 1 + 6 - 4 = 3 \Rightarrow D(-4, 3)$$



Primjer 9.

Jesu li točke $A(-4, 5)$, $B(1, -3)$ i $C(-2, 2)$ kolinearne?

Rješenje: Nisu.

Točke su kolinearne ako leže na istom pravcu, odnosno, ekvivalentno, ako je $P_{ABC} = 0$. Izračunajmo površinu trokuta ΔABC :

$$P = \frac{1}{2} |-4(-3 - 2) + 1(2 - 5) - 2(5 - (-3))| = \frac{1}{2} |20 - 3 - 16| = \frac{1}{2} |1| = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Dakle, $P \neq 0$, pa točke nisu kolinearne.

Vektori

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Na slici je prikazan vektor:

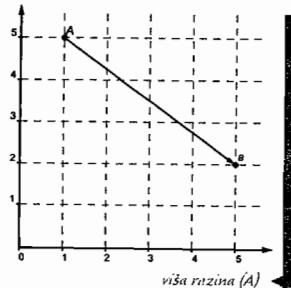
- A) $\overrightarrow{AB} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, B) $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$,
C) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, C) $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$.

Rješenje: B.

$A(1, 5)$

$B(5, 2)$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (5 - 1)\vec{i} + (2 - 5)\vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$



► Primjer 2. ►

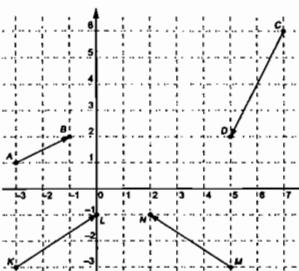
Koji od vektora na slici predočuje vektor $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$?

- A) \overrightarrow{AB} B) \overrightarrow{CD}
C) \overrightarrow{MN} D) \overrightarrow{KL}

Rješenje: C.

- Možemo prikazati sva četiri vektora kao linearu kombinaciju jediničnih vektora \vec{i} i \vec{j} .
- Jednostavniji je način da zadani vektor $\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ skiciramo u koordinatnom sustavu s početnom točkom u ishodištu, te dobiveni vektor usporedimo s ponuđenima.
- Prema koeficijentima uz \vec{i} i \vec{j} možemo zaključiti kako dobijemo zadani vektor. Zadani vektor dobijemo tako da se u koordinatnom sustavu krećemo od početne točke prema završnoj, najprije za tri jedinične dužine ulijevo (\vec{i} je jedinični vektor u smjeru osi x , a mi imamo $-3\vec{i}$), pa za dvije jedinične dužine prema gore (\vec{j} je jedinični vektor u smjeru osi y , a mi imamo $2\vec{j}$). Dakle, samo vektor \overrightarrow{MN} ima takav prikaz.

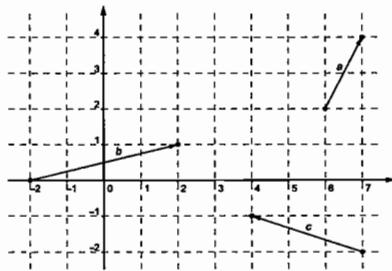
viša razina (A)



► Primjer 3. ►

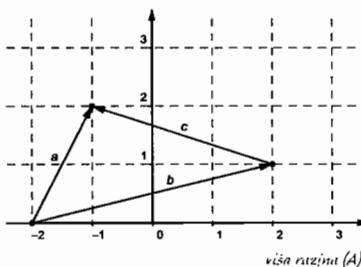
Za vektore \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} sa slike vrijedi:

- A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, B) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$,
C) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$, D) $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$.



Rješenje: A.

Vektor \vec{c} paralelnim pomakom doveđemo u takav položaj da njegova početna točka bude u krajnjoj točki vektora \vec{b} . Prema pravilu trokuta, slijedi: $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.



► Primjer 4. ►

Neka su zadani vektori: $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j}$ i $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Koliko iznosi $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$?

- A) $-4\vec{i} - 5\vec{j}$ B) $6\vec{i} - 2\vec{j}$ C) $8\vec{i} - 6\vec{j}$ D) $-8\vec{i}$

Rješenje: C.

$$\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b} = \frac{1}{2}(4\vec{i} - 6\vec{j}) - 3(-2\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{i} - 3\vec{j} = 8\vec{i} - 6\vec{j}.$$

Primjer 5.

Odredimo duljinu vektora $\vec{a} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$?

- A) 7 jed. B) 1 jed. C) 5 jed. D) 12 jed.

Rješenje: C.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ jed.}$$

viša razina (A)

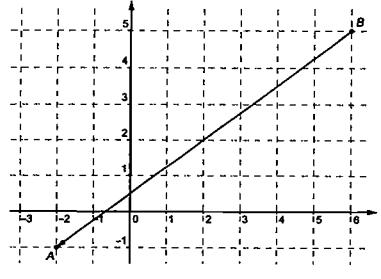
► Primjer 6.

Odredimo duljinu vektora \overline{BA} sa slike:
 A) 12, B) 10, C) 8, D) 6.

Rješenje: B.

Duljina vektora jednaka je udaljenosti između početne i završne točke vektora:

$$\begin{aligned} |\overline{BA}| &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \\ &= \sqrt{(-2 - 6)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \\ &= \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10. \end{aligned}$$



viša razina (A)

► Primjer 7.

Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ iznosi:
 A) -16, B) -30, C) 13, D) 1.

Rješenje: D.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = -1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = -5 + 6 = 1$$

viša razina (A)

► Primjer 8.

U paralelogramu ABCD (v. sliku) poznate su koordinate vrhova A (-2, 1), B (3, -5) i D (7, 0). Odredimo koordinate vrha C.

- A) (12, -6) B) (2, 6) C) (-6, -4) D) (7, 1)

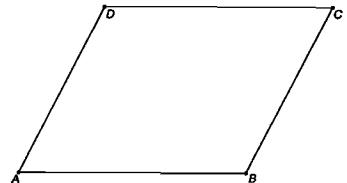
Rješenje: A.

Vrh C možemo odrediti uz pomoć jednakosti vektora: $\overline{AB} = \overline{DC}$.

$$(x'_B - x_A)\vec{i} + (y'_B - y_A)\vec{j} = (x_C - x_D)\vec{i} + (y_C - y_D)\vec{j}$$

$$(3 - (-2))\vec{i} + (-5 - 1)\vec{j} = (x_C - 7)\vec{i} + (y_C - 0)\vec{j}$$

$$5\vec{i} - 6\vec{j} = (x_C - 7)\vec{i} + y_C\vec{j} \Rightarrow x_C - 7 = 5, x_C = 12; y_C = -6 \Rightarrow C(12, -6)$$



viša razina (A)

► Primjer 9.

Odredimo kut među vektorima $\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Zaokružimo rješenja na najbliži prirodan broj.

- A) 65° B) 75° C) 85° D) 55°

Rješenje: B.

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{5 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{130}} = 74^\circ 44' 42''$$

viša razina (A)

► Primjer 10.

Trokut ΔABC zadani je koordinatama svojih vrhova: A (-2, -1), B (3, 2) i C (3, 4). Koliki je kut α ?

- A) 22° B) $18^\circ 20' 12''$ C) 15° D) $14^\circ 2' 10''$

Rješenje: D.

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$$

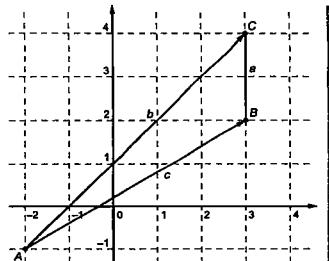
$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = 5\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{5 \cdot 5 + 5 \cdot 3}{\sqrt{5^2 + 5^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{40}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{34}} = \frac{40}{\sqrt{1700}}$$

$$\alpha = \arccos \frac{40}{\sqrt{1700}} = 14^\circ 2' 10''$$

Ako se radi o tupom kutu, rješenje je $180^\circ - \alpha$.



viša razina (A)

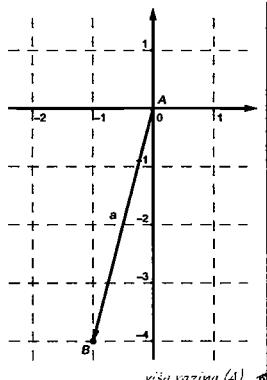
Zadatci kratkih odgovora

Primjer 1. ▶

Vektor $\vec{a} = -\vec{i} - 4\vec{j}$ prikaži u koordinatnoj ravnini.

Rješenje:

Za početnu točku vektora možemo odabrati bilo koju točku koordinatnog sustava. Mi ćemo odabrati ishodište, tj. prikazati radij-vektor (vektor čija je početna točka u ishodištu koordinatnog sustava). Iz te se točke krećemo u koordinatnom sustavu za jednu jediničnu dužinu ulijevo (\vec{i} je jedinični vektor u smjeru osi x , a mi imamo $-\vec{i}$) pa za četiri jedinične dužine prema dolje (\vec{j} je jedinični vektor u smjeru osi y , a mi imamo $-4\vec{j}$). Tako dobijemo krajnju točku $B(-1, -4)$. Budući da smo prikazali radij-vektor, koeficijent uz \vec{i} jednak je x_B , a koeficijent uz \vec{j} jednak je y_B .



viša razina (A)

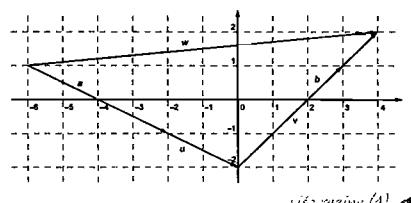
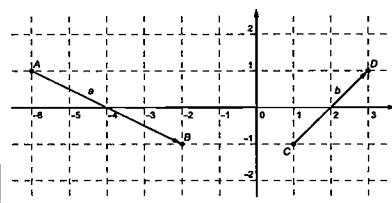
Primjer 2. ▶

Za dane vektore \vec{a} i \vec{b} prikaži $\frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$.

Rješenje:

$$\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{a}, \quad \vec{v} = 2\vec{b}$$

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \frac{3}{2}\vec{a} + 2\vec{b}, \text{ prema pravilu trokuta}$$



viša razina (A)

Primjer 3. ▶

Odredimo duljinu vektora $\vec{v} = 7\vec{i} + 4\vec{j}$.

Rješenje: $\sqrt{65}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65}$$

viša razina (A)

Primjer 4.

Neka su zadani vektori: $\vec{a} = -\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$. Koliko iznosi $6\vec{a} - 2\vec{b}$?

Rješenje: $-16\vec{i} + 6\vec{j}$

$$6\vec{a} - 2\vec{b} = 6\left(-\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}\right) - 2(5\vec{i} - 2\vec{j}) = -6\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{i} + 4\vec{j} = -16\vec{i} + 6\vec{j}$$

(čita rješenje (A))

Primjer 5.

Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j}$ i $\vec{b} = 10\vec{i} - 8\vec{j}$ i iznosi: _____

Rješenje: 4

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = \frac{3}{5} \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot (-8) = 6 - 2 = 4$$

(čita rješenje (B))

Primjer 6.

U paralelogramu $ABCD$ poznate su koordinate vrhova $A(-3, 3)$, $C(6, 1)$ i $D(8, -1)$. Odredimo koordinate vrha B .

Rješenje: $B(-5, 5)$

Vrh B možemo odrediti iz jednakosti vektora: $\overline{AB} = \overline{DC}$.

$$(x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (x_C - x_D)\vec{i} + (y_C - y_D)\vec{j}$$

$$x_B + 3 = -2 \Rightarrow x_B = -5$$

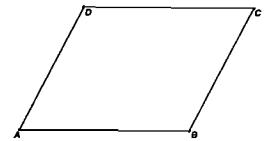
$$(x_B - (-3))\vec{i} + (y_B - 3)\vec{j} = (6 - 8)\vec{i} + (1 - (-1))\vec{j}$$

$$y_B - 3 = 2 \Rightarrow y_B = 5$$

$$(x_B + 3)\vec{i} + (y_B - 3)\vec{j} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$B(-5, 5)$$

(čita rješenje (C))



Primjer 7.

Zadane su točke $A(2, -2)$, $B\left(-3, \frac{3}{2}\right)$ i $C\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. Odredimo $|\overline{AB} + 2\overline{BC} - \overline{AC}|$.

Rješenje: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} = (-3 - 2)\vec{i} + \left(\frac{3}{2} - (-2)\right)\vec{j} = -5\vec{i} + \frac{7}{2}\vec{j}$$

$$\overline{BC} = (x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} = \left(-\frac{3}{2} - (-3)\right)\vec{i} + \left(0 - \frac{3}{2}\right)\vec{j} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$$

$$\overline{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} = \left(-\frac{3}{2} - 2\right)\vec{i} + (0 - (-2))\vec{j} = -\frac{7}{2}\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$|\overline{AB} + 2\overline{BC} - \overline{AC}| = \left| \left(-5\vec{i} + \frac{7}{2}\vec{j} \right) + 2 \left(\frac{3}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} \right) - \left(-\frac{7}{2}\vec{i} + 2\vec{j} \right) \right|$$

$$= \left| -5\vec{i} + \frac{7}{2}\vec{j} + 3\vec{i} - 3\vec{j} + \frac{7}{2}\vec{i} - 2\vec{j} \right| = \left| \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(čita rješenje (D))

Primjer 8.

Odredimo kut među vektorima $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$.

Rješenje: $24^\circ 18' 16''$

$$\cos \phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-8)}{\sqrt{3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-8)^2}} = \frac{31}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{89}} = \frac{31}{\sqrt{1157}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{31}{\sqrt{1157}} = 24^\circ 18' 16''$$

(čita rješenje (E))

Primjer 9.

Odredimo koeficijent λ , tako da vektori $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 4\vec{j}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ budu okomiti.

Rješenje: 8.

Ako su vektori okomiti, tada je kut među njima 90° . Znamo da je $\cos 90^\circ = 0$.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow a_x b_x + a_y b_y = 0$$

$$\lambda \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 8$$

čita se: rješenje (8)

Jednadžba pravca

Zadatci višestrukog izbora

Primjer 1.

Pravac $y = -\frac{1}{5}x + 2$ siječe koordinatne osi u točkama:

- A) $(2, 0)$ i $(0, -5)$, B) $(-10, 0)$ i $(0, 2)$, C) $(10, 0)$ i $(0, 2)$, D) $(5, 0)$ i $(0, -2)$.

Rješenje: C.

$$\text{os } x: y = 0 \text{ (nultočka); } 0 = -\frac{1}{5}x + 2 \Rightarrow \frac{1}{5}x = 2 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow T(10, 0)$$

os y : iz eksplisitnog oblika jednadžbe pravca $y = k \cdot x + l$, l – odsječak na y -osi $\Rightarrow T(0, 2)$.

Primjer 2.

Na slici je prikazan pravac a čija je jednadžba:

- A) $x - 2y - 3 = 0$, B) $2x - y - 3 = 0$, C) $2x - 3y - 1 = 0$, D) $2x + y + 3 = 0$.

Rješenje: B.

Sve četiri ponuđene jednadžbe pravca možemo napisati u eksplisitnom obliku, pa iz koeficijenta smjera i odsječka na osi y možemo zaključiti koja jednadžba pripada traženom pravcu.

Iz prethodne slike izravno možemo napisati segmentni oblik jednadžbe pravca, pa taj oblik prevesti u eksplisitni.

A) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ B) $y = 2x - 3$

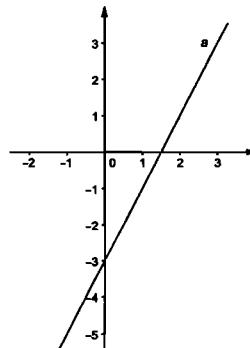
C) $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ D) $y = -2x - 3$

Budući da je traženi pravac rastući i siječe os y u točki $(0, -3)$, točan je odgovor B.

Drući način: Vidimo da zadani pravac siječe koordinatne osi u

$$\left(\frac{3}{2}, 0\right), \text{ i } (0, -3). \text{ Možemo provjeriti kojemu od ponuđenih}$$

pravaca pripadaju te dvije točke. Jednadžba tog pravca je $y = 2x - 3$.



Primjer 3.

Pravac p zadan je jednadžbom $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Koji od ponuđenih pravaca siječe pravac p u točki $T(4, y)$?

- A) $-3x + 7y = -5$ B) $3x - 8y = -4$ C) $3x + 7y = 12$ D) $x - 3y = -4$

Rješenje: A.

Najprije odredimo y -koordinatu zadane točke. Budući da ona pripada pravcu, mora zadovoljavati jednadžbu pravca $y = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 3 = 1$. Dakle, $T(4, 1)$.

Uvrštavajući koordinate točke u jednadžbu pravca, provjerimo koji od ponuđenih pravaca sadržava točku T (dobit ćemo $-3x + 7y = -5$).

Primjer 4.

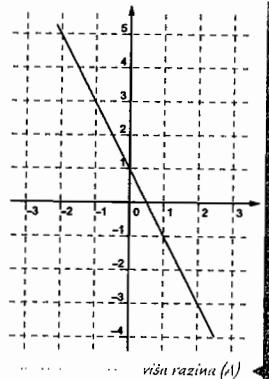
Jednadžba pravca koji je okomit na prikazani pravac i prolazi točkom $(0, 5)$ jest:

- A) $y = \frac{1}{2}x + 5$, B) $y = 2x + 5$,
C) $y = -2x + 5$, D) $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Rješenje: A.

Zadani pravac ima koeficijent smjera $k_1 = -2$. Pravci su okomiti ako su im koeficijenti smjera recipročni i suprotnog predznaka, tj. ako vrijedi $k_1 \cdot k_2 = -1$. Dakle, $k_2 = \frac{1}{2}$.

Sada znamo i koeficijent smjera i odsječak na osi y traženog pravca: $y = \frac{1}{2}x + 5$.

**Primjer 5.**

Sjecište pravaca $y = 4x + 1$ i $y = -x + 6$ nalazi se u točki:

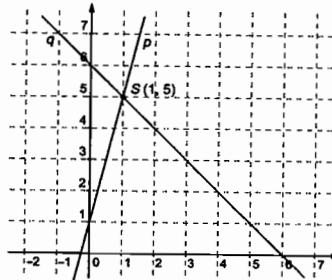
- A) $(1, 4)$, B) $(2, 3)$,
C) $(-1, -5)$, D) $(1, 5)$.

Rješenje: D.

$$4x + 1 = -x + 6$$

$$5x = 5$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -1 + 6 = 5 \Rightarrow T(1, 5)$$

**Primjer 6.**

Koja točka pripada pravcu $y = -3x - 2$?

- A) $(1, -3)$ B) $(-2, 4)$ C) $(3, 2)$ D) $(-4, -1)$

Rješenje: B.

Ako točka pripada pravcu, njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu pravca. Uvrstimo koordinate svake točke u jednadžbu pravca:

$$-3 = -3 \cdot 1 - 2 \quad (\text{netočno})$$

$$4 = -3 \cdot (-2) - 2 \quad (\text{točno})$$

$$2 = -3 \cdot 3 - 2 \quad (\text{netočno})$$

$$-1 = -3 \cdot (-4) - 2 \quad (\text{netočno}).$$

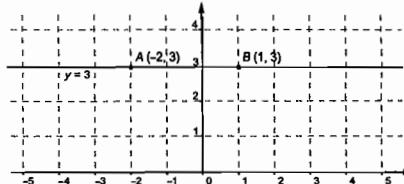
Primjer 7.

Jednadžba pravaca koji prolazi točkama

$A(-2, 3)$ i $B(1, 3)$ jest:

- A) $x = -2$, B) $x = 1$,
C) $y = 0$, D) $y = 3$.

Rješenje: D.

**Primjer 8.**

Površina trokuta koji pravac $-3x + 2y + 6 = 0$ zatvara s koordinatnim osima iznosi:

- A) 2, B) 3, C) 6, D) 5.

Rješenje: B.

$$P = \frac{|m \cdot n|}{2}, \text{ gdje su } m \text{ i } n \text{ duljine odsječaka pravca na koordinatnim osima.}$$

Odsječke na koordinatnim osima možemo odrediti na više načina (navest ćemo dva). Uvrstimo li u jednadžbu pravca $x = 0$, dobit ćemo odsječak na osi y , a za $y = 0$ odsječak na osi x :

$$-3 \cdot 0 + 2y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3(n = -3)$$

$$-3x + 2 \cdot 0 + 6 = 0 \Rightarrow x = 2(m = 2).$$

Jednadžbu pravca možemo napisati u segmentnom obliku: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, iz čega izravno odčitamo m i n .

$$-3x + 2y = -6 \mid : (-6)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow m = 2, n = -3 \Rightarrow P = \frac{|2 \cdot (-3)|}{2} = \frac{|-6|}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Primjer 9.

Koji od pravaca prolazi točkama $A(2, 5)$ i $B(-1, -4)$?

- A) $y = 5x + 1$ B) $y = -x + 5$ C) $y = 3x - 1$ D) $y = 4x$

Rješenje: C.

Ima više načina rješavanja tog zadatka.

- Grafički možemo riješiti zadatak tako da nacrtamo sva četiri pravca i točke.
- Uvrstimo koordinate objiju točaka u svaku jednadžbu pravca, te tako provjerimo pripadnost.
- Odredimo jednadžbu pravca kroz zadane točke i dobiveni pravac usporedimo s ponuđenima:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

$$y - 5 = \frac{-9}{-3}(x - 2)$$

$$y - 5 = \frac{-4 - 5}{-1 - 2}(x - 2)$$

$$y - 5 = 3(x - 2)$$

$$y - 5 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 1$$

Primjer 10.

Zadan je pravac p jednadžbom $2x + y - 6 = 0$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi jest:

- A) 9, B) 6, C) $3\sqrt{5}$, D) 12.

Rješenje: C.

Eksplicitni je oblik jednadžbe pravca $y = -2x + 6$.

Pravac siječe os x u nultočki $A(3, 0)$, a os y u točki $B(0, 6)$.

Prema Pitagorinu poučku slijedi: $d = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Primjer 11.

Koliki je koeficijent smjera pravca određenog točkama $A(-2, -3)$ i $B(4, 1)$?

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) -1 D) $-\frac{2}{3}$

Rješenje: A.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-3)}{4 - (-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Primjer 12.

Zadane su točke $A(3, 3)$ i $B(-2, 2)$. Jednadžba simetrale dužine \overline{AB} pravac je:

- A) $y = 5x + 5$, B) $y = -5x + 5$, C) $y = -5x - 5$, D) $y = 5x - 5$.

Rješenje: B.

Simetrala dužine okomita je na dužinu i prolazi polovištem dužine:

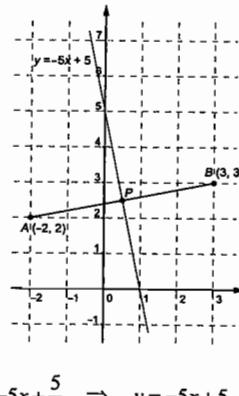
- odredimo polovište dužine
 $\overline{AB}: P\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$,

- odredimo koeficijent smjera pravca nositelja dužine
 $\overline{AB}: k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{-2-3} = \frac{1}{5}$,

- odredimo koeficijent smjera pravca okomitoga na pravac AB ($k_1 \cdot k_2 = -1$): $k_2 = -5$,

- odredimo jednadžbu traženoga pravca kao jednadžbu pravca kroz točku P s koeficijentom smjera k_2 :

$$y - y_1 = k_2(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = -5\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = -5x + \frac{5}{2} \Rightarrow y = -5x + 5.$$



viša razina (A)

Primjer 13.

Koji od ponuđenih pravaca, s pravcem $y = -\frac{1}{3}x - 5$, zatvara kut od 45° ?

- A) $y = -x + 3$ B) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ C) $y = 2x - 5$ D) $y = -2x - 17$

Rješenje: D.

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \quad k_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\left| \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{\frac{3k_2 + 1}{3}}{\frac{3 - k_2}{3}} \right| = 1 \Rightarrow \left| \frac{3k_2 + 1}{3 - k_2} \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3k_2 + 1 = 3 - k_2 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2} \\ 3k_2 + 1 = k_2 - 3 \Rightarrow k_2 = -2 \end{cases}$$

Svi pravci s koeficijentom smjera -2 ili $\frac{1}{2}$ sa zadanim pravcem zatvaraju kut od 45° .

viša razina (A)

Primjer 14.

Pravac p okomit je na $y = -\frac{1}{3}x - 12$ i prolazi točkom $(4, 2)$. Pravac p je:

- A) $y = 3x - 10$, B) $y = \frac{1}{3}x - 2$, C) $y = -3x + 14$, D) $y = 3x - 2$.

Rješenje: A.

$$k = 3$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - 2 = 3(x - 4)$$

$$y - 2 = 3x - 12$$

$$y = 3x - 10$$

viša razina (A)

Primjer 15.

Kut između pravaca $y = -2x + 1$ i $y = 2x - 1$ iznosi:

- A) $73^\circ 17'42''$, B) $53^\circ 7'48''$, C) $51^\circ 6'30''$, D) $56^\circ 12'41''$.

Rješenje: B.

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{2 - (-2)}{1 + 2 \cdot (-2)} \right| = \left| \frac{4}{1 - 4} \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

$$\alpha = \arctg \frac{4}{3} = 53^\circ 7'48''$$

viša razina (A)

Primjer 16.

Koji od navedenih pravaca je usporedan s pravcem $3x + 4y - 5 = 0$?

- A) $3x + 2y - 5 = 0$, B) $4x - 3y - 1 = 0$, C) $y = -\frac{3}{4}x - 2$, D) $y = \frac{4}{3}x - 2$.

Rješenje: C.

Znamo da $p_1 = p_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$. Zapišemo li zadanu jednadžbu pravca u eksplicitnom obliku te usporedimo sa ponudenim odgovorima, uočiti ćemo da je točno rješenje C.

$$3x + 4y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4y = -3x + 5 \quad | :4 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Primjer 17.

Jednadžba pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava i usporedan je s pravcem

$$y = \frac{1}{3}x - 2 \text{ glasi:}$$

- A) $y = 3x$, B) $y = -\frac{1}{3}x - 2$, C) $y = \frac{1}{3}x - 2$, D) $y = \frac{1}{3}x$.

Rješenje: D.

Rješenje je jednadžba pravca koji ima jednak koeficijent smjera kao i zadani pravac $(-\frac{1}{3})$ i odsečak na y -osi mu iznosi 0.

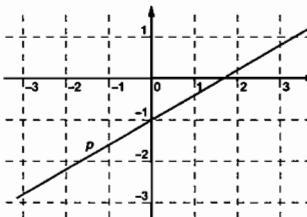
Zadatci kratkih odgovora**Primjer 1.**

Zadan je pravac $p: y = \frac{3}{5}x - 1$. Nacrtaj taj pravac u koordinatnom sustavu.

Rješenje:

Odsječak na osi y jednak je $l = -1$.

Sjecište s osi x : $N\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

**Primjer 2.**

Odredimo jednadžbu pravca kroz točke $A(-3, 2)$ i $B(6, -1)$ pa je napišimo u implicitnom obliku.

Rješenje: $x + 3y - 3 = 0$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad y - 2 = \frac{-3}{9}(x + 3) \quad y - 2 = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$y - 2 = \frac{-1 - 2}{6 - (-3)}(x - (-3)) \quad y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 3) \quad \frac{1}{3}x + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 3y - 3 = 0$$

Primjer 3.

Odredimo koeficijent smjera pravca određenog točkama $A(1, -2)$ i $B(-1, 4)$.

Rješenje: -3

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - (-2)}{-1 - 1} = \frac{6}{-2} = -3$$

Primjer 4.

Odredimo kut između pravaca $y = -\frac{1}{2}x + 7$ i $y = x - 5$.

Rješenje: $71^\circ 33' 54''$

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)}{1 + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)} \right| = \left| \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = |3| = 3 \quad \alpha = \operatorname{arctg} 3 = 71^\circ 33' 54''$$

viša razina (A)

Primjer 5.

U kojem su međusobnom položaju pravci $y = \frac{1}{4}x + 1$ i $2x - 8y - 3 = 0$?

Rješenje: Pravci su usporedni.

Položaj pravaca određujemo s obzirom na vrijednosti koeficijenata smjera. Najprije obje jednadžbe zapišemo u eksplicitnom obliku:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{4}x + 1 &\Rightarrow k_1 = \frac{1}{4} & -8y = -2x + 3 \\ 2x - 8y - 3 = 0 & & y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2. \end{aligned}$$

Primjer 6.

Izračunajmo udaljenost točke $T(3, 2)$ od pravca $y = -x + 5$.

Rješenje: 0

$$d(p, T) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \text{ za pravac } Ax + By + C = 0 \text{ i točku } T(x_1, y_1).$$

$$y = -x + 5 \Rightarrow x + y - 5 = 0$$

$$d(p, T) = \frac{|1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} \quad \text{Udaljenost je 0, pa točka } T \text{ pripada pravcu } p.$$

Primjer 7.

Površina trokuta koji pravac $-4x + 3y + 6 = 0$ zatvara s koordinatnim osima iznosi:

Rješenje: $\frac{3}{2}$ kv. jed.

$$\text{za } x = 0: y = -2$$

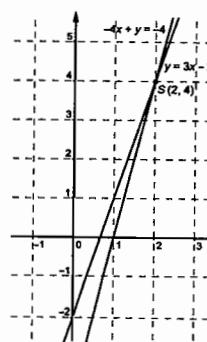
$$\text{za } y = 0: x = \frac{3}{2}$$

$$P = \frac{|-2 \cdot \frac{3}{2}|}{2} = \frac{|-3|}{2} = \frac{3}{2}$$

Primjer 8.

Sjedište pravaca $y = 3x - 2$ i $4x - y - 4 = 0$ je u točki:

Rješenje: $(2, 4)$



Primjer 9.

Odredimo jednadžbu pravca koji je usporedan s pravcem $y = 5x - \frac{1}{2}$ i prolazi točkom $T(2, -3)$.

Rješenje: $y = 5x - 13$

$$T(2, -3); k = 5$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - (-3) = 5(x - 2)$$

$$y + 3 = 5x - 10 \quad \Rightarrow \quad y = 5x - 13$$

Primjer 10.

Pravac p zadan je jednadžbom $x - 2y - 5 = 0$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi je: _____

Rješenje: $\frac{5\sqrt{5}}{2}$

$$\text{za } x = 0: \quad y = -\frac{5}{2}$$

$$\text{za } y = 0: \quad x = 5$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 25} = \sqrt{\frac{125}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Primjer 11.*

Pravac p okomit je na $y = 2x + 4$ i prolazi točkom $(2, -5)$. Pravac p je: _____

Rješenje: $y = -\frac{1}{2}x - 4$

$$T(2, -5); k = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - (-5) = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y + 5 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x - 4$$

Primjer 12.

Odredite jednadžbu pravca koji je usporedan s pravcem $2x - 3y - 6 = 0$ i prolazi točkom $T(-3, 4)$.

Rješenje: $2x - 3y + 18 = 0$ ili $y = \frac{2}{3}x + 6$

Najprije odredimo koeficijent smjera zadanog pravca, a nakon toga rabimo formulu za određivanje jednadžbe pravca zadanog jednom točkom $T(x_1, y_1)$ i koeficijentom smjera k : $y - y_1 = k(x - x_1)$.

$$2x - 3y - 6 = 0$$

$$-3y = -2x + 6 \mid (-3)$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{3}$$

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x + 3)$$

$$y - 4 = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2 + 4 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}x + 6 \quad \text{-- eksplicitni oblik}$$

$$2x - 3y + 18 = 0 \quad \text{-- implicitni (opći) oblik}$$

Primjer 13.

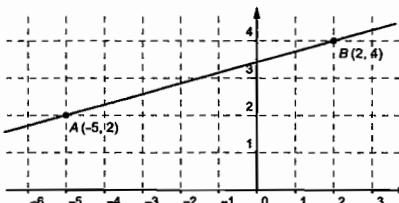
Odredite jednadžbu pravca koji je usporedan s pravcem na slici i y -os siječe u točki $(0, -2)$.

Rješenje: $2x - 7y - 14 = 0$ ili $y = \frac{2}{7}x - 2$

Potrebito je prvo odrediti koeficijent smjera zadanog pravca. Nakon toga možemo zapisati eksplicitni oblik jednadžbe pravca s dobivenim koeficijentom smjera te odsječkom na y -osi $l = -2$.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow k = \frac{4 - 2}{2 - (-5)} = \frac{2}{7}$$

Jednadžba pravca: $y = \frac{2}{7}x - 2$ ili $2x - 7y - 14 = 0$.

**Krivulje drugog reda****Zadatci višestrukog izbora****Primjer 1.**

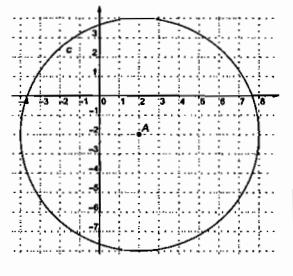
Kružnica na slici ima jednadžbu:

- A) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 6$, B) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 36$,
C) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 36$, D) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 6$.

Rješenje: B.

Jednadžba kružnice: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$; $S(p, q)$, r – polumjer.

Kružnica na slici ima središte u $S(2, -2)$ i polumjer $r = 6$. Unesemo li te podatke u jednadžbu, dobit ćemo:
 $(x - 2)^2 + (y - (-2))^2 = 6^2 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 36$.



viša razina (A)

Primjer 2.

Kolika je udaljenost središta kružnice $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ od ishodišta koordinatnog sustava?

- A) 4 B) 6 C) $\sqrt{52}$ D) $\sqrt{13}$

Rješenje: D.

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16 \Rightarrow S(2, -3); r = 4$$

$$d(S, O) = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

viša razina (A)

Primjer 3.

Koliko zajedničkih točaka imaju kružnica $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ i pravac čija je jednadžba $x - 2y + 5 = 0$?

- A) 1 B) 0 C) 2 D) 3

Rješenje: C.

Sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznane rješavamo metodom supstitucije.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$

$$\underline{x - 2y + 5 = 0} \Rightarrow x = 2y - 5$$

$$(2y - 5)^2 + y^2 - 6(2y - 5) + 2y - 15 = 0$$

$$4y^2 - 20y + 25 + y^2 - 12y + 30 + 2y - 15 = 0$$

$$5y^2 - 30y + 40 = 0$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0$$

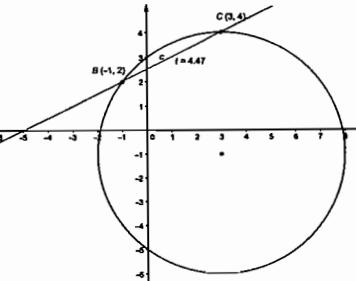
Dovoljno je samo odrediti diskriminantu te kvadratne jednadžbe jer se ne traže koordinate sjecišta nego samo broj rješenja sustava.

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0 \Rightarrow$ jednadžba ima dva rješenja \Rightarrow pravac i kružnica imaju dvije zajedničke točke.

Dovoljno je bilo odrediti udaljenost $d(S, a)$, iz čega možemo odrediti broj zajedničkih točaka.

$$d < r \text{ (2 točke);}$$

$$C = r \text{ (1 točka);}$$



... viša razina (A)

Primer 4.

Odredimo duljinu tetive sa slike.

- A) 10 B) 9.9 C) 9.8 D) 10.1

Rješenje: B.

Odredimo polumjer kružnice iz poznatih podataka, npr. točke $S(-4, 2)$ i $A(0, 5)$, kako bismo znali jednadžbu kružnice:

$$(x - (-4))^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

$$(0 + 4)^2 + (5 - 2)^2 = r^2$$

$$r^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow r = 5$$

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

Odredimo jednadžbu pravca: kako pravac odsijeca jednake odsječke na osima x i y , koeficijent smjera je $k = 1$, a odsječak na os $y = 5$ pa slijedi $y = x + 5$.

Odredimo sjecište pravca i kružnice:

$$(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$$

$$y = x + 5$$

$$(x + 4)^2 + (x + 5 - 2)^2 = 25$$

$$(x + 4)^2 + (x + 3)^2 = 25$$

$$x^2 + 8x + 16 + x^2 + 6x + 9 = 25$$

$$2x^2 + 14x = 0$$

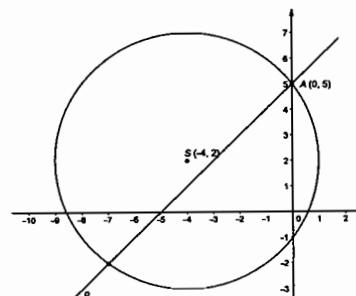
$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = x_1 + 5 = 5 \\ x_2 = -7 \Rightarrow y_2 = x_2 + 5 = -2 \end{cases}$$

$$S_1(0, 5), S_2(-7, -2).$$

Odredimo udaljenost točaka S_1 i S_2 .

$$d(S_1, S_2) = \sqrt{(-7 - 0)^2 + (-2 - 5)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} = 9.8995 \approx 9.9 \text{ jed.}$$

... viša razina (A)



► Primjer 5.

Jednadžbom $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ dana je kružnica. Odredimo tangentu na kružnicu u točki kružnice $T(0, y)$, $y \neq 0$.

- A) $-4x - 3y - 18 = 0$ B) $4x - 3y - 18 = 0$ C) $-4x + 3y - 18 = 0$ D) $-4x - 3y + 18 = 0$

Rješenje: A.

Odredimo središte i polujmer kružnice.

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

$$(x-4)^2 - 16 + (y+3)^2 - 9 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25 \quad S(4, -3); r = 5$$

Odredimo koordinatu y točke T tako da koordinatu x uvrstimo u jednadžbu kružnice.

$$0^2 + y^2 - 8 \cdot 0 + 6y = 0$$

$$y^2 + 6y = 0 \Rightarrow y(y+6) = 0 \Rightarrow y_1 = 0; y_2 = -6$$

$$T(0, -6)$$

Odredimo jednadžbu tangente na kružnicu u točki kružnice.

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$$

$$(0-4)(x-4) + (-6+3)(y+3) = 25$$

$$-4x + 16 - 3y - 9 = 25$$

$$-4x - 3y - 18 = 0 \text{ ili } 4x + 3y + 18 = 0$$

viša razina (A)

► Primjer 6.

Ako je jedno žarište elipse u točki $F(4, 0)$, a mala poluos $b = 3$, odredimo jednadžbu elipse.

- A) $3x^2 + 5y^2 = 15$ B) $25x^2 + 9y^2 = 225$
C) $9x^2 + 16y^2 = 144$ D) $9x^2 + 25y^2 = 225$

Rješenje: D.

jednadžba elipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$;

žarište $F(\pm e, 0)$; $e^2 = a^2 - b^2$

$$a^2 = b^2 + e^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\text{jednadžba elipse: } 9x^2 + 25y^2 = 225$$

viša razina (A)

► Primjer 7.

Žarišta elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ nalaze se u točkama:

- A) $(2, 0)$ i $(-2, 0)$, B) $(3, 0)$ i $(-3, 0)$, C) $(2, 0)$ i $(0, 2)$, D) $(4, 0)$ i $(-4, 0)$.

Rješenje: A.

$$3x^2 + 4y^2 = 48 \quad | : 48 \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \quad e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 12} = \sqrt{4} = \pm 2 \quad F(\pm 2, 0)$$

viša razina (A)

► Primjer 8.

Jedna asimptota hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ jest $y = \frac{3}{2}x$. Ako točka $T(2\sqrt{2}, 3)$ pripada hiperboli, izračunajmo udaljenost tjemena hiperbole.

- A) 2 B) 4 C) 6 D) 8

Rješenje: B.

Tjemena su udaljena za $2a$, tj. za duljinu velike osi.

$$\text{asimptote: } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{3}{2}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$$

$$\text{jednadžba hiperbole: } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$T(2\sqrt{2}, 3)$ pripada hiperboli pa koordinate te točke zadovoljavaju jednadžbu hiperbole.

$$\frac{(2\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{8}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$$

Dobili smo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice.

$$\left. \begin{array}{l} b = \frac{3}{2}a \\ \frac{8}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{8}{a^2} - \frac{9}{\left(\frac{3}{2}a\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{8}{a^2} - \frac{9}{\frac{9a^2}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{8}{a^2} - \frac{4}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$$

viša razina (A)

Primjer 9. ►►

Ako pravac $4x - 3y = 8$ prolazi žarištem parabole $y^2 = 2px$, u kojoj točki s cijelobrojnim koordinatama pravac siječe parabolu?

- A) S(8, -8) B) S(-4, -2) C) S(8, 8) D) S(4, 2)

Rješenje: C.

Žarište parabole nalazi se na osi apscisa, te mora biti u sjecištu pravca s x-osi: N(2, 0)

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow \frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4 \Rightarrow 2p = 8.$$

Jednadžba parabole je $y^2 = 8x$.

Sjecišta pravca i parabole dobijemo rješavanjem sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznанице:

$$y^2 = 8x \Rightarrow x = \frac{y^2}{8}$$

$$4x - 3y = 8$$

$$4 \cdot \frac{y^2}{8} - 3y = 8$$

$$\frac{y^2}{2} - 3y - 8 = 0 \mid \cdot 2$$

$$y^2 - 6y - 16 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 1 \cdot (-16)}}{2} = \frac{6 \pm 10}{2}$$

$$y_1 = 8 \Rightarrow x_1 = 8 \Rightarrow S_1(8, 8)$$

$$y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow S_2\left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

viša razina (A)

Primjer 10. ►►

Odredite jednadžbu parabole ako znamo da joj je žarište u točki F(-2, 0).

- A) $y^2 = -8x$ B) $y^2 = -4x$ C) $y^2 = 2x$ D) $y^2 = 8x$

Rješenje: A.

Jednadžba parabole je $y^2 = 2px$, a žarište se nalazi u točki $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Dakle u zadatku je $\frac{p}{2} = -2 \Rightarrow p = -4 \Rightarrow 2p = -8$, te je tražena jednadžba $y^2 = -8x$.

viša razina (A)

Primjer 11. ►►

Na slici je prikazana parabola:

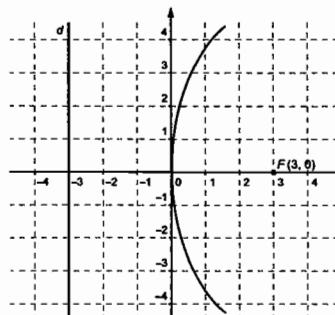
- A) $y^2 = 3x$ B) $y^2 = 6x$
C) $y^2 = 12x$ D) $y^2 = 9x$

Rješenje: C.

Žarište zadane parabole se nalazi u točki F(3, 0), odakle slijedi:

$$\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow 2p = 12,$$

te je tražena jednadžba $y^2 = 12x$.



viša razina (A)

Zadatci kratkih odgovora

► Primjer 1. ►

Elipsa $4x^2 + 25y^2 = 100$ prolazi točkom $T\left(4, \frac{6}{5}\right)$. Odredimo jednadžbu normale u toj točki na elipsu.

$$\text{Rješenje: } y = \frac{15}{8}x - \frac{63}{10}$$

$$4x^2 + 25y^2 = 100 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 25, b^2 = 4$$

Odredit ćemo jednadžbu tangente na elipsu u danoj točki prema formuli $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$:

$$\frac{6}{25}x + \frac{5}{4}y = 1 \Rightarrow \frac{6y}{20} = -\frac{4}{25}x + 1 \Rightarrow y = -\frac{8}{15}x + \frac{20}{6} \quad (\text{jednadžba tangente}).$$

Normala ima koeficijent smjera recipročan i suprotnog predznaka s obzirom na koeficijent smjera tangente: $k_t \cdot k_n = -1$.

$$y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{6}{5} = \frac{15}{8}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{15}{8}x - \frac{63}{10} \quad \text{ili } 75x - 40y - 252 = 0$$

viša razina (A)

► Primjer 2. ►

Kolika je udaljenost pravca $y = 3x - 1$ od žarišta hiperbole $4x^2 - 25y^2 = 100$ koje se nalazi na pozitivnom dijelu osi apscisa?

Rješenje: 4.79 jed.

Odrediti žarište elipse na pozitivnom dijelu osi x , a jednadžbu pravca prevesti u implicitni oblik:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow e^2 = a^2 + b^2 = 29 \Rightarrow e = \pm\sqrt{29} \Rightarrow F(\sqrt{29}, 0)$$

$$p.. 3x - y - 1 = 0$$

$$d(F, p) = \frac{|3\sqrt{29} - 1 - 0 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3\sqrt{29} - 1|}{\sqrt{10}} = 4.79 \text{ jed.}$$

viša razina (A)

► Primjer 3. ►

Kako glasi jednadžba one tangente na kružnicu $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$ koja je okomita na pravac $2x + 6y - 1 = 0$?

$$\text{Rješenje: } t_1 \dots y = 3x - 10 + 5\sqrt{10}; \quad t_2 \dots y = 3x - 10 - 5\sqrt{10}$$

$$\text{uvjet dodira pravca i kružnice: } r^2(1+k^2) = (q - kp - l)^2$$

$$\text{Odredimo koeficijent smjera pravca } 2x + 6y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \Rightarrow k = 3.$$

Imamo sve podatke za uvjet, te iz njega računamo l .

$$k = 3; p = 4; q = 2; r = 5;$$

jednadžbe tangenti:

$$25(1+9) = (2 - 3 \cdot 4 - l)^2$$

$$t_1 \dots y = 3x - 10 + 5\sqrt{10}$$

$$(-10 - l)^2 = 250$$

$$t_2 \dots y = 3x - 10 - 5\sqrt{10}$$

$$l + 10 = \pm 5\sqrt{10}$$

$$l_{1,2} = -10 \pm 5\sqrt{10}$$

viša razina (A)

Primjer 4.

Odredimo jednadžbu tangente na elipsu $x^2 + 4y^2 = 100$ u njezinoj točki $D(-8, 3)$.

Rješenje: $2x - 3y + 25 = 0$.

$$x^2 - 4y^2 = 100$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$\frac{-8x}{100} + \frac{3y}{25} = 1$$

$$-8x + 12y - 100 = 0$$

$$2x - 3y + 25 = 0$$

Primjer 5.

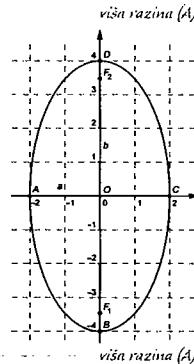
Prikažimo u koordinatnoj ravnini skup točaka ravnine određen jednadžbom $16x^2 + 4y^2 = 64$.

Rješenje:

Prepoznamo jednadžbu elipse te je napišemo u osnovnom (kanonskom) obliku. Odredimo poluosi i žarišta elipse te je skiciramo u koordinatnom sustavu.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad a = 2, \quad b = 4;$$

$$e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad a < b - \text{žarišta su na } y\text{-osi}$$

**Primjer 6.**

Iz podataka na slici dolje odredimo jednadžbu hiperbole.

Rješenje: $4x^2 - 9y^2 = 1$.

Jedna asimptota prolazi kroz točku $T(6, 4)$.

Jednadžbe asimptota su $y = \pm \frac{2}{3}x$.

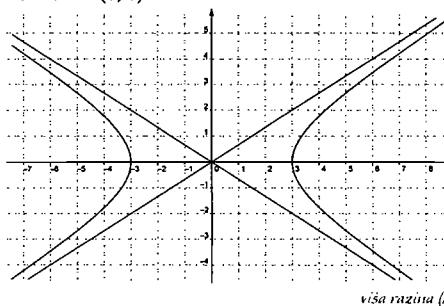
$$\text{Slijedi: } \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}a$$

$$a = 3.$$

Iz skice vidimo da je $b = 2$.

$$\text{Slijedi: } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 36,$$

$$\text{tj. } 4x^2 - 9y^2 = 1.$$



viša razina (A)

Primjer 7.

Odredite jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 8x$, u njezinoj točki $T(2, y)$, $y > 0$.

Rješenje: $y = 2x + 8$.

Jednadžba tangente na parabolu $y^2 = 2px$ u njezinoj točki $T(x_1, y_1)$ se određuje po formuli $yy_1 = p(x + x_1)$. Zadana je točka T kojoj moramo odrediti y -koordinatu uvrštavanjem koordinate x u jednadžbu dane parabole:

$$y^2 = 8x$$

$$y^2 = 16$$

$x_{1,2} = \sqrt{16} = \pm 4$, ali u zadatku je zadan uvjet $y > 0$, tako da je točka $T(2, 4)$.

Tangenta:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

$$y \cdot 4 = 8(x + 2)$$

$$4y = 8x + 16$$

$$y = 2x + 8.$$

viša razina (A)

Primjer 8.

Odredite jednadžbu tangente na hiperbolu $4x^2 - 16y^2 = 64$ u njezinoj točki $T(5, y)$, $y < -5$.

Rješenje: $5x + 6y - 16 = 0$

Odredit ćemo y -koordinatu točke T uvrštavanjem koordinate x u jednadžbu dane hiperbole:

$$4x^2 - 16y^2 = 64$$

$$16y^2 = 4x^2 - 64$$

$$y^2 = \frac{1}{4}x^2 - 4$$

$$y^2 = \frac{1}{4} \cdot 5^2 - 4 = \frac{25-16}{4} = \frac{9}{4}$$

$$y = \pm \frac{3}{2}, \text{ zbog uvjeta } y < 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

$$\text{– jednadžba zadane hiperbole je } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

$$\text{– točka u kojoj tražimo tangentu } T(5, -\frac{3}{2}),$$

$$\text{– uvjet dodira pravca i hiperbole u njezinoj točki } T(x_1, y_1) \text{ jest: } \frac{x_1}{a^2} - \frac{y_1}{b^2} = 1.$$

$$\frac{x \cdot 5}{16} - \frac{y \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5x}{16} + \frac{3y}{8} = 1 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad 5x + 6y = 16$$

viša razina (A)

• 4.4. Geometrija – zadatci za vježbu •

Zadatci višestrukog izbora

Rješenja zadataka potražite na str. 462.

1. Koji je od sljedećih četiriju trokuta jednakokračan?

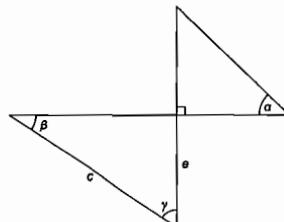
- A) $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 57^\circ$ B) $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 70^\circ$ C) $\alpha = 111^\circ$, $\gamma = 28^\circ$ D) $\beta = 43^\circ$, $\gamma = 94^\circ$

2. Koji je od sljedećih četiriju trokuta jednakokračan?

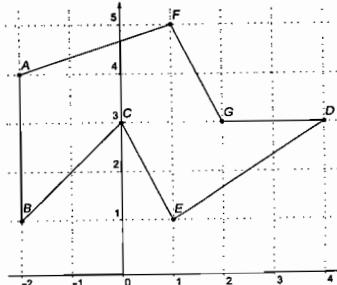
- A) $\alpha = 85^\circ$, $\beta = 65^\circ$ B) $\beta = 70^\circ$, $\gamma = 50^\circ$ C) $\alpha = 29^\circ$, $\gamma = 122^\circ$ D) $\beta = 39^\circ$, $\gamma = 111^\circ$

3. Pravokutan i jednakokračan trokut imaju zajednički vrh u pravom kutu (sl. 4.97.). Koliki je zbroj kutova α i β ako je $c = 2e$?

- A) 90° B) 45° C) 60° D) 75°

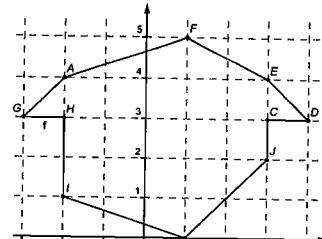


4. Pravokutan i jednakokračan trokut imaju zajednički vrh u pravom kutu (sl. 4.97.). Koliki je zbroj kutova α i γ ako je $c = 2e$?
- A) 60° , B) 75° , C) 105° , D) 120°
5. Središte trokuta opisane kružnice nalazi se u sjecištu:
- A) simetrala stranica, B) simetrala kutova, C) visina, D) težišnica.
6. Ortocentar trokuta nalazi se u sjecištu:
- A) simetrala stranica, B) simetrala kutova,
C) pravca na kojem leže visine, D) težišnica.
7. Koliko dijagonala ima pravilni jedanaesterokut?
- A) 33, B) 44, C) 88, D) 55
8. Koliko dijagonala ima pravilni sedamnaesterokut?
- A) 119, B) 238, C) 133, D) 124
9. Koliko vrhova ima pravilni mnogokut čiji je zbroj unutarnjih kutova $1\ 260^\circ$?
- A) 7, B) 8, C) 9, D) 10
10. Koliko vrhova ima pravilni mnogokut čiji je zbroj unutarnjih kutova $2\ 340^\circ$?
- A) 13, B) 18, C) 15, D) 17
11. Opsezi dvaju sličnih mnogokuta iznose 28 cm i 35 cm . Ako je površina prvog mnogokuta 48 cm^2 , kolika je površina drugog mnogokuta?
- A) 55 cm^2 , B) 65 cm^2 , C) 75 cm^2 , D) 85 cm^2
12. Opsezi dvaju sličnih mnogokuta su 110 cm i 55 cm . Ako je površina prvog mnogokuta 150 cm^2 , koliko iznosi površina drugog mnogokuta?
- A) 24 cm^2 , B) 37.5 cm^2 , C) 25.6 cm^2 , D) 38.4 cm^2
13. Ako je hipotenuza pravokutnog trokuta pet puta dulja od njegove katete a , tada katetu b možemo zapisati u obliku:
- A) $2a\sqrt{2}$, B) $a\sqrt{6}$, C) $2a$, D) $2a\sqrt{6}$.
14. Ako je kateta b pravokutnog trokuta tri puta dulja od njegove katete a , hipotenuzu možemo zapisati u obliku:
- A) $2a\sqrt{2}$, B) $a\sqrt{2}$, C) $a\cdot\sqrt{10}$, D) $2\sqrt{2}\cdot a$.
15. Odredite površinu lika sa slike.
- A) 11.5, B) 12, C) 12.5, D) 13



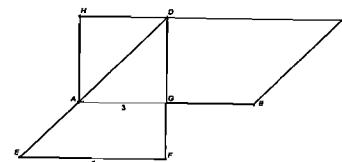
16. Odredite površinu lika sa slike.

- A) 17 B) 18 C) 19 D) 20



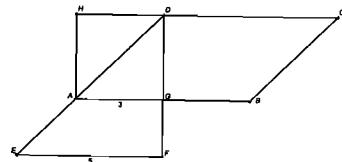
17. Odredite površinu osjenčanog dijela lika sa slike ako znamo da je četverokut $AGDH$ kvadrat, a točka G polovište dužine \overline{AB} .

- A) 20 B) 21.5 C) 22 D) 23



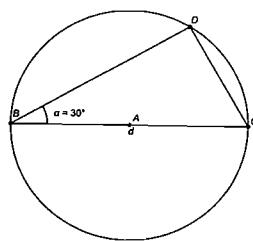
18. Odredite površinu lika sa slike ako znamo da je četverokut $AGDH$ kvadrat, a točka G je polovište dužine \overline{AB} .

- A) 14 B) 16 C) 18 D) 20



19. Odredite opseg i površinu kruga sa slike ako je $|BD| = 6\sqrt{3}$.

- A) $O = 6\pi, P = 36\pi$
 B) $O = 12\pi, P = 36\pi$
 C) $O = 36\pi, P = 12\pi$
 D) $O = 6\pi, P = 12\pi$

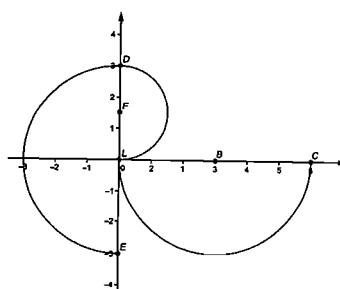


20. Odredite opseg i površinu kruga sa slike iz prethodnog zadatka ako je $|CD| = 7$.

- A) $O = 14\pi, P = 49\pi$ B) $O = 7\pi, P = 14\pi$ C) $O = 49\pi, P = 14\pi$ D) $O = 7\pi, P = 14\pi$

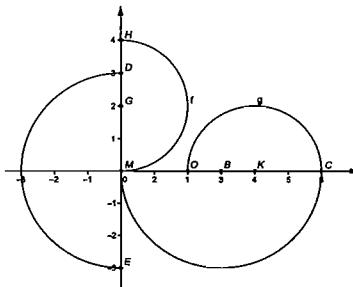
21. Odredite površinu lika sa slike. Rješenje zaokružite na jednu decimalu.

- A) $p = 28.5$ B) $p = 31.8$
 C) $p = 27.3$ D) $p = 30.4$



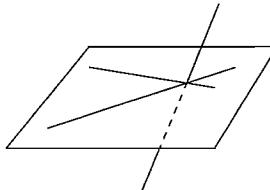
22. Odredite opseg osjenčanog lika sa slike.

- A) $O = 9 + 8\pi$ B) $O = 6 + 10\pi$
 C) $O = 10 + 6\pi$ D) $O = 16\pi$



23. Koja je od navedenih tvrdnji istinita za sliku 4.105.?

- A) Svi su pravci sadržani u ravnini.
 B) Ravnina sadržava dva od tri prikazana pravca.
 C) Na slici su tri usporedna pravca.
 D) Na slici su tri komplanarna pravca.



24. Koja je od navedenih tvrdnji istinita za sliku 4.105.?

- A) Svi su pravci sadržani u ravnini.
 B) Ravnina sadržava jedan od tri prikazana pravca.
 C) Na slici su tri kolinearna pravca.
 D) Na slici su tri nekomplanarna pravca.

25. Svake su četiri točke jedne ravnine:

- A) komplanarne, B) konkurentne, C) kolinearne, D) paralelne.

26. Dva su pravca koja se sijeku:

- A) komplanarni, B) mimoilazni, C) kolinearni, D) paralelni.

27. Tri nekolinearne točke određuju:

- A) ravninu, B) kut, C) pravac, D) prostor.

28. Dva usporedna komplanarna pravca određuju:

- A) ravninu, B) kut, C) pravac, D) prostor.

29. Ortogonalna projekcija visine uspravnog stoča na njegovu kružnu osnovku jest:

- A) točka, B) promjer osnovke, C) polumjer osnovke, D) kružni luk.

30. Ortogonalna projekcija bočnog brida uspravne trostrane piramide na njegovu osnovku jest:

- A) točka, B) težišnica, C) $1/3$ težišnice, D) $2/3$ težišnice.

31. Oplošje kocke čiji je obujam 125 cm^3 iznosi:

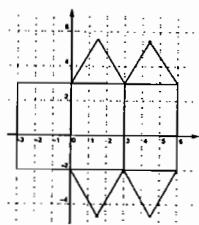
- A) 125 cm^2 , B) 100 cm^2 , C) 150 cm^2 , D) 75 cm^2 .

32. Obujam kocke čije je oplošje 96 cm^2 iznosi:

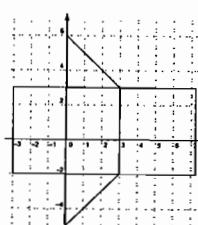
- A) 72 cm^3 , B) 36 cm^3 , C) 96 cm^3 , D) 64 cm^3 .

33. Oplošje kvadra iznosi 352 cm^2 . Kolika je visina toga kvadra ako su duljine njegovih bridova $a = 4 \text{ cm}$ i $b = 12 \text{ cm}$?
- A) 7 B) 8 C) 9 D) 8.5
34. Oplošje kvadra iznosi 286 cm^2 . Kolika je visina toga kvadra ako su mu poznate duljine bridova $a = 5 \text{ cm}$ i $b = 7 \text{ cm}$?
- A) 7 B) 8 C) 9 D) 8.5
35. Koliko iznosi obujam kocke koja ima oplošje jednako oplošju kvadra dimenzija $a = 6 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ i $c = 9 \text{ cm}$?
- A) 33 cm^3 B) $33\sqrt{33} \text{ cm}^3$ C) $54\sqrt{8} \text{ cm}^3$ D) 99 cm^3
36. Koliko iznosi obujam kocke koja ima oplošje jednako oplošju kvadra dimenzija $a = 8 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ i $c = 6 \text{ cm}$?
- A) 30 cm^3 B) 144 cm^3 C) $30\sqrt{30} \text{ cm}^3$ D) 90 cm^3
37. Ako je duljina prostorne dijagonale kocke $9\sqrt{3} \text{ cm}$, koliki joj je obujam?
- A) 729 cm^3 B) $729\sqrt{3} \text{ cm}^3$ C) $81\sqrt{3} \text{ cm}^3$ D) 81 cm^3
38. Ako je duljina prostorne dijagonale kocke $5\sqrt{3} \text{ cm}$, koliki joj je obujam?
- A) $125\sqrt{3} \text{ cm}^3$ B) 125 cm^3 C) 625 cm^3 D) $25\sqrt{3} \text{ cm}^3$
39. Odredite površinu lika koji zatvaraju prostorna dijagonala kvadra, dijagonala osnovke i bočni brid ako su duljine bridova $a = 8 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ i $c = 9 \text{ cm}$.
- A) 40 cm^2 B) 45 cm^2 C) 60 cm^2 D) 50 cm^2
40. Odredite površinu lika koji zatvaraju prostorna dijagonala kvadra, dijagonala osnovke i bočni brid ako su duljine bridova $a = 24 \text{ cm}$, $b = 7 \text{ cm}$ i $c = 8 \text{ cm}$.
- A) 110 cm^2 B) 80 cm^2 C) 120 cm^2 D) 100 cm^2
41. Koja od ponuđenih mreža u koordinatnoj ravnini predočuje mrežu uspravne pravilne četverostrane prizme kojoj je duljina osnovnog brida 3 cm , a visina 5 cm ?

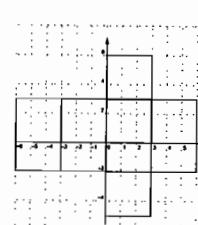
A)



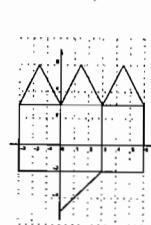
B)



C)



D)



42. Koja od ponuđenih mreža, iz prethodnog zadatka, predočuje mrežu uspravne trostrane prizme?

A) mreža po A) B) mreža po B) C) mreža po C) D) mreža po D)

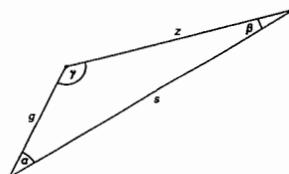
43. Odredite obujam piramide čija je osnovka pravokutan trokut. Katete trokuta imaju duljine 5 cm i 8 cm , a visina piramide je 12 cm .

A) 60 cm^3 B) 70 cm^3 C) 80 cm^3 D) 90 cm^3

- 44.** Odredite obujam piramide čija je osnovka pravokutan trokut. Katete trokuta duge su 7 cm i 3 cm, a visina piramide je 10 cm.
 A) 35 cm^3 B) 40 cm^3 C) 38 cm^3 D) 49 cm^3
- 45.** Koliki polumjer ima kugla kojoj je obujam $972\pi \text{ cm}^3$?
 A) 7 cm B) 8 cm C) 6 cm D) 9 cm
- 46.** Koliki polumjer ima kugla kojoj je obujam $2\ 304\pi \text{ cm}^3$?
 A) 7 cm B) 12 cm C) 6 cm D) 9 cm
- 47.** Pravilna četverostrana piramida ima oplošje šest puta veće od površine osnovke. Omjer duljine brida i oplošja piramide iznosi:
 A) $\frac{1}{6a}$, B) $\frac{1}{6}a$, C) $6a$, D) $\frac{1}{6}$.
- 48.** Pravilna četverostrana piramida ima obujam četiri puta veći od osnovke. Visina piramide iznosi:
 A) $\frac{1}{4}$, B) $\frac{1}{12}$, C) 12, D) $\frac{4}{3}$.
- 49.** Odredite obujam pravilne uspravne četverostrane piramide ako joj je visina 10 cm, a kut što ga bočni brid zatvara s ravninom osnovke ima mjeru 55° . Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.
 A) 300 cm^3 B) 327 cm^3 C) 342 cm^3 D) 320 cm^3
- 50.** Odredite obujam pravilne uspravne šesterostранe piramide ako joj je visina 9 cm, a kut koji bočni brid zatvara s ravninom osnovke ima mjeru 48° . Rezultat zaokruži na najbliži cijeli broj.
 A) 500 cm^3 B) 530 cm^3 C) 550 cm^3 D) 512 cm^3
- 51.** Pravilna uspravna šesterostранa prizma visine 7 cm i duljine osnovnog brida 4 cm presećena je ravnom koja prolazi duljom dijagonalom jedne osnovice i bridom druge. Površina presjeka zaokružena na jednu decimalu jest:
 A) 50 cm^2 , B) 46.9 cm^2 , C) 46.86 cm^2 , D) 47 cm^2 .
- 52.** Pravilna uspravna šesterostранa prizma visine 12 cm i duljine osnovnog brida 7 cm presećena je ravnom koja prolazi duljom dijagonalom jedne osnovice i bridom druge. Površina presjeka zaokružena na jednu decimalu iznosi:
 A) 141 cm^2 , B) 141.17 cm^2 , C) 141.2 cm^2 , D) 141.1 cm^2 .
- 53.** Površina osnovke uspravnog stošca je $256\pi \text{ cm}^2$, a visina stošca iznosi 24 cm. Polegnemo li stožac tako da mu izvodnica dodiruje horizontalnu podlogu, najviša će točka stošca biti udaljena od te podloge za:
 A) 27.7 cm, B) 32 cm, C) 25 cm, D) 26.6 cm.
- 54.** Površina osnovke uspravnog stošca je $1\ 849\pi \text{ cm}^2$, a visina stošca iznosi 70 cm. Polegnemo li stožac tako da mu izvodnica dodiruje horizontalnu podlogu, tada će najviša točka stošca biti udaljena od te podloge za:
 A) 73.3 cm, B) 822 cm, C) 77 cm, D) 91.1 cm.
- 55.** Valjku obujma $392\pi \text{ cm}^3$ i visine 8 cm povećamo polumjer za 3 cm. Koliko je oplošje novoga valjka?
 A) $519\pi \text{ cm}^2$ B) 360 cm^2 C) $360\pi \text{ cm}^2$ D) $800\pi \text{ cm}^2$

56. Valjku obujma $99\pi \text{ cm}^3$ i visine 11 cm povećamo polumjer za 2 cm. Koliko je oplošje novoga valjka?
- A) $50\pi \text{ cm}^2$ B) $160\pi \text{ cm}^2$ C) $110\pi \text{ cm}^2$ D) $143\pi \text{ cm}^2$
57. Ako valjak promjera 18 cm i visine 24 cm presječemo ravninom okomitom na osnovku valjka tako da ga ravnina raspolaža, koliko će biti oplošje novog tijela?
- A) 1500 cm^2 B) 1425 cm^2 C) 1365 cm^2 D) 1280 cm^2
58. Ako valjak promjera 30 cm i visine 42 cm presječemo ravninom okomitom na osnovku valjka tako da ga ravnina raspolaža, koliko će iznositi oplošje novog tijela?
- A) 4000 cm^2 B) 3946 cm^2 C) 4126 cm^2 D) 2686 cm^2
59. U trokutu na slici stranicu n možemo izraziti kao:
- A) $n = \frac{m}{\cos \alpha}$, B) $n = m \cdot \sin \alpha$,
 C) $n = m \cdot \operatorname{tg} \beta$, D) $n = m \cdot \operatorname{ctg} \beta$.
-
60. U trokutu na slici iz prethodnog zadatka stranicu k možemo izraziti kao:
- A) $k = n \cdot \sin \beta$, B) $k = n \cdot \sin \alpha$, C) $k = n \cdot \operatorname{tg} \beta$, D) $k = n \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.
61. Kako biste odredili duljinu osnovice m jednakokračnog trokuta ako znamo duljinu kraka n i mjeru kuta α nasuprot osnovici?
- A) $m = 2n \sin \alpha$ B) $m = 2n \sin \frac{\alpha}{2}$ C) $m = n \cos \alpha$ D) $m = 2 \sin \cos \frac{\alpha}{2}$
62. Kako biste odredili duljinu kraka v jednakokračnog trokuta ako znamo duljinu osnovice u i mjeru kuta α nasuprot osnovici?
- A) $v = u \cos \alpha$ B) $v = 2u \sin \frac{\alpha}{2}$ C) $v = \frac{u}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ D) $v = 2u \cos \frac{\alpha}{2}$
63. Kako biste odredili tupi kut (β) paralelograma ako su poznate duljina stranice b i visina na stranicu a (h)?
- A) $\alpha = 180^\circ - \arcsin \frac{b}{h}$ B) $\alpha = 180^\circ - \arccos \frac{b}{h}$
 C) $\alpha = 180^\circ - \arcsin \frac{h}{b}$ D) $\alpha = 180^\circ - \arccos \frac{h}{b}$
64. Kako biste odredili šiljasti kut (α) paralelograma ako su poznate duljina stranice a i visina na stranicu b (v)?
- A) $\alpha = \arcsin \frac{v}{a}$ B) $\alpha = \arccos \frac{v}{a}$ C) $\alpha = \arcsin \frac{a}{v}$ D) $\alpha = \arccos \frac{a}{v}$
65. U pravokutnom trokutu ABC (c – hipotenuza), odredite vrijednost $\operatorname{tg} \alpha$ ako je $|AB| = 8$ i $|AC| = 3$.
- A) $\frac{55}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{\sqrt{55}}{3}$ C) $\frac{55}{3}$ D) $\frac{3}{\sqrt{55}}$
66. U pravokutnom trokutu ABC (c – hipotenuza) odredite vrijednost $\cos \alpha$, ako je $|AB| = 12$ i $|AC| = 5$.
- A) $\frac{119}{12}$ B) $\frac{12}{\sqrt{119}}$ C) $\frac{\sqrt{119}}{12}$ D) $\frac{5}{12}$

67. Odredite mjeru kuta u vrhu A pravokutnog trokuta ABC (c – hipotenuza) ako je $|AB| = 15$ i $|BC| = 7$.
- A) 0.46667° B) $62^\circ 10' 54''$ C) $27^\circ 81' 81''$ D) $27^\circ 49' 5''$
68. Odredite mjeru kuta u vrhu B pravokutnog trokuta ABC (c – hipotenuza) ako je $|AC| = 21$ i $|BC| = 18$.
- A) $49^\circ 23' 55''$ B) $49^\circ 39' 87''$ C) $40^\circ 36' 5''$ D) 40.6°
69. Odredite opseg pravokutnika ako znamo da mu se dijagonale, čije su duljine $d = 22$ cm, sijeku pod kutem od 42° .
- A) 60.3 cm B) 28.4 cm C) 161.95 cm D) 56.85 cm
70. Odredite opseg pravokutnika ako znamo da mu se dijagonale, čija je duljina $d = 5.5$ cm, sijeku pod kutem od 63° .
- A) 10.3 cm B) 13.48 cm C) 15.13 cm D) 17.5 cm
71. Odredite površinu pravilnog deseterokuta ako mu je duljina brida osnovke 5 cm.
- A) 108.25 cm 2 B) 163.5 cm 2 C) 192.36 cm 2 D) 181.64 cm 2
72. Odredite površinu pravilnog deseterokuta ako mu je duljina brida osnovke 7 cm.
- A) 377 cm 2 B) 116.5 cm 2 C) 72 cm 2 D) 89 cm 2
73. Koliki je polumjer kružnice ako znamo da je duljina jedne njezine tetive 8 cm, a pripadajući obodni kut 56° ?
- A) 4.31 cm B) 4.82 cm C) 9.64 cm D) 7.15 cm
74. Koliki je polumjer kružnice ako znamo da je duljina jedne njezine tetive 12 cm, a pripadajući obodni kut 78° ?
- A) 6.56 cm B) 8.86 cm C) 6.13 cm D) 12.27 cm
75. Odredite površinu jednakokračnog trokuta, ako znamo da je kut nasuprot osnovici 40° , a visina na krak ima duljinu 5 cm.
- A) 17.4 cm 2 B) 13.3 cm 2 C) 22.5 cm 2 D) 19.45 cm 2
76. Odredite površinu jednakokračnog trokuta ako znamo da je kut uz osnovicu 30° , a visina na krak ima duljinu 8 cm.
- A) 36.95 cm 2 B) 64 cm 2 C) 21.33 cm 2 D) 42.38 cm 2
77. Izračunajte obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina osnovnog brida 13 cm, a bočni brid s ravninom osnovke zatvara kut od 59° .
- A) 861.83 cm 3 B) $2\ 585.48$ cm 3 C) $1\ 292.74$ cm 3 D) 938.42 cm 3
78. Izračunajte obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina osnovnog brida 7 cm, a bočni brid s ravninom osnovke zatvara kut od 73° .
- A) 793.3 cm 3 B) 264.43 cm 3 C) 396.65 cm 3 D) 425.45 cm 3
79. Za trokut na slici vrijedi tvrdnja:
- A) $z = \frac{s \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$, B) $z = \frac{g \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$,
- C) $z = \frac{s \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$, D) $z = \frac{g \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$.



80. Za trokut na slici iz prethodnog zadatka vrijedi tvrdnja:
- A) $s = \sqrt{g^2 + z^2 + 2zg \cos \gamma}$, B) $s = \sqrt{z^2 + g^2 - \cos \gamma}$,
 C) $s = \sqrt{z^2 - g^2 - 2zg \cos \gamma}$, D) $s = \sqrt{g^2 + z^2 - 2zg \cos \gamma}$.
81. Za kut β paralelograma $ABCD$, gdje je kut β nasuprot dijagonalni f , vrijedi:
- A) $\cos \beta = \frac{b}{f}$, B) $\cos \beta = \frac{a^2 - b^2 + f^2}{2ab}$, C) $\sin \beta = \frac{a}{f}$, D) $\beta = \arccos \frac{a^2 + b^2 - f^2}{2ab}$.
82. Za kut α paralelograma, gdje je kut α nasuprot dijagonale e , vrijedi:
- A) $\sin \alpha = \frac{b}{e}$, B) $\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$, C) $\cos \alpha = \frac{a}{e}$, D) $\cos \alpha = \frac{a^2 - b^2 + e^2}{2ab}$.
83. Zadan je trokut stranica $a = 32$ cm, $c = 25$ cm i kut $\gamma = 49^\circ$. Kut β iznosi:
- A) $55^\circ 58' 38''$, B) $75^\circ 2' 27''$, C) $0^\circ 57' 57''$, D) $51^\circ 22' 31''$.
84. Zadan je trokut stranica $a = 17$ cm, $c = 20$ cm i kut $\gamma = 61^\circ$. Kut β iznosi:
- A) $48^\circ 2' 41''$, B) $70^\circ 58' 33''$, C) $0^\circ 44' 36''$, D) $49^\circ 33' 20''$.
85. Koliko iznosi veći kut paralelograma ako znamo da su duljine stranica $a = 7$ cm, $b = 14$ cm, a dulja dijagonala ima duljinu $e = 20$ cm?
- A) $\beta = 37^\circ 44' 18''$ B) $\beta = 147^\circ 4' 26''$ C) $\beta = 143^\circ 24' 23''$ D) $\beta = 142^\circ 15' 43''$
86. Koliki je veći kut paralelograma ako znamo da su duljine stranica $a = 18$ cm, $b = 23$ cm, a dulja dijagonala ima duljinu $e = 30$ cm?
- A) $\beta = 120^\circ 24' 23''$ B) $\beta = 93^\circ 25' 40''$ C) $\beta = 36^\circ 35' 37''$ D) $\beta = 93^\circ 15' 15''$
87. Odredite površinu kvadrata konstruiranoga nad stranicom b trokuta kojemu su kutovi $\gamma = 61^\circ 12'$ i $\beta = 45^\circ 15'$, te stranica $a = 28$ cm. Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.
- A) 620 cm^2 B) 784 cm^2 C) 430 cm^2 D) 450 cm^2
88. Odredite površinu kvadrata konstruiranoga nad stranicom c trokuta kojemu su kutovi $\alpha = 85^\circ 42'$ i $\gamma = 25^\circ 15'$, te stranica $b = 85$ cm. Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.
- A) $1\,507 \text{ cm}^2$ B) $1\,245 \text{ cm}^2$ C) $1\,437 \text{ cm}^2$ D) $1\,573 \text{ cm}^2$
89. Odredite polujmer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice $a = 13$ cm i $b = 17$ cm zatvaraju kut od $49^\circ 49'$.
- A) 9.31 cm B) 8.6 cm C) 10.5 cm D) 9.9 cm
90. Odredite polujmer kružnice opisane trokutu ako znamo da stranice $a = 21$ cm i $b = 32$ cm zatvaraju kut od $56^\circ 56'$.
- A) 15.5 cm B) 16.8 cm C) 16.14 cm D) 12.37 cm
91. Kolika je površina kruga upisanog trokutu stranice $a = 41$ cm i kutovima $\beta = 52^\circ$ i $\gamma = 35^\circ$ uz nju?
- A) 457.15 cm^2 B) 193.67 cm^2 C) 136.68 cm^2 D) 293.67 cm^2
92. Kolika je površina kruga upisanog trokutu stranice $a = 37$ cm i kutovima $\beta = 82^\circ$ i $\gamma = 75^\circ$ uz nju?
- A) 495.23 cm^2 B) 227.4 cm^2 C) 367.14 cm^2 D) 714.42 cm^2
93. Ako najkrća izvodnica kosog stoča s najduljom zatvara kut od 47° , odredite površinu osnovke. Izvodnice imaju duljine $s_1 = 15$ cm i $s_2 = 27$ cm.
- A) 315.4 cm^2 B) 100.39 cm^2 C) 225.7 cm^2 D) 334.2 cm^2

94. Ako najkraća izvodnica kosog stošca s najdužjom zatvara kut od 33° , odredite površinu osnovke. Izvodnice imaju duljine $s_1 = 27 \text{ cm}$ i $s_2 = 50 \text{ cm}$.

A) 742.11 cm^2 B) 757.59 cm^2 C) 378.79 cm^2 D) 241.15 cm^2

95. U koordinatnom sustavu skicirajte pravokutnik s vrhovim čije su koordinate $A(9, 3)$, $B(4, 3)$, $C(4, -1)$ te mu odredite vrh D . Koordinate vrha D jesu:

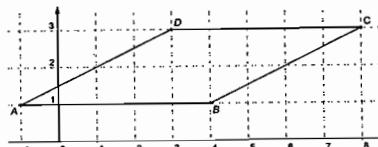
A) $(-1, 9)$, B) $(3, 4)$, C) $(9, -1)$, D) $(-1, 3)$.

96. U koordinatnom sustavu skicirajte pravokutnik s vrhovima čije su koordinate $A(-6, 3)$, $B(-6, -4)$, $C(-3, -4)$ te mu odredite vrh D . Koordinate vrha D jesu:

A) $(-3, -6)$, B) $(-3, 3)$, C) $(2, 4)$, D) $(3, 6)$.

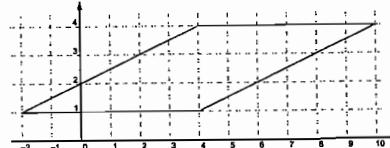
97. Kolika je površina paralelograma sa slike?

A) $P = 10 \text{ kv. jed.}$
B) $P = 12 \text{ kv. jed.}$
C) $P = 6\sqrt{5} \text{ kv. jed.}$
D) $P = 3\sqrt{5} \text{ kv. jed.}$



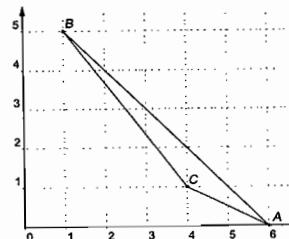
98. Kolika je površina paralelograma sa slike?

A) $P = 9 \text{ kv. jed.}$
B) $P = 18 \text{ kv. jed.}$
C) $P = 9\sqrt{2} \text{ kv. jed.}$
D) $P = 6\sqrt{2} \text{ kv. jed.}$



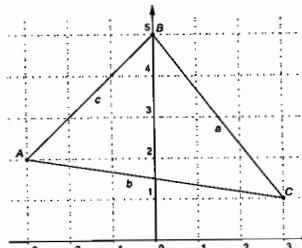
99. Opseg trokuta sa slike iznosi:

A) $3\sqrt{5} + 5$,
B) $\sqrt{5} + 10\sqrt{2}$,
C) $\sqrt{5} + 5\sqrt{2} + 5$,
D) 17.



100. Opseg trokuta sa slike iznosi:

A) 16,
B) $3\sqrt{2} + 5 + \sqrt{37}$,
C) $15\sqrt{2} + \sqrt{37}$,
D) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$.



101. Kolika je površina kvadrata ako su mu $A(6, 11)$ i $B(12, 3)$ susjedni vrhovi?

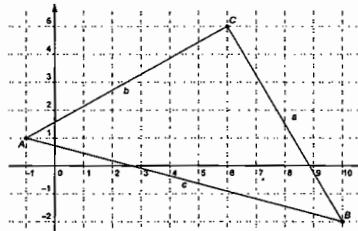
A) 7 kv. jed. B) 5 kv. jed. C) 100 kv. jed. D) 16 kv. jed.

102. Kolika je površina kvadrata ako su mu $A(20, -20\sqrt{14})$ i $C(-10, 3\sqrt{14})$ suprotni vrhovi?

- A) 7 B) 15 C) 125 D) 625

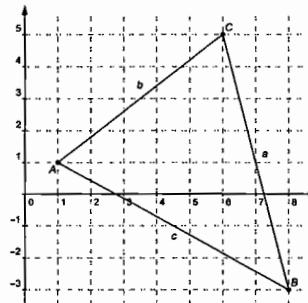
103. Kakav je trokut sa slike?

- A) raznostraničan
B) jednakokračan
C) jednakostraničan
D) tupokutan



104. Kakav je trokut sa slike?

- A) raznostraničan
B) jednakokračan
C) jednakostraničan
D) pravokutan



105. Koje su kordinate četvrtog vrha pravokutnika ako su koordinate ostalih triju vrhova $K(6, 2)$, $L(10, -2)$ i $M(0, -4)$?

- A) $(2, -6)$ B) $(4, -7)$ C) $(4, -8)$ D) $(14, 4)$

106. Koje su kordinate četvrtog vrha pravokutnika ako su koordinate ostalih triju vrhova $K(1, -1)$, $L(10, 0)$ i $M(6, 4)$?

- A) $(-2, 3)$ B) $(3, 5)$ C) $(4, -6)$ D) $(5, -5)$

107. Odredite točku B ako su zadane točka $A(7, 15)$ i polovište $P(4, 12)$ dužine \overline{AB} .

- A) $(5.5, 13.5)$ B) $(3, 3)$ C) $(1, 9)$ D) $(2, 8)$

108. Odredite točku B ako je zadana točka $A(2, -3)$ i $P(11, 4)$ koja se nalazi u polovištu dužine \overline{AB} .

- A) $(20, 11)$ B) $(6.5, -4.5)$ C) $(4.5, -1)$ D) $(-6, 4)$

109. Na osi apscisa nadite točku koja je jednakoj udaljena od točaka $M(-2, 5)$ i $N(3, -2)$.

- A) $(-2, 0)$ B) $\left(\frac{-8}{5}, 0\right)$ C) $\left(0, \frac{8}{5}\right)$ D) $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$

110. Na osi apscisa nadite točku koja je jednakoj udaljena od točaka $M(4, 7)$ i $N(-6, -3)$.

- A) $(1, 0)$ B) $(-1, 0)$ C) $(0, 1)$ D) $(0, -1)$

111. Odredite površinu trokuta čije su koordinate $A(13, 2)$, $B(8, -3)$ i $C(4, 1)$.

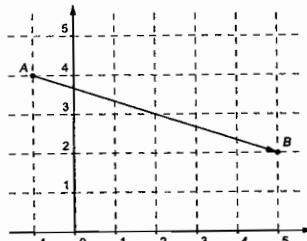
- A) 16 kv. jed. B) $7\sqrt{2}$ kv. jed. C) 20 kv. jed. D) 24 kv. jed.

112. Odredite površinu trokuta čije su koordinate $A(1, 3)$, $B(6, -2)$ i $C(12, 4)$.

- A) 20 kv. jed. B) 25 kv. jed. C) 35 kv. jed. D) 30 kv. jed.

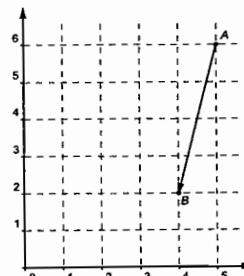
113. Na slici je prikazan vektor:

- A) $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$,
B) $\overrightarrow{AB} = -6\vec{i} + 2\vec{j}$,
C) $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$,
D) $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.



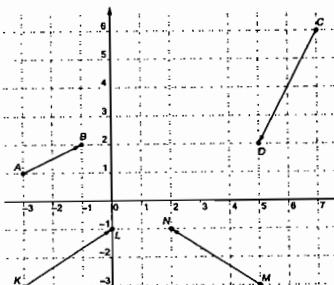
114. Na slici je prikazan vektor:

- A) $\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 4\vec{j}$,
B) $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 4\vec{j}$,
C) $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - \vec{j}$,
D) $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + \vec{j}$.



115. Koji od vektora na slici predočuje vektor $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$?

- A) \overrightarrow{AB}
B) \overrightarrow{CD}
C) \overrightarrow{MN}
D) \overrightarrow{KL}

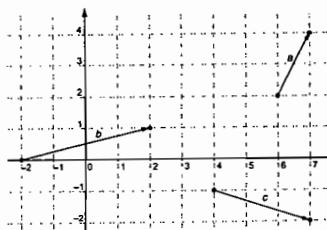


116. Koji od vektora na slici iz prethodnog zadatka predočuje vektor $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$?

- A) \overrightarrow{AB} B) \overrightarrow{CD} C) \overrightarrow{MN} D) \overrightarrow{KL}

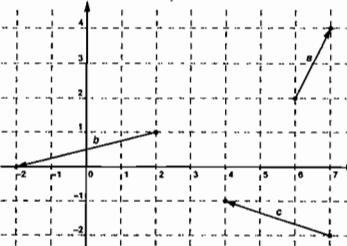
117. Za vektore \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} sa slike vrijedi:

- A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$,
B) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$,
C) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$,
D) $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$.



118. Za vektore \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} sa slike vrijedi:

- A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$,
- B) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$,
- C) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$,
- D) $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$.



119. Neka su zadani vektori $\vec{a} = 4\vec{i} - 6\vec{j}$ i $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Koliko iznosi $3\vec{a} - 2\vec{b}$?

- A) $-16\vec{i} - 16\vec{j}$
- B) $16\vec{i} - 20\vec{j}$
- C) $8\vec{i} - 16\vec{j}$
- D) $-8\vec{i} - 16\vec{j}$

120. Neka su zadani vektori $\vec{a} = 8\vec{i} + 12\vec{j}$ i $\vec{b} = -\vec{i} - 5\vec{j}$. Koliko iznosi $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$?

- A) $7\vec{i} + 21\vec{j}$
- B) $-7\vec{i} - 2\vec{j}$
- C) $3\vec{i} - 9\vec{j}$
- D) $\vec{i} - 9\vec{j}$

121. Odredite duljinu vektora $\vec{a} = -6\vec{i} + 8\vec{j}$.

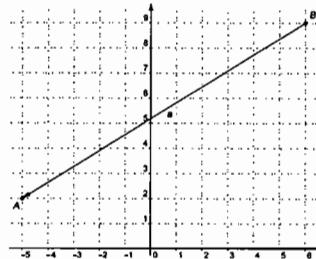
- A) 7
- B) 10
- C) 5
- D) 12

122. Odredite duljinu vektora $\vec{a} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$.

- A) 14
- B) 12
- C) 19
- D) 13

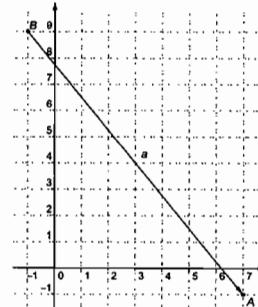
123. Odredite duljinu vektora \overline{BA} sa slike.

- A) $\sqrt{170}$
- B) 10
- C) 16
- D) 20



124. Odredite duljinu vektora \overline{BA} sa slike.

- A) 12
- B) $\sqrt{164}$
- C) 13
- D) 15



125. Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ i $\vec{b} = -4\vec{i} + \vec{j}$ iznosi:

- A) -16,
- B) -30,
- C) 13,
- D) 11.

126. Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = -4\vec{i} + 7\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j}$ iznosi:

- A) -16,
- B) -30,
- C) -13,
- D) 10.

127. U paralelogramu $ABCD$ poznate su koordinate vrhova $A(-3, 4)$, $B(2, 2)$ i $D(5, 7)$. Odredi koordinate vrha C .

- A) $(5, -6)$ B) $(5, 7)$ C) $(3, 4)$ D) $(10, 5)$

128. U paralelogramu $ABCD$ poznate su koordinate vrhova $A(7, 3)$, $B(4, 9)$ i $D(-2, 1)$. Odredi koordinate vrha C .

- A) $(13, 11)$ B) $(-5, 7)$ C) $(-4, 6)$ D) $(-4, 8)$

129. Odredite kut među vektorima $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ te rješenje zaokružite na najbliži cijeli broj.

- A) 165° B) 90° C) 135° D) 161°

130. Odredite kut među vektorima $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ te rješenje zaokružite na najbliži cijeli broj.

- A) 25° B) 23° C) 41° D) 28°

131. Zadan je trokut ΔABC koordinatama svojih vrhova $A(-2, -1)$, $B(3, 2)$ i $C(3, 4)$. Koliko iznosi kut β ?

- A) $120^\circ 57'49''$ B) $98^\circ 20'12''$ C) $82^\circ 30'$ D) $105^\circ 18'15''$

132. Zadan je trokut ΔABC koordinatama svojih vrhova $A(3, 7)$, $B(1, 4)$ i $C(-5, -2)$. Koliko iznosi kut α ?

- A) $120^\circ 57'49''$ B) $7^\circ 56'37''$ C) $8^\circ 12'25''$ D) 0°

133. Pravac $y = \frac{1}{5}x - 2$ siječe koordinatne osi u točkama:

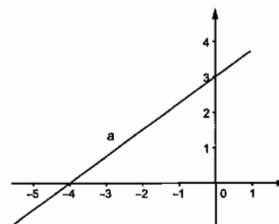
- A) $(2, 0)$ i $(0, -5)$, B) $(-10, 0)$ i $(0, -2)$, C) $(10, 0)$ i $(0, -2)$, D) $(5, 0)$ i $(0, -2)$.

134. Pravac $y = \frac{1}{2}x - 5$ siječe koordinatne osi u točkama:

- A) $(2, 0)$ i $(0, -5)$, B) $(10, 0)$ i $(0, -5)$, C) $(10, 0)$ i $(0, 2)$, D) $(5, 0)$ i $(0, -2)$.

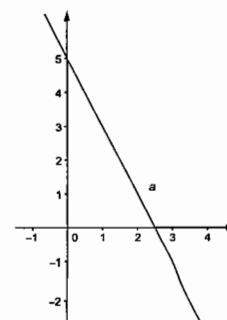
135. Na grafu je prikazan pravac a čija je jednadžba:

- A) $3x - 4y + 12 = 0$,
B) $-3x + 4y + 12 = 0$,
C) $4x + 3y + 9 = 0$,
D) $-4x + 3y - 9 = 0$



136. Na slici je prikazan pravac a čija je jednadžba:

- A) $x - 2y - 5 = 0$,
B) $2x - y - 5 = 0$,
C) $2x + 5y - 1 = 0$,
D) $2x + y - 5 = 0$.



137. Pravac p zadan je jednadžbom $y = \frac{1}{2}x + 3$. Koji od ponuđenih pravaca siječe pravac p u točki $T(4, y)$?

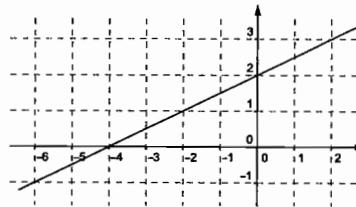
- A) $-3x + 7y = -5$ B) $3x - 8y = -4$ C) $3x - 2y = 2$ D) $x - 3y = -4$

138. Pravac p zadan je jednadžbom $y = \frac{1}{2}x + 4$. Koji od ponuđenih pravaca siječe pravac p u točki $T(-4, y)$?

- A) $-3x + 7y = -5$ B) $3x - 8y = -4$ C) $3x + 7y = 12$ D) $x - 3y = -10$

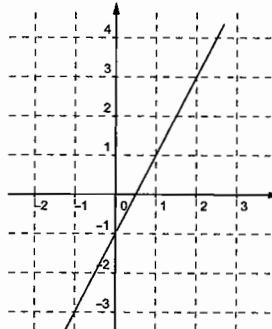
139. Jednadžba pravca koji je okomit na prikazani pravac i prolazi točkom $(0, 5)$ jest:

- A) $y = \frac{1}{2}x + 5$,
 B) $y = 2x + 5$,
 C) $y = -2x + 5$,
 D) $y = -\frac{1}{2}x + 5$.



140. Jednadžba pravca koji je okomit na prikazani pravac i prolazi točkom $(0, 5)$ jest:

- A) $y = \frac{1}{2}x + 5$,
 B) $y = 2x + 5$,
 C) $y = -2x + 5$,
 D) $y = -\frac{1}{2}x + 5$.



141. Sjecište pravaca $y = 3x - 2$ i $y = -4x - 9$ nalazi se u točki:

- A) $(1, 4)$, B) $(2, 3)$, C) $(-1, -5)$, D) $(1, 5)$.

142. Sjecište pravaca $y = 2x - 1$ i $y = -x + 5$ nalazi se u točki:

- A) $(1, 4)$, B) $(2, 3)$, C) $(-1, -5)$, D) $(1, 5)$.

143. Koja točka pripada pravcu $y = 3x + 2$?

- A) $(1, -3)$ B) $(-2, 4)$ C) $(3, 11)$ D) $(-4, -1)$

144. Koja točka pripada pravcu $y = -2x + 5$?

- A) $(1, 3)$ B) $(-2, 4)$ C) $(3, 2)$ D) $(-4, -1)$

145. Jednadžba pravca koji prolazi točkama $A(-2, 5)$ i $B(1, 5)$ jest:

- A) $x = -2$, B) $x = 1$, C) $y = 0$, D) $y = 5$.

146. Jednadžba pravca koji prolazi točkama $A(-2, 3)$ i $B(-2, 5)$ jest:

- A) $x = -2$, B) $x = 1$, C) $y = 0$, D) $y = 3$.

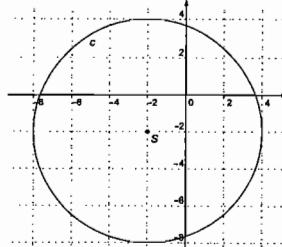
147. Površina trokuta što ga pravac $3x + 4y + 12 = 0$ zatvara s koordinatnim osima iznosi:

- A) 2 kv. jed., B) 3 kv. jed., C) 6 kv. jed., D) 5 kv. jed.

- 148.** Površina trokuta što ga pravac $-x - 2y + 6 = 0$ zatvara s koordinatnim osima iznosi:
- A) 6 kv. jed., B) 9 kv. jed., C) 12 kv. jed., D) 5 kv. jed.
- 149.** Koji od pravaca prolazi točkama $A(4, 1)$ i $B(6, -1)$?
- A) $y = 5x + 1$ B) $y = -x + 5$ C) $y = 3x - 1$ D) $y = 4x$
- 150.** Koji od pravaca prolazi točkama $A(-3, -10)$ i $B(4, 11)$?
- A) $y = 5x + 1$ B) $y = -x + 5$ C) $y = 3x - 1$ D) $y = 4x$
- 151.** Pravac p zadan je jednadžbom $3x - y - 6 = 0$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi jest:
- A) 9, B) 6, C) $3\sqrt{5}$, D) $2\sqrt{10}$.
- 152.** Pravac p zadan je jednadžbom $4x + 2y - 12 = 0$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi jest:
- A) 9, B) 6, C) $3\sqrt{5}$, D) $2\sqrt{3}$.
- 153.** Koliki je koeficijent smjera pravca određenog točkama $A(2, -3)$ i $B(-4, 1)$?
- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) -1 D) $-\frac{2}{3}$
- 154.** Koliki je koeficijent smjera pravca određenog točkama $A(4, -1)$ i $B(-2, 5)$?
- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) -1 D) $-\frac{2}{3}$
- 155.** Jednadžba simetrale dužine \overline{AB} čiji su krajevi točke $A(4, -2)$ i $B(2, 6)$ jest pravac:
- A) $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$, B) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, C) $y = 4x - 10$, D) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$.
- 156.** Jednadžba simetrale dužine \overline{AB} čiji su krajevi točke $A(2, 1)$ i $B(4, 5)$ jest pravac:
- A) $y = 2x + 6$, B) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, C) $y = -x - 7$, D) $y = -x + 5$.
- 157.** Koji od ponuđenih pravaca zatvara s pravcem $y = -\frac{1}{2}x - 3$ kut od 45° ?
- A) $y = -x + 3$ B) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ C) $y = -3x - 5$ D) $y = -2x - 17$
- 158.** Koji od ponuđenih pravaca $y = \frac{2}{3}x + 1$ zatvara s pravcem kut od 45° ?
- A) $y = -x + 3$ B) $y = -\frac{1}{5}x + 1$ C) $y = 2x - 5$ D) $y = -2x - 17$
- 159.** Pravac p okomit je na $y = \frac{1}{3}x - 12$ i prolazi točkom $(4, 2)$. Pravac p je:
- A) $y = 3x - 10$, B) $y = \frac{1}{3}x - 2$, C) $y = -3x + 14$, D) $y = 3x - 2$.
- 160.** Pravac p okomit je na $y = -3x + 7$ i prolazi točkom $(6, 0)$. Pravac p je:
- A) $y = 3x - 10$, B) $y = \frac{1}{3}x - 2$, C) $y = -3x + 14$, D) $y = 3x - 2$.
- 161.** Kut između pravaca $y = -3x + 1$ i $y = 2x - 1$ iznosi:
- A) 55° , B) 60° , C) 45° , D) 50° .
- 162.** Kut između pravaca $y = -2x + 2$ i $y = 2x + 5$ iznosi:
- A) $53^\circ 7'48''$, B) $83^\circ 7'48''$, C) $91^\circ 6'30''$, D) $76^\circ 12'41''$.

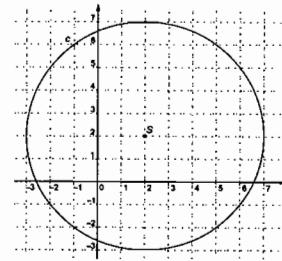
163. Kružnica na slici ima jednadžbu:

- A) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 6$,
- B) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 36$,
- C) $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 36$,
- D) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 6$.



164. Kružnica na slici ima jednadžbu:

- A) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 25$,
- B) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 25$,
- C) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 25$,
- D) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$.



165. Kolika je udaljenost središta kružnice $x^2 + y^2 + 8x + 6y = 0$ od ishodišta koordinatnog sustava?

- A) 5
- B) 12
- C) 14
- D) $\sqrt{13}$

166. Kolika je udaljenost središta kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ od ishodišta koordinatnog sustava?

- A) 4
- B) 6
- C) $\sqrt{5}$
- D) $\sqrt{13}$

167. Koliko zajedničkih točaka imaju kružnica $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 11 = 0$ i pravac:
 $2x - y - 12 = 0$?

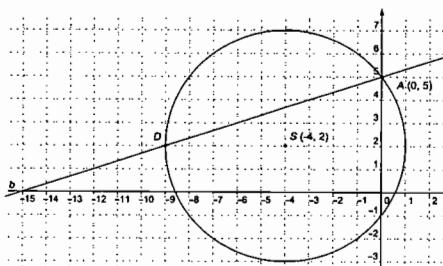
- A) 1
- B) 0
- C) 2
- D) 3

168. Koliko zajedničkih točaka imaju kružnica $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ i pravac:
 $4x + 2y + 1 = 0$?

- A) 1
- B) 0
- C) 2
- D) 3

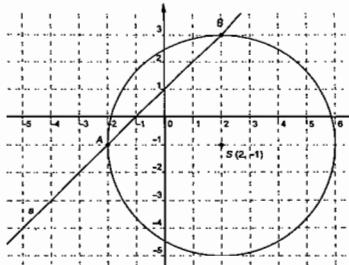
169. Odredite duljinu tetive \overline{AD} sa slike.

- A) 9.49
- B) 8.12
- C) 9.8
- D) 7.5



170. Odredite duljinu tetive \overline{AB} sa slike.

- A) 6.3
- B) 5.66
- C) 5
- D) 5.3



171. Jednadžbom $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$ dana je kružnica. Odredite tangentu na kružnicu u točki $T(0, y)$, $y \neq 0$.

- A) $3x - 2y + 8 = 0$
- B) $-3x - 2y + 8 = 0$
- C) $3x + 2y + 8 = 0$
- D) $2x + 2y + 8 = 0$

172. Jednadžbom $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20$ dana je kružnica. Odredite tangentu na kružnicu u točki $T(0, y)$, $y \neq 0$.

- A) $2x + y - 4 = 0$
- B) $-2x + y - 4 = 0$
- C) $x + 2y + 4 = 0$
- D) $-x + 2y - 4 = 0$

173. Ako je jedno žarište elipse u točki $F(3, 0)$, a mala poluos $b = 2$, odredite jednadžbu elipse.

- A) $4x^2 + 9y^2 = 36$
- B) $13x^2 + 4y^2 = 52$
- C) $4x^2 + 13y^2 = 52$
- D) $9x^2 + 4y^2 = 36$

174. Ako je jedno žarište elipse u točki $F(5, 0)$, a mala poluos $b = 4$, odredite jednadžbu elipse.

- A) $41x^2 + 16y^2 = 656$
- B) $16x^2 + 41y^2 = 656$
- C) $25x^2 + 9y^2 = 225$
- D) $9x^2 + 25y^2 = 225$

175. Žarišta elipse $6x^2 + 12y^2 = 48$ nalaze se u točkama:

- A) $(2, 0)$ i $(-2, 0)$,
- B) $(3, 0)$ i $(-3, 0)$,
- C) $(2, 0)$ i $(0, 2)$,
- D) $(4, 0)$ i $(-4, 0)$.

176. Žarišta elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ nalaze se u točkama:

- A) $(2, 0)$ i $(-2, 0)$,
- B) $(3, 0)$ i $(-3, 0)$,
- C) $(0, 5)$ i $(5, 0)$,
- D) $(5, 0)$ i $(-5, 0)$.

177. Jedna asimptota hiperbole je $y = \frac{1}{2}x$. Ako točka $T(10, 4)$ pripada hiperboli, koliko su međusobno udaljena tjemena hiperbole?

- A) 12
- B) 4
- C) 6
- D) 8

178. Jedna asimptota hiperbole je $y = 2x$. Ako točka $T(4, 4)$ pripada hiperboli, koliko su međusobno udaljena tjemena hiperbole?

- A) $2\sqrt{3}$
- B) $4\sqrt{3}$
- C) 4
- D) 8

179. Ako pravac $y = -6x + 4.5y + 9$ prolazi žarištem parabole $y^2 = 2px$, u kojoj točki s cijelobrojnim koordinatama pravac siječe parabolu?

- A) $S(4, 4)$
- B) $S(5, 5)$
- C) $S(6, 6)$
- D) $S(4, 6)$

180. Ako pravac $p = 4x - 3y = 8$ prolazi žarištem parabole $y^2 = 2px$, u kojoj točki s cijelobrojnim koordinatama pravac siječe parabolu?

- A) $S(5, 5)$
- B) $S(6, 6)$
- C) $S(7, 7)$
- D) $S(8, 8)$

Zadatci kratkih odgovora

Rješenja zadataka potražite na str. 463.

1. Ako su katete pravokutnoga trokuta 5 cm i 12 cm, a hipotenuza njemu sličnog trokuta 39 cm, odredite površinu sličnog trokuta.
2. Ako su katete pravokutnoga trokuta 24 cm i 7 cm, a hipotenuza njemu sličnog trokuta 125 cm, odredite površinu sličnog trokuta.
3. Koliko stranica ima mnogokut kojemu je zbroj unutarnjih kutova $1\ 800^\circ$?
4. Koliko stranica ima mnogokut kojemu je zbroj unutarnjih kutova $2\ 700^\circ$?
5. Polumjer kružnice opisane pravokutnom trokutu jest 7 cm. Hipotenuza njemu sličnog trokuta dvostruko je veća od jedne katete i iznosi 42 cm. Odredite opseg početnoga trokuta.
6. Polumjer kružnice opisane pravokutnom trokutu jest 18 cm. Hipotenuza njemu sličnog trokuta dvostruko je veća od jedne katete i iznosi 90 cm. Odredite opseg početnoga trokuta.
7. U pravokutnom je trapezu kraća osnovica (c) sukladna kraćem kraku. Šiljasti kut trapeza iznosi 30° , a duljina kraće dijagonale $24\sqrt{2}$ cm. Odredite površinu trapeza i duljinu većega kraka.
8. U pravokutnom je trapezu kraća osnovica (c) sukladna kraćem kraku. Šiljasti kut trapeza iznosi 30° , a duljina kraće dijagonale $13\sqrt{2}$. Odredite površinu trapeza i duljinu duljeg kraka.
9. Ako je duljina brida osnovke pravilne uspravne četverostrane piramide 7 cm, koliko iznosi duljina ortogonalne projekcije bočnog brida na ravninu osnovke?
10. Ako je duljina brida osnovke pravilne uspravne trostrane piramide 11 cm, koliko iznosi duljina ortogonalne projekcije bočnog brida na ravninu osnovke?
11. Točka A je od ravnine π udaljena za 25 cm, a točka B za 14 cm. Odredite duljinu ortogonalne projekcije dužine \overline{AB} na ravninu π ako je $|\overline{AB}| = 39$.
12. Točka A je od ravnine π udaljena za 20 cm, a točka B za 22 cm. Odredite duljinu ortogonalne projekcije dužine \overline{AB} na ravninu π ako je $|\overline{AB}| = 7$.
13. Točke A i B udaljene su od ravnine π za 12 cm, ali se nalaze na suprotnim stranama s obzirom na ravninu. Kolika je udaljenost točaka B i C ako je duljina ortogonalne projekcije njihove spojnice na ravninu π $|B_1C_1| = 19$ cm?
14. Točke A i B udaljene su od ravnine π za 43 cm, ali se nalaze na suprotnim stranama s obzirom na ravninu. Kolika je udaljenost točaka B i C ako je duljina ortogonalne projekcije njihove spojnice na ravninu π $|B_1C_1| = 27$ cm?
15. Duljina ortogonalne projekcije dužine \overline{AB} na ravninu π iznosi $|\overline{A_1B_1}| = 15$ cm. Ako je točka A udaljena od ravnine π za 12 cm, a točka B za 17 cm, odredite duljinu dužine \overline{AB} . Duljina ortogonalne projekcije dužine \overline{AB} na ravninu π iznosi $|\overline{A_1B_1}| = 9$ cm.
16. Ako je točka A udaljena od ravnine π za 25 cm, a točka B za 16 cm, odredite duljinu dužine \overline{AB} . Duljina ortogonalne projekcije dužine \overline{AB} na ravninu π iznosi $|\overline{A_1B_1}| = 9$ cm.

17. Neka pravac AB probada ravninu π pod kutom od 30° . Odredite udaljenost točaka A i B ako duljina ortogonalne projekcije dužine \overline{AB} iznosi $34\sqrt{3}$ cm.
18. Neka pravac AB probada ravninu π pod kutom od 60° . Odredite udaljenost točaka A i B ako duljina ortogonalne projekcije dužine \overline{AB} iznosi 17 cm.
19. Obujam kocke čije je oplošje 486 cm^2 iznosi: _____
20. Obujam kocke čije je oplošje 726 cm^2 iznosi: _____
21. Obujam kvadra iznosi $2\ 080 \text{ cm}^3$. Kolika je visina kvadra ako su mu poznate duljine $a = 13 \text{ cm}$ i $b = 8 \text{ cm}$?
22. Obujam kvadra iznosi 990 cm^3 . Kolika je visina kvadra ako su mu poznate duljine $a = 15 \text{ cm}$ i $b = 11 \text{ cm}$?
23. Koliko je oplošje kocke koja ima obujam jednak obujmu kvadra dimenzija $a = 5 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$ i $c = 7 \text{ cm}$?
24. Koliko je oplošje kocke koja ima obujam jednak obujmu kvadra dimenzija $a = 8 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$ i $c = 12 \text{ cm}$?
25. Ako je duljina prostorne dijagonale kocke $21\sqrt{3} \text{ cm}$, koliki joj je obujam?
26. Ako je duljina prostorne dijagonale kocke $15\sqrt{3} \text{ cm}$, koliki joj je obujam?
27. Odredite površinu lika koji zatvaraju dvije usporedne dijagonale kocke ako je duljina brida kocke 33 cm.
28. Odredite površinu lika koji zatvaraju dvije usporedne dijagonale kocke ako je duljina brida kocke 16 cm.
29. Odredite obujam piramide ako je osnovka jednakokračan trokut. Kraci trokuta imaju duljine 6 cm, a osnovica 4 cm. Visina piramide je 13 cm.
30. Odredite obujam piramide ako je osnovka jednakokračan trokut. Kraci trokuta imaju duljine 11 cm, a osnovica 7 cm. Visina piramide je 22 cm.
31. Koliki polumjer ima kugla kojoj je obujam $7\ 776\pi \text{ cm}^3$?
32. Koliki polumjer ima kugla kojoj je obujam $26\ 244\pi \text{ cm}^3$?
33. Pravilna četverostrana piramida ima visinu tri puta veću od brida osnovke. Ako je duljina brida osnovke 5 cm, onda omjer duljine brida i obujma piramide iznosi: _____.
34. Pravilna trostrana piramida ima visinu četiri puta veću od brida osnovke. Ako je duljina brida osnovke 7 cm, onda omjer duljine brida i obujma piramide iznosi: _____.
35. Odredite oplošje piramide ako joj je osnovka jednakostaničan trokut duljine brida 12 cm, a visina 17 cm.
36. Odredite oplošje piramide ako joj je osnovka jednakostaničan trokut duljine brida 5 cm, a visina 8 cm.

37. Odredite obujam pravilne uspravne četverostrane piramide ako joj je visina 4 cm, a kut koji zatvara pobočka s ravninom osnovke ima mjeru 70° .
38. Odredite obujam pravilne uspravne četverostrane piramide ako joj je visina 7.5 cm, a kut koji zatvara pobočka s ravninom osnovke ima mjeru 30° .
39. Pravilna uspravna šesterostранa prizma visine 17 cm i duljine osnovnog brida 4 cm presečena je ravnom koja prolazi duljom dijagonalom jedne osnovice i bridom druge. Površina presjeka zaokružena na jednu decimalnu je točku je: _____.
40. Pravilna uspravna šesterostранa prizma visine 10 cm i duljine osnovnog brida 7 cm presečena je ravnom koja prolazi duljom dijagonalom jedne osnovice i bridom druge. Površina presjeka zaokružena na jednu decimalnu je točku je: _____.
41. Površina osnovke uspravnog stočca je $81\pi \text{ cm}^2$, a visina stočca iznosi 12 cm. Polegnemo li stožac tako da mu izvodnica dodiruje horizontalnu podlogu, onda je najviša točka stočca udaljena od te podloge za: _____.
42. Površina osnovke uspravnog stočca je $841\pi \text{ cm}^2$, a visina stočca iznosi 29 cm. Polegnemo li stožac tako da mu izvodnica dodiruje horizontalnu podlogu, onda je najviša točka stočca udaljena od te podloge za: _____.
43. Valjku obujma $704\pi \text{ cm}^2$ i visine 11 cm povećamo polumjer za 2 cm. Koliko je oplošje novoga valjka?
44. Valjku obujma $2\ 057\pi \text{ cm}^2$ i visine 17 cm smanjimo polumjer za 3 cm. Koliko je oplošje novoga valjka?
45. Ako valjak promjera 28 cm i visine 18 cm presječemo ravninom okomitom na osnovku valjka tako da ga raspolažlja, koliko iznosi oplošje novog tijela?
46. Ako valjak promjera 18 cm i visine 16 cm presječemo ravninom okomitom na osnovku valjka tako da ga raspolažlja, koliko iznosi oplošje novog tijela?
47. Pravilna četverostrana piramida kojoj su svi bridovi dugi 8 cm ima upisanu kuglu polumjera: _____.
48. Pravilna četverostrana piramida kojoj su svi bridovi dugi 15 cm ima upisanu kuglu polumjera: _____.
49. U pravokutnom trokutu ABC znamo da je $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i stranica $a = 6 \text{ cm}$. Odredite katetu b trokuta.
50. U pravokutnom trokutu ABC znamo da je $\cos \beta = \frac{1}{4}$ i stranica $a = 12 \text{ cm}$. Odredite katetu b trokuta.
51. Odredite šiljasti kut (α) paralelograma ako mu je poznata duljina stranice $a = 26 \text{ cm}$ i visina na stranicu b , $h_b = 17 \text{ cm}$.
52. Odredite šiljasti kut (α) paralelograma ako mu je poznata duljina stranice $b = 40 \text{ cm}$ i visina na stranicu a , $h_a = 14 \text{ cm}$.
53. U pravokutnom trokutu ABC odredite vrijednost $\sin \alpha$ ako je $|AB| = 3.39$ i $|BC| = 1.13$.
54. U pravokutnom trokutu ABC odredite vrijednost $\cos \alpha$ ako je $|AB| = 5.8$ i $|AC| = 2.9$.

55. U pravokutnom trokutu ABC odredite mjeru kuta u vrhu B , ako je $|AB| = 12$ cm i $|AC| = 3.6$ cm.
56. U pravokutnom trokutu ABC odredite mjeru kuta u vrhu A , ako je $|AB| = 8.8$ cm i $|AC| = 2$ cm.
57. Odredite duljinu dijagonale pravokutnika ako znamo da mu je opseg $o = 26$ cm, a kut među dijagonalama $\varphi = 48^\circ$.
58. Odredite duljinu dijagonale pravokutnika ako znamo da mu je opseg $o = 60$ cm, a kut među dijagonalama $\varphi = 54^\circ$.
59. Odredite opseg opisane kružnice pravilnog osmerokuta ako mu je duljina brida osnovice 3.5 cm.
60. Odredite opseg opisane kružnice pravilnog deseterokuta ako mu je duljina brida osnovice 4.4 cm.
61. Kolika je površina kruga ako je duljina jedne njegove tetine 8 cm, a njezin središnji kut 126° ?
62. Kolika je površina kruga ako je duljina jedne njegove tetine 5 cm, a njezin obodni kut 46° ?
63. Kut u vrhu A jednakokračnoga trapeza iznosi 30° . Krak trapeza ima duljinu 8 cm, a kraća osnovica 7 cm. Odredite površinu toga trapeza.
64. Kut u vrhu A jednakokračnoga trapeza iznosi 40° . Krak trapeza ima duljinu 6 cm, a dulja osnovica 13 cm. Odredite površinu toga trapeza.
65. Odredite kut koji izvodnica stošca zatvara s osi stošca ako je oplošje stošca 73 cm^2 , a površina plašta 43 cm^2 .
66. Odredite kut koji izvodnica stošca zatvara s osi stošca ako je oplošje stošca 42 cm^2 , a površina plašta 25 cm^2 .
67. Odredite duljinu kraće dijagonale pravokutnoga trapeza ako je duljina dulje osnovice 30 cm, dulji krak 20 cm, a šiljasti kut 28° .
68. Odredite duljinu kraće dijagonale pravokutnoga trapeza ako je duljina dulje osnovice 42 cm, dulji krak 29 cm, a šiljasti kut 38° .
69. Zadan je trokut stranica $b = 10$ cm, $c = 9$ cm i kuta $\beta = 78^\circ$. Kolika je kutna mjeru kuta α ?
70. Zadan je trokut stranica $b = 42$ cm, $c = 34$ cm i kuta $\gamma = 53^\circ 53'$. Kolika je kutna mjeru kuta α ?
71. Koliki je manji kut paralelograma ako su duljine stranica $a = 20$ cm, $b = 13$ cm, a kraća je dijagonala $e = 15$ cm?
72. Koliki je manji kut paralelograma ako su duljine stranica $a = 65$ cm, $b = 20$ cm, a dulja je dijagonala $f = 78$ cm?
73. Odredite površinu kvadrata konstruiranoga nad stranicom a trokuta kojemu su kutovi $\gamma = 48^\circ 52'$ i $\beta = 62^\circ 26'$, a stranica $b = 16.5$ cm. Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.
74. Odredite površinu kvadrata konstruiranoga nad stranicom a trokuta kojemu su kutovi $\gamma = 67^\circ 25'$ i $\beta = 28^\circ 28'$, a stranica $c = 88$ cm. Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.

75. Odredite površinu kruga opisanog trokutu ako znamo da stranice $b = 5 \text{ cm}$ i $c = 7 \text{ cm}$ zatvaraju kut od $65^\circ 56'$.
76. Odredite površinu kruga opisanog trokutu ako znamo da stranice $a = 42 \text{ cm}$ i $c = 34 \text{ cm}$ zatvaraju kut od $47^\circ 47'$.
77. Koliki je promjer kružnice upisane trokutu stranice $c = 28 \text{ cm}$ i kutovima uz nju $\beta = 62^\circ 26'$ i $\alpha = 70^\circ$?
78. Koliki je promjer kružnice upisane trokutu stranice $c = 16 \text{ cm}$ i kutovima uz nju $\beta = 35^\circ 35'$ i $\alpha = 70^\circ 22'$?
79. Najdulja izvodnica kosog stočca duga je $s_2 = 30 \text{ cm}$ i s ravninom osnovke zatvara kut od 42° . Ako najkraća izvodnica ima duljinu $s_1 = 25 \text{ cm}$, odredite opseg osnovke.
80. Najdulja izvodnica kosog stočca duga je $s_2 = 15 \text{ cm}$ i s ravninom osnovke zatvara kut od 30° . Ako najkraća izvodnica ima duljinu $s_1 = 10 \text{ cm}$, odredite opseg osnovke.
81. Duljine stranica trokuta ABC kojemu su vrhovi $A(-2, 4)$, $B(5, 0)$ i $C(-3, -2)$, jesu: _____, _____ i _____.
82. Duljine stranica trokuta ABC kojemu su vrhovi $A(3, 2)$, $B(-6, 4)$ i $C(5, -8)$ vrhovi, jesu: _____, _____ i _____.
83. Je li trokut pravokutan ako su $A(-4, 5)$, $B(2, 1)$ i $C(-1, 0)$ koordinate njegovih vrhova?
84. Je li trokut pravokutan ako su $A(3, -2)$, $B(5, 1)$ i $C(2, 2)$ koordinate njegovih vrhova?
85. Odredite točku A ako su zadani točka $B(5, 4)$ i polovište $P(1, -2)$ dužine \overline{AB} .
86. Odredite točku B ako su zadani točka $A(7, 3)$ i polovište $P(4, 1)$ dužine \overline{AB} .
87. Odredite opseg kvadrata kojemu su točke $A(3, 5)$ i $B(-1, -2)$ susjedni vrhovi.
88. Odredite opseg kvadrata kojemu su točke $A(7, 2)$ i $B(0, 3)$ suprotni vrhovi.
89. Površina trokuta ABC iznosi 6 kvadratnih jedinica. Dva su njegova vrha u točkama $A(-1, 2)$, $B(1, 3)$, a treći vrh C leži na osi x . Odredite koordinate vrha C .
90. Površina trokuta ABC iznosi 8 kvadratnih jedinica. Dva su njegova vrha u točkama $A(1, 4)$, $B(3, 2)$, a treći vrh C leži na osi y . Odredite koordinate vrha C .
91. Površina trokuta ABC , kojemu su vrhovi $A(4, 1)$, $B(7, 0)$ i $C(5, 6)$ jest _____.
92. Površina trokuta ABC , kojemu su vrhovi $A(-4, 0)$, $B(-2, -2)$ i $C(6, -4)$ jest _____.
93. Na osi apscisa nađite točku koja je jednakoj udaljenosti od točaka $M(-5, 3)$ i $N(4, 6)$.
94. Na osi ordinata nađite točku koja je jednakoj udaljenosti od točaka $M(-6, 6)$ i $N(4, -4)$.
95. Koje su kordinate četvrtog vrha pravokutnika $ABCD$ ako su koordinate ostalih triju vrhova $A(1, 1)$, $B(-5, 3)$ i $C(-1, -1)$?
96. Koje su kordinate četvrtog vrha pravokutnika ako su koordinate ostalih triju vrhova $A(6, -4)$, $B(3, 7)$ i $C(-1, 3)$?
97. Jesu li točke $A(2, 1)$, $B(10, 6)$ i $C(7, 4)$ kolinearne?

98. Jesu li točke $A(-4, 2)$, $B(8, -2)$ i $C(5, -1)$ kolinearne?
99. Odredite duljinu vektora $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.
100. Odredite duljinu vektora $\vec{v} = -5\vec{i} + 4\vec{j}$.
101. Neka su zadani vektori: $\vec{a} = 2\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j}$. Koliko iznosi $3\vec{a} - 2\vec{b}$?
102. Neka su zadani vektori: $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$. Koliko iznosi $\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$?
103. Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ i $\vec{b} = 9\vec{i} - 7\vec{j}$ iznosi: _____.
104. Skalarni umnožak vektora $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j}$ iznosi: _____.
105. U paralelogramu $ABCD$ poznate su koordinate vrhova $A(-2, 3)$, $C(1, -4)$ i $B(4, 2)$. Odredite koordinate vrha D .
106. U paralelogramu $ABCD$ poznate su koordinate vrhova $A(2, 5)$, $B(3, -4)$ i $D(-1, 7)$. Odredite koordinate vrha C .
107. Zadane su točke $A(2, 5)$, $B(-3, 1)$ i $C\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$. Odredite $|\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}|$.
108. Zadane su točke $A(-1, -2)$, $B(3, 0)$ i $C(4, 1)$. Odredite $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}|$.
109. Odredite kut među vektorima $\vec{a} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$.
110. Odredite kut među vektorima $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j}$.
111. Odredite koeficijent λ tako da vektori $\vec{a} = \lambda\vec{i} - 3\vec{j}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ budu okomiti.
112. Odredite koeficijent λ tako da vektori $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{b} = -\vec{i} + \lambda\vec{j}$ budu okomiti.
113. Odredite jednadžbu pravca točkama $A(-1, 5)$ i $B(1, -2)$ te je napišite u implicitnom obliku.
114. Odredite jednadžbu pravca točkama $A(7, 1)$ i $B(4, -1)$ te je napišite u implicitnom obliku.
115. Odredite koeficijent smjera pravca određenog točkama $A(1, 1)$ i $B(3, -2)$.
116. Odredite koeficijent smjera pravca određenog točkama $A(-2, -2)$ i $B(-1, 4)$.
117. Odredite kut između pravaca $y = \frac{1}{3}x + 2$ i $y = 2x - 5$.
118. Odredite kut između pravaca $y = \frac{2}{3}x - 1$ i $y = -x + 4$.
119. U kakvom su međusobnom položaju pravci $y = \frac{1}{2}x - 2$ i $2x - 3y + 5 = 0$?
120. U kakvom su međusobnom položaju pravci $y = \frac{1}{2}x - 3$ i $2x + y - 1 = 0$?
121. Koliko je pravac $5x + 2y + 7 = 0$ udaljen od točke $T(2, 2)$?
122. Koliko je pravac $y = \frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$ udaljen od točke $T(3, -1)$?

123. Površina trokuta koji pravac $5x + 3y - 12 = 0$ zatvara s koordinatnim osima iznosi: _____.
124. Površina trokuta koji pravac $y = 2x + 4$ zatvara s koordinatnim osima iznosi: _____.
125. Sjecište pravaca $y = x - 2$ i $3x - 5y - 2 = 0$ nalazi se u točki: _____.
126. Sjecište pravaca $y = \frac{1}{2}x + 3$ i $6x - 10y - 4 = 0$ nalazi se u točki: _____.
127. Odredite jednadžbu pravca koji je usporedan sa pravcem $y = \frac{2}{3}x + 4$ i prolazi točkom $T(1, 4)$.
128. Odredite jednadžbu pravca koji je usporedan sa pravcem $y = -2x + \frac{1}{3}$ i prolazi točkom $T(3, 1)$.
129. Zadan je pravac p jednadžbom $2x - 4y - 12 = 0$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi jest: _____.
130. Zadan je pravac p jednadžbom $y = 3x + 6$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi jest: _____.
131. Pravac p okomit je na $y = -3x + 2$ i prolazi točkom $(1, 3)$. Pravac p je: _____.
132. Pravac p je okomit na $y = \frac{2}{3}x - 1$ i prolazi točkom $(2, 4)$. Pravac p je: _____.
133. Koliko zajedničkih točaka imaju kružnica $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ i pravac a čija je jednadžba $3x - 4y + 9 = 0$?
134. Koliko zajedničkih točaka imaju kružnica $x^2 + y^2 + 4x + 3y + \frac{9}{4} = 0$ i pravac a čija je jednadžba $3x + y + 2 = 0$?
135. Kolika je udaljenost središta kružnice $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$ od ishodišta koordinatnog sustava?
136. Kolika je udaljenost središta kružnice $x^2 + y^2 + 8x - 2y - 8 = 0$ od osi ordinata?
137. Jednadžbom $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$ dana je kružnica. Odredite tangentu na kružnicu u točki $T(x, 1)$, $x > -1$.
138. Jednadžbom $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ dana je kružnica. Odredite tangentu na kružnicu u točki $T(1, y)$, $y < 0$.
139. Odredite jednadžbe tangenata na kružnicu $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$ povučenih iz točke $T(7, -1)$.
140. Odredite jednadžbe tangenata na kružnicu $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 1 = 0$ povučenih iz točke $T(4, 6)$.
141. Ako je jedno žarište elipse u točki $F(3, 0)$, a mala poluos $b = 2$, odredite jednadžbu elipse.
142. Ako je jedno žarište elipse u točki $F(5, 0)$, a mala poluos $b = 4$, odredite jednadžbu elipse.
143. Jedna asimptota hiperbole je $y = \frac{1}{2}x$. Ako točka $T(2\sqrt{5}, 2)$ pripada hiperboli, koliko su međusobno udaljena tjemena hiperbole?

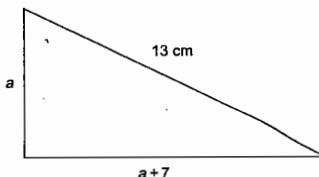
- 144.** Jedna je asimptota hiperbole $y = \frac{5}{3}x$. Ako točka $T\left(5, \frac{20}{3}\right)$ pripada hiperboli, koliko su međusobno udaljena tjemena hiperbole?
- 145.** Kolika je udaljenost pravca $y = 2x - 1$ od žarišta hiperbole $4x^2 - y^2 = 100$ na pozitivnom dijelu osi apscisa?
- 146.** Kolika je udaljenost pravca $y = -3x - 4$ od žarišta hiperbole $16x^2 - 4y^2 = 64$ na negativnom dijelu osi apscisa?
- 147.** Kako glasi jednadžba one tangente na kružnicu $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$ koja je okomita na pravac $x + 3y + 2 = 0$?
- 148.** Kako glasi jednadžba one tangente na kružnicu $(x + 5)^2 + (x - 7)^2 = 4$ koja je okomita na pravac $-2x + 6y + 4 = 0$?
- 149.** Odredite jednadžbu tangente na elipsu $x^2 + 4y^2 = 25$ u njezinoj točki $D(4, 1.5)$.
- 150.** Odredite jednadžbu tangente na elipsu $x^2 + 4y^2 = 400$ u njezinoj točki $D(16, -6)$.
- 151.** Ako pravac $4x - 3y - 12 = 0$ prolazi žarištem parabole $y^2 = 2px$, u kojoj točki s cijelobrojnim koordinatama, pravac siječe parabolu?
- 152.** Ako pravac $4x + 3y - 16 = 0$ prolazi žarištem parabole $y^2 = 2px$, u kojoj točki s cijelobrojnim koordinatama pravac siječe parabolu?

Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja

Legendu kratica naziva do sada održanih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja potražite na str. 78.
Rješenja zadataka potražite na str. 465.

Osnovna razina

- Duljine stranica pravokutnoga trokuta su 3 cm, 4 cm i 5 cm. Kolika je površina toga trokuta?
PI 2009.
A) 6 cm^2 B) 10 cm^2 C) 12 cm^2 D) 30 cm^2
- Ljestve duljine 2.4 m naslonjene su na zid tako da im je podnožje udaljeno 1 m od zida. Na kojoj visini ljestve dodiruju zid?
DM, jesen 2010.
A) 1.40 m B) 1.76 m C) 2.18 m D) 2.60 m
- Opseg trokuta je 30 cm.
Kolika je površina trokuta?
A) 75 cm^2
B) 60 cm^2
C) 30 cm^2
D) 17 cm^2
NI 2008.



4. U pravokutnom trokutu ABC pravi je kut u vrhu C.
Mjera kuta u vrhu A je 36° .

PM 2009.

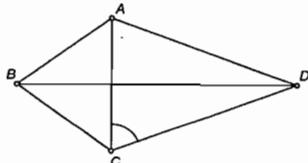
- a) Kolika je mjera kuta u vrhu B?
b) Koja je kateta trokuta dulja, $b = \overline{AC}$ ili $a = \overline{BC}$?

5. Koliko je m^2 tamnoga papira potrebno za izradbu zmaja
(vidjeti skicu)?

$$|AB| = |CB| = 1.1 \text{ m}$$

$$|AC| = 1.2 \text{ m}$$

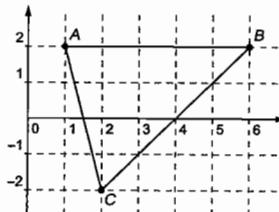
$$\angle ACD = 70^\circ$$



NI 2007. za gimnazije

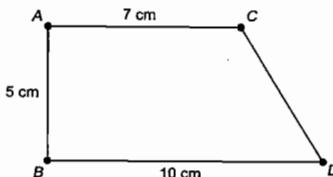
6. Odredite površinu P
trokuta ABC na slici.

PM 2009.



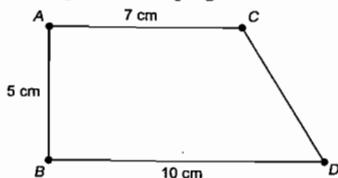
7. a) Odredite duljinu nepoznate stranice četverokuta sa slike.
b) Odredite opseg lika sa slike.

PI 2009.



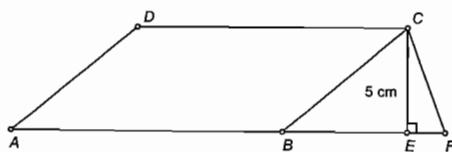
8. Odredite površinu i opseg lika sa slike.

NI 2007. za strukovne škole



9. Zadani su paralelogram ABCD i pravokutan trokut CEF. Kateta \overline{EF} sedam je puta kraća od stranice \overline{AB} . Površina trokuta CEF iznosi 12 cm^2 .

DM, ljeto 2010.



Kolika je duljina stranice \overline{AB} , a kolika površina paralelograma ABCD?

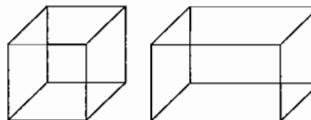
10. Osnovka uspravne četverostrane prizme kvadrat je duljine stranice 6 cm. Duljina visine piramide je 10 cm. Koliki je obujam (volumen) te piramide? **PM 2009.**
A) 60 cm^2 B) 120 cm^2 C) 360 cm^2 D) 600 cm^2

11. Plastična posuda oblika kvadra napunjena je vodom. Stranice su duljine 25 cm, 20 cm i 18 cm. Koliko je litara vode u posudi? (1 litra je 1 dm^3). **PI 2009.**

A) 90 litara B) 16.2 litre C) 9 litara D) 1.62 litre

12. Slika prikazuje kocku i kvadar. Kocka i kvadar sa slike imaju: **DM, jesen 2010.**

A) jednak obujam i jednako oplošje,
B) jednak obujam i različito oplošje,
C) različiti obujam i jednakoplošje,
D) različiti obujam i različito oplošje.



13. Udaljenost točaka $S(3, 0)$ i $T(0, 1)$ iznosi: **NI 2007. za strukovne škole**
A) 8, B) $\sqrt{10}$, C) 4, D) $\sqrt{2}$.

14. Napišite neki uređeni par realnih brojeva (a, b) tako da bude $b = a - 3$. **NI 2007. za strukovne škole**

15. Bilježeno je vrijeme potrebno učenicima da odigraju računalnu igricu. Podaci su uneseni u koordinatni sustav na prikazani način. **PM 2009.**

Točka A označuje da je 20 učenika odigralo igricu do kraja za više od 0, a manje od 5 minuta.

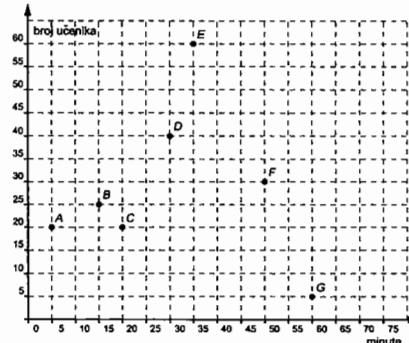
Točka B označuje da je 25 učenika odigralo igricu do kraja za više od 5, a manje od 15 minuta.

Točka C označuje da je 20 učenika odigralo igricu do kraja za više od 15, a manje od 20 minuta, i tako dalje.

a) Što označuje točka G?

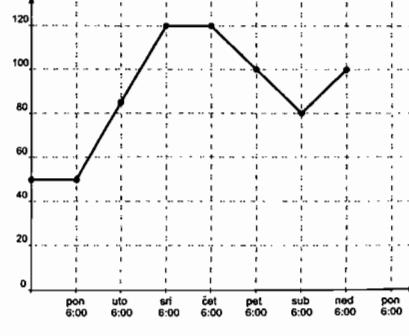
b) Koliko je učenika igralo računalnu igricu?

c) Kolikom je postotku učenika trebalo manje od 5 minuta da završe igricu?



16. Graf prikazuje visinu snijega izmjerena na Zavižanu tijekom jednog tjedna. **PI 2009.**

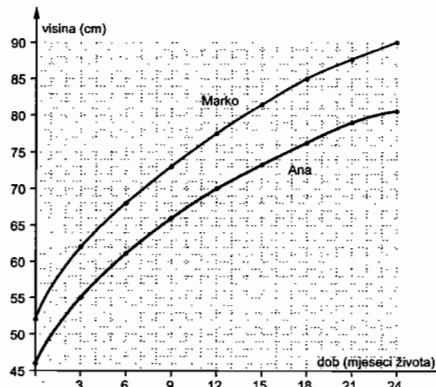
a) Kolika je visina snijega izmjerena u nedjelju u 6:00 sati?
b) Kada je prvi put izmjerena visina snijega od 120 cm?
c) Visina snijega tijekom mjerena rasla je u dvama razdobljima. Koliko je ukupno centimetara snijega napadalo u tim razdobljima?



17. Ana i Marko rodili su se istoga dana. Na grafu su krivulje koje pokazuju kako su se mijenjale Anina i Markova visina u prva 24 mjeseca života.

NI 2008.

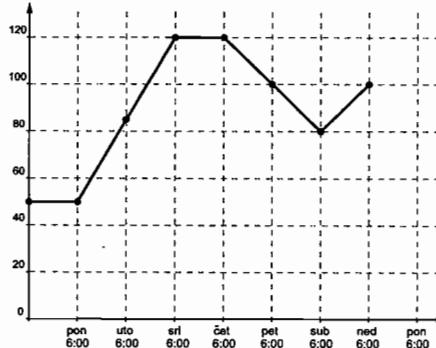
- Koliko je Ana bila visoka s 20 mjeseci?
- Koliko je mjeseci imao Marko kada je bio visok 82 cm?
- Za koliko je Marko bio viši od Ane na njihov prvi rođendan?



18. Graf prikazuje visinu snijega izmjerena na Zavižanu tijekom jednog tjedna.

NI 2007. za strukovne škole

- Kolika je visina snijega na početku mjerjenja prikazanih grafovima?
- Snijeg je padao dva puta. Koliko je centimetara snijega ukupno napadalo u tva puta?
- Opišite riječima što se događalo sa snijegom od petka u 6:00 do nedjelje u 6:00.

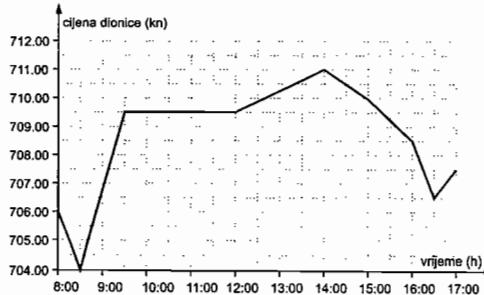


19. Graf na slici prikazuje kretanje cijene jedne dionice tvrtke MATA tijekom nekoga radnog dana.

NI 2006. za OJK gimnazije

Za prikazano razdoblje odredite:

- kolika je najveća cijena dionice,
- koliko se sati cijena dionice nije mijenjala,
- od kojega je do kojeg sata cijena dionice najbrže rasla..
- Osam dionica kupljeno je u 8:30, a prodano u 16:00. Je li ostvarena dobit ili gubitak i koliko iznosi?



20. Zadane su točke $A(-6, -2)$, $B(-2, 1)$, $C(4, 5)$.

NI 2008.

a) Zadane točke ucrtajte u koordinatni sustav.

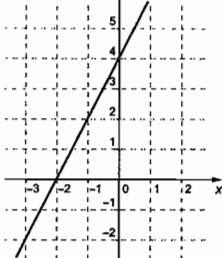
b) Izračunajte međusobne udaljenosti točaka A , B i C te odredite broj $|AB| + |BC| - |AC|$ zaokružen na tri decimale.

c) Leže li točke A , B , C na istome pravcu?

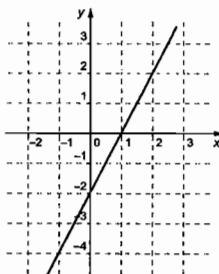
21. Na kojoj je slici prikazan pravac $y = \frac{1}{2}x - 2$?

NI 2008.

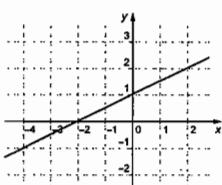
A)



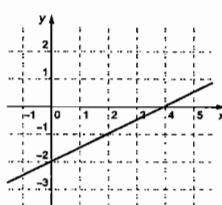
B)



C)



D)



22. U koordinatnom sustavu nacrtajte pravac $y = -x + 1$.

NI 2007. za strukovne škole

23. Nacrtajte pravac zadan jednadžbom $2x + 3y = 6$.

DM, ljeto 2010.

24. Zadan je koordinatni sustav.

DM, jesen 2010.

Nacrtajte pravac čija je jednadžba $y = 3x - 2$.

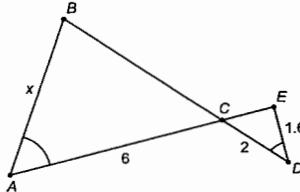
Napišite jednadžbu pravca koji je s tim pravcem usporedan i koji prolazi točkom $T(0, -7)$.

Viša razina

1. Davor je mjerio po dva kuta u svakome od četiri različita trokuta i zapisao njihove mjere. Koji je od tih trokuta jednakokračan?
NI 2007. za gimnazije
 A) $50^\circ, 60^\circ$ B) $40^\circ, 80^\circ$ C) $30^\circ, 90^\circ$ D) $20^\circ, 80^\circ$

2. Ako je $|DE| = 1.6$, $|AC| = 6$ i $|CD| = 2$, tada je $x = |AB|$ jednak:
NI 2006. za PM gimnazije

- A) 7.5,
 B) 5.2,
 C) 5,
 D) 4.8.



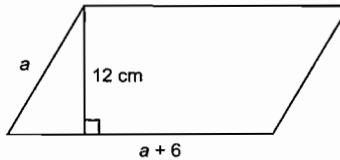
3. Površine dvaju sličnih trokuta su 104 cm^2 i 26 cm^2 . Opseg manjeg trokuta je 38 cm . Koliki je opseg većeg trokuta?
NI 2006. za PM gimnazije
 A) 9.5 cm B) 19 cm C) 76 cm D) 152 cm

4. Duljine osnovica jednakokračnog trapeza su 20 cm i 6 cm , a površina mu je 31.2 cm^2 . Kolika je duljina kraka trapeza?
PI 2009.

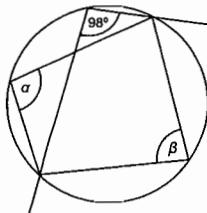
- A) 14 cm B) 13 cm C) 7.4 cm D) 3.6 cm

5. Sjedište simetrala kutova trokuta je:
NI 2006. za PM gimnazije
 A) jedan vrh trokuta,
 B) polovište jedne stranice,
 C) središte trokutu upisane kružnice,
 D) središte trokutu opisane kružnice.

6. Opseg parallograma na slici je 80 cm . Površina mu je:
NI 2008.
 A) 276 cm^2 ,
 B) 144 cm^2 ,
 C) 138 cm^2 ,
 D) 84 cm^2 .

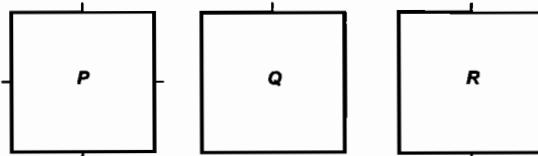


7. Razlika mjera kutova α i β sa slike jednakna je:
NI 2007. za gimnazije
 A) 98° ,
 B) 90° ,
 C) 16° ,
 D) 8° .



8. Na slikama su tri sukladna kvadrata s označenim polovištim stranica.

DM, Ijeto 2010.



Koji odnos vrijedi za površine P , Q , R osjenčanih likova?

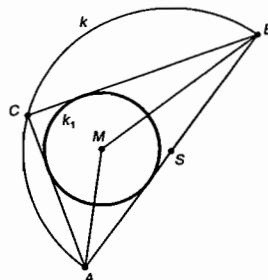
- A) $P < Q = R$ B) $P < Q < R$ C) $P = Q < R$ D) $P = Q = R$

9. Promjer kružnice k hipotenuza je trokuta ABC . U trokut ABC upisana je kružnica k_1 sa središtem M .

DM, Ijeto 2010.

Kolika je mjera kuta AMB ?

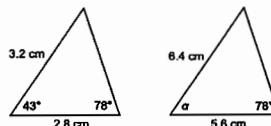
- A) 120°
B) 125°
C) 130°
D) 135°



10. Kolika je mjera označenog kuta α na slici?

DM, jesen 2010.

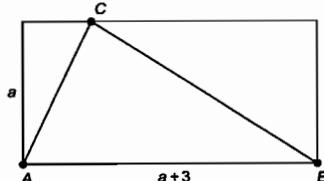
- A) $\alpha = 43^\circ$
B) $\alpha = 47^\circ$
C) $\alpha = 86^\circ$
D) ne može se odrediti



11. Opseg pravokutnika sa slike iznosi 54 cm. Koliko iznosi površina trokuta ABC ?

DM, jesen 2010.

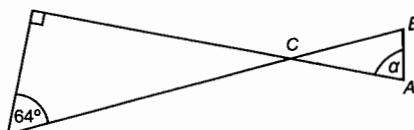
- A) 45 cm^2
B) 90 cm^2
C) 135 cm^2
D) 180 cm^2



12. Pravokutan i jednakokračan trokut imaju zajednički vrh C .

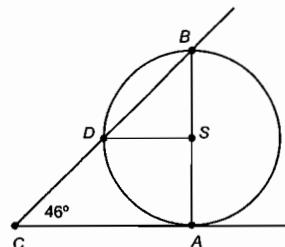
PI 2009.

- a) Odredite mjeru drugoga šiljastog kuta u pravokutnom trokutu na slici.
b) Odredite mjeru kuta α uz osnovicu jednakokračnoga trokuta ABC sa slikom.



13. Polupravac CA tangenta je kružnice.

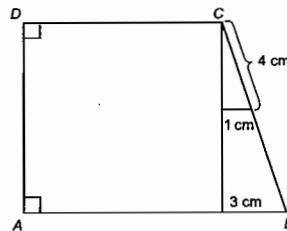
- Odredite mjeru $\angle ABC$.
- Odredite mjeru $\angle ASD$.



NI 2008.

14. Odredite površinu lika $ABCD$ sa slike ako je osjenčani lik kvadrat.

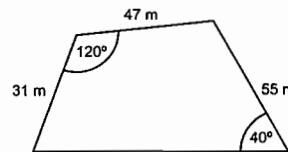
NI 2007. za gimnazije



15. Slika prikazuje oblik zemljišta i neke njegove mjere.

DM, jesen 2010.

- Izračunajte udaljenost točaka A i C .
- Izračunajte mjeru kuta BAC .
- Kolika je površina zemljišta sa slike?



16. Osnovka (baza) uspravne četverostrane piramide je kvadrat. Duljina visine piramide je 8 cm. Mjera kuta između bočnog brida i ravnine osnovke je 55° . Odredite oplošje te piramide.

PM 2009.

- A) 151.9 cm^2 B) 189.5 cm^2 C) 204.2 cm^2 D) 241.1 cm^2

17. Puna metalna kocka brida a pretopljena je u kuglu. Koliki je promjer te kugle?

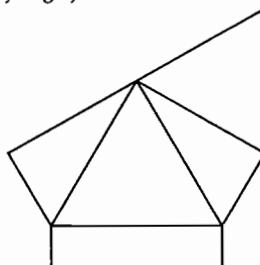
DM, ljetno 2010.

- A) $0.98a$ B) $1.24a$ C) $1.33a$ D) $1.64a$

18. Na slici je prikazana mreža geometrijskog tijela.

Koje je to tijelo?

- trostrana piramida
- trostrana prizma
- četverostrana piramida
- četverostrana prizma



DM, jesen 2010.

19. a) Metalna kugla ima obujam $288\pi \text{ cm}^3$. Koliki joj je polumjer? PI 2009.

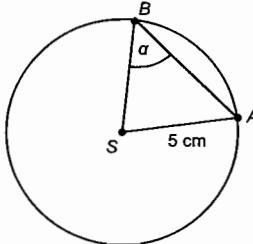
b) Kuglu polumjera 5 cm treba pretopiti u valjak. Ako će polumjer baze valjka biti 4 cm, odredite visinu valjka zaokruživši rezultat na dvije decimale.

20. Duljina hipotenuze pravokutnoga trokuta je 9 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom toga trokuta oko katete duljine 4 cm. DM, jesen 2010.

21. Ako je $\cos \alpha = 0,6$, tada je duljina
tetiće \overline{AB} na slici jednak:

- A) 3 cm,
- B) 4 cm,
- C) 6 cm,
- D) 8 cm.

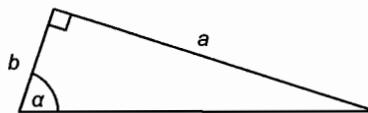
NI 2007. za gimnazije



22. Ako je u pravokutnom trokutu sa slike $a = 15 \text{ cm}$, a $b = 6 \text{ cm}$,
tada je $\operatorname{tg} \alpha$ jednak:

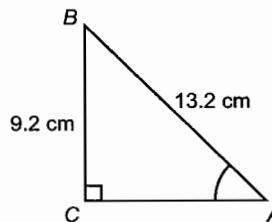
- A) 0,4,
- B) 2,5,
- C) $\frac{15}{\sqrt{261}}$,
- D) $\frac{6}{\sqrt{261}}$.

NI 2007. za gimnazije



23. Kolika je mjera kuta u vrhu A?

NI 2007. za gimnazije



24. Zadan je pravokutan trokut duljine hipotenuze 7.5 cm. Izračunajte na tri decimale
duljinu katete nasuprot kutu $\alpha = 50^\circ$. DM, jesen 2010.

25. Duljine stranica trokuta ABC su $a = 12 \text{ cm}$ i $c = 9 \text{ cm}$, a kut između njih je $\beta = 82^\circ 17'$.
Kolika je duljina stranice b?

- A) 14 cm
- B) 14.5 cm
- C) 15.5 cm
- D) 16 cm

DM, ljeto 2010.

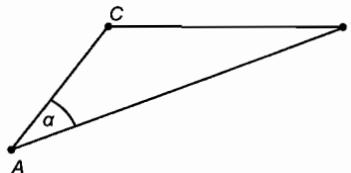
26. U trokutu ABC je: $\alpha = 20^\circ$, $|AB| = 36 \text{ cm}$ i $|AC| = 18 \text{ cm}$.

PM 2009.

- a) Izračunajte duljinu stranice \overline{BC} .
- b) Izračunajte mjeru kuta β pri vrhu B.

27. U trokutu ABC zadane su duljine stranica $|AB| = 13 \text{ cm}$, $|BC| = 9 \text{ cm}$ i mjeru kuta $\angle ABC = 24^\circ$.

- Odredite površinu trokuta ABC .
- Odredite duljinu stranice \overline{AC} i rezultat zaokružite na dvije decimale.



PI 2009.

28. Opseg jednakokračnog trokuta ABC , gdje je $A(3, 6)$, $B(7, 2)$, $C(5 + \sqrt{12}, 4 + \sqrt{12})$, jednak je:

- A) $\sqrt{288}$, B) $\sqrt{192}$, C) 24, D) 12.

29. Napišite neki uređeni par realnih brojeva (a, b) tako da bude $10^a = b - 3$.

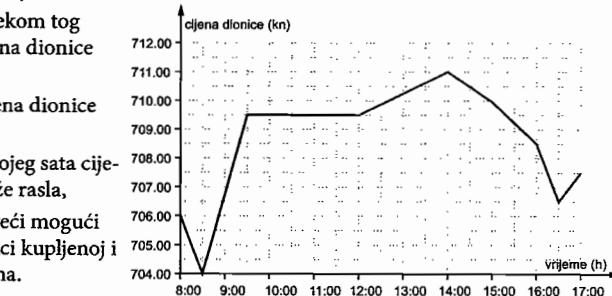
NI 2007. za gimnazije

30. Graf na slici prikazuje kretanje cijene jedne dionice tvrtke MATA tijekom nekoga radnog dana.

NI 2006. za PM gimnazije

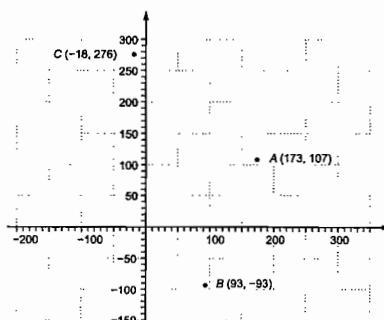
Za prikazano razdoblje odredite:

- koliko je puta tijekom tog radnog dana cijena dionice bila 707 kn,
- koliko se sati cijena dionice nije mijenjala,
- od kojega je do kojeg sata cijena dionice najbrže rasla,
- koliki je bio najveći mogući gubitak po dionici kupljenoj i prodanoj tog dana.



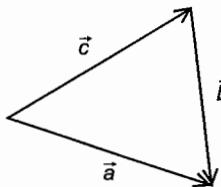
31. U koordinatnom sustavu ucrtane su tri seismološke stanice, A , B , C , koje su registrirale potres. Njihove koordinate zadane su u kilometrima. Epicentar potresa bio je na udaljenosti 193 km od stanice A , 137 km od stanice B i 265 km od stanice C . Odredite koordinate epicentra potresa.

PM 2009.



32. Za vektore \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} sa slike vrijedi:

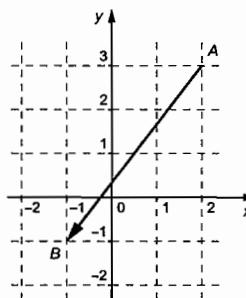
- A) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$,
- B) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$,
- C) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$,
- D) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.



PM 2009.

33. Koji je od navedenih vektora prikazan na slici?

- A) $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$
- B) $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$
- C) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
- D) $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$



PI 2009.

34. Kut među vektorima $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ i $\overrightarrow{CD} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ jednak je:

- A) $16^\circ 15' 36''$,
- B) 90° ,
- C) $73^\circ 44' 23''$,
- D) 180° .

NI 2008.

35. a) Zadane su točke $A(1, 2)$, $B(3, 5)$. Odredite vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora \vec{i} i \vec{j} .

PM 2009.

b) Odredite $(2\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (\vec{i} - 4\vec{j})$.

c) Odredite α tako da su vektori $2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{i} - 4\vec{j}$ okomiti.

36. a) Točka $A(1, 2)$ je početna točka vektora $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j}$. Koje su koordinate točke B ?

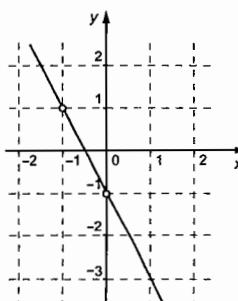
DM, jesen 2010.

b) Odredite mjeru kuta α između vektoru $\vec{a} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$.

37. Jednadžba pravca koji je usporedan s nacrtanim pravcem i prolazi točkom $(0, 7)$ jest:

NI 2008.

- A) $y = \frac{1}{2}x - 7$,
- B) $y = -\frac{1}{2}x + 7$,
- C) $y = 2x - 7$,
- D) $y = -2x + 7$.



38. Zadan je pravac p kojemu je jednadžba $y = \frac{3}{4}x - 2$.

NI 2006. za PM gimnazije

a) Nacrtajte pravac p u koordinatnom sustavu.

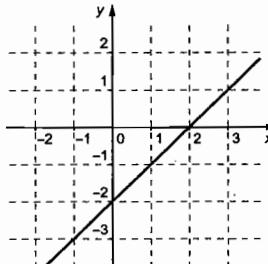
b) Odredite udaljenost između točaka u kojima pravac p siječe koordinatne osi.

c) Odredite jednadžbu po volji odabranog pravac q koji u točki $(2, y)$ siječe pravac p .

39. a) Napišite jednadžbu pravca prikazanoga grafom.

PM 2009.

b) Izračunajte površinu trokuta što ga pravac zatvara s koordinatnim osima.



40. Pravac je zadan jednadžbom $y = 2x + 3$.

PI 2009.

a) Zadani pravac nacrtajte u koordinatnom sustavu.

b) Odredite mjeru kuta koji pravac zatvara s pozitivnom zrakom x -osi.

41. Zadane su točke $A(-1, 2)$ i $B(3, -1)$.

NI 2008.

a) Odredite koordinate polovišta dužine \overline{AB} .

b) Odredite koeficijent smjera pravca određenoga točkama A i B .

c) Odredite jednadžbu simetrale dužine \overline{AB} .

42. Zadan je pravac $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

PM 2009.

a) Odredite udaljenost ishodišta od zadanog pravca.

b) Odredite pravac koji prolazi točkom $(4, 0)$ i usporedan je sa zadanim pravcem.

43. a) Odredite koeficijent smjera (nagib) pravca $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$.

DM, Ijeto 2010.

b) Zadana je točka $A(1, 2)$ i usmjerena dužina $\overline{AB} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$. Odredite jednadžbu pravca kojemu pripada ta dužina.

44. Odredite središte S i polumjer kružnice r zadane jednadžbom $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$.

PI 2009.

- A) $S(3, -4)$, $r = 4$ B) $S(-3, 4)$, $r = 16$ C) $S(-3, 4)$, $r = 4$ D) $S(3, -4)$, $r = 16$

45. Odredite polumjer kružnice sa slike.

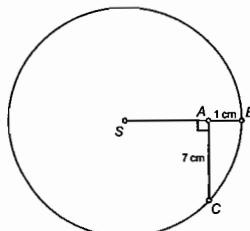
PM 2009.

A) $\sqrt{50}$

B) 8

C) $\sqrt{113}$

D) 25



46. Odredite fokuse elipse zadane jednadžbom $3x^2 + 8y^2 = 120$. **PM 2009.**

- A) $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$
- B) $F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$
- C) $F_1(0, -5), F_2(0, 5)$
- D) $F_1(0, -4), F_2(0, 4)$

47. Asimptota hiperbole je pravac $y = 2x$. Na hiperboli je točka $(5, 8)$.

Jednadžba hiperbole je:

- A) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$,
- B) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$,
- C) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$,
- D) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$.

48. Točka $S(-2, 3)$ središte je kružnice koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Kako glasi jednadžba te kružnice?

- A) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$
- B) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$
- C) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$
- D) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$

49. Kako glasi jednadžba kružnice kojoj su zadane koordinate krajnjih točaka promjera $A(-3, 2)$ i $B(1, 4)$?

- A) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 31 = 0$
- B) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$
- C) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$
- D) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$

50. Kružnica je zadana jednadžbom $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. **PM 2009.**

- a) Odredite točku $T(-1, y)$ zadane kružnice za koju je $y > 0$.
- b) Odredite jednadžbu tangente u točki $A(2, 6)$.

51. Elipsa je zadana jednadžbom $3x^2 + 4y^2 = 48$. **PI 2009.**

- a) Odredite duljinu velike poluos a .
- b) Odredite jednadžbu tangente elipse u njezinoj točki $T(-2, 3)$.

52. Skup točaka ravnine zadan je jednadžbom $9x^2 + 36y^2 - 225 = 0$. **NI 2008.**

- a) Odredite duljinu a velike poluos
- b) U koordinatnom sustavu skicirajte zadani skup točaka.

53. Zadana je kružnica $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 17$. **NI 2008.**

- a) Točka $A(2, y)$, $y > 0$ pripada kružnici. Odredite y .
- b) Odredite jednadžbu tangente na kružnicu u točki A .

54. a) Parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2px$ prolazi točkom $T(3, 3)$. Odredite p .

DM, ljeto 2010.

b) Parabola je zadana jednadžbom $y^2 = 12x$. Kolika je udaljenost fokusa te parabole od pravca $y = 2x + 5$?

c) Parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2px$ ima fokus $F(1, 0)$ i prolazi točkom $A(x, -3)$. Odredite jednadžbu tangente na tu parabolu u njezinoj točki A .

55. Izračunajte koordinate svih točaka presjeka elipse $x^2 + 4y^2 = 25$ i pravca

$x + 2y - 7 = 0$, ako takve točke postoje.

DM, jesen 2010.

5. MODELIRANJE I ZADATCI PRODUŽENIH ODGOVORA

Modeliranje i zadatci produženih odgovora – zadatci za vježbu	384
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita	390
Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	390
Osnovna razina.....	390
Viša razina.....	394

► Primjer 1. ►

Broju 5 dodamo 25, rezultat podijelimo s 3 i dobiveni količnik zatim pomnožimo s 15.

a) Koji ćemo broj dobiti? b) Koliki je zbroj svih djelitelja dobivenog broja?

Rješenje:

a) $[(5 + 25) : 3] \cdot 15 = [30 : 3] \cdot 15 = 10 \cdot 15 = 150$

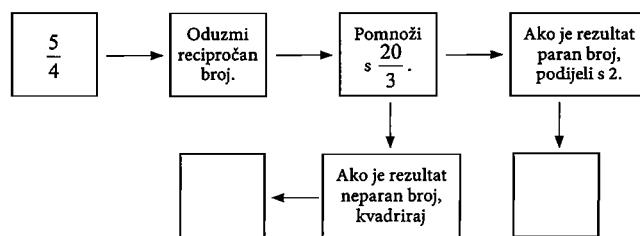
b) Svi prirodni brojevi djelitelji broja 150 redom su: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 30, 50, 75, 25, 15 i 150, pa je zbroj svih djelitelja broj 372.

$$\begin{array}{r|l} 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

viša razina (A)

► Primjer 2. ►

Izračunajmo i popunimo prazna mesta.



Rješenje:

$$\left(\frac{5}{4} - \frac{4}{5}\right) \cdot \frac{20}{3} = \left(\frac{25-16}{20}\right) \cdot \frac{20}{3} = \left(\frac{9}{20}\right) \cdot \frac{20}{3} = 3$$

Kako je broj 3 neparan, rješenje zadatka je 9.

viša razina (A)

Primjer 3.Uz pomoć formule $\sqrt{x \pm \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} \pm \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}$, za $x \geq 0; y \geq 0; x^2 \geq y$:a) pojednostavimo: $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$,b) pojednostavimo: $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$,c) koristeći se rezultatima iz a) i b), izračunajmo $\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$.**Rješenje:**

$$a) \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{29 + \sqrt{29^2 - 720}}{2}} - \sqrt{\frac{29 - \sqrt{29^2 - 720}}{2}} = \\ = \sqrt{\frac{29+11}{2}} - \sqrt{\frac{29-11}{2}} = \sqrt{20} - \sqrt{9} = 2\sqrt{5} - 3$$

$$b) \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{6 - \sqrt{20}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{36-20}}{2}} - \sqrt{\frac{6 - \sqrt{36-20}}{2}} = \\ = \sqrt{\frac{6+4}{2}} - \sqrt{\frac{6-4}{2}} = \sqrt{5} - 1$$

$$c) \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - 2\sqrt{5} + 3}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \\ = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{5} - 1} = 1$$

viša razina (A)

Primjer 4.a) Izraz $|x - 1|$ zapišimo bez znaka apsolutne vrijednosti.b) Skratimo razlomak $\frac{|x-1|}{x^2-1}$.

$$Rješenje: a) |x-1| = \begin{cases} x-1; & x > 1 \\ 1; & x = 1 \\ -x+1; & x < 1 \end{cases}$$

$$b) \text{ za } x > 1; \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1}, \\ \text{za } x = 1 \text{ razlomak nije definiran}, \\ \text{za } x < 1; \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}.$$

viša razina (A)

Primjer 5.

U autobusu se nalazi 12 putnika. Na prvoj stanici iz autobusa izade 25 % putnika, a uđe jedan.

a) Koliko je putnika sada u autobusu?

b) Ako na drugoj stanici izade 30 % preostalih putnika, koliko putnika ostane u autobusu?

Rješenje:

a)

$$p = 25$$

$$o = 12$$

$$i = ?$$

$$i = \frac{25 \cdot 12}{100} = \frac{300}{100} = 3$$

Kako su izašla tri putnika, a ušao jedan, nakon prve stanice u autobusu je 10 putnika.

$$b)$$

$$p = 30 \quad i = \frac{p \cdot o}{100} = \frac{300}{100} = 3$$

$$o = 10$$

$$i = ?$$

U autobusu je ostalo 7 putnika.

viša razina (A)

► Primjer 6. ►

a) Iz formule $P = \frac{abc}{4r_o}$ izrazimo r_o .

b) Površina trokuta je 1890 cm^2 , a omjer duljina stranica je $a : b : c = 17 : 25 : 28$. Izračunajmo stranice trokuta.

c) Izračunajmo polujmer trokutu opisane kružnice.

Rješenje:

a) $P = \frac{abc}{4r_o} \cdot 4r$

$4Pr_o = abc / 4P$

$$r_o = \frac{abc}{4P}$$

c) $r_o = \frac{abc}{4P} = \frac{51 \cdot 75 \cdot 84}{4 \cdot 1890} = \frac{85}{2} = 42.5 \text{ cm}$

b) za $k > 0$

$$a = 17k$$

$$b = 25k$$

$$c = 28k$$

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{70k}{2} = 35k$$

$$P = \sqrt{s(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} =$$

$$= \sqrt{35k \cdot 18k \cdot 10k \cdot 7k} = \sqrt{44100k^4} = 210k^2$$

$$1890 = 210k^2$$

$$k = 3; \quad a = 51; \quad b = 75; \quad c = 84$$

viša razina (A)

► Primjer 7. ►

Smjesa za kore za pitu sastoji se od brašna, šećera i margarina u omjeru $3 : 2 : 1$. Stavili smo 25 dag brašna.

a) Koliko nam dag šećera i margarina treba (zaokruživši na dvije decimale)?

b) U kolač treba dodati i ulje, i to 2 dl ulja na kilogram brašna. Koliko je ulja potrebno za naš kolač?

Rješenje:

a) x – masa šećera

$$y$$
 – masa margarina

$$3 : 2 = 25 : x$$

$$3x = 50$$

$$x = \frac{50}{3} \text{ dag} \approx 16.67 \text{ dag}$$

$$3 : 1 = 25 : y$$

$$3y = 25$$

$$y = \frac{25}{3} \text{ dag} \approx 8.33 \text{ dag}$$

b)

1. način:

$$1 : 2 = 0.25 : x$$

$$x = 0.5 \text{ dl}$$

2. način:

Masa brašna je četvrtina kilograma, pa i obujam ulja treba biti četvrtina od 2 dl, što je 0.5 dl.

viša razina (A)

Primjer 8.

U priloženoj tablici nalaze se cijene i količine boja za bojenje unutarnjih zidova različitih proizvođača te broj četvornih metara koji se mogu obojiti jednim pakiranjem. Potpuni ostatak tablice, uz uvjet da površina zidova stana koju treba obojiti iznosi 225 m^2 . Čiji je proizvod najisplativiji?

	Bojić Company	Cetkić Farbico	Muljić Bojko
Obujam jednoga pakiranja	150 dl	10 000 ml	10 l
Cijena jednoga pakiranja	109.99 kn	129.98 kn	144.99 kn
Površina koja se može obojiti jednim pakiranjem	80 m^2	$7 \cdot 10^5 \text{ cm}^2$	65 m^2
Broj pakiranja boje potrebnih da se oboje zidovi stana			

Ukupna cijena boje

Rješenje:

	Bojić Company	Cetkić Farbico	Muljić Bojko
Obujam jednoga pakiranja	$150 \text{ dl} = 15 \text{ l}$	$10 000 \text{ ml} = 10 \text{ l}$	10 l
Cijena jednoga pakiranja	109.99 kn	129.98 kn	144.99 kn
Površina koja se može obojiti jednim pakiranjem	80 m^2	$7 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 = 70 \text{ m}^2$	65 m^2
Broj pakiranja boje potrebnih da se oboje zidovi stana	$\frac{15}{80} \cdot 225 = 42.191$ $\frac{42.14}{15} = 2.81$ Moramo kupiti 3 pakiranja!	$\frac{10}{70} \cdot 225 = 32.141$ $\frac{32.14}{10} = 3.214$ Moramo kupiti 4 pakiranja!	$\frac{10}{65} \cdot 225 = 64.621$ $\frac{64.62}{10} = 6.462$ Moramo kupiti 7 pakiranja!
Ukupna cijena boje	329.97 kn	519.92 kn	1 014.93 kn

Ponuda Bojić Company najpovoljnija je.

► Primjer 9. ▶

- Za funkciju $f(x) = x^3 - 2x + 1$ odredimo $f(0)$, $f(-1)$, $f(2)$, $f(-3)$ i $f(3)$.
- Rezultate prikažimo u tablici.
- Ucrtajmo pet točaka iz a) u koordinatni sustav.
- Navedimo sve točke u kojima je pripadna vrijednost funkcije negativna.

Rješenje:

a)

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$$

$$f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$$

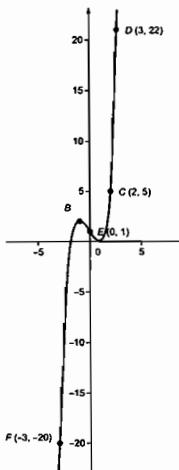
$$f(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3) + 1 = -27 + 6 + 1 = -20$$

$$f(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$$

b)

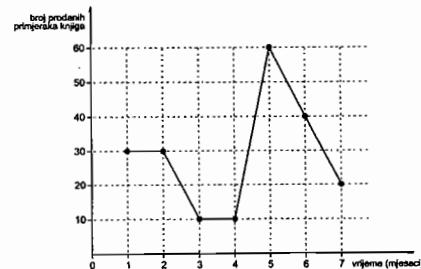
x	0	-1	2	-3	3
$f(x)$	1	2	5	-20	22

c)



d) $x = -3$, $f(x) = -20$ viši razinu (A)

► Primjer 10. ▶



Promotrimo graf koji prikazuje prodaju knjige *MATEMATIKA* na tržištu tijekom 7 mjeseci. Odgovorimo na sljedeća pitanja.

- U kojem je mjesecu prodano najviše primjeraka knjiga?
- U kojem je razdoblju prodano najmanje primjeraka knjiga?
- Koliki je broj prodanih primjeraka knjiga u šestomu mjesecu?
- Koliki je ukupan broj prodanih primjeraka knjiga za svih sedam mjeseci?

Rješenje:

- Najviše primjeraka knjiga prodano je u petome mjesecu.
- Najmanje primjeraka knjiga prodano je u trećem i četvrtom mjesecu.
- U šestomu mjesecu prodano je 40 primjeraka knjiga.
- Ukupan broj primjeraka knjiga koje su prodane u prvih sedam mjeseci zbroj je primjeraka prodanih u svim mjesecima: $30 + 30 + 10 + 10 + 60 + 40 + 20 = 200$ primjeraka knjiga.

viši razinu (A)

► Primjer 11. ►

Prvi tjedan puštanja u prodaju dionica poduzeća *Mathematica* dionice su postigle cijenu od 110 kn. Sljedećih pet tjedana cijena dionica padala je za 5 kn po tjednu. Nakon toga cijena je četiri tjedna ostala nepromijenjena. Sljedeća tri tjedna cijena se povećavala za 9 % po tjednu. Definirajmo funkciju koja opisuje kretanje tjedne cijene dionica između prvoga i dvanaestog tjedna.

Rješenje:

Ako su u pet tjedana dionice gubile na početnoj cijeni od 110 kuna za 5 kuna po tjednu, onda cijenu u $(x+1)$ -om tjednu možemo prikazati kao: $110 - 5x$, gdje je $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Sljedeća četiri tjedna cijena je ostala ista, pa treba samo izračunati cijenu u šestom tjednu za $x = 5 : 110 - 5 \cdot 5 = 85$ kn. Cijena dionica u ta četiri tjedna je 85 kuna.

Ako se cijena u sljedeća tri tjedna povećavala za po 9 % po tjednu, onda to za jedanaesti tjedan izgleda ovako:

$$85 + \left(\frac{85 \cdot 9}{100} \right) = 85 \left(1 + \frac{9}{100} \right).$$

Za dvanaesti tjedan izgleda ovako:

$$85 + \left(\frac{85 \cdot 9}{100} \right) + \left(\frac{9 \cdot \left(85 + \left(\frac{85 \cdot 9}{100} \right) \right)}{100} \right) = 85 \cdot \left(1 + \frac{9}{100} \right)^2.$$

Zaključujemo da bismo onda, ovisno o broju tjedana, cijenu mogli izračunati kao:

$$85 \cdot \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{x-10}.$$

Napišimo sada funkciju:

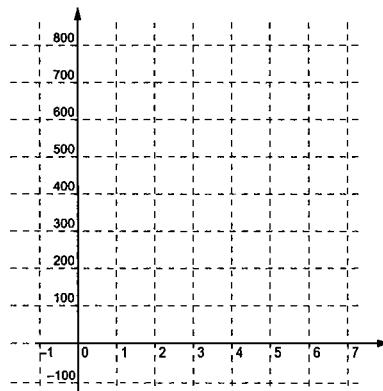
$$f(x) = \begin{cases} 110; & x=1 \\ 110 - 5 \cdot x; & 2 \leq x \leq 6 \\ 85; & 6 < x \leq 10 \\ \left(1 + \frac{9}{100} \right)^{x-10} \cdot 85; & 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

viša razina (A)

► Primjer 12. ►

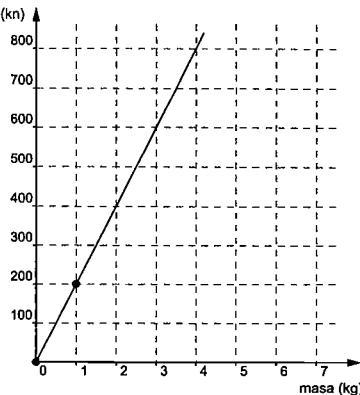
Kilogram sušenih vrganja stoji 200 kn.

- Napišimo funkciju koja izražava cijenu sušenih vrganja s pomoću cijene jednog kilograma vrganja i količine vrganja.
- Nacrtajmo graf funkcije u priloženi koordinatni sustav.
- Na grafu odčitajmo cijenu za tri kilograma vrganja.
- Uz pomoć grafa odredimo koliko kilograma vrganja možemo kupiti za 500 kuna.



Rješenje:

- a) $f(x) = 200 \cdot x$, gdje je x količina (masa) vrganja
 b)



- c) 600 kn
 d) 2.5 kg

viša razina (A)

► **Primjer 13.**

- a) Za funkciju $f(x) = 8x^2 - 6x - 12$ izračunajmo diskriminantu i nultočke, ako postoje.
 b) Odredimo maksimum ili minimum funkcije $f(x) = 8x^2 - 6x - 12$.
 c) Popunimo tablicu i odredite tijek funkcije.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$		y_0	

- d) Nacrtajmo graf funkcije, odredite sjecišta grafa s y -osi i ispišite pripadne koordinate.

Rješenje:

- a) $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-12) = 420 > 0$, pa zaključujemo da postoje dvije realne i različite nultočke.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-12)}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 348}}{16} = \frac{6 \pm 2\sqrt{105}}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{105}}{8}$$

Nultočke su $x_1 = \frac{3 + \sqrt{105}}{8}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{105}}{8}$.

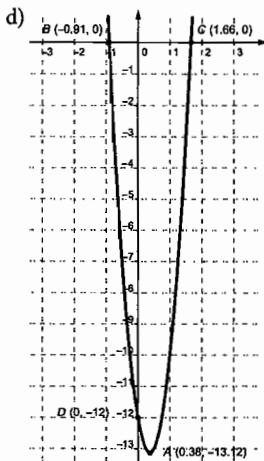
- b) $a = 8 > 0$, pa zaključujemo da zadana funkcija ima globalni minimum.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2 \cdot 8} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 8 \cdot (-12) - 36}{4 \cdot 8} = \frac{-420}{32} = -\frac{105}{8}$$

c)

x	$-\infty$		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	$-\frac{105}{8}$	\nearrow	$+\infty$



Sjecište s y -osi $(0, -12)$

viša razina (A)

► Primjer 14. ►

- Funkcija na slici zadana je kao $f(x) = x^3 - x^2 + a$. Odredite a .
- Odredimo nultočke računski.
- Za koje x je $f(x) > 0$?
- Za $D_f = [0, 5]$ odredimo sliku funkcije.
- Ispitajmo parnost funkcije.

Rješenje:

a)

Koristeći se točkom sa slike, u funkciju $f(x) = x^3 - x^2 + a$ uvrstimo $x = 1, f(x) = 2$:
 $2 = 1^3 - 1^2 + a$
 $a = 2$.

b)

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 2 &= x^3 + x^2 - 2x^2 + 2 = \\ &= x^2(x+1) - 2(x^2 - 1) = \\ &= x^2(x+1) - 2(x-1)(x+1) = \\ &= (x+1)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned}$$

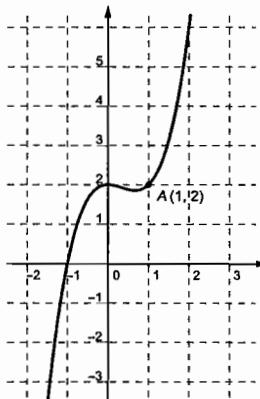
$$f(x) = (x+1) \cdot (x^2 - 2x + 2).$$

Sada iz $x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$.

Jednadžba $x^2 - 2x + 2 = 0$ nema realnih rješenja jer je njezina diskriminanta manja od 0. Dakle, jedina nultočka zadane funkcije je $x = -1$.

c)

Za $x \in (-\infty, +\infty)$, što je vidljivo sa slike.



d)

Odredimo y koordinate rubnih vrijednosti:

$$f(5) = 5^3 - 5^2 + 2 = 102$$

$$f(0) = 0^3 - 0^2 + 2 = 2.$$

Ali $f(x)$ ima lokalni minimum $\frac{50}{27}$ u točki $x = \frac{2}{3} \in D_f$, pa je tražena slika $\left[\frac{50}{27}, 102\right]$.

e) $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 + 2 = -x^3 - x^2 + 2$ ni parna ni neparna.

viša razina (A)

► **Primjer 15.**

Promjena temperature tekućina s obzirom na promjenu temperature okoline može se opisati sljedećom eksponencijalnom funkcijom:

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s) \cdot e^{-k \cdot t},$$

gdje je T_s – temperatura sredine, T_0 – početna temperatura tekućine
 t – vrijeme (u minutama), k – konstanta tekućine.

U prostoriju temperature 20°C unesemo posudu s vrućom vodom temperature 85°C . Nakon 5 minuta temperatura vode se smanji na 70°C .

- Kolika je konstanta k ?
- Kolika je temperatura vode nakon pola sata?
- Za koliko će minuta temperatura vode biti 22.70°C ?

Upita: krajnji rezultat zaokružimo na četiri decimale.

Rješenje:

a) U formulu $T(t) = T_s + (T_0 - T_s) \cdot e^{-k \cdot t}$ uvrstimo zadane podatke:
 $70^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C} + (85^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) \cdot e^{-k \cdot 5}$
 $50^\circ\text{C} = 65^\circ\text{C} \cdot e^{-k \cdot 5}$
 $e^{-k \cdot 5} = 0.7692307692$
 $\ln 0.7692307692 = -k \cdot 5$
 $k = -(\ln 0.7692307692) : 5$
 $k = 0.052.$

b) $T(30) = 20^\circ\text{C} + (85^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) \cdot e^{-0.052 \cdot 30}$
 $T(30) = 20^\circ\text{C} + 65 \cdot 0.2101360712$
 $T(30) = 33.66^\circ\text{C}$

c) $22.7^\circ\text{C} = 20^\circ\text{C} + (85^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) \cdot e^{-0.052 \cdot t}$
 $2.7^\circ\text{C} = 65^\circ\text{C} \cdot e^{-0.052 \cdot t}$
 $e^{-0.052 \cdot t} = 0.04153846154$
 $\ln 0.04153846154 = -0.052 \cdot t$
 $t = 61.18$ minuta

viša razina (A)

► **Primjer 16.**

Digitalna komunikacija je revolucionarna tehnologija prošlog stoljeća. Izvor informacija koji se prenosi može biti glas, video ili, jednostavno, podatci, a prije prijenosa treba ga prebaciti u digitalni kod. Postupak se zove modulacija. Nositelj podataka je elektromagnetski val i može se prikazati u obliku funkcije:

$$s(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$

u kojoj je A amplituda, ω radijska frekvencija, a Φ faza.

Ako je $A = 1$, $\Phi = 0$ i $\omega = 2\pi f_0$, pri čemu je f_0 frekvencija:

- napišimo $s(t)$,
- nadite period funkcije,
- izračunajmo $s(t)$ za $t = 0, \frac{1}{4f_0}, \frac{1}{2f_0}, \frac{3}{4f_0}$,
- odredite za koju vrijednost t funkcija doseže svoj maksimum?

Rješenje:

a) $s(t) = \sin(2\pi f_0 \cdot t)$

b) $T = \frac{2\pi}{2\pi f_0} = \frac{1}{f_0}$

c) $s(0) = \sin(2\pi f_0 \cdot 0) = 0$

$$s\left(\frac{1}{4f_0}\right) = \sin\left(2\pi f_0 \cdot \frac{1}{4f_0}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$s\left(\frac{1}{2f_0}\right) = \sin\left(2\pi f_0 \cdot \frac{1}{2f_0}\right) = \sin(\pi) = 0$$

$$s\left(\frac{3}{4f_0}\right) = \sin\left(2\pi f_0 \cdot \frac{3}{4f_0}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

d) $\sin(2\pi f_0 t) = 1$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = 2\pi f_0 \cdot t$$

$$t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2\pi f_0} = \frac{\frac{\pi}{2} + 4k\pi}{2\pi f_0} = \frac{\pi + 4k\pi}{4\pi f_0} = \frac{\pi(1+4k)}{4\pi f_0} = \frac{(1+4k)}{4f_0}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

viša razina (A)

Primjer 17.Za funkciju $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ izračunajmo:

- nultočke i amplitudu,
- minimum i maksimum,
- temeljni period.
- Prikažimo tijek funkcije na segmentu $[0, \pi]$.
- Grafički prikažimo funkciju.

Rješenje:

a) Za $f(x) = A \sin(Bx + C)$ nultočke su dane izrazom $x_0 = \frac{k\pi - C}{B}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Nultočke su dane izrazom $x_k = \frac{k\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{(2k-1)\cdot\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$. Ispišimo nekoliko vrijednosti.

$$x_0 = \frac{0 \cdot \pi - \frac{\pi}{2}}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$x_1 = \frac{1 \cdot \pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \frac{2\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_3 = \frac{3\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

$$x_4 = \frac{4\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{7\pi}{4}$$

Amplituda je $A = 2$.

$$\begin{array}{ll}
 \text{b)} & 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -2 \\
 & \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -1 \\
 & 2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad 2x + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
 & 2x = 2k\pi \quad 2x = -\pi + 2k\pi \\
 & x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{array}$$

Maksimum: $(k\pi, 2)$.

Minimum: $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, -2\right)$

Globalni maksimum 2 postiže se u točkama oblika $x = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$.

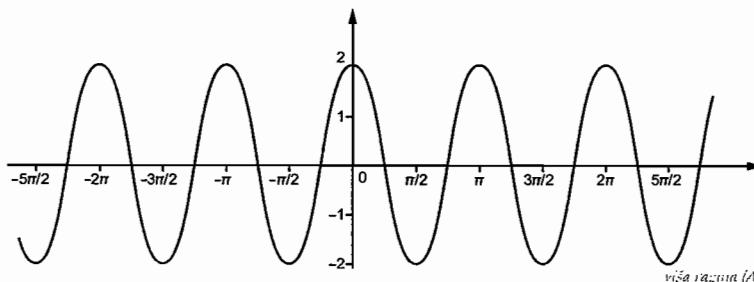
Globalni minimum -2 postiže se u točkama oblika $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$.

c) Temeljni period: $T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

d)

x	0	\nearrow	$\frac{\pi}{4}$	\nearrow	$\frac{\pi}{2}$	\nearrow	$\frac{3\pi}{4}$	\nearrow	π
$f(x)$	2	\searrow	0	\searrow	-2	\nearrow	0	\nearrow	2

e)



viša razina (A)

Primjer 18.

U čaši je na početku bilo 50 cm^3 vode. Svake sekunde iz čaše istječe kapljica obujma 0.03 cm^3 .

- S pomoću funkcije prikažimo koliko će vode biti u čaši nakon t sekundi.
- Koliki je obujam vode u čaši nakon 15 minuta?
- Za koje će se vrijeme čaša isprazniti?

Rješenje:

- $f(t) = 50 - 0.03t$
- $f(900) = 50 - 0.03 \cdot 900 = 50 - 27 = 23 \text{ cm}^3$
- $50 \text{ cm}^3 - 0.03t \text{ cm}^3 = 0$
 $0.03t \text{ cm}^3 = 50 \text{ cm}^3$

$$t = 1666.67 \text{ sekundi} = 27.28 \text{ minuta}$$

viša razina (A)

Primjer 19.

Uobičajeni napon kojim nas opskrbljuje HEP jest sinusna funkcija oblika
 $U(t) = 220 \sin(100\pi \cdot t)$, tj. funkcija oblika $U(t) = A \sin[\omega(t - \alpha)] + C$.

Ako je kutna frekvencija dana formulom $\omega = 2\pi/P$ (gdje je P period), izračunajmo:

- a) osciliranje napona tj. amplitudu,
- b) period oscilacije,
- c) kutnu frekvenciju $\omega = \frac{2\pi}{P}$,
- d) pomak u fazi α .

Rješenje:

- a) Amplitudu odčitavamo iz funkcije $A = 220$ V. Dakle, napon oscilira od 220 V do -220 V.
- b) $P = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$. Dakle, napon oscilira 50 puta u sekundi.
- c) $\omega = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{\frac{1}{50}} = 100\pi$ rad/s
- d) $U(t) = 220 \sin(100\pi \cdot t)$. Iz funkcije vidimo da nema pomaka u fazi, tj. da je $\alpha = 0$.

vruća razina (A)

Primjer 20.

Ekonomski stručnjaci izradili su funkciju kojom su prikazali potrebe za zapošljavanjem (mjerene u tisućama prijava po tjednu):

$$d = 4.3 \sin(0.82t + 0.3)$$

Za danu funkciju izračunajmo:

- a) amplitudu, b) period, c) pomak. d) Objasnimo rezultate.

Rješenje:

- a) $A = 4.3$
- b) $P = \frac{2\pi}{0.82} = 7.66$
- c) $\alpha = 0.3$
- d) Potrebe za zapošljavanjem ciklički se smjenjuju u razdoblju od približno 7.7 tjedana, a maksimalna potreba za zapošljavanjem je 4 300 osoba u tjednu, dok potražnja također naraste na 4 300 osoba u tjednu.

vruća razina (A)

Primjer 21.

Točka na rubu automobilske gume giba se prema funkciji $d(t) = 35 \cos\left(\frac{\pi}{5}(t - 2)\right)$, gdje je $d(t)$ položaj točke u ovisnosti o vremenu t (u sekundama).

- a) Koliki je radijus gume?
- b) Koliko okreta u minuti napravi točka na kotaču?

Rješenje:

- a) Amplituda pokazuje minimum i maksimum koji točka postiže u odnosu prema središtu gume. Amplituda je, dakle, jednaka polujmeru gume, tj. iznosi 35 cm.
- b) Da bismo izračunali broj okretaja u minuti, moramo naći period funkcije:

$$P = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10.$$

Dakle, točka napravi 10 okreta u sekundi, što je 600 okreta u minuti.

vruća razina (A)

Primjer 22.

Zadana je funkcija $f(x) = (2x - 3) \cdot (x^2 - 5x + 4)$.

- Odredimo sjecišta grafa zadane funkcije s koordinatnim osima.
- Derivirajmo funkciju f .
- Odredimo intervale pada funkcije f .
- Odredimo lokalne ekstreme
- Nacrtajmo graf funkcije koristeći se prethodnim podatcima.

Rješenje:

- Da bismo dobili sjecišta grafa s x -osi, iskaz funkcije trebamo izjednačiti s nulom.

$$(2x - 3) \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 1$$

Sjecišta grafa s x -osi jesu točke s koordinatama $\left(\frac{3}{2}, 0\right), (4, 0), (1, 0)$

Sjecišta grafa s y -osi dobit ćemo uvrštavanjem $x = 0$ u zapis funkcije.

$$y = (2 \cdot 0 - 3) \cdot (0^2 - 5 \cdot 0 + 4)$$

$$y = -3 \cdot 4 = -12$$

Točka sjecišta je $(0, -12)$.

- Derivirajmo sada funkciju koristeći se pravilom za deriviranje umnoška:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 3)' \cdot (x^2 - 5x + 4) + (2x - 3) \cdot (x^2 - 5x + 4)' = \\ &= 2 \cdot (x^2 - 5x + 4) + (2x - 3) \cdot (2x - 5) = \\ &= 2x^2 - 10x + 8 + 4x^2 - 16x + 15 = \\ &= 6x^2 - 26x + 23. \end{aligned}$$

- Nađimo intervale na kojima je $f'(x) < 0$.

$$6x^2 - 26x + 23 < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{13 - \sqrt{31}}{6}, \frac{13 + \sqrt{13}}{6} \right).$$

Nejdriadžbu možemo rješiti i grafički nalaženjem nultočaka i skiciranjem grafa.

Funkcija pada na intervalu $\left(\frac{13 - \sqrt{31}}{6}, \frac{13 + \sqrt{13}}{6} \right)$.

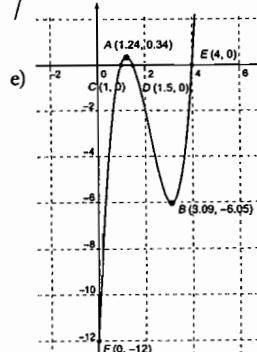
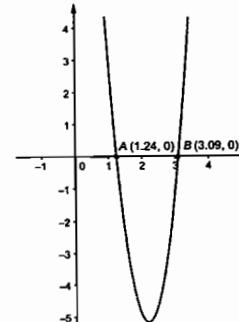
- Stacionarne su točke $(1.24, y)$ i $(3.09, y)$.

Pronađimo drugu derivaciju i predznak druge derivacije u stacionarnim točkama.

$$f''(x) = (6x^2 - 26x + 23)' = 12x - 26$$

$f''(1.24) = -11.12$ Lokalni je maksimum u točki $(1.24, 0.34)$.

$f''(3.09) = 11.08$ Lokalni je minimum u točki $(3.09, -6.05)$.



Primjer 23.

Dana je jednadžba $2x + 1 = ax - 3$.

- Odredimo rješenje dane jednadžbe u ovisnosti o parametru a .
- Za koje je vrijednosti parametra a rješenje jednadžbe prirodan broj?
- Za koju vrijednost parametra a jednadžba nema rješenja?

Rješenje:

a)

$$2x + 1 = ax - 3$$

$$2x - ax = -3 - 1$$

$$x(2 - a) = -4$$

$$x = \frac{-4}{2 - a} \text{ ili}$$

$$x = \frac{4}{a - 2}.$$

- b) Rješenje jednadžbe bit će prirodan broj ako je vrijednost izraza $a - 2$ pozitivan djelitelj broja 4:

$$a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$$

$$a - 2 = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$a - 2 = 4 \Rightarrow a = 6.$$

Za $a \in \{3, 4, 6\}$.

- c) Jednadžba nema rješenja za $a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$.

viša razina (A)

Primjer 24.

Učenici su krenuli na ljetovanje autobusima. U prvom je autobusu bila trećina svih učenika, u drugome pet učenika više, a ostalih 40 učenika išlo je trećim autobusom. Kada su stigli na odredište, smješteni su u peterokrevetne i četverokrevetne sobe, kojih je bio jednak broj.

- Koliko je učenika išlo na ljetovanje?
- Koliko se učenika vozilo drugim autobusom?
- Koliko je učenika smješteno u peterokrevetne sobe?

Rješenje:

- a) Ako sa x označimo ukupan broj učenika, modeliramo zadatak prema podatcima o smještaju u autobusima:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}x + 5\right) + 40 &= x & x + x + 15 + 120 &= 3x \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + 5 + 40 &= x \quad | \cdot 3 & 2x - 3x &= -15 - 120 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + 5 + 40 &= x & -x &= -135 \\ && x &= 135. \end{aligned}$$

- b) Drugim se autobusom vozilo $\frac{1}{3}x + 5$ učenika: $\frac{1}{3} \cdot 135 + 5 = 45 + 5 = 50$.

- c) Kako je jednak broj četverokrevetnih i peterokrevetnih soba, broj soba dobit ćemo kada ukupan broj učenika podjelimo sa 9, a zatim dobiveni broj soba pomnožimo brojem učenika u sobi: $5 \cdot \frac{135}{9} = 5 \cdot 15 = 75$.

► Primjer 25. ►

Izdavačka kuća sklopila je ugovor s autorom romana o naknadi. Dogovor je da će autor pri sklapanju ugovora dobiti 5 000 kn, te 10 % po prodanom primjerku, čija cijena iznosi 85 kn.

- Napišimo jednadžbu prema kojoj možemo odrediti autorovu naknadu ako znamo broj prodanih primjeraka romana.
- Izračunajmo naknadu autora romana ako je u prve dvije godine prodano 4 360 primjeraka.
- Napišimo jednadžbu s pomoću koje možemo izračunati broj prodanih primjeraka (P) ako znamo ukupan iznos naknade (N).
- Izračunajmo broj prodanih primjeraka romana u prvoj godini ako je autor dobio 24 550 kn.
- Koliki će dio naknade ostati autoru nakon prvih godinu dana ako na ostvarenu dobit mora državi platiti 35 % poreza?

Rješenje:

a) Budući da autor dobije 10 % po primjerku, taj je iznos jednak $\frac{10}{100} \cdot 85 = 8.5$ kn.

Ovisnost naknade N i broja primjeraka P može se zapisati u obliku:

$$N = 5\,000 + 8.5P \quad (1)$$

b) Uvrštenjem u (1) dobit ćemo $N = 5\,000 + 8.5 \cdot 4\,360 = 42\,060$ kn.

c) Iz (1) :

$$N = 5\,000 + 8.5P$$

$$8.5P = N - 5\,000 \quad | : 8.5$$

$$P = \frac{2N - 10\,000}{17}. \quad (2)$$

d) Uvrštenjem u (2) dobit ćemo: $\Rightarrow P = \frac{24\,550 - 5\,000}{8.5} = 2\,300$.

e) Izračunamo 35 % od naknade, koliko iznosi porez, te dobiveni iznos oduzmemo:

$$24\,550 - \frac{35}{100} \cdot 24\,550 = 15\,957.50 \text{ kuna.}$$

(Drugi, kraći, način jest da iz činjenice da porez iznosi 35 %, slijedi da autoru ostaje 65 % iznosa: $\frac{65}{100} \cdot 24\,550 = 15\,957.50$ kn).

viša razina (A)

► Primjer 26. ►

Koliko rješenja ima nejednadžba:

- $3x < 3x + 5$,
- $3x > 3x + 5$,
- $3x + 5 < 3x + 5$,
- $x - 3 \geq x - 3$?

Rješenje:

a) $3x < 3x + 5$

$$3x - 3x < 5$$

$0 < 5$ Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja.

- b) $3x > 3x + 5$
 $3x - 3x > 5$
 $0 > 5$ Jednadžba nema rješenja.
- c) $3x + 5 < 3x + 5$
 $3x - 3x + 5 < 5$
 $5 < 5$ Jednadžba nema rješenja.
- d) $x - 3 \geq x - 3$
 $x - x - 3 \geq -3$
 $-3 \geq -3$ Jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja.

viša razina (A)

► Primjer 27. ►

- a) Riješimo kvadratnu jednadžbu $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
- b) Riješimo kvadratnu nejednadžbu $2x^2 - 5x + 2 < 0$ i rješenje napišimo u obliku intervala.

Rješenje:

a)

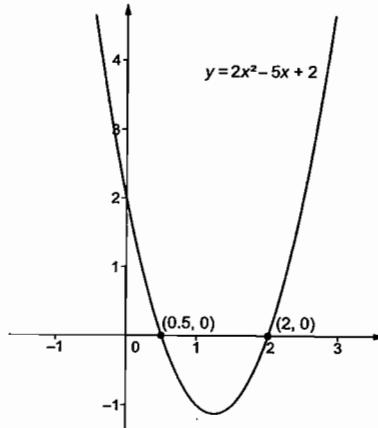
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \\ = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 2$$

- b) Graf polinoma $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ drugog stupnja pokazuje da je skup svih rješenja nejednadžbe $2x^2 - 5x + 2 < 0$ jednak $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, jer je vrijednost funkcije između njegovih nultočaka negativna.



viša razina (A)

► Primjer 28. ►

Umnožak dvaju uzastopnih parnih prirodnih brojeva iznosi 728. Koji su to brojevi?

Rješenje:

Sa $2x$ označimo manji od dva uzastopna parna broja. Tada je drugi $2x + 2$:

$$2x \cdot (2x + 2) = 728$$

$$4x^2 + 4x - 728 = 0 \mid : 4$$

$$x^2 + x - 182 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-182)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 728}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-1 \pm 27}{2}$$

$$x_1 = 13$$

$$x_2 = -14$$

Zadatak ima dva rješenja, tj. dva para rješenja. Međutim, u tekstu zadatka navedeno je da su brojevi prirodni, pa $x_2 = -14$ ne dolazi u obzir. Stoga je $x = 13$, odnosno $2x = 26$, pa je traženi par brojeva $(26, 28)$.

viša razina (A)

► **Primjer 29.**

Velika kazaljka sata dulja je od male za trećinu svoje duljine. Kolika je duljina male kazaljke ako su im vrhovi u 9:00 sati udaljeni 10 cm? Rješenje zaokružimo na dvije decimale.

Rješenje:

1. *način:* Označimo li duljinu velike kazaljke sa x , tada je duljina male kazaljke $\frac{2}{3}x$. U 9:00 sati one zatvaraju pravi kut, pa primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$x^2 + \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = 10^2$$

$$x^2 + \frac{4}{9}x^2 = 100 \quad | \cdot 9$$

$$9x^2 + 4x^2 = 900$$

$$13x^2 = 900$$

$$x^2 = \frac{900}{13} \quad | \sqrt{}$$

$$|x| = \frac{30}{\sqrt{13}} = \frac{30\sqrt{13}}{13} \approx 8.32 \quad \text{tj. } x_{1,2} \approx \pm 8.32.$$

Kako je riječ o duljini, uzimamo u obzir samo pozitivno rješenje pa je duljina velike kazaljke 8.32 cm, a male 5.55 cm.

2. *način:* Označimo li duljinu male kazaljke sa x , tada velika ima duljinu $\frac{3}{2}x$. U 9:00 sati one zatvaraju pravi kut, pa primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = 10^2$$

$$x^2 + \frac{9}{4}x^2 = 100 \quad | \cdot 4$$

$$4x^2 + 9x^2 = 400$$

$$13x^2 = 400$$

$$x^2 = \frac{400}{13} \quad | \sqrt{}$$

$$|x| = \frac{20}{\sqrt{13}} = \frac{20\sqrt{13}}{13} \approx 5.55 \quad \text{tj. } x_{1,2} \approx \pm 5.55.$$

Kako je riječ o duljini, uzimamo u obzir samo pozitivno rješenje pa je duljina male kazaljke 5.55 cm.

(viša razina)

► **Primjer 30.**

Ulaganjem novca u banku nakon nekog vremena dobijemo kamatu na uloženi iznos. Kamata se računa složenim kamatnim računom, a ovisnost uloženoga i konačnog iznosa možemo prikazati formulom $C_t = C_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^t$, u kojoj je C_t iznos nakon t godina; C_0

uloženi iznos; p kamatna stopa; n broj obračunskih razdoblja u godini; t vrijeme u godinama.

Na koliko najmanje godina moramo uložiti 50 000 kn uz kamatnu stopu od 6 %, da bismo uloženi iznos povećali za 50 %, ako se ukamatačivanje provodi četiri puta u godini?

Rješenje:

$$C_0 = 50\ 000$$

$$C_t = C_0 + (50\% \cdot C_0) = 1.5 C_0 = 75\ 000$$

$$n = 4$$

$$p = 6\% = 0.06$$

$$t = ?$$

$$75\ 000 = 50\ 000 \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4$$

$$\left(1 + 0.015\right)^4 = \frac{75\ 000}{50\ 000}$$

$$1.015^4 = \frac{3}{2} \quad \left| \log \right.$$

$$\log 1.015^4 = \log \frac{3}{2}$$

$$4t \log 1.015 = \log \frac{3}{2} \quad \left| : 4 \log 1.015 \right.$$

$$t = \frac{\log \frac{3}{2}}{4 \log 1.015}$$

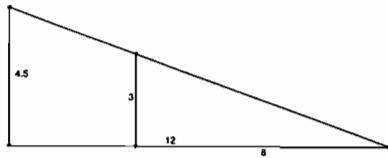
$$t = 6.8 \text{ god.} = 6 \text{ god. } 9 \text{ mj. } 21 \text{ d}$$

Budući je obračun četiri puta u godini (svaka tri mjeseca), novac mora biti oričen punih 7 godina.

viša razina (A)

► **Primjer 31.** ►

Ulična svjetiljka visine 3 m baca svjetlost oko sebe u promjeru 8 m. Koliko visoka mora biti svjetiljka ako želimo imati svjetlost na udaljenosti 12 m od njezina podnožja?



Rješenje:

Zadatak rješavamo s pomoću sličnosti trokuta.

$$\frac{h}{3} = \frac{12}{8} \rightarrow h = 4.5 \text{ m.}$$

višta razina (A)

► **Primjer 32.** ►

Keramičar je za 25 m^2 pločica i 3 kg ljepila za pločice platio 2 337 kn. Nakon nekoliko dana kupio je još 9 m^2 pločica i kilogram ljepila, te platio 839 kn.

a) Odredimo cijenu pločica i cijenu ljepila.

b) Ako je za 9 m^2 potrebno oko 1 kg ljepila, koliko će trebati novca za popločenje 75 m^2 (pločice se ne mogu kupiti u pakiranju manjem od 1 m^2 , niti ljepilo u pakiranju manjem od 1 kg)?

Rješenje:

a) Ako cijenu četvornog metra pločica označimo sa P , a cijenu 1 kg ljepila sa LJ , možemo postaviti sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$25P + 3LJ = 2\ 337$$

$$9P + LJ = 839 \Rightarrow LJ = 839 - 9P$$

$$25P + 3(839 - 9P) = 2\ 337$$

$$P = 90$$

$$25P + 2\ 517 - 27P = 2\ 337$$

$$LJ = 839 - 9 \cdot 90$$

$$-2P = 2\ 337 - 2\ 517$$

$$LJ = 29$$

$$-2P = -180 \quad | : (-2)$$

Cijena pločica je 90 kn, a cijena ljepila 29 kn.

- b) Budući da je za 9 m^2 pločica potrebno 1 kg ljepila, za 1 m^2 pločica trebat će $\frac{1}{9}$ kg ljepila, a za 75 m^2 treba $75 \cdot \frac{1}{9} \text{ kg} \approx 8.33 \text{ kg}$ ljepila. Budući da se ljepilo ne može kupiti u pakiranju manjem od 1 kg, trebat će kupiti 75 m^2 pločica i 9 kg ljepila:
 $75 \cdot 90 + 9 \cdot 29 = 7011 \text{ kn.}$

viša razina (A)

► Primjer 33. ►

U prodavaonicu je došla određena količina svježih jaja. Jaja mogu biti pakirana u kutijama po 10 komada ili na kartonima po 30 komada. Koliko je stiglo kutija, a koliko kartona ako znamo da je stiglo 1 010 komada jaja, te ukupno 37 pakiranja.

Rješenje:

Sa x označimo broj kutija. Kako znamo ukupan broj pakiranja, broj kartona je $37 - x$.

Budući da u svaku kutiju stane 10, a u karton 30 jaja, možemo postaviti jednadžbu:

$$10x + 30 \cdot (37 - x) = 1010$$

$$10x + 1110 - 30x = 1010$$

$$-20x = -100$$

$$x = 5.$$

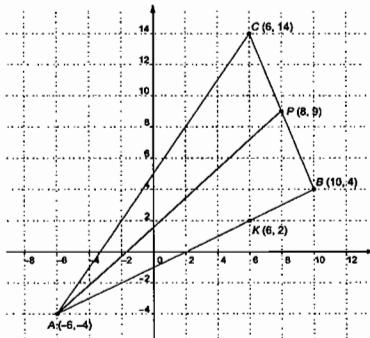
Stiglo je 5 kutija i 32 kartona jaja.

viša razina (A)

► Primjer 34. ►

Trokut ABC zadani su koordinatama svojih vrhova: $A(-6, -4)$, $B(10, 4)$, $C(6, 14)$.

- Odredimo duljinu stranice a .
- Odredimo polovište P_a stranice a .
- Odredimo površinu trokuta $\Delta AP_a C$.
- U kojem omjeru, računajući od točke A , točka $K(6, 2)$ dijeli dužinu AB ?



Rješenje:

a) $a = BC; |BC| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(6 - 10)^2 + (14 - 4)^2} = \sqrt{116} \approx 10.77 \text{ jed.}$

b) $P_a = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{10 + 6}{2}, \frac{4 + 14}{2} \right) = (8, 9).$

c) $P = \frac{1}{2} |x_A(y_p - y_C) + x_p(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_p)|$

$$P = \frac{1}{2} |-6 \cdot (9 - 14) + 8 \cdot (14 + 4) + 6 \cdot (-4 - 9)|$$

$$P = \frac{1}{2} |30 + 144 - 78| = \frac{1}{2} |96| = 48.$$

d) $\overline{AK} : \overline{AB} = \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{\sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} = \frac{\sqrt{(6 + 6)^2 + (2 + 4)^2}}{\sqrt{(10 + 6)^2 + (4 + 4)^2}} = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{320}} = \frac{3}{4}.$

Točka K dijeli dužinu \overline{AB} u omjeru 3 : 1.

viša razina (A)

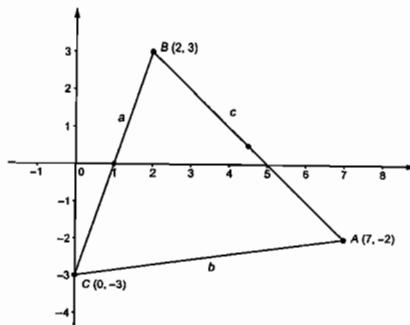
Primjer 35.

Zadan je trokut ABC s vrhovima $A(7, -2)$, $B(2, 3)$ i $C(0, -3)$.

- Nacrtajmo trokut i provjerimo je li jednakokračan.
- Izračunajmo površinu trokuta AP_1P_2 kojemu su P_1, P_2 polovišta stranica AB i BC .

Rješenje:

- Trebamo odrediti duljine stranica.
Na skici vidimo da je trokut jednakokračan, ali treba napraviti provjeru:



$$\begin{aligned} a &= |BC| = \sqrt{(x_c - x_b)^2 + (y_c - y_b)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{40} \approx 6.32 \\ b &= |AC| = \sqrt{(x_c - x_a)^2 + (y_c - y_a)^2} = \sqrt{(0 - 7)^2 + (-3 + 2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 10.77 \\ c &= |AB| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = \sqrt{(2 - 7)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 10.77 \end{aligned}$$

Trokut je jednakokračan.

$$\text{b) } P_1 = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{7+2}{2}, \frac{-2+3}{2} \right) = (4.5, 0.5)$$

$$P_2 = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{3-3}{2} \right) = (1, 0)$$

$$P_{AP_1P_2} = \frac{1}{2} |x_A(y_{P_1} - y_{P_2}) + x_{P_1}(y_{P_2} - y_A) + x_{P_2}(y_A - y_{P_1})|$$

$$P_{AP_1P_2} = \frac{1}{2} |7(0.5 - 0) + 4.5(0 + 2) + 1(-2 - 0.5)|$$

$$P_{AP_1P_2} = \frac{1}{2} |3.5 + 9 - 2.5| = 5 \text{ kv. jed.}$$

Primjer 36.

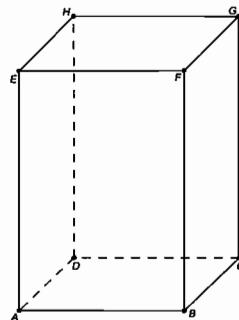
Uz sljedeće tvrdnje zaokružimo T (točno) za istinite i N (netočno) za neistinite. Tvrđnje se odnose na standardno označen kvadar $ABCDEFGH$.

- Pravac AB usporedan je s ravninom EGH .
- Točka C pripada ravnini AEG .
- Pravac BF probada ravninu AEG .
- Pravac DB mimosmjeren je s pravcem AG .
- Ravnina DBF sadržava točku C .
- Pravci DH i AE konkurentni su.
- Točke A, B i D kolinearne su.
- Točke D, H i C komplanarne su.

T	N
T	N
T	N
T	N
T	N
T	N
T	N
T	N

Rješenje:

- a) T
- b) T
- c) N
- d) T
- e) N
- f) N
- g) N
- h) T



viša razina (A)

Primjer 37. ▷

Duljina kraće dijagonale u pravokutnom trapezu iznosi 7 cm. Dulji krak ima duljinu 5,45 cm, a šiljasti kut iznosi 32° .

Odredimo:

- a) duljine osnovica trapeza,
- b) visinu trapeza,
- c) površinu trapeza.

Rješenje:

a) $\frac{e}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{b \sin \alpha}{e} \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{b \sin \alpha}{e} = 24^\circ 22'$

$$\delta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 123^\circ 38'$$

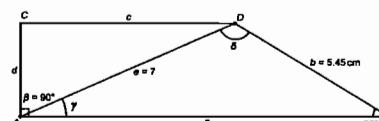
$$\frac{a}{\sin \delta} = \frac{e}{\sin \alpha} \Rightarrow a = \frac{e \sin \delta}{\sin \alpha} \Rightarrow a = 11 \text{ cm}$$

$$\angle DAC = 90^\circ - \gamma = 65^\circ 38'$$

$$\sin \angle DAC = \frac{c}{e} \Rightarrow c = e \cdot \sin 65^\circ 38' = 6.38 \text{ cm}$$

b) $v = d = \sqrt{e^2 - c^2} = \sqrt{7^2 - 6.38^2} = 2.88 \text{ cm}$ c) $P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{11+6.38}{2} \cdot 2.88 = 25 \text{ cm}^2$

viša razina (A)



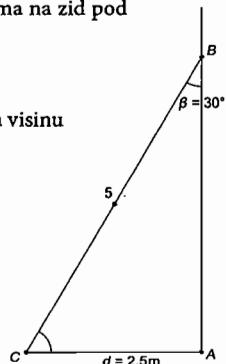
Primjer 38. ▷

Čovjek u podne stoji na ljestvama visokim 5 m, naslonjenima na zid pod kutem od 30° .

- a) Koliko su ljestve udaljene od zida?
- b) Kolika je sjena ljestava?
- c) Kolike bi ljestve morao imati čovjek ako se treba popeti na visinu 8 metara, a ljestve moraju biti nagnute pod istim kutem?

Rješenje:

- a) Na skici možemo uočiti pravokutan trokut čiji su šiljasti kutovi 30° i 60° . Taj je trokut specifičan jer čini polovinu jednakostaničnog trokuta, te mu je hipotenuza dvostruko dulja od kraće katete. Iz toga slijedi da ljestve moraju biti udaljene od zida 2,5 m.

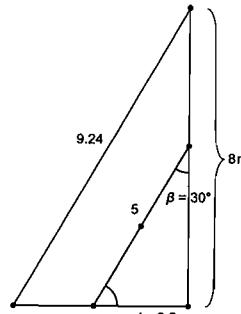


- b) Sjena je jednaka udaljenosti od zida jer u podne Sunce baca sjenu okomito na podlogu, tj. sjena je jednaka ortogonalnoj projekciji ljestava na Zemlju, 2.5 m.
- c) Zadatak rješavamo na temelju sličnosti trokuta.

$$\frac{l}{5} = \frac{8}{\sqrt{3}} \Rightarrow l = \frac{16}{\sqrt{3}} = 9.24 \text{ m.}$$

Možemo ga rješavati i uz pomoć trigonometrije pravokutnog trokuta:

$$\cos 30^\circ = \frac{8}{l} \Rightarrow l = \frac{8}{\cos 30^\circ} = 9.24 \text{ m.}$$



viša razina (A)

► Primjer 39. ►

Koliko betonskih stupova možemo izliti od 180 m^3 betona ako je visina stupa 1.5 m, a presjek mu je kvadrat stranice 1.5 cm?

Rješenje:

$$a = 1.5 \text{ cm} = 1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$h = 1.5 \text{ m}$$

$$\frac{V_{\text{ukupno}}}{n} = 180 \text{ m}^3$$

$$n = ?$$

Stupovi imaju oblik pravilne uspravne četverostrane prizme. Izračunat ćemo obujam jednog stupa, a nakon toga količinu betona podijeliti s dobivenim obujmom.

$$V_s = a^2 \cdot h = (1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 \cdot 1.5 \text{ m} = 1.5^3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$n = \frac{V_{\text{ukupno}}}{V_s} = \frac{180 \text{ m}^3}{1.5^3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3} = \lfloor 533\,333.333 \rfloor = 533\,333 \text{ stupa.}$$

viša razina (A)

► Primjer 40. ►

Nad promjerom kružnice

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2 = 0$$

konstruirajmo jednakokračan trokut kojem je visina jednaka osnovici. Odredimo površinu lika što ga trokut isiječa iz početnoga kruga.

Rješenje:

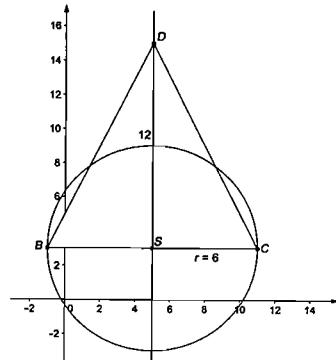
Ako pozorno pogledamo skicu, uočit ćemo da se tražena površina sastoji od dva jednakokračna trokuta i jednoga kružnog isječka. Cilj je odrediti tražene kutove.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{6} = 2 \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2 = 63^\circ 26' 6''$$

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 53^\circ 7' 48''$$

$$\gamma = 180^\circ - 2\beta = 73^\circ 44' 24''$$

Iz $\Delta FGS \sim \Delta BFD$ (KKK-poučak) slijedi $a = h$.



viša razina (A)

Možemo i izračunati:

$$\sin \alpha = \frac{h}{r} \rightarrow h = r \sin \alpha = 6 \cdot \sin 63^\circ 26' 6'' = 5.37$$

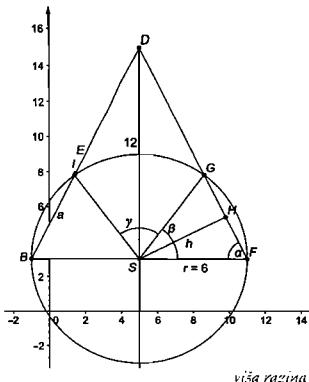
$$\cos \alpha = \frac{a}{r} \rightarrow a = 2r \cos \alpha = 12 \cdot \cos 63^\circ 26' 6'' = 5.37$$

$$P_{\Delta} = 2 \cdot \frac{a \cdot h}{2} = a \cdot h = a^2 = 5.37^2 = 28.84$$

Kružni isječak:

$$P_i = \frac{r^2 \pi \gamma}{360^\circ} = \frac{36 \cdot \pi \cdot \gamma}{360^\circ} = 23.17.$$

$$\text{Ukupna površina: } P = 28.84 + 23.17 = 52 \text{ cm}^2.$$



viša razina (A)

► Primjer 41.

Spremnik na vozilu za prijevoz benzina ima oblik valjka duljine 5.5 m i polumjera osnovke 1.7 m. Koliko litara benzina stane u spremnik? Koliko kilometara možemo prijeći s tom količinom ako naše vozilo troši 8 litara goriva na 100 km?

Rješenje:

$$h = 5.5 \text{ m}$$

$$r = 1.7 \text{ m}$$

$$V = ?$$

Najprije treba odrediti obujam valjka:

$$V = r^2 \pi \cdot h = 1.7^2 \cdot \pi \cdot 5.5 = 49.9356 \text{ m}^3 \quad 1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$$

$$V = 49935.6 \text{ l}$$

$$s = V : \frac{8}{100} = \frac{V}{8} \cdot 100 = 624\,195.19 \text{ km.}$$

Jedan spremnik dostatan je za 624 195.19 km.

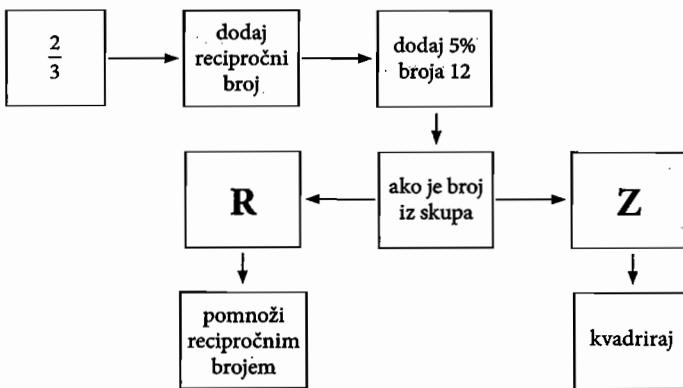
viša razina (A)

• Modeliranje i zadatci produženih odgovora

– zadatci za vježbu •

Rješenja zadataka potražite na str. 467.

- Ako broju 7 dodamo 81, rezultat podijelimo s 11 i zatim ga pomnožimo s 27:
 - koji ćemo broj dobiti,
 - koliki je zbroj svih djelitelja dobivenog broja?
 - Odredi najveći djelitelj broja dobivenog pod a).
- a) Izračunajte i popunite prazna mesta.

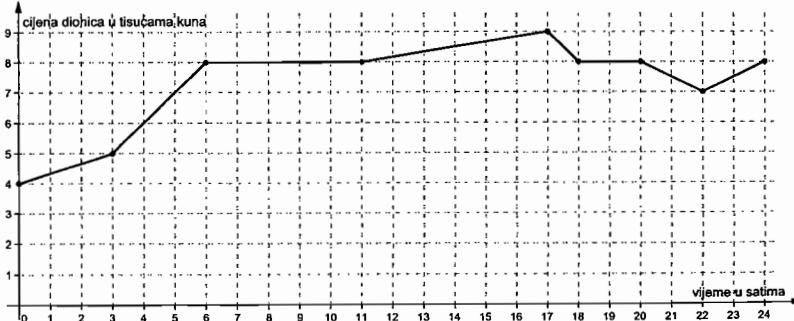


- Za dobiveni broj nađi suprotni i recipročni broj.
- a) Rastavi na faktore izraz $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$.

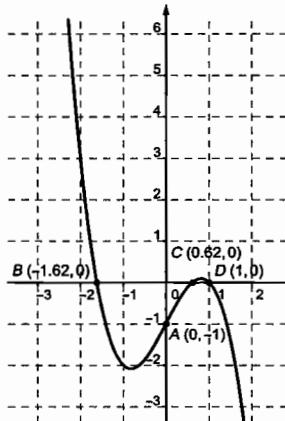
$$x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}$$

 b) Skrati razlomak $\frac{x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}}{2x+1}$.
- a) Zapiši izraz $|x-3|$ bez znaka apsolutne vrijednosti.
 b) Skrati razlomak $\frac{|x-3|}{18-2x^2}$.
 c) Izračunaj vrijednost izraza $\frac{|x-3|}{18-2x^2}$ za $x = 4$.
- Mama je napravila kolač u obliku kruga promjera 13 cm. Ana je pojela 15 %, Ivo 25 %, a Marko 23 % od ostatka.
 - Koliki je postotak kolača ostao tati?
 - Koliko je kriški kolača poeo Ivo ako je kriška $\frac{169}{48}\pi \text{ cm}^2$?
 - Koliko su kriški zajedno pojeli Ana i Marko?

6. U tramvaju se vozi 25 putnika. Na prvoj stanici iz tramvaja izđe 4 % svih putnika, te uđu tri putnika.
- Koliko je putnika tada u tramvaju?
 - Ako na drugoј stanici izđe $40 \frac{20}{27}$ % preostalih putnika, koliko je putnika ostalo u tramvaju?
7. a) Koliki je radijus kruga čija je površina 30 % površine pravokutnika dijagonale 7 cm i jedne stranice od 5 cm?
 b) Kolika je površina jedne četvrтине toga kruga?
8. Smjesa za nadjev torte sastoji se od jaja, mlijeka i šećera u omjeru $3 : 2 : 1$. Ako smo stavili 2 jaja, izračunajte (na dvije decimale):
 a) koliko nam litara mlijeka i dag šećera treba.
 b) Mami je potrebna veća torta, pa treba nadjev za 25 % veću tortu. Koliko joj je mlijeka potrebno za nadjev te torte?
9. Površina trokuta je 890 cm^2 , a omjer duljina stranica je $a : b : c = 15 : 23 : 28$.
 a) Izračunaj stranice trokuta.
 b) Izračunaj opseg trokuta.
10. Za funkciju $f(x) = x^3 - x + 3$ odredite:
 a) $f(0); f(-1); f(1); f(-4); f(3)$,
 b) Rezultate prikažite u tablici.
 c) Ucrtaj pet točaka iz a) u koordinatni sustav,
 d) Navedi točke za čiji argument funkcija ima vrijednost negativnog predznaka.
11. Na sljedećem grafu prikazano je kretanje vrijednosti dionica tijekom 24 sata. Prouči graf i odgovori na sljedeća pitanja.
- Koja je najmanja cijena dionica?
 - Od koliko je do koliko sati cijena ostala ista?
 - Koliko iznosi najveća promjena cijena dionica?
 - Ako smo svoje dionice prodali u 16:00, jesmo li postigli maksimalnu cijenu ili smo mogli postići veću cijenu da smo pričekali s prodajom?



12. Prvi tjedan puštanja u prodaju parfema *JEDAN PLUS JEDAN VIŠE SU OD DVA* prođano je 1 100 komada. Sljedećih pet tjedana prodaja je padala, i to za 50 komada po tjednu. Nakon toga broj prodanih komada u tjednu ostao je četiri tjedna nepromijenjen. Sljedeća tri tjedna broj prodanih komada po tjednu povećavao se za 10 % u tjednu.
Definiraj funkciju po dijelovima koji predočuju broj prodanih komada parfema između prvoga i dvanaestog tjedna.
13. Cijena 5 kilograma praška za pranje rublja iznosi 98 kuna.
- Napiši funkciju koja izražava cijenu praška za pranje rublja uz pomoću cijene jednog kilograma praška i mase praška.
 - Nacrtaj graf funkcije u koordinatnom sustavu.
 - Na grafu odčitaj cijenu za 10 kilograma.
 - Uz pomoć podatka da se prašak za pranje rublja prodaje u pakiranjima od 2.5 kg, 3 kg, 5 kg, odgovori koliko kilograma praška možemo kupiti za 550 kuna.
14. Zadana je funkcija $f(x) = -3x^2 + 9x + 30$.
- Izračunaj diskriminantu.
 - Pronađi sjecišta grafa funkcije s x -osi.
 - Odredi lokalne ekstreme zadane funkcije.
 - Nacrtaj graf funkcije $f(x)$ u koordinatnom sustavu.
15. Funkcija na slici zadana je kao $f(x) = -x^3 + ax - 1$, gdje je a realni parametar.
- Odredite a .
 - Za koje x je $f(x) < 0$?
 - Za $D_f = [1, +\infty)$ odredite sliku zadane funkcije.
 - Ispitajte parnost funkcije.



16. Promjena temperature tekućina s obzirom na promjenu temperature okoline može se opisati eksponencijalnom funkcijom $T(t) = T_s + (T_0 - T_s) \cdot e^{-kt}$, gdje je T_s temperatura sredine, T_0 početna temperatura tekućine, t vrijeme u minutama, a k konstanta tekućine.
- U prostoriju temperature 18 °C unesemo posudu s vrućom vodom temperature 100 °C. Nakon 10 minuta temperatura vode padne na 60 °C.
- Kolika je konstanta k ?
 - Kolika je temperatura nakon sat vremena?
 - Za koliko će minuta temperatura biti 25 °C?

17. Elektromagnetski val prikazuje se u obliku funkcije $s(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$, gdje je A amplituda, ω radijska frekvencija, a Φ faza.
- Ako je $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\Phi = 0$ i $\omega = 2\pi f_0$, gdje je f_0 frekvencija:
- nadite period funkcije,
 - izračunajte $s(t)$ za $t = 1, \frac{1}{2f_0}, \frac{1}{3f_0}, \frac{1}{4f_0}$.
 - Za koju vrijednost t funkcija doseže maksimum?
18. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ izračunaj:
- nultočke u intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ i amplitudu,
 - minimum i maksimum,
 - temeljni period,
 - grafički prikaži funkciju.
19. U boci je na početku bilo 150 cm^3 vode. Svake sekunde iz boce isteće kapljica obujma 0.05 cm^3 .
- Prikaži uz pomoć funkcije koliko će vode biti u boci nakon t sekundi.
 - Koliko je vode u boci nakon 10 minuta?
 - Za koliko će vremena boca biti prazna?
20. Zadana je funkcija $f(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 2)$.
- Odredite sjecišta grafa zadane funkcije s koordinatnim osima.
 - Derivirajte funkciju f .
 - Odredite intervale rasta funkcije f .
 - Odredite lokalne ekstreme funkcije f .
 - Nacrtajte graf funkcije koristeći se prethodnim pozadatcima.
21. Dana je jednadžba $-4x + a = ax - 1$.
- Odredite rješenje dane jednadžbe u ovisnosti o parametru a .
 - Za koje je vrijednosti parametra a rješenje jednadžbe prirodan broj?
 - Za koju vrijednost parametra a jednadžba nema rješenja?
22. Učenici su krenuli na ljetovanje autobusima. U prvom je autobusu bila petina svih učenika, a u drugome osam učenika više. U trećem su autobusu bile dvije devetine, a u četvrtome jedna trećina svih učenika. Kada su stigli na ljetovanje, smješteni su u peterokrevetne i četverokrevetne sobe, kojih je bio jednak broj.
- Koliko je učenika išlo na ljetovanje?
 - Koliko se učenika vozilo drugim autobusom?
 - Koliko je učenika bilo smješteno u četverokrevetne sobe?
23. Izdavačka kuća sklopila je ugovor s autorom romana o naknadi. Dogovor je da će autor dobiti 2 000 kn pri sklapanju ugovora, te 12 % po prodanom primjerku, čija je cijena 96 kuna.
- Napišite jednadžbu uz pomoć koje možemo odrediti autorovu naknadu N ako znamo broj prodanih romana P .

- b) Izračunajte naknadu autora romana ako je u prve dvije godine prodano 2 560 primjeraka.
- c) Napišite jednadžbu uz pomoć koje možemo izračunati broj prodanih primjeraka (P) ako znamo ukupan iznos naknade (N).
- d) Izračunajte broj prodanih primjeraka romana u prvoj godini ako je autor dobio 15 824 kune.
- e) Koliki će dio naknade preostati autoru nakon prve godine ako mora platiti državi 45 % poreza na ostvarenu dobit.
- 24.** a) Riješite kvadratnu jednadžbu $7x^2 + 27x - 4 = 0$.
- b) Riješite kvadratnu nejednadžbu $7x^2 + 27x - 4 < 0$ i rješenje napišite u obliku intervala.
- c) Odredite rješenje sustava jednadžbi $7x^2 + 27x - 4 = 0$ i $x + y = -4$.
- d) Odredite udaljenost točaka u kojima se sijeku grafovi funkcija:
 $f(x) = 7x^2 + 27x - 4$ i $g(x) = -x - 4$.
- 25.** Umnogak triju prirodnih brojeva iznosi 2 700. Koji su to brojevi ako je drugi za 50 % veći od prvoga a treći za 20 % veći od drugoga?
- 26.** Velika kazaljka sata dulja je od male za četvrtinu svoje duljine.
- a) Kolika je duljina male kazaljke ako su im vrhovi u 12:05 sati udaljeni 0.5 cm? Rješenje zaokružite na dvije decimale.
- b) Kolika je pogreška u računu ako zanemarimo pomak male kazaljke (budući da je za tih 5 minuta vrlo malen) i ako taj pomak uzmemos u obzir? Rješenje zapisi kao razliku duljine i kao postotak.
- 27.** Ulaganjem novca u banku nakon nekog vremena dobijemo kamatu na uloženi iznos. Kamata se računa složenim kamatnim računom, a ovisnost uloženoga i konačnog iznosa možemo prikazati formulom $C_t = C_0 \left(1 + \frac{p}{n}\right)^t$, gdje je C_t iznos nakon t godina; C_0 uloženi iznos; p kamatna stopa; n broj obračunskih razdoblja u godini; t vrijeme u godinama. Na koliko godina moramo uložiti 120 000 kuna uz kamatnu stopu od 8 % da bismo iznos povećali 25 % ako se ukamćivanje provodi tri puta u godini?
- 28.** Veza između magnitudo nekog potresa (prema Richteru) i količine energije mjerene u džulima koja se oslobodi pri potresu dana je formulom: $\log E = 11.8 + 1.5M$. U veljači 2010. g. u Čileu je registriran potres magnitudo 8.8. Izračunajte količinu energije oslobođene pri tom potresu.
- 29.** Keramičar je za 34 m^2 pločica i 4 kg ljepila za pločice platio 4 082 kune. Nakon nekoliko dana kupio je još 7 m^2 pločica i kilogram ljepila, te platio 848 kuna.
- a) Odredite cijenu pločica i ljepila.
- b) Ako je za 11 m^2 potrebno 1 kg ljepila, koliki će biti troškovi popločenja 68 m^2 (pločice se ne mogu kupiti u manjem pakiranju od 1 m^2 , niti ljepilo u pakiranju manjem od 1 kg)?
- 30.** U prodavaonicu je došla određena količina svježih jaja. Jaja mogu biti pakirana u kutijama od 10 komada ili u kartonima od 30 komada. Koliko je stiglo kutija, a koliko kartona ako znamo da je ukupna količina jaja 1 130 komada te da je stiglo ukupno 45 pakiranja?

31. Trokut ABC zadan je koordinatama svojih vrhova $A(-4, -2)$, $B(3, 3)$ i $C(-1, 2)$.
- Odredi duljinu stranice a .
 - Odredi polovište P_b stranice b .
 - Odredi površinu trokuta ΔABP_b .
 - U kojem omjeru točka $K(-2.6, -1)$ dijeli dužinu \overline{AB} ?
32. Zadan je trokut ABC s vrhovima $A(-3, 4)$, $B(-1, -3)$ i $C(4, 2)$.
- Provjerite je li zadani trokut jednakokračan.
 - Izračunajte površinu trokuta AP_1P_2 , kojemu su P_1, P_2 polovišta stranica \overline{AB} i \overline{BC} .
 - Nacrtajte trokut ABC u koordinatnoj ravnini.
33. Ulična svjetiljka visine 5 m baca svjetlost oko sebe u promjeru od 12 m. Koliko mora biti visoka svjetiljka ako želimo imati svjetlost na udaljenosti 18 m od njezina podnožja?
34. Duljina kraće dijagonale u pravokutnom trapezu iznosi 20 cm, dulji krak 16.28 cm, a šiljasti kut $79^{\circ}22'48''$. Odredite:
- duljine osnovica trapeza,
 - visinu trapeza,
 - površinu trapeza.
35. Čovjek u podne stoji na ljestvama dugim 6 m, nagnutim na zid pod kutom od 45° .
- Koliko su ljestve udaljene od zida?
 - Kolika je sjena ljestava?
 - Kolike bi ljestve morao imati čovjek ako se treba popeti na visinu od 5 metara, a ljestve moraju biti nagnute pod istim kutom?
36. Koliko betonskih stupova možemo izliti od 3 m^3 betona ako je visina stupa 1.9 m, a presek mu je pravokutnik stranica 15 cm i 20 cm?
37. Nad promjerom kružnice $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 8 = 0$ konstruirajmo jednakoststraničan trokut. Odredite površinu lika što ga trokut isijeca iz početnoga kruga.
38. Spremnik na vozilu za prijevoz benzina ima oblik valjka duljine 9 m i promjera 2.1 m. Koliko litara benzina stane u spremnik? Koliko se kilometara može prijeći s tom količinom ako vozilo troši 7 litara goriva na 100 km?
39. Učenik je dobio zadatke za vježbu kako bi se pripremio za ispit znanja. Prvoga dana riješio je 15 zadataka, a nakon toga još trećinu ukupnoga broja zadataka. Drugoga dana riješio je trećinu preostalih zadataka, a trećega dana i preostalih 18 zadataka. Koliko je ukupno bilo zadataka?
40. Zlatar je zlatni privjesak u obliku kugle pretopio u dva nova privjeska jednakog obujma, ali jedan u obliku kockice, a drugi u obliku kuglice. Kada je početnu kuglu raspolovio, površina presjeka je iznosila $9\pi \text{ mm}^2$.
- Koliki je bio obujam početne zlatne kugle?
 - Koliki je polumjer nove kuglice?

- c) Koliki je brid kockice?
Rješenja zaokružiti na tri decimale.

41. Na ispit iz matematike učenici su postigli sljedeće rezultate: jedna je šestina dobila ocjenu odličan, 10 % učenika dobilo je vrlo dobar, 20 % dobilo je dobar, a 1 je učenik dobio dovoljan. Preostali dio razreda dobio je ocjenu nedovoljan. Ako znamo da se ispit ne mora ponoviti jer je točno 50 % pozitivno ocjenjenih učenika, odredite:
- koliko je učenika pisalo ispit,
 - koliko je učenika dobilo ocjenu dovoljan i dobar zajedno,
 - koji dio razreda čine učenici koji su dobili ocjenu dovoljan.
42. Kanal ima poprečni presjek u obliku pravokutnog trapeza s manjom osnovicom od 3 m i duljim krakom od 4 m. Duljina kanala je 20 m. Jedan kut trapeza iznosi 150° .
- Koja je količina vode potrebna da bude napunjena točno polovina kanala?
 - Koja je količina vode potrebna da kanal bude napunjen do 50 % svoje visine?
 - Koliko vode treba ispustiti da smanjimo količinu vode u kanalu s polovine volumena kanala na volumen koji zauzima voda kad je kanal napunjen do 50 % visine?

Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja

Legendu kratica naziva do sada održanih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja potražite na str. 78.

Rješenja zadataka potražite na str. 469.

Osnovna razina

1. Autobusi A i B na početku radnog vremena zajedno kreću s polazne stanice. Autobus A svake 72 minute ponovno kreće s polazne stanice, a autobus B svake 42 minute. Nakon koliko će minuta autobus ponovno krenuti s polazne stanice zajedno?

NI 2008.

2. Formulom $T(t) = -0.4t + 22$ prikazana je vez temperature u ledenici i vremena koje je proteklo od njezina uključivanja. Pri tome je temperatura T izražena u $^{\circ}\text{C}$, a vrijeme T u minutama.

PI 2009.

- Kolika je temperatura u ledenici pola sata nakon uključenja?
- Koliko je minuta nakon uključenja termometar u ledenici izmjerio $0\ ^{\circ}\text{C}$?

3. Tin je kupio 7 bilježnica. Platio je novčanicama od 20 kn.
Prodavačica mu je vratila 11 kuna i 39 lipa.

PI 2009.

- a) Koliko стоји jedna bilježnica?
- b) Koliko је највише bilježnica Tin могао купити за 20 kn?

4. Formula koja povezuje stupnjeve Celzija ($^{\circ}\text{C}$) sa Fahrenheitovim stupnjevima ($^{\circ}\text{F}$) јест $C = \frac{5(F - 32)}{9}$.

PM 2009.

- a) Odredite koliko је 451°F izraženo у Celzijevim stupnjevima.
- b) Na којој се temperaturi Fahrenheitova и Celzijeva skala podudaraju?

5. Broj bakterija B у некој populaciji mijenja se s vremenom t na начин $B(t) = 1\,000 \cdot 2^t$, где је t vrijeme у satima od početka mjerena.

NI 2008.

- a) Koliko је bilo bakterija 40 minuta nakon почетка mjerena?
- b) Koliko је bilo bakterija 1 sat prije početka mjerena?
- c) Nakon koliko је sati bilo 4 096 000 bakterija?

6. Turistički autobus za razgledavanje grada uveo је novi начин plaćanja karata. Prvi putnik koji uđe u autobus plaća 83 kune, a svaki sljedeći 3 kune manje.

NI 2007. za strukovne škole

- a) Koliko је svoju kartu platio osmi putnik?
- b) Odredite formula $C(n)$ за cijenu u kunama koju је platio n -ti putnik.
- c) Koji је по redu ušao putnik koji је platio 32 kn?
- d) Koliki је највећi mogući broj putnika koji pri ulasku u autobus moraju platiti karte?

7. Na nogometnoj utakmici vratar ispucava loptu.

Putanja lopte opisana је funkcijom $h = -0.0126x^2 + 0.635x$, где је h visina lopte iznad zemlje, а x horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja. Veličine h i x izražene су metrima.

NI 2007. za gimnazije

- a) Na kojoj је visini lopta kad је njezina horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja 15 m?
- b) Na kojoj ће udaljenosti od mjesta ispucavanja lopta pasti na zemlju?
- c) Koju najveću visinu lopta postiže?

8. Brod je privezan za obalu zategnutim konopom duljine 2.5 m. Jedan kraj konopa učvršćen је на обали на visini 1.4 m iznad razine mora, a drugi kraj na pramcu broda 2.9 m iznad razine mora. Ako konop potegnemo te se on skrati за 80 cm, za koliko se brod približi obali?

NI 2006. za OJK gimnazije

9. Nakon што је pećnica uključena 5 minuta, досегнут ће температуру од 55°C . Kad је уključена 10 minuta, температура ће јој бити 87°C .

Prepostavimo да темперatura pećnice linearно оvisi о времену. **NI 2006. za OJK gimnazije**

- a) Odredite linearnu funkciju koja opisuje како температура pećnice оvisi о времену.

- b) Kolika je temperatura pećnice nakon pola sata?
- c) Kolač treba staviti u pećnicu kada joj je temperatura 175°C . Koliko minuta nakon uključenja pećnice treba u nju staviti kolač (vrijeme zaokružite na cijeli broj)?

10. Karmela i Karlo krenuli su zajedno od kuće prema školi.

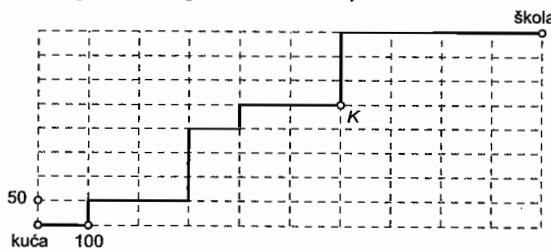
Išli su zajedno do mjesta K ucrtanim putem, a onda je Karmela otišla prečicom (iscrtkana crta), a Karlo okolnim putem (puna crta). Koordinate na crtežu dane su u metrima.

DM, Ijeto 2010.

a) Odredite koordinate točke K .

b) Odredite koliki je ukupni put prešao Karlo od kuće do škole.

c) Za koliko je Karmela prešla kraći put od Karla hodajući od kuće do škole?



11. U posudici u kojoj se smrzava voda nastaje led u obliku kvadra dimenzija

$3.5\text{ cm} \times 3\text{ cm} \times 2\text{ cm}$. Pri smrzivanju se obujam vode poveća za 5 %.

DM, Ijeto 2010.

a) Koliko je vode potrebno za jedan takav oblik leda?

b) Koliko se takvih oblika leda može napraviti od 1 litre vode?

(Napomena: 1 litra = 1 dm^3).

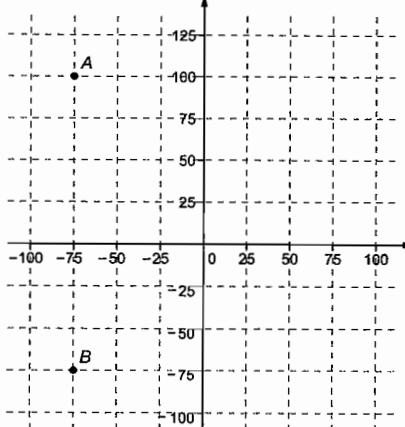
12. Na timskome radu grupa je dobila zadatak u kartu ucrtati svoj položaj. **DM, jesen 2010.**

U tom trenutku nalaze se u točki $T(150, -75)$. Koordinate njihova položaja dane su u metrima.

a) Ucrtajte njihov položaj u kartu i označite ga točkom T .

b) Odredite udaljenost točaka A i T i zaokružite je na cijeli broj.

c) Iz svojega položaja grupa može doći do položaja A izravno ili preko točke B . Za koliko je dulji put preko točke B ?



13. Za koliko se vremena pri rotaciji oko svoje osi Zemlja okreće za 45° ?

NI 2007. za strukovne škole

- A) za 3 sata, B) za 4 sata i 45 minuta, C) za 6 sati, D) za 9 sati

14. Računala u jednoj učionici međusobno su povezana optičkim linijama.

Ukupan broj optičkih linija određen je funkcijom $I(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ + n gdje je n broj računala u učionici. Ako je ukupan broj linija 28, tada je broj računala u učionici jednak:

NI 2007. za gimnazije

- A) -8, B) -7, C) 7, D) 8.

15. Marija je visoka m cm, a Nives n cm.

Izrazom $n = m + 0.15m$ opisano je:

NI 2006. za OJK gimnazije

- A) Nives je viša od Marije za 0.15 cm, B) Nives je viša od Marije za 15 %,
C) Marija je viša od Nives za 15 cm, D) Marija je viša od Nives za 0.15 %.

16. Ljudsko srce tijekom jednoga dana otkuca oko 100 000 puta.

Koliko puta ljudsko srce otkuca tijekom 70 godina života?

DM, ljeto 2010.

- A) $2.6 \cdot 10^7$ B) $2.6 \cdot 10^8$ C) $2.6 \cdot 10^9$ D) $2.6 \cdot 10^{10}$

17. Cijena c iznajmljivanja bungalova na n tjedana dana je formulom $c = t \cdot n + d$ (t je iznos tjednoga najma, d je sigurnosni depozit).

Martina je za 3 tjedna platila 2 092 kn, a Maja za 5 tjedana 3 412 kn.

Koliki je sigurnosni depozit?

DM, ljeto 2010.

- A) 112 kn B) 224 kn C) 308.70 kn D) 639.80 kn

18. Mliječni proizvod dolazi u pakiranju od 330 g ili od 500 g.

Trgovac je dobio količinu od 55 550 g toga mliječnoga proizvoda u ukupno 140 pakiranja. Koliko je dobio manjih pakiranja?

DM, ljeto 2010.

- A) 35 B) 50 C) 70 D) 85

19. Marin je išao kupiti školski pribor. Trećinu novca potrošio je za bilježnice, onda je četvrtinu ostatka potrošio za olovke i na kraju je polovicu onoga što je ostalo potrošio za pernicu. Preostalo mu je 18 kuna. Koliko je novca Marin ponio sa sobom?

DM, ljeto 2010.

- A) 68 kn B) 72 kn C) 90 kn D) 102 kn

20. Pod površine 15 m^2 treba popločati pločicama kvadratnoga oblika stranice duljine 32 cm. Pločice se prodaju isključivo u paketima.

U jednom paketu 12 pločica. Koliko najmanje paketa treba kupiti da bi se popločio pod?

DM, jesen 2010.

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14

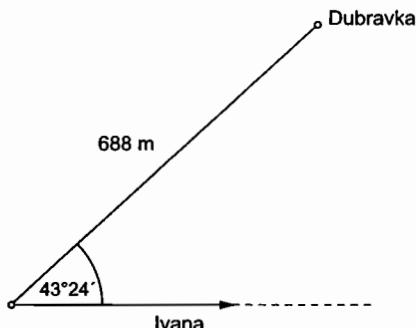
21. Cijena jedne ulaznice je za 10 kn viša na dan igranja utakmice, nego u preprodaji. Na dan igranja utakmice za 600 kn može se kupiti 5 ulaznica manje nego u preprodaji. Kolika je cijena ulaznice na dan igranja utakmice?

- A) 40 kn B) 50 kn C) 60 kn D) 70 kn

DM, jesen 2010.

Viša razina

1. Dubravka i Ivana komuniciraju elektroničkim uređajem dometa 500 m. Dubravka stoji na mjestu, a Ivana hoda kako je prikazano na slici. Koliko metara Ivana može prijeći od trenutka uspostave veze do trenutka prekida komunikacije? **PI 2009.**



2. Broj bakterija B u nekoj populaciji mijenja se s vremenom t na način $B(t) = 1\,000 \cdot 2^t$, gdje je t vrijeme od početka mjerena izraženo satima. **NI 2008.**

- a) Koliko je bilo bakterija 40 minuta prije početka mjerena?
b) Nakon koliko će vremena bakterija biti tisuću puta više nego na početku mjerena?

3. Slitina od koje se izrađuje kovanica od 50 lipa sastoji se od nikla i željeza. Omjer nikla i željeza je 1:19. Masa kovanice od 50 lipa je 3.65 g, njezin je promjer 20.5 mm, a gustoća slitine je 6.912 g/cm^3 . **NI 2008.**

- a) Koliko je grama željeza potrebno za izradbu jedne kovanice od 50 lipa? (Rezultat ne zao-kružujte.)
b) Odredite debljinu kovanice od 50 lipa. (Gustoća slitine je omjer mase i obujma, $\rho = \frac{m}{V}$.)

4. Brod je privezan za obalu zategnutim konopom duljine 2.5 m. Jedan kraj konopa učvršćen je na obali, na visini 1.4 m iznad razine mora, a drugi kraj na pramcu broda, 2.9 m iznad razine mora. Ako konop potegnemo te se on skrati za 80 cm, za koliko se brod približi obali? **NI 2006. za PM gimnazije**

5. Ako je pećnica uključena 5 minuta, dosegnut će temperaturu od 55°C . Kad je uključena 10 minuta, temperatura će joj biti 87°C . Pretpostavimo da temperatura pećnice linearno ovisi o vremenu. **NI 2006. za PM gimnazije**

a) Odredite linearnu funkciju koja opisuje kako temperatura pećnice ovisi o vremenu.

- b) Kolika je temperatura pećnice nakon pola sata?
- c) Kolač treba staviti u pećnicu kada joj je temperatura između 150 i 180 °C. U kojem vremenskom intervalu nakon uključenja pećnice treba u nju staviti kolač? Navedite granice intervala zaokružene na cijeli broj minuta.
6. Zadan je pravac $y = -\frac{1}{2}x + 4$.
Odredite udaljenost ishodišta od zadanog pravca. **NI 2006. za PM gimnazije**
7. Metalna kugla ima obujam $288\pi \text{ cm}^3$. Koliki joj je polumjer? **NI 2006. za PM gimnazije**
8. Škola je za odlazak svojih 708 učenika na izlet osigurala 15 autobusa. Neki su autobusi imali 52, a neki 43 sjedala. U svim autobusima sva su sjedala bila popunjena i na svakome je sjedio samo jedan učenik. **DM, Ijeto 2010.**
- a) Koliko je bilo autobusa s 52 sjedala?
b) Koliko je ukupno učenika prevezeno autobusima sa 43 sjedala?
9. Zadana je funkcija $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 16)(x + 1)$.
a) Odredite koordinate sjecišta grafa funkcije s osi apscisa.
b) Derivirajte funkciju f .
c) Odredite intervale rasta funkcije f .
d) Odredite lokalne ekstreme funkcije f .
e) Nacrtajte funkciju koristeći se rezultatima prethodnih podzadataka.
10. Na planparalelnu staklenu ploču debljine $d = 40 \text{ mm}$ pada zraka svjetlosti pod kutom prema okomici $\alpha = 60^\circ$. Indeks loma n iznosi $\frac{3}{2}$. Koliki je paralelni pomak p zrake svjetlosti?
Napomena: Zraka svjetlosti lomi se pod kutom prema okomici β i izlazi iz ploče pod kutom prema okomici α .
Indeks loma definiran je jednakošću $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$. **DM, Ijeto 2010.**
11. Određenu količinu šećera treba spremiti u pripremljene pakete. Stavi li se u paket 18 kg šećera, ostat će 10 praznih paketa. Ako se u svaki paket stavi 14 kg šećera, ostat će 180 kg šećera koji nije spakiran. **DM, jesen 2010.**
- a) Koliko paketa imamo na raspolaganju?
b) Kolika je ukupna količina šećera?
12. Zadana je funkcija $f(x) = (x^2 - 5x + 4)(x - 1)$.
a) Odredite sjecišta grafa funkcije s koordinatnim osima
b) Derivirajte funkciju f .
c) Odredite interval/intervale rasta funkcije f .
d) Odredite lokalne ekstreme funkcije f .
e) Nacrtajte graf te funkcije uz pomoć rezultata prethodnih podzadataka. **DM, jesen 2010.**

13. Dva modela automobila voze po pisti. Koordinate njihova položaja dane su u metrima. Model A polazi iz točke $A(2, 0)$, vozi jednolikom brzinom pravocrtno i nakon jedne sekunde nalazi se u točki $T(4.4, 0.7)$. Model B u isto vrijeme pode iz točke $B(0, 4.4)$ i kreće se jednolikom brzinom

po pravcu $y = -\frac{1}{4}x + 4.4$.

DM, jesen 2010.

Modeli A i B sudarili su se. Kolikom je brzinom vozio model B?

(Napomena: Formula za brzinu v pri jednolikome pravocrtnom gibanju jest $v = \frac{s}{t}$, gdje je s put, a t vrijeme.)

7. OGLEDNI ISPITI

1. Osnovna razina	397
1. ispit	397
2. ispit	402
3. ispit	406
4. ispit	410
5. ispit	414
2. Viša razina	418
1. ispit	418
2. ispit	423
3. ispit	428
4. ispit	433
5. ispit	438

• 1. Ogledni ispiti – osnovna razina •

Rješenja zadataka iz oglednih ispita potražite na str. 470.

1. ISPIT

1. Zadatci višestrukog izbora

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

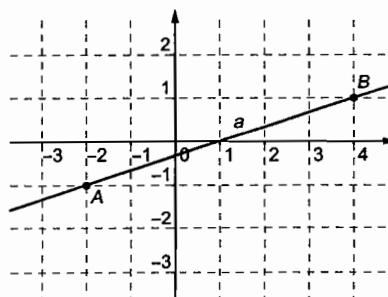
1. Koji od brojeva je veći od $-\frac{3}{4}$ i manji od $\sqrt{3}$?

- A) $\frac{1}{6}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $\frac{7}{3}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

A.
B.
C.
D.

2. Odredite koeficijent smjera pravca sa slike.

- A) $\frac{1}{2}$
B) $-\frac{1}{3}$
C) 3
D) $\frac{1}{3}$



A.
B.
C.
D.

3. Kolika je vrijednost izraza $\frac{1}{3} - 0.25 : \frac{1}{2}$?	A. B. C. D.
A) $\frac{1}{24}$ B) $-\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{24}$ D) $\frac{5}{6}$	
4. Kojem intervalu pripada rješenje jednadžbe: $-x + 12 = 2x$?	A. B. C. D.
A) $(-\infty, -3)$ B) $(3, +\infty)$ C) $(-5, -2)$ D) $[-4, 0]$	
5. Područje definicije funkcije $f(x) = \frac{3}{x-2}$ jest:	A. B. C. D.
A) \mathbb{R} , B) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, C) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, D) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.	
6. Rješenje jednadžbe $9^{1-2x} = 27$ zapišite u obliku decimalnog broja.	A. B. C. D.
A) -0.5 B) -0.25 C) 0.75 D) 0.25	
7. Ako su stranice trokuta $a = 12 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, te visina na stranicu a $v_a = 4 \text{ cm}$, koliko iznosi visina na stranicu b ?	A. B. C. D.
A) 2 cm B) 4 cm C) 6 cm D) 8 cm	
8. Graf na slici prikazuje funkciju:	A. B. C. D.
A) $f(x) = x - 1$, B) $f(x) = x + 1$, C) $f(x) = 1 - x$, D) $f(x) = x$.	

9. Vrijednost izraza $\frac{ 1-x }{x}$ za $x = 2$ jest:	A. B. C. D.
A) $-\frac{1}{2}$, B) $\frac{3}{2}$, C) $\frac{1}{2}$, D) 0.25.	
10. Čemu je jednak izraz: $\left(3a - \frac{1}{2}\right)^2$?	A. B. C. D.
A) $9a^2 - 3a + \frac{1}{4}$ B) $9a^2 + 3a + \frac{1}{2}$ C) $9a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}$ D) $9a^2 - 3a - \frac{1}{2}$	
11. Vrijednost izraza $\frac{1}{5} \cdot 125 : 5^{-3}$ kao potencije s bazom 5 jest:	A. B. C. D.
A) 5^{-1} , B) 5^5 , C) 5^4 , D) 5^{-2} .	
12. Cjelobrojno rješenje kvadratne jednadžbe: $2x^2 - 3x - 9 = 0$ iznosi:	A. B. C. D.
A) -3, B) 3, C) $-\frac{3}{2}$, D) -2.	
13. Koliki je opseg pravilnog mnogokuta ako mu je duljina stranice 3 cm, a ukupan broj dijagonala 14?	A. B. C. D.
A) 18cm B) 21 cm C) 24 cm D) 27 cm	
14. Koliko je $\left(30 - \frac{1}{2}\right)\%$ od $\frac{12 - 0.4}{7}$?	A. B. C. D.
A) 0.2057 B) 1.6571 C) 0.5054 D) 0.4889	
15. Učenik je dobio zadatke za vježbu kako bi se pripremio za ispit znanja. Prvoga dana rješio je 6 zadataka, a nakon toga još trećinu od ukupnoga broja zadataka. Drugoga dana rješio je polovinu preostalih zadataka, a trećega dana i preostalih 7 zadataka. Koliko je zadataka bilo ukupno?	A. B. C. D.
A) 33 B) 30 C) 27 D) 36	

16. Omjeri kutova u trokutu su $2 : 3 : 7$. Najveći je kut trokuta:

- A) 30° , B) 45° , C) 105° , D) 75° .

A.
B.
C.
D.

1. Zadatci kratkih odgovora

17. Iz formule $\frac{x \cdot d}{l} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \lambda$ izrazite l .

0
1

18. Rješenje nejednadžbe $3 - (x + 2)(x + 5) \leq x - (x + 1)^2$ prikažite u obliku intervala.

0
1

19. Izračunajte vrijednost maksimuma funkcije $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

0
1

20. Zadan je pravac p jednadžbom $4x - 3y - 12 = 0$. Udaljenost točaka u kojima

0
1

pravac siječe koordinatne osi jest: _____.

21. Izračunajte: $\frac{\frac{1}{3} - 2}{3 - \frac{1}{2}}$.

0
1

22. Za sustav jednadžbi: $\begin{cases} y = x + 5 \\ y = 2x^2 - 2x + 3 \end{cases}$ odredite vrijednosti nepoznanice x .

0
1

23. Sljedeća tablica prikazuje odnose cijene i količine grožđa u kilogramima. Popunite tablicu.

Cijena (kn)	630	183.75
-------------	-----	--------

0
1

Količina (kg)	180	12
---------------	-----	----

2

24. Kolika je površina pravokutnika čija je površina 25% površine kvadrata dijagonale $5\sqrt{2}$?

0
1
2

25. Ako je zadan izraz $\left(\frac{1}{3} - 2a\right)$, izračunajte:

0
1
2

a) $\left(\frac{1}{3} - 2a\right)^2$, b) $\left(\frac{1}{3} - 2a\right)^3$.

<p>26. Marko, Ana i Ivo pomažu ocu kositi travu. Travnjak je oblika pravokutnika stranica 13 i 15 metara. Ana je pokosila 15 %, Ivo 25 %, a Marko 23 % ostatka.</p> <ol style="list-style-type: none"> Koliki je postotak travnjaka pokosio tata? Koliko je metra kvadratnih pokosio Ivo? 	<p>0 1 2</p>
<p>27. Za funkciju na slici odredite:</p> <ol style="list-style-type: none"> $f(-1)$, sjecište s x-osi, površinu trokuta što ga graf funkcije zatvara s koordinatnim osima. 	<p>0 1 2 3</p>
<p>28. Zlatar je pretopio zlatni privjesak u obliku kugle u dva nova privjeska jednakog obujma, jedan u obliku kockice, a drugi u obliku kuglice. Kada je kuglu raspolovio, površina presjeka iznosila je $6.25\pi \text{ mm}^2$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Koliki je bio obujam zlatne kuglice? Koliki je polumjer nove kuglice? Koliki je brid kockice? Rješenja zaokružite na tri decimale. 	<p>0 1 2 3</p>

2. ISPIT**1. Zadataci višestrukog izbora**

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

1. Vrijednost izraza: $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ jest:

- A) -2, B) $-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, C) 2, D) 1.

A.
B.
C.
D.

2. Jednadžba $3x^2 - 6x + 4k = 0$ ne će imati realna rješenja za vrijednost parimetra k :

- A) 2, B) $\frac{1}{2}$, C) 0, D) -3.

A.
B.
C.
D.

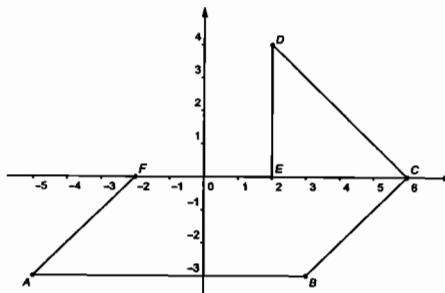
3. Rješenje nejednadžbe $5x - 2 > 7x + 6$ nalazi se unutar intervala:

- A) $(-\infty, -4)$, B) $[-4, -3)$, C) $(3, +\infty)$, D) $(-3, 3]$.

A.
B.
C.
D.

4. Površina lika sa slike jest:

- A) 32 kv. jed., B) 31 kv. jed., C) 30 kv. jed., D) 33 kv. jed..



A.
B.
C.
D.

5. Vrijednost izraza $\sqrt{27x^3y^2}$ (za pozitivan y) nakon djelomičnog korjenovanja jest:

- A) $9xy^2$, B) $3y\sqrt{x}$, C) $3xy\sqrt{3x}$, D) $xy\sqrt{3x}$.

A.
B.
C.
D.

<p>6. Jednadžba pravca koji je usporedan s pravcem $y = -3x - 4$ i prolazi ishodištem koordinatnog sustava glasi:</p> <p>A) $y = 3x + 1$, B) $3x + y + 1 = 0$, C) $-3x + y = 0$, D) $3x + y = 0$.</p>	A. B. C. D.								
<p>7. Rješenje jednadžbe $\frac{10^{2x-1} \cdot 0.01}{10^{3x}} = 1$ jest:</p> <p>A) -2, B) 2, C) 3, D) -3.</p>	A. B. C. D.								
<p>8. Koja od točaka pripada grafu funkcije $f(x) = -x + \frac{3}{2}$?</p> <p>A) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ B) $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ C) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ D) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$</p>	A. B. C. D.								
<p>9. Područje definicije funkcije $f(x) = \frac{1}{x+3}$ jest:</p> <p>A) \mathbb{R}, B) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, C) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, D) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$.</p>	A. B. C. D.								
<p>10. Kojoj linearnej funkciji pripada tablica?</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td></td> </tr> </table> <p>A) $f(x) = x + 1$ B) $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ C) $f(x) = x + \frac{1}{2}$ D) $f(x) = \frac{1}{2}$</p>	x	0	1		$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		A. B. C. D.
x	0	1							
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
<p>11. Ako 12.5 kg jabuka košta 15 kn, cijena kilograma jabuka je:</p> <p>A) 1.2 kn, B) 0.5 kn, C) 1 kn, D) $\frac{5}{6}$.</p>	A. B. C. D.								
<p>12. Izraz $(2x - y) \cdot (y + 2x)$ jednak je:</p> <p>A) $y^2 - 4x^2$, B) $4x^2$, C) $4x^2 + y^2$, D) $4x^2 - y^2$.</p>	A. B. C. D.								

13. Vrijednost izraza: $-\left -3^{-2} - \frac{2}{9}\right ^{-1}$ jest:	A. B. C. D.
A) 3, B) $\frac{1}{3}$, C) -3, D) -3^{-1} .	
14. 5 % od $\frac{1\ 000 \cdot 0,1}{10^{-2}}$ jest:	A. B. C. D.
A) 5, B) 50, C) 500, D) 5^{-1} .	
15. Neka je trokut zadan koordinatama svojih vrhova: $A(1, -3)$, $B(7, 1)$ i $C(-3, 3)$. Odredite udaljenost polovišta stranica \overline{AB} i \overline{AC} .	A. B. C. D.
A) 5,5 B) 6 C) $\sqrt{26}$ D) 26	
16. Koliko je 25 % od $\frac{3 + \frac{4}{25} + 0,59}{\left(\frac{3}{4} - 0,15\right) : 4}$?	A. B. C. D.
A) 5 B) 6,25 C) 1 D) 25	
2. Zadaci kratkih odgovora	
17. Rješenje sustava jednadžbi $\begin{cases} 5x+3y=1 \\ x-5y=17 \end{cases}$ uređeni je par:	0 1
18. Poredajte po veličini ove brojeve (počevši od najmanjega): $\frac{1}{6}, -\sqrt{2}, \frac{7}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$.	0 1
19. Čemu je jednak izraz: $\frac{2}{a} - \frac{3}{a^2}$ nakon oduzimanja?	0 1
20. Jednadžbu pravca kroz točke $A (-1, 4)$ i $B (2, 2)$ napišite u implicitnom obliku.	0 1
21. Kolika je duljina hipotenuze pravokutnog trokuta ako su mu koordinate: $A (-2, 1)$, $B (2, 5)$ i $C (-5, 4)$?	0 1

22. Koliko je $f(-2)$ ako je $f(x) = -2x^2 + 7x - 3$?	0 1
23. Masa jednog kruha (u kg) zadana je izrazom $\left(1.75 \cdot \frac{2}{3} - 1.75 \cdot \frac{9}{8}\right) : \frac{7}{12}$. Kolika je masa 8 štruka kruha?	0 1 2
24. U sljedećoj tablici zadani su postotak sniženja i početna cijena, odnosno početna cijena i iznos sniženja. Izračunaj ostale vrijednosti.	
Postotak (%)	12
Početna cijena	250
Sniženje	45
25. Gustoća je omjer mase i obujma. Tekućina ima gustoću $5\ 427 \cdot 10^3 \text{ g/m}^3$. Koliki joj je obujam u m^3 ako joj je masa $5 \cdot 10^3 \text{ kg}$?	0 1 2
26. Čovjeku je za ogradu potrebno 120 metalnih cijevi visine 1.8 metara. Počrni presjek cijevi je jednakostranican trokut duljine brida 5 cm.	0
a) Koliki je obujam jedne cijevi iskazan u m^3 ? b) Koliko će novca čovjek morati izdvojiti ako 1 m^3 cijevi košta 8 000 kuna?	1 2
27. Za funkciju $f(x) = -2 \cdot (x - 1)^2 - 3$ odredite:	
a) sjecište grafa funkcije s osi x ,	0
b) sjecište grafa funkcije s osi y ,	1
c) raste li funkcija na intervalu $(-\infty, 1)$ ili pada?	2 3
28. Na ispitu iz matematike učenici su postigli sljedeće rezultate: jedna osmina dobila je ocjenu odličan, 7.5 % učenika dobilo je vrlo dobar, 12.5 % dobilo je dobar, a 7 učenika dovoljan. Preostali dio razreda dobio je ocjenu nedovoljan. Ako znamo da se ispit ne mora ponoviti jer ima točno 50 % pozitivno ocijenjenih učenika, odredite:	
a) koliko je učenika pisalo ispit, b) koliko je ukupno učenika dobilo ocjenu dovoljan i dobar, c) koliki dio razreda čine učenici koji su dobili ocjenu dovoljan?	0 1 2 3

3. ISPIT

1. Zadatci višestrukog izbora

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

1. Koji je od navedenih brojeva najveći?

- A) -1.4 B) $-3\frac{1}{2}$ C) -0.25 D) $-3\frac{3}{4}$

A.
B.
C.
D.

2. Pravac $y = \frac{2}{3}x + 4$ siječe os x u točki:

- A) (0, 6), B) (-6, 0), C) $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, D) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

A.
B.
C.
D.

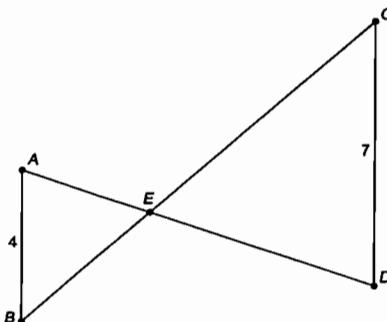
3. Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $3x^2 - 2k = 0$ (k je realni parametar) iznosi:

- A) 0, B) $\frac{2k}{3}$, C) $\frac{4k}{3}$, D) $2\sqrt{\frac{2k}{3}}$.

A.
B.
C.
D.

4. Ako vrijedi $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $|AE| = 3.5$ i $|BE| = 4.4$, koliko iznosi duljina dužine \overline{CE} ?

- A) $\frac{7}{4}$
B) 6.5
C) $\frac{4}{7}$
D) 7.7



A.
B.
C.
D.

5. Vrijednost izraza: $\sqrt[3]{5.25}$ zaokruženoga na dvije decimale jest:

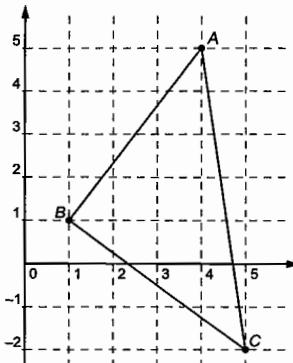
- A) 1.31, B) 1.32, C) 1.39, D) 1.4.

A.
B.
C.
D.

6. Koliko iznosi kvadrat rješenja jednadžbe: $-6x - 13 = -3(4x + 3)$?	A. B. C. D.
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{9}$	
7. Vrijednost izraza: $-2 - 2 \cdot \{-2 - 2 \cdot [-(-2) - 2]\}$ jest:	A. B. C. D.
A) 0, B) 2, C) -2, D) 4.	
8. Od ponuđenih brojeva samo jedan pripada skupu svih rješenja nejednadžbe: $x + 3(x - 1) < 2 - x$. Koji je to broj?	A. B. C. D.
A) 1 B) -1 C) 2 D) 3	
9. Područje definicije funkcije $f(x) = \frac{2x-1}{x}$ jest:	A. B. C. D.
A) \mathbb{R} , B) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, C) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, D) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{1}{2} \right\}$.	
10. Izraz: $\left(-2a + \frac{1}{2} \right)^2$ jednak je:	A. B. C. D.
A) $4a^2 - 2a + \frac{1}{4}$, B) $-4a^2 + 4a + \frac{1}{4}$, C) $2a^2 + 2a + \frac{1}{4}$, D) $a^2 - 2a - \frac{1}{4}$.	
11. Koja od točaka pripada grafu funkcije $f(x) = -x + \frac{3}{2}$?	A. B. C. D.
A) $\left(0, -\frac{3}{2} \right)$ B) $\left(-1, \frac{5}{2} \right)$ C) $\left(\frac{3}{2}, 0 \right)$ D) $\left(-1, \frac{3}{2} \right)$	
12. Nakon racionalizacije izraz $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ jednak je:	A. B. C. D.
A) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, B) -1, C) 0, D) $\sqrt{2}$.	

13. Koliki je opseg trokuta sa slike?

- A) $10 + 2\sqrt{5}$
- B) 16
- C) $10 + 5\sqrt{5}$
- D) $15\sqrt{5}$



- A.
- B.
- C.
- D.

14. Izraz $|- \sqrt{3} + 1|$ jednak je:

- A) $-\sqrt{3} + 1$,
- B) $\sqrt{3} + 1$,
- C) $-\sqrt{3} - 1$,
- D) $\sqrt{3} - 1$.

- A.
- B.
- C.
- D.

15. Ako je mješćena pretplata za telefonski račun 60 kn, a cijena jednog impulsa iznosi 0.50 kn, koja funkcija predviđa ovisnost telefonskog računa o broju impulsa (x)?

- A) $y = 60x + 0.5$
- B) $y = 0.5x + 60$
- C) $y = 60x - 0.5$
- D) $y = -0.5x + 60$

- A.
- B.
- C.
- D.

16. Odijelo nakon sniženja košta 547.2 kuna. Prvotna mu je cijena bila 960 kuna.

Koliki je postotak sniženja?

- A) 44 %
- B) 57 %
- C) 43 %
- D) 55 %

- A.
- B.
- C.
- D.

2. Zadatci kratkih odgovora

17. Iz izraza: $\frac{xy-1}{2x}=1$ prikažite x s pomoću y .

- 0
- 1

18. Vrijednost izraza: $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right)$ jest:

- 0
- 1

19. Rješenje jednadžbe: $\frac{2x-10}{3} - \left(\frac{5}{4}x + \frac{x-2}{6} \right) = -\frac{x}{2}$ jest:

- 0
- 1

20. Vrijednost izraza: $\frac{- -2 + 5 }{ -2 + -5 }$ jest: _____	0 1										
21. Koliko iznosi obujam kocke koja ima oplošje jednako oplošju kvadra dimenzija: $a = 9 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$ i $c = 6 \text{ cm}$? Rješenje zaokružite na tri decimale.	0 1										
22. Ako je $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}$, odredi $f\left(\frac{1}{2}\right)$.	0 1										
23. Za funkciju $f(x) = -3x^2 + \frac{x}{2} + c$ vrijedi $f(-1) = \frac{1}{2}$. a) Pronadite c . b) Odredite sjecišta grafika funkcije s osi x .	0 1 2										
24. Opseg jednakokračnog trokuta jednak je 32 cm. Nađite duljinu krakova i osnovice ako se duljina osnovice i duljina kraka odnose kao $2 : 3$.	0 1 2										
25. Na tržnici se prodaju jagode u različitim pakiranjima prikazanima u tablici											
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>Cijena (kn)</td> <td>18</td> <td>5</td> <td>7</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>Količina</td> <td>1 kg</td> <td>250 g</td> <td>500 g</td> <td>75 dag</td> </tr> </table> a) Koja je ponuda najpovoljnija? b) Koliko košta kilogram jagoda po najvišoj cijeni?	Cijena (kn)	18	5	7	15	Količina	1 kg	250 g	500 g	75 dag	0 1 2
Cijena (kn)	18	5	7	15							
Količina	1 kg	250 g	500 g	75 dag							
26. Broj pastrva u ribnjaku možemo izračunati prema formuli: $f(x) = 200 \cdot 10^{0.02x}$, gdje je x vrijeme u mjesecima. Ribnjak je osnovan u travnju 2010. a) Koliki je broj riba u njemu u kolovozu 2010.? b) Koliki je bio broj riba pri osnivanju ribnjaka?	0 1 2										
27. Dana je kvadratna jednadžba $x^2 + 9x + 14 = 0$. Izračunajte: a) $x_1 + x_2$, b) $ x_1 - x_2 $, c) $x_1 \cdot x_2$.	0 1 2 3										
28. Posuda je oblika valjka i napunjena je uljem 90 %. Radijus osnovke i visina posude jednaki su i iznose 12 cm. a) Koliki je volumen ulja u posudi? b) Ako ispraznimo posudu tako da ostane napunjena točno do pola, koliki će tada biti volumen ulja? c) Ako je volumen ulja u posudi $432\pi = 1\ 357.168$, koliki je postotak napunjenoosti posude?	0 1 2 3										

4. ISPIT

1. Zadatci višestrukog izbora

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

1. Koji je od sljedećih brojeva cijeli broj smješten između brojeva -5 i -1 ?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) -2 D) 6

A.
B.
C.
D.

2. Rješenje jednadžbe $2x - \frac{3}{5}(x+2) = 3$ jest:

- A) 3, B) 1, C) -3 , D) -1 .

A.
B.
C.
D.

3. Pravci $3x - 2y - 6 = 0$ i $x + 2y - 2 = 0$ sijeku se u točki:

- A) $(0, 2)$, B) $(2, 0)$, C) $(-2, 0)$, D) $(0, -2)$.

A.
B.
C.
D.

4. Omjer kutova u trokutu je $2 : 3 : 5$. Koliko iznosi najmanji kut toga trokuta?

- A) 36° B) 180° C) 54° D) 90°

A.
B.
C.
D.

5. Vrijednost nepoznanice x u sustavu jednadžbi $\begin{cases} 2+y=7 \\ y=\frac{1}{2}x+12 \end{cases}$ jest:

- A) 2, B) 3, C) -2 , D) 1.

A.
B.
C.
D.

6. Maksimum polinoma $f(x) = -2x^2 + x + 3$ jest:

- A) 0, B) $\frac{25}{8}$, C) $-\frac{25}{8}$, D) 3.

A.
B.
C.
D.

7. Odredite rješenje jednadžbe: $8^x \cdot 4^{-x-2} = 1$.	A. B. C. D.
A) 2 B) -1 C) 0 D) 1	
8. Površina trokuta što ga graf funkcije $f(x) = 2x - 3$ zatvara s koordinatnim osima jest:	A. B. C. D.
A) $\frac{1}{2}$ kv. jed., B) $\frac{9}{4}$ kv. jed., C) $-\frac{9}{4}$ kv. jed., D) 1 kv. jed.	
9. Vrijednost izraza: $\frac{2xy-1}{x^{-1}-y^{-1}}$ za $x = 2$ i $y = 3$ iznosi:	A. B. C. D.
A) $\frac{6}{11}$, B) $\frac{5}{3}$, C) 66, D) $\frac{11}{6}$.	
10. Kolika je površina kvadrata ako su točke $A(6, -4)$ i $B(7, 3)$ njegovi susjedni vrhovi?	A. B. C. D.
A) $\sqrt{2}$ kv. jed. B) 2 kv. jed. C) $5\sqrt{2}$ kv. jed. D) 50 kv. jed.	
11. Vrijednost izraza $\frac{1-0.2}{0.75} - \frac{1}{2}$ jest:	A. B. C. D.
A) $\frac{17}{30}$, B) $\frac{1}{2}$, C) 0.6, D) 0.56.	
12. Koliko betonskih stupova možemo izliti od 130 m^3 betona ako je visina stupa 1.6 m, a presjek mu je kvadrat stranice 20 cm?	A. B. C. D.
A) 2 030 B) 2 031.25 C) 2 032 D) 2 031	
13. Vrijednost izraza $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$ zaokružena na četiri decimale daje:	A. B. C. D.
A) 0.4286, B) 0.1667, C) 6, D) 2.3333.	

14. Učenik je u listopadu dobio 17 ocjena. Sve su ocjene četvorke i petice, a ukupan im je zbroj 80. Koliko je petica učenik dobio toga mjeseca?	A. B. C. D.
A) 10 B) 12 C) 14 D) 16	
15. Vrijednost izraza $\left(\sqrt{1+\sqrt{2}} - \sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2$ jest: A) $2\sqrt{2} - 2$, B) 1, C) 2, D) $2\sqrt{2}$.	A. B. C. D.

2. Zadatci kratkih odgovora

17. Prikažite na brojevnom pravcu skup $(-2, 5] \cap (1, 8)$.	0 1
18. Izračunajte $\frac{0.001 \cdot 10^{-3}}{0.001} : \frac{1}{100}$ i prikažite rezultat kao potenciju broja 10.	0 1
19. Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2 + x - 6 = 0$ jest: _____.	0 1
20. Iz izraza $\frac{3}{a} + \frac{2}{b} = 1$ izrazite a uz pomoć b .	0 1
21. jesu li točke $A(-5, 1)$, $B(6, 5)$ i $C(9, 6)$ kolinearne?	0 1
22. Riješite jednadžbu $(x + 5)(2x - 4) - 1 = 2x^2 - 3$.	0 1
23. Zadana je funkcija $f(x) = x - 3 + 3 - x $. a) Izračunajte $f(-3)$. b) Izračunajte $f(3)$.	0 1 2

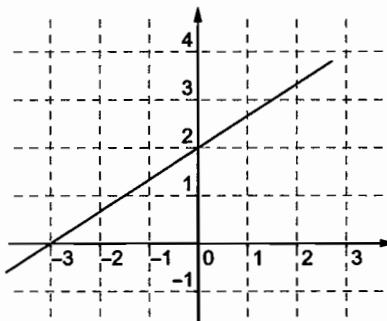
24. Ivan ima vrt veličine $1\ 500 \text{ m}^2$. Markov je vrt dva puta manji. Marko je kupio još zemljišta i sada je njegov vrt 1.5 puta veći od Ivanova.	0 1 2 3	
a) Kolika je bila površina Markova vrta prije proširenja?		
b) Koliko četvornih metara zemljišta je kupio Marko?		
25. Popunite tablicu.		
2 500 g	kg	0 1 2
120 g/cm ³	kg/m ³	
26. Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & -\infty < x < \sqrt{3} \\ x^2 + 2; & \sqrt{3} \leq x < +\infty \end{cases}$. Izračunajte $f(\sqrt{5})$ i $f\left(\frac{3}{2}\right)$.	0 1 2	
27. a) Odredite $n \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x) = x^2 + nx - 4$ poprima minimalnu vrijednost za $x = -1$.	0	
b) Odredite m tako da funkcija $f(x) = mx^2 - x + 5$ poprima minimalnu vrijednost za $x = 3$.	1 2	
28. Ako se pobočje pravilne trostrane prizme razvije u ravninu, dobije se kvadrat površine 81 cm^2 .	0 1 2 3	
a) Koliko iznosi duljina osnovnog brida prizme?		
b) Koliko iznosi površina osnovke prizme?		
c) Koliki je obujam prizme?		

5. ISPIT**1. Zadatci višestrukog izbora**

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

1. Na slici je prikazan pravac čija jednadžba glasi:

- A) $x - 2y - 3 = 0$,
 B) $2x - y - 3 = 0$,
 C) $-2x + 3y - 6 = 0$,
 D) $2x + y + 3 = 0$.



- A.
B.
C.
D.

2. Rješenje nejednadžbe $2x + 4 < 5x + 7$ je interval:

- A) $x \in \left(-\infty, \frac{11}{7}\right]$, B) $\langle -1, +\infty \rangle$, C) $x \in \left[\frac{11}{7}, +\infty\right)$, D) $\langle -\infty, -1 \rangle$.

- A.
B.
C.
D.

3. Graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$ nastaje translacijom grafa $g(x) = (x - 1)^2$:

- A) dolje za 4, B) gore za 4, C) lijevo za 2, D) desno za 3.

- A.
B.
C.
D.

4. Koje od ponuđenih rješenja zadovoljava sustav jednadžbi: $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + 2y = 9 \end{cases}$?

- A) (5, 4) B) (7, 8) C) (-5, 2) D) (4, 2)

- A.
B.
C.
D.

5. Kolika je duljina brida kocke ako je njezin obujam jednak obujmu kvadra dimenzija $a = 1$ cm, $b = 2$ cm i $c = 4$ cm?

- A) 4 cm B) 3 cm C) 2 cm D) 1 cm

- A.
B.
C.
D.

6. Koja je od tvrdnji istinita?	A. B. C. D.
A) $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ B) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ C) $-2 \in \mathbb{I}$ D) $\frac{3}{5} \in \mathbb{N}$	
7. Kvadratna jednadžba $2kx^2 - 3x - 3 = 0$ ima jedno dvostruko rješenje za:	A. B. C. D.
A) $k > \frac{3}{8}$, B) $k = \frac{3}{8}$, C) $k = -\frac{3}{8}$, D) $k < -\frac{3}{8}$.	
8. Gustoća ρ tekućine iz formule $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$ jest:	A. B. C. D.
A) $\frac{R \cdot S}{l}$, B) $\frac{R \cdot l}{S}$, C) $\frac{l \cdot S}{R}$, D) $R \cdot S \cdot l$.	
9. Odredite površinu pravokutnika $ABCD$ ako su koordinate triju njegovih vrhova $A(-3, 4)$, $B(0, 1)$ i $C(7, 8)$.	A. B. C. D.
A) 40 kv. jed. B) 43 kv. jed. C) 42.5 kv. jed. D) 42 kv. jed.	
10. Vrijednost izraza $\left(\frac{100^{-2} \cdot 10^2}{(-0.1)^{-2} \cdot (0.0001)^{-1}} \right)^{-1}$ jest:	A. B. C. D.
A) $1 \cdot 10^8$, B) $10 \cdot 10^8$, C) $1 \cdot 10^{-8}$, D) $10 \cdot 10^{-8}$.	
11. Izraz $(2a - 1)^2$ jednak je:	A. B. C. D.
A) $4a^2 + 1$, B) $4a^2 - 1$, C) $4a^2 - 4a + 1$, D) $4a^2 + 4a + 1$.	
12. Racionalizacijom nazivnika izraz $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ daje:	A. B. C. D.
A) $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$, B) $\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$, C) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, D) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.	

13. Koliko je 35% od $\left \frac{3}{4} - \frac{1}{2} : 0.25 - \left(3 - \frac{1}{3} \right) \right $?	A. B. C. D.
A) $-\frac{329}{240}$ B) $\frac{329}{240}$ C) $\frac{47}{48}$ D) $-\frac{47}{48}$	
14. Puž u danu prijeđe 250 cm. Čovjek u danu može prijeći $20\,000$ puta dulji put. Koliki je taj put u kilometrima?	A. B. C. D.
A) 500 km B) 50 km C) 60 km D) 45 km	
15. Funkcija $f(x) = -2x^2 + 5x - 1$ za $x = -2$ ima istu vrijednost kao i kad je x jednak:	A. B. C. D.
A) 0 , B) -2 , C) $\frac{9}{2}$, D) $\frac{2}{9}$.	
16. Uspravna pravilna četverostrana piramida s bridom osnovke 12 ima uku- pno oplošje jednako oplošju kocke s bridom 12 . Kolika je visina piramide?	A. B. C. D.
A) 24 cm B) $12\sqrt{5}$ cm C) $12\sqrt{6}$ cm D) 36 cm	
2. Zadatci kratkih odgovora	
17. Masa bakrene kugle je 33 kg, a gustoća bakra je $8\,900$ kg/m ³ . Koliki je ra- dijus kugle:	0 1 2
a) u centimetrima, b) u milimetrima?	
18. Ispišite sve cijele brojeve veće od -2 i manje od $\frac{13}{4}$.	0 1
19. Ispišite tablicu vrijednosti funkcije $f(x) = -\frac{x}{2} + 2$ za x u intervalu od -1 do 1 uz prirast od $\frac{1}{2}$.	0 1
20. Vrijednost nepoznanice y u sustavu jednadžbi $\begin{cases} -3x + y - 11 = 0 \\ y = 2x + 9 \end{cases}$ iznosi: _____	0 1

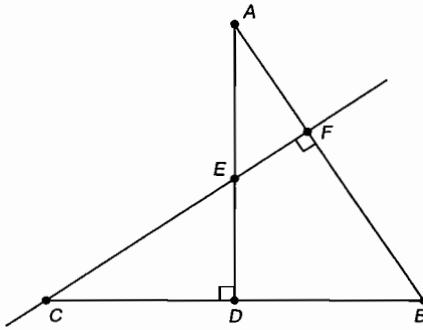
21. Za trokute na slici vrijedi

$$|AB| = 10,$$

$$|AD| = 8$$

$$\text{i } |FC| = 10.$$

Kolika je duljina $|BC|$?



0

1

22. Popunite tablicu.

$$15 \text{ g/cm}^3$$

$$\text{kg/m}^3$$

$$15 \text{ min}/25 \text{ s}$$

$$\text{s}$$

0

1

2

23. Na tečaj salse upisalo se 20 djevojaka i određen broj mladića. Mladića je bilo 10 % više nego djevojaka. Za dva dana upisale su se još tri djevojke.

a) Koliko je mladića na tečaju?

b) Salsa se pleše u paru. Imaju li svi par? Ako nemaju, tko je „višak“?

0

1

2

24. Ako je brzina svjetlosti približno $300\ 000 \text{ km/s}$, koliko je vrijeme (u satima) za koje svjetlost prevali put od 5 milijuna kilometara?

0

1

2

25. Površina pravokutnog trokuta je 28, a omjer $a:b = 4:7$.

a) Koliki je opseg trokuta?

0

b) Ako stranicu a povećamo tako da je nova mjeru stranice 16, koliko puta će se povećati površina?

1

2

26. U čaši je u početku bilo 70 cm^3 vode. Svake sekunde iz čaše isteće kapljica obujma 0.02 cm^3 .

0

a) Uz pomoć funkcije prikažite koliko će vode biti u čaši nakon t sekundi.

1

b) Koliko je vode u čaši nakon pola sata?

2

27. a) Grafički riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

0

b) U kakvom su međusobnom položaju dobiveni pravci?

1

2

28. Mladić je naumio kupiti jaknu, hlače i košulju. Ukupno ima 1 200 kuna.

Cijena jakne dvostruko je veća od cijene hlača, a cijena košulje iznosi $\frac{1}{3}$ cijene hlača. Kolika je maksimalna cijena jakne za koju mladić može kupiti tu jaknu?

0

1

2

• 2. Ogledni ispiti – viša razina •

Rješenja zadataka iz oglednih ispita potražite na str. 473.

1. ISPIT

1. Zadatci višestrukog izbora

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

1. Realni dio broja $(1 - 3i)^3$ je:	A. B. C. D.
A) 18, B) -26, C) 26, D) -8.	
2. Rješenje jednadžbe: $5x - 4a = 2ax + 7$ u ovisnosti o parametru a iznosi:	A. B. C. D.
A) $\frac{4a+7}{2a+5}$, B) $\frac{7+4a}{2a-5}$, C) $2 + \frac{17}{5-2a}$, D) $-2 + \frac{17}{5-2a}$.	
3. Izračunajte obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina osnovnog brida 7 cm, a bočni brid s ravninom baze zatvara kut od 73° .	A. B. C. D.
A) 264.43 cm^3 B) 135.3 cm^3 C) 196.65 cm^3 D) 125.45 cm^3	
4. Koji je od sljedećih nizova zadan formulom $a_n = 3 \cdot (n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$?	A. B. C. D.
A) 3, 6, 9, 12, ... B) 6, 9, 12, ... C) 1, 3, 6, 9, 12, ... D) 3, 3, 3, 3, ...	
5. Interval rasta funkcije $f(x) = x^2 - 3$ je:	A. B. C. D.
A) $(-\infty, -2)$, B) $(0, +\infty)$, C) $(-\infty, 0)$, D) $(2, +\infty)$.	
6. Jedno od rješenja jednadžbe $\log(x - 4) + \log x = \log(5x - 14)$ jest:	A. B. C. D.
A) -2, B) nema rješenja, C) 5, D) 7.	

7. Koji od ponuđenih pravaca s pravcem $y = -2x - 5$ zatvara kut od 45° ?	A. B. C. D.
A) $y = 3x + 3$ B) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ C) $y = 2x - 5$ D) $y = -2x - 17$	
8. Vrijednost izraza $\sqrt{4x^2 - 12x + 9}$ za $x \leq \frac{3}{2}$ jest:	A. B. C. D.
A) $2x + 3$, B) $-2x + 3$, C) $2x - 3$, D) $-2x - 3$.	
9. Žarišta su elipse $16x^2 + 32y^2 = 512$ u točkama:	A. B. C. D.
A) $(2, 0)$ i $(-2, 0)$, B) $(3, 0)$ i $(-3, 0)$, C) $(2, 0)$ i $(0, 2)$, D) $(4, 0)$ i $(-4, 0)$.	
10. Odredite koja točka pripada grafu funkcije $f(x) = \log_5 x$.	A. B. C. D.
A) $(1, 5)$ B) $(-1, 5)$ C) $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$ D) $(5, 1)$	
11. Rješenje jednadžbe $\frac{2^{-3x}}{4} \cdot \left(\sqrt{16^3}\right)^x = 0.25^{x-1}$ nalazi se unutar intervala:	A. B. C. D.
A) $[0, 0.5)$, B) $(-\infty, 0)$, C) $\left[\frac{1}{2}, 0.8\right]$, D) $\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{5}\right)$.	
12. Za $f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \cos x}$ nađite $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.	A. B. C. D.
A) $-\sqrt{3}$ B) $2 - \sqrt{3}$ C) $2 + \sqrt{3}$ D) 3	
13. Ako najkraća izvodnica kosog stošca s najduljom zatvara kut od 35° , odredite površinu baze stošca. Izvodnice imaju duljine $s_1 = 21$ cm i $s_2 = 29$ cm.	A. B. C. D.
A) 223.27 cm^2 B) 246.92 cm^2 C) 267.11 cm^2 D) 275.23 cm^2	

14. Tvorница kristala proizvodi čaše. Pri proizvodnji nastaje 5 % otpada. Koliko komada čaša mora proizvesti tvorница da bi dobila 500 čaša bez greške?	A. B. C. D.			
A) 528 B) 526 C) 527 D) 525				
15. Buket od pet bijelih i šest ružičastih ruža košta 100 kuna, a buket od sedam bijelih i četiri ružičaste ruže stoji 96 kuna. Za koliko je postotaka ružičasta ruža skuplja od bijele?	A. B. C. D.			
A) 20 % B) 25 % C) 30 % D) 22.5 %				
2. Zadataci kratkih odgovora				
16. Skup rješenja nejednadžbe $7x(x - 3) \leq 0$ napiši u obliku intervala.	0 1			
17. Ako je duljina prostorne dijagonale kocke $24\sqrt{3}$ cm, koliki je obujam toj kocki upisane kugle?	0 1			
18. Izračunajte: a) $\left(\frac{1}{x} - y\right)^2$, b) $\left(\frac{1}{x} - y\right)^3$.	0 1 2			
19. Neka su zadani vektori: $\vec{a} = -2\vec{i} - \frac{1}{3}\vec{j}$ i $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j}$. a) Koliko iznosi $ 3\vec{a} - 2\vec{b} $? b) Koliko iznosi kut između vektora $\vec{c} = -6\vec{a} - \vec{b}$ i vektora \vec{b} ?	0 1 2			
20. a) Iz priložene tablice odredite funkciju $f(x) = a^{x-1}$.				
x $f(x)$	0 $\frac{1}{3}$	-2 $\frac{1}{27}$	2 3	0 1 2
b) Izračunajte $f(-5)$.				
21. Opseg pravokutnog trokuta je 54 cm, a omjer stranica $b : c = 3 : 5$. a) Kolika je stranica a ? b) Izračunajte površinu trokuta.	0 1 2			

<p>22. a) Prikažite funkciju $f(x) = x+5$ u koordinatnom sustavu. b) Iz grafičkog prikaza odčitajte vrijednost funkcije za $x = -5$.</p>	0 1 2												
<p>23. Nakon x sekundi ostane neraspadnuto $n(x) = 10^6 \cdot 10^{-1.82 \cdot 10^{-4} \cdot x}$ atoma radioaktivnog izotopa kobalta. Koliko je atoma ostalo nakon dva dana?</p>	0 1 2												
<p>24. Priloženu tablicu popunite predznacima.</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>α</td> <td>$\sin \alpha$</td> <td>$\cos \alpha$</td> <td>$\operatorname{tg} \alpha$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{5\pi}{4}$</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>325°</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{5\pi}{4}$				325°				0 1 2
α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$										
$\frac{5\pi}{4}$													
325°													
<p>25. Tangenta na krivulju $y = 2x^2 - 3x + 1$ u točki s apscisom $x = -1$ zatvara trokut s koordinatnim osima. Odredite površinu tog trokuta.</p>	0 1 2												
<p>26. U kružnici polumjera 5 cm promatrajmo tetivu pridruženu središnjem kutu α za koji vrijedi $\cos \alpha = 0.6$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Koliko iznosi duljina promatrane tetine? Kolika je vrijednost $\sin \beta$ ako je β obodni kut pridružen istoj tetivi? 	0 1 2												
<p>27. Zadana je jednadžba $3x - 7 = ax + 2a$.</p> <ol style="list-style-type: none"> Odredite rješenje dane jednadžbe u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$. Odredite vrijednost parametra $a \in \mathbb{N}$ tako da rješenje jednadžbe bude prirodan broj? Za koju vrijednost parametra a jednadžba nema rješenja? 	0 1 2 3												
<p>28. Kanal ima poprečni presjek u obliku pravokutnog trapeza s manjom osnovicom duljine 2.5 m, duljim krakom duljine 4 m i jednim kutom od 120°. Duljina kanala je 70 m.</p> <ol style="list-style-type: none"> Koja je količina vode potrebna da bude napunjeno 50 % toga kanala? Koji dio vode iz zadatka a) treba ispustiti da kanal bude napunjen do 50 % svoje visine? 	0 1 0 1 2												

3. Zadatci produženih odgovora

29. Zadane su točke $A(8, 1)$ i $B(-2, 6)$.

- a) Izrazite vektor \overline{AB} kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora \vec{i} i \vec{j} .
- b) Napišite implicitni oblik jednadžbe pravca p koji je nositelj vektora \overline{AB} .
- c) Odredite jednadžbu kružnice k polumjera 5 koja ima središte u početnoj točki vektora.
- d) Prikažite vektor \overline{AB} , pravac p i kružnicu k u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.

30. Odredite ekstreme te prikažite grafički tijek funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

0

1

0

1

0

1

0

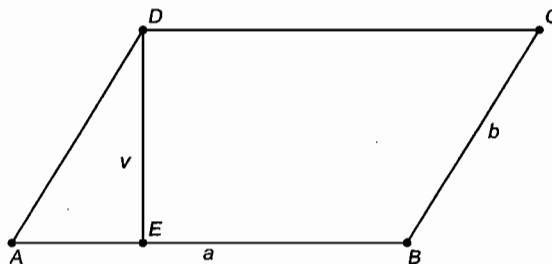
1

2. ISPIT

1. Zadatci višestrukog izbora

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

<p>1. Razlomak $\frac{5}{n+1}$ prirodan je broj za:</p> <p>A) $n = -1$, B) $n = -6$, C) $n = 9$, D) $n = 0$.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>2. Kvadratna jednadžba čija su rješenja $x_1 = \frac{2}{3}$ i $x_2 = -3$ jest:</p> <p>A) $3x^2 + 7x - 6 = 0$, B) $-3x^2 + 2x - 6 = 0$, C) $-3x^2 - x + 6 = 0$, D) $3x^2 - 7x - 6 = 0$.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>3. Ako je $f(x) = \frac{1}{x-1}$ i $g(x) = \frac{x^2-1}{2}$ onda je $(f \circ g)(x)$ jednako:</p> <p>A) $(f \circ g)(x) = x^2 - 3$, B) $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x^2 - 3}$, C) $(f \circ g)(x) = \frac{2}{x^2 - 2}$, D) $(f \circ g)(x) = 1$.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>4. Kolika je udaljenost središta kružnice $x^2 + y^2 + 6x - 14x - 3 = 0$ od ishodišta koordinatnog sustava?</p> <p>A) 4 B) 13 C) 6 D) $\sqrt{58}$</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>5. Opseg paralelograma na slici je 80 cm. Ako je stranica a za 6 cm dulja od stranice b, a visina $v = 12$ cm, koliko iznosi površina paralelograma?</p> <p>A) 276 cm^2 B) 144 cm^2 C) 138 cm^2 D) 84 cm^2</p>	<p>A. B. C. D.</p>

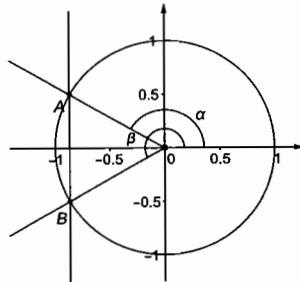


<p>6. Rješenje nejednadžbe: $0.008^x < 125$ jest:</p> <p>A) $x \in (-\infty, 1)$, B) $x \in (-1, +\infty)$, C) $x \in (-\infty, -1)$, D) $x \in (1, +\infty)$.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>7. Polinom $f(x) = mx^2 + (m-1)x + 5$ u $x = -2$ ima maksimum. Taj je maksimum jednak:</p> <p>A) 5, B) $\frac{19}{3}$, C) $-\frac{2}{3}$, D) -2.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>8. Koja od točaka pripada grafu funkcije $f(x) = -x + \frac{3}{2}$?</p> <p>A) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ B) $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ C) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ D) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>9. Skup svih rješenja nejednadžbe: $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 7$ napišite u obliku intervala.</p> <p>A) $(-\infty, -\log_2 7)$ B) $(-\log_2 7, +\infty)$ C) $(\log_2 7, +\infty)$ D) $[\log_2 7, +\infty)$</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>10. Apsolutna vrijednost broja $\frac{i-3}{1-i} + \frac{i-2}{i}$ jest:</p> <p>A) $\sqrt{2}$, B) $-i$, C) -1, D) $\sqrt{13}$.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>11. Odredite površinu lika koji zatvaraju prostorna dijagonala kvadra, dijagonala osnovke i bočni brid ako su duljine bridova kvadra $a = 24$ cm, $b = 7$ cm i $c = 8$ cm.</p> <p>A) 110 cm^2 B) 80 cm^2 C) 120 cm^2 D) 100 cm^2</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>12. Koliki je zbroj svih potencija broja 5 koje su veće od 500, a manje od 5 000?</p> <p>A) 5 500 B) 625 C) 3 750 D) 3 125</p>	<p>A. B. C. D.</p>

<p>13. Rješenje sustava $\begin{cases} (x+4)^2 + y^2 = 64 \\ y = \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$ koje ne sadržava negativne komponente nalazi se:</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>A) na osi ordinata, B) na osi apscisa, C) u ishodištu, D) u I. kvadrantu.</p>	
<p>14. Ako je geografska karta izrađena u mjerilu 1: 500 000, kolika je stvarna udaljenost između dva mjesta u kilometrima ako je ona na karti 25 cm?</p> <p>A) 12 500 000 km B) 125 000 km C) 1 250 km D) 125 km</p>	<p>A. B. C. D.</p>

15. Kojoj je od navedenih jednadžbi rješenje kut prikazan na trigonometrijskoj kružnici?

- A) $2\sqrt{3} \cos \alpha + 1 = 0$
 B) $\sqrt{3} \cos \alpha + 1 = 0$
 C) $2\sqrt{3} \cos \alpha + 3 = 0$
 D) $2\sqrt{3} \cos \alpha - 3 = 0$



2. Zadataci kratkih odgovora

<p>16. Iz jednakosti $\frac{xy-1}{2x}=1$ izrazi x uz pomoć y.</p>	<p>0 1</p>																		
<p>17. Ako je duljina prostorne dijagonale kocke $16\sqrt[3]{3}$ cm, koliki je obujam njoj upisane kugle?</p>	<p>0 1</p>																		
<p>18. Za koji prirodan broj k kvadratna jednadžba $5kx^2 + (2k^2 - 8k)x - 5 = 0$ ima dva međusobno suprotna rješenja?</p>	<p>0 1</p>																		
<p>19. Popunite tablicu za funkciju $f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$.</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>x</td> <td>$\frac{\pi}{3}$</td> <td>$\frac{2\pi}{3}$</td> <td>π</td> <td>$\frac{4\pi}{3}$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>0</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>1</td> </tr> </table>	x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$		$f(x)$					0						1	
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$															
$f(x)$					0														
					1														

20. U paralelogramu $ABCD$ poznate su koordinate vrhova $A(2, 2)$, $D(-1, 5)$ i $C(3, 6)$. Odredi koordinate vrha B .	0 1
21. Razlomljena funkcija zadana je kao: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; & x < \sqrt{3} \\ x^2 + 2; & x \geq \sqrt{3} \end{cases}$. Izračunajte $f(\sqrt{5})$ i $f\left(\frac{3}{2}\right)$.	0 1 2
22. Neka su zadani vektori: $\vec{a} = -\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}$ i $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$. a) Koliko iznosi $ 3\vec{a} - \vec{b} $? b) Koliki je kut između vektora $\vec{c} = 6\vec{a} + \vec{b}$ i vektora \vec{b} ?	0 1 2
23. Odredite zbroj rješenja jednadžbe: $ 3x - 2 = \frac{- 3 - 2\sqrt{5} }{ \sqrt{5} - 4 + \sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{2}$.	0 1 2
24. U čaši je na početku bilo 70 cm^3 vode. Svake sekunde iz čaše isteće kapljica obujma 0.02 cm^3 . a) Uz pomoć funkcije prikažite koliko će vode biti u čaši nakon n sekundi. b) Koliko će vode biti u čaši nakon pola sata?	0 1 2
25. Marko, Ana i Ivo pomažu ocu kosit travu. Travnjak je oblika pravokutnika sa stranicama čije su duljine 13 i 15 metara. Ana je pokosila 15% , Ivo 25% , a Marko 23% ostatka. a) Koliki je postotak travnjaka pokosio tata? b) Koliko je četvornih metra travnjaka pokosio Ivo? c) Koliko su četvornih metara travnjaka zajedno pokosili Ana i Marko?	0 1 2 3
26. Voćar je zasadio voćnjak kruškama, jabukama i šljivama. Nakon četiri godine 10% krušaka se osušilo te ih je zamjenio s 8 jabuka i 6 šljiva. Nakon toga je u voćnjaku bilo jednak broj krušaka i jabuka, dok je ukupan broj šljiva bio upola manji od ukupnoga broja krušaka. a) Koliko je šljiva bilo na početku? b) Koliko je jabuka bilo nakon ponovne sadnje? c) Koliko je ukupno voćaka u voćnjaku?	0 1 2 3
27. Koliko iznosi površina kruga čija je površina 30% površine pravokutnika dijagonale 7 cm i jedne stranice od 5 cm ?	0 1 2 3

28. Za funkciju $f(x) = -3x^2 + \frac{1}{2}x + c$ vrijedi $f(-1) = \frac{1}{2}$.

a) Odredite vrijednost realnog broja c .

0

1

0

1

2

b) Odredite sjecišta grafika funkcije s x -osi.

0

1

c) Izračunajte koordinate tjemena pripadnoga grafika.

1

3. Zadataci produženih odgovora

29. Kugla mase 2 kg ima gustoću 850 kg/m^3 .

0

1

a) Koliki je volumen kugle iskazan u m^3 ?

2

0

1

b) Koliki je radijus kugle?

2

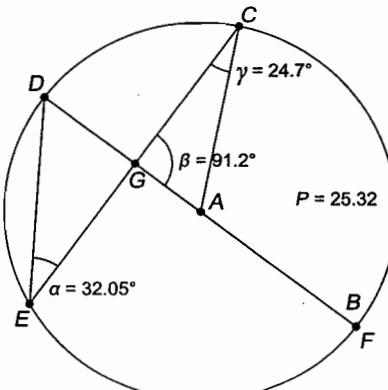
0

1

c) Ako se radijus poveća pet puta, a gustoća ostane nepromijenjena, kolika će tada biti masa kugle?

2

30. Ako je točka A središte kružnice na slici, odredite površinu osjenčanog dijela kruga.



3. ISPIT

1. Zadatci višestrukog izbora

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

1. Intervali rasta funkcije $f(x) = x^2 - 5$ jesu:

- A) $(-\infty, -5)$, B) $(0, +\infty)$, C) $(-\infty, 0)$, D) $(2, +\infty)$.

A.
B.
C.
D.

2. Rješenje jednadžbe $\frac{-3x+5}{8} - \left(-\frac{3}{4}x + \frac{5x-2}{6} \right) = \frac{7x+4}{12}$ jest:

- A) 5, B) $\frac{5}{3}$, C) $\frac{3}{5}$, D) 3.

A.
B.
C.
D.

3. Pravilna uspravna šesterostранa prizma visine 8 cm i duljine osnovnog brida 6 cm presječena je ravniom koja prolazi duljom dijagonalom jedne osnovice i bridom druge. Površina presjeka zaokružena na jednu decimalnu iznosi:

- A) 76.76 cm^2 , B) 91.91 cm^2 , C) 85.85 cm^2 , D) 68.68 cm^2 .

A.
B.
C.
D.

4. Izračunajte $\left(1.25 : \frac{2}{3} - 1.25 \cdot \frac{9}{8} \right) : \frac{5}{12}$.

- A) $\frac{9}{8}$, B) 1, C) $\frac{8}{9}$, D) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$

A.
B.
C.
D.

5. Rješenje nejednadžbe $|6x + 4| < 5$ jest:

- A) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{6} \right)$, B) $x \in \left(-\frac{3}{2}, +\infty \right)$, C) $x \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{6} \right)$, D) $x \in \left[\frac{1}{6}, +\infty \right)$.

A.
B.
C.
D.

6. Područje definicije funkcije $f(x) = \frac{2x-1}{\sin x}$ jest:

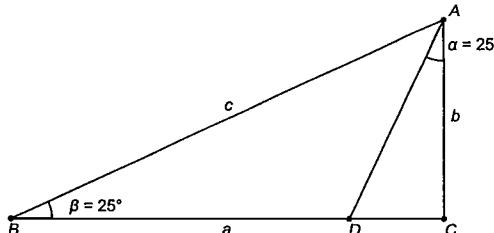
- A) $\langle k\pi, 2k\pi \rangle$, B) $\mathbb{R} / \{2k\pi\}$, C) $\mathbb{R} / \{k\pi\}$, D) \mathbb{R} .

A.
B.
C.
D.

7. Odredite koja od navedenih četiriju funkcija nije parna.	A. B. C. D.
A) $f(x) = 3x^3 + x$ B) $f(x) = x^6 - 1$ C) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ D) $f(x) = x^2$	
8. Pravac p zadan je jednadžbom $3x + 4y - 12 = 0$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi jest:	A. B. C. D.
A) 13, B) 5, C) $3\sqrt{5}$, D) 7.	
9. Rješenje jednadžbe $\frac{2^{-3x}}{4} \left(\sqrt{16^3}\right)^x = 0.25^{x-1}$ nalazi se unutar intervala:	A. B. C. D.
A) $[0, 0.5)$, B) $(-\infty, 0)$, C) $\left[\frac{1}{2}, 0.8\right]$, D) $\left(\frac{1}{4}, \frac{4}{5}\right)$.	
10. Ako je $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$ i $g(x) = 2x^2 - 3$, onda je $(g \circ f)(-2)$ jednako:	A. B. C. D.
A) $\frac{8}{15}$, B) $-\frac{8}{15}$, C) $-\frac{15}{8}$, D) $\frac{15}{8}$.	
11. Žarišta elipse $16x^2 + 32y^2 = 512$ nalaze se u točkama:	A. B. C. D.
A) $(2, 0)$ i $(-2, 0)$, B) $(3, 0)$ i $(-3, 0)$, C) $(2, 0)$ i $(0, 2)$, D) $(4, 0)$ i $(-4, 0)$.	
12. Modul kompleksnog broja $\frac{1+3i}{1-i}$ jest:	A. B. C. D.
A) i , B) 5, C) -5, D) $\sqrt{5}$.	
13. Na slici je prikazan graf funkcije:	A. B. C. D.
A) $y = x+5 $, B) $y = x -5$, C) $y = x +5$, D) $y = x-5 $.	

<p>14. Vrijednost izraza $\frac{5^{-3} \cdot 125}{5^2}$ kao potencije s bazom 5 iznosi:</p> <p>A) 5^{-2}, B) 5^{-1}, C) 5, D) 5^3.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>15. U menzuri promjera 2 cm nalazi se tekućina do visine 10 cm. Za koliko će se centimetara povišiti razina tekućine ako u nju uronimo kuglicu promjera 1 cm?</p> <p>A) za 6 cm B) za 1 cm C) za $\frac{1}{3}$ cm D) za $\frac{1}{6}$ cm</p>	<p>A. B. C. D.</p>
2. Zadataci kratkih odgovora	
<p>16. Rješenje nejednadžbe $\frac{1}{9^{2x-1}} \leq 27$ interval jest _____.</p>	<p>0 1</p>
<p>17. Koliko je $f(2)$ ako je $f(x) = \log_4 x - \frac{\log_{16} x}{\log_{\frac{1}{4}} x}$?</p>	<p>0 1</p>
<p>18. Odredite derivaciju funkcije $f(x) = \sin(x - 3)^2$.</p>	<p>0 1</p>
<p>19. Površina pravokutnog trokuta je 810, a omjer $a : b = 12 : 15$.</p> <p>a) Koliki je opseg trokuta? b) Ako stranicu a povećamo tako da je nova duljina stranice 45 i da duljina stranice b ostane nepromijenjena, za koliko će se puta povećati površina?</p>	<p>0 1 2</p>
<p>20. Računski i grafički riješite nejednadžbu $2x^2 + 9x - 5 \leq 0$.</p>	<p>0 1 2</p>
<p>21. Izračunajte: $2i^{50} - 3i^{150} + 4i^{200} - 5i^{250}$.</p>	<p>0 1 2</p>
<p>22. Zadane su mase: 2 kg 38 g, 4 800 g, $2 \cdot 10^2$ dag 3 g i $4 \cdot 10^{-2}$ t.</p> <p>a) Zadane mase pretvoriti u grame. b) Koja je masa najmanja?</p>	<p>0 1 2</p>

23. U trokutu na slici je $|BC| = 4$ cm. Odredite površinu trokuta ΔADC .



0
1
2

24. Za polinome $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ i $g(x) = x - 1$ odredite:

- a) $(f \circ g)(x)$,
b) $(g \circ f)(x)$.

0
1
2

25. U kružnici polumjera 7 cm promatrajmo tetivu pridruženu središnjem kutu α za koji vrijedi $\cos \alpha = 0.4$.

- a) Koliko iznosi duljina promatrane teticive?
b) Kolika je vrijednost $\sin \beta$ ako je β obodni kut pridružen istoj teticivi?

0
1
2

26. U pravokutnom trapezu kraća je osnovica (c) sukladna kraćem kraku. Šijasti kut trapeza iznosi 45° , a duljina kraće dijagonale $5\sqrt{2}$ cm. Odredite duljinu dulje osnovice i duljega krača.

0
1
2

27. Učenici su krenuli na ljetovanje autobusima. U prvom je autobusu bila četvrtina svih učenika, u drugom 10 učenika više, a ostalih 44 učenika išlo je trećim autobusom. Kada su stigli na ljetovanje, smješteni su u trokrevetne i četverokrevetne sobe, tako da je broj trokrevetnih soba bio za jedan veći od broja četverokrevetnih soba.

- a) Koliko je učenika išlo na ljetovanje?
b) Koliko se učenika vozilo drugim autobusom?
c) Koliko je učenika bilo smješteno u trokrevetne sobe?

0
1
2
3

28. Za funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$ odredite:

a) nultočke,

0
1

b) sjecište grafa s y -osi,

0
1

c) u koordinatnom sustavu skicirajte graf.

0
1
2

3. Zadatci produženih odgovora

29.	Poznato je da je najveća udaljenost Zemlje od Sunca 152 000 000 km, a najmanja 147 000 000 km. Također znamo da se Zemlja kreće oko Sunca po putanji u obliku elipse tako da se Sunce nalazi u jednomu od žarišta. Numerički ekscentricitet putanje je $\epsilon = 0.017$.	0
	a) Odredite linearni ekscentricitet (e) putanje te male (b) i velike poluosi (a).	1
		2
		3
b)	Napišite jednadžbu Zemljine putanje. Veličine a i b izrazite u kilometrima.	0
		1
		2
	c) Prikažite skicu putanje u koordinatnom sustavu. Za potrebe skice povećajte linearni ekscentricitet 30 puta radi mjerila u kojemu treba prikazati elipsu.	0
		1
d)	d) U kojem je omjeru prikaz Zemljine putanje na skici?	0
		1
	e) Dvije se komete gibaju usporednim putanjama. Jedna od njih prolazi žarištem (u kojemu nije Sunce), a druga dodiruje Zemljinu putanju u točki u kojoj je udaljenost Zemlje od Sunca najveća. Prikažite putanje tih kometa na skici u koordinatnom sustavu.	0
		1
		2
30.	Ovisnost promjene temperature tekućina o promjeni temperature okoline može se opisati eksponencijalnom funkcijom:	
	$T(t) = T_s + (T_0 - T_s) \cdot e^{-kt}$,	
	u kojoj je T_s temperatura sredine, T_0 početna temperatura tekućine, t vrijeme u minutama, a k konstanta tekućine.	
	U prostoriju temperature 10 °C unesemo posudu s vrućom vodom temperature 100 °C. Nakon 10 minuta temperatura vode smanji se na 70 °C. Za koliko će minuta temperatura vode biti 22.70 °C?	

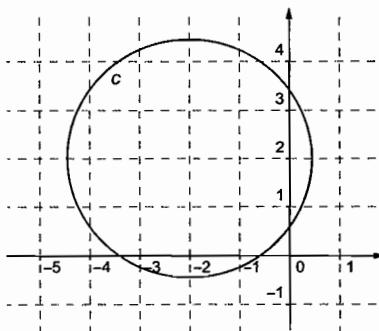
4. ISPIT

1. Zadataci višestrukog izbora

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

1. Kružnica na slici ima jednadžbu:

- A) $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 6$,
- B) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 36$,
- C) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 6$,
- D) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 6$.



- A.
- B.
- C.
- D.

2. Koristeći se džepnim računalom odredite koji je broj najveći.

- A) $\cos 75^\circ 12'$
- B) $\log_5 4$
- C) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$
- D) $\sin 12^\circ 24'$

- A.
- B.
- C.
- D.

3. Zadan je pravac p jednadžbom $-2x + 5y - 10 = 0$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi jest:

- A) $\sqrt{21}$,
- B) 3,
- C) $\sqrt{29}$,
- D) 7.

- A.
- B.
- C.
- D.

4. Za koji realan broj k kvadratna jednadžba $3kx^2 + (k^2 - k)x - 2 + 4k = 0$ ima jedno rješenje jednako 0?

- A) za -2
- B) za 2
- C) za $-\frac{1}{2}$
- D) za $\frac{1}{2}$

- A.
- B.
- C.
- D.

5. Zadan je trokut ΔABC s koordinatama svojih vrhova $A(-6, -2)$, $B(4, 4)$ i $C(8, 3)$. Koliko iznosi kut α ?

- A) 22°
- B) $10^\circ 20' 12''$
- C) 15°
- D) $11^\circ 18' 36''$

- A.
- B.
- C.
- D.

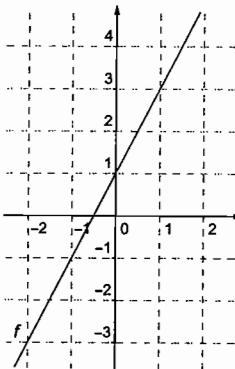
6. Poznato je da jednadžba $5m + 3mx = -m - 2x$ za $m \in \mathbb{Z}$ ima cijelobrojno rješenje. Tada je jedno od rješenja:

- A) 1, B) 0, C) -1, D) 3.

A.
B.
C.
D.

7. Graf na slici prikazuje funkciju:

- A) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$,
B) $f(x) = 2x - 1$,
C) $f(x) = 2x + 1$,
D) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.



A.
B.
C.
D.

8. Nakon racionalizacije izraz $\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}}$ poprima oblik:

- A) 3, B) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2}$, C) 1, D) $\frac{118+55\sqrt{2}+32\sqrt{5}+27\sqrt{10}}{31}$.

A.
B.
C.
D.

9. Funkcija $f(x) = x^2 - 2x + 1$ za $x = -1$ poprima istu vrijednost kao i za:

- A) $x = 3$, B) $x = 1$, C) $x = 7$, D) $x = 0$.

A.
B.
C.
D.

10. Koju od danih jednadžbi zadovoljava $x = 2\sqrt[3]{\sqrt{11}} - 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{11} + 3}$?

- A) $x^6 + 128 = 0$ B) $x^3 - 16 = 0$
C) $x^3 + 16 = 0$ D) $x^6 - 128 = 0$

A.
B.
C.
D.

11. Brzina svjetlosti je $300\ 000$ km/s. Za koje vrijeme (iskazano u satima) svjetlost prevali put od $3\ 596$ milijuna kilometara?

- A) 0.333 B) 119.7778 C) 3.3297 D) 3.3132

A.
B.
C.
D.

12. Područje definicije funkcije $f(x) = \log \frac{x+5}{x}$ jest:	A. B. C. D.
A) \mathbb{R} , B) $(-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$, C) $(-5, 5)$, D) $(0, +\infty)$.	
13. Izračunajte $\frac{\cos 35^\circ + \cos 85^\circ}{\cos 65^\circ}$.	A. B. C. D.
A) $\tg 35^\circ$ B) $\cos 24^\circ$ C) $\tg 65^\circ$ D) $\tg 60^\circ$	
14. Odredite vrijednost realnog broja k tako da krivulja $x^2 + 4x + y^2 - ky - 5 = 0$ ima središte na pravcu $y = 2x$.	A. B. C. D.
A) -2 B) 8 C) 2 D) -8	
15. Rješenje sustava $\begin{cases} (x-5)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ y = \frac{2}{3}x - 4 \end{cases}$ koje ne sadržava negativne koordinate nalazi se:	A. B. C. D.
A) na osi ordinata, B) na osi apscisa, C) u ishodištu, D) u I. kvadrantu.	
2. Zadataci kratkih odgovora	
16. a) Realni dio kompleksnog broja $(1-i\sqrt{3})^3$ jednak je: _____.	0
b) Nađite imaginarni dio broja: $\frac{2i^{105}-1}{i-i^{103}}$.	1 2
17. 17. Odredite površinu kvadrata konstruiranoga nad stranicom a trokuta, kojemu su kutovi $\alpha = 47^\circ 47'$ i $\beta = 63^\circ 63'$, te stranica $c = 31$ cm. Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.	0 1
18. a) Rješenje jednadžbe: $5^{2x+1} - 25^{x+1} = -100$ je: _____. b) Rješenje nejednadžbe: $5^{2x+1} - 25^{x+1} \leq -100$ je: _____.	0 1 2
19. Izračunajte obujam pravilne četverostrane piramide ako je duljina osnovnog brida 7 cm, a bočni brid s ravninom baze zatvara kut od 73° .	0 1

20. Geometrijski niz (a_n) , $n \in \mathbb{N}$, zadan je s $a_1 = 12$, $q = 3$. Odredite n za koji je $a_n = 324$.	0 1
21. Odredite stacionarne točke funkcije $f(x) = x^2 - 4x - 2$.	0 1 2
22. Zadane su dužine duljine 0.015 m, 40 mm i 3 cm. a) Može li se od zadanih dužina konstruirati trokut? b) Ako može, koliki je njegov opseg u milimetrima?	0 1 2
23. Odredite duljinu dijagonale pravokutnika ako znamo da mu je opseg $O = 46$ cm, a kut među dijagonalama $\varphi = 47^\circ$.	0 1 2
24. a) Prikažite x kao postotak od y ako je $x = 20.25$ i $y = 27$. b) Prikažite y kao postotak od x ako je $x = 20.25$ i $y = 27$.	0 1 2
25. Riješite sustav jednadžbi $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ algebarski i grafički.	0 1 2
26. a) Na jediničnoj kružnici pridružite točki glavnju mjeru $\alpha = \frac{23\pi}{4}$. b) Izračunajte $\sin \frac{23\pi}{4}$ koristeći se periodičnošću funkcije sinus i formule za svođenje na prvi kvadrant.	0 1 2
27. Iz grafa na slici odčitajte ove podatke: 	0 1 0 1 0 1 0 1 0 1
a) nultočke na intervalu $[0, 2\pi]$, b) minimume funkcije na intervalu $[0, 2\pi]$, c) maksimume funkcije u intervalu $[0, 2\pi]$, d) temeljni period funkcije.	0 1 0 1 0 1

28. a) Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2 - 10x + 21 = 0$.
 b) Riješite kvadratnu nejednadžbu $x^2 - 10x + 21 < 0$ i rješenje napišite u obliku intervala.
 c) Odredite sliku funkcije $f(x) = x^2 - 10x + 21$.

0
1
2
3

3. Zadaci produženih odgovora

29.

29.1. Prizemlje zgrade visoko je 3.5 metara, a svaki kat je visok 4 m.

Zgrada ima 15 katova.

- a) Napišite funkciju koja opisuje visinu zgrade.
 b) Na kojoj je visini 7. kat?

c) Koliko je zgrada visoka?

29.2. Funkcija na slici zadana je sa $f(x) = x^3 - x^2 + a$.

a) Odredite a .

b) Odredite sjecište grafa funkcije s y -osi.

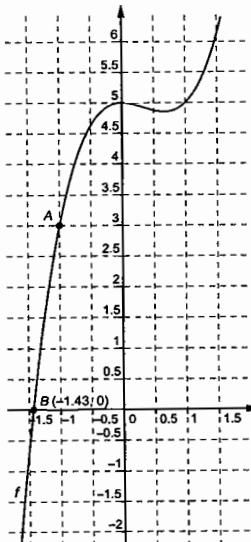
c) Za koje $f(x)$ je $x > 0$?

d) Za $D_f [0, 5]$ odredite sliku funkcije.

e) Ispitajte parnost funkcije.

30. U prodavaonicu je došla određena količina kave u pakiranjima od 100, 200 i 500 grama. U velikoj ambalaži kava je pakirana tako da u kutiju stane 120 paketa od 100 grama, 70 paketa od 200 grama i 40 paketa od 500 grama. Stiglo je ukupno 20 kutija kave, s tim da je dvostruko više kutija s kavom od 100, nego od 200 grama.

Za koliko je broj paketića kave od 100 grama manji od ukupnog broja svih pristiglih paketića?



5. ISPIT

1. Zadatci višestrukog izbora

U sljedećim zadatcima samo je jedan odgovor točan.

1. Rješenje nejednadžbe $11 - [2y - (4 - 3y)(4 + 3y)] < 6y - (3y - 1)^2$ jest:

- A) $y \in (-\infty, -2)$, B) $y \in (2, +\infty)$, C) $y \in (-\infty, 2)$, D) $y \in (-2, +\infty)$.

A.
B.
C.
D.

2. Izračunajte $\cos 135^\circ \cdot \sin 45^\circ$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

A.
B.
C.
D.

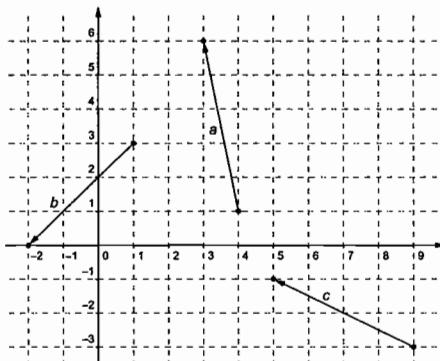
3. Ako je $\sin \alpha = 0.6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, onda je $\operatorname{tg} \alpha$ jednako:

- A) -0.75 , B) $\frac{2}{3}$, C) 0.75 , D) $\frac{4}{3}$.

A.
B.
C.
D.

4. Za vektore \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} sa slike vrijedi:

- A) $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$,
 B) $\vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$,
 C) $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$,
 D) $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$.



A.
B.
C.
D.

5. Aritmetička sredina svih rješenja jednadžbe $x^2 - 2x - 168 = 0$ iznosi:

- A) 13, B) -1, C) 1, D) -13.

A.
B.
C.
D.

<p>6. Sjecišta krivulja $x = 6$ i $x^2 + y^2 = 49$ vrhovi su:</p> <p>A) romba, B) kvadrata, C) pravokutnika, D) trokuta.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>7. Domena funkcije $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{3}{(x-1)^2}$ jest:</p> <p>A) $(-1, +\infty)$, B) $(-1, 1)$, C) \mathbb{R}, D) $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>8. Polumjer kružnice čiji je opseg 4π dm iznosi:</p> <p>A) 0.02 m, B) 2 cm, C) 2 dm, D) 200 mm.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>9. Pravac p zadan je jednadžbom $2x + y - 6 = 0$. Udaljenost točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi jest:</p> <p>A) 9, B) 6, C) $3\sqrt{5}$, D) 12.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>10. Koji od ponuđenih brojeva može biti rješenje nejednadžbe</p> $\frac{2x-1}{3} - \left(\frac{x}{5} + \frac{5x-1}{6} \right) < \frac{3}{4}?$ <p>A) -3.6 B) $-\frac{5}{3}$ C) $-\frac{7}{2}$ D) -5</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>11. Izraz: $\frac{7^y - 7^x}{7^{-y} - 7^{-x}}$ jednak je:</p> <p>A) 7^{x+y}, B) -7^{x+y}, C) 7^{-x-y}, D) 7^{x-y}.</p>	<p>A. B. C. D.</p>
<p>12. Zapis broja $-1 + \sqrt{3}i$ u trigonometrijskom obliku jest:</p> <p>A) $2 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$, B) $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$,</p> <p>C) $\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$, D) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.</p>	<p>A. B. C. D.</p>

13. Jednadžba tangente na krivulju $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ u točki s apscisom $\frac{\pi}{4}$ ima oblik:	A. B. C. D.
A) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, B) $y = 1$, C) $y = x - \frac{\pi}{4}$, D) $y = x - \frac{\pi}{4} + 1$.	
14. Koliko prirodnih brojeva treba zbrojiti da zbroj bude veći od 1 000?	A. B. C. D.
A) 43 B) 44 C) 45 D) 46	
2. Zadatci kratkih odgovora	
16. Rastavite na faktore $3^{n+2} + 3^n + 3^{n+1}$.	0 1
17. Na osi ordinata nađite točku koja je jednakoj udaljena od točaka $M(7, 3)$ i $N(-9, 1)$.	0 1
18. Rješenje jednadžbe $4^{2x+1} - 16^{x+1} = -48$ je: _____.	0 1
19. Duljina je osnovnog brida pravilne četverostrane piramide 11 cm, a bočni brid s ravninom baze zatvara kut od 33° . Izračunajte obujam te piramide.	0 1 2
20. Kolika je površina kvadrata ako su mu $A(-1, -12)$ i $B(6, 13)$ susjedni vrhovi?	0 1
21. Posuda je u obliku valjka i napunjena je uljem 90 %. Radijus i visina posude su jednakici i iznose 12 cm.	0 1 2 3
a) Koliki je volumen ulja u posudi? b) Ako ispraznimo posudu tako da ostane točno do pola puna, koliki je onda volumen ulja? c) Ako je volumen ulja u posudi $432\pi \text{ cm}^3$, koliki je opseg ispunjenosti posude?	

22. Odredite kvadrat zbroja rješenja jednadžbe $\frac{3x-1}{x^2-4} = -2$.	0 1 2
23. Opseg jednakokračnog trokuta jednak je 28 cm. a) Nadite duljinu krakova i duljinu osnovice ako se njihove duljine (u danom poretku) odnose kao $3 : 2$. b) Izračunajte površinu trokuta.	0 1 2 3
24. Popunite tablicu za funkciju $f(x) = -\frac{1}{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.	
x $-\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{4}$ 0 $\frac{\pi}{2}$ $f(x)$	0 1 2
25. U koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $f(x) = -x + \frac{1}{3}$ i na njemu označite točku s apscisom $x = -2$.	0 1 2
26. Zadana je jednadžba $3x - 7 = ax + 2a$. a) Odredite rješenje dane jednadžbe u ovisnosti o parametru a . b) Za koje je prirodne vrijednosti parametra a rješenje jednadžbe prirođan broj? c) Za koju vrijednost parametra a jednadžba nema rješenja?	0 1 2 3
27. Broj riba u ribnjaku možemo naći prema formuli: $f(x) = 400 \cdot 10^{0.02x}$ u kojoj je x vrijeme u mjesecima. Ribnjak je utemljen u siječnju 2009. a) Koliki je broj riba u njemu u travnju 2010? b) Kada će u ribnjaku biti 1 200 riba?	0 1 2
28. a) Koliko zajedničkih točaka imaju krivulje $16x^2 + 9y^2 = 144$ i $(x - 5)^2 + y^2 = 9$? b) Odredite jednadžbu pravca koji je okomit na pravac $x + 2y - 4 = 0$ i prolazi točkom sjecišta krivulja $16x^2 + 9y^2 = 144$ i $(x - 6)^2 + y^2 = 9$. c) Koliki je kut dobivenog pravca i osi ordinata?	0 1 2 3

3. Zadatci produženih odgovora

29. Zbroj dvaju brojeva je 10, a zbroj njihovih kvadrata 68.

a) Koji su to brojevi?

0

1

2

b) Pripadni sustav riješite grafički.

0

1

c) Napišite kvadratnu jednadžbu čija su rješenja brojevi dobiveni u zadatku a).

0

1

d) Za dobivena rješenja napišite jednadžbu pravca kroz točke (x, y) i (y, x) .

0

1

e) Za točke iz d) nadite udaljenost točaka i njihovo polovište.

0

1

f) Za dobivena rješenja s x označite manji, a s y veći od njih, te odredite vrijednost izraza $|2x - y| - |3x + y|$.

0

1

g) Za x i y iz f) zadatka odredite vrijednosti izraza $\log_x y$ i $\log_y x$.

0

1

30. Površina trokuta je 890 cm^2 , a omjer duljina stranica $a : b : c = 17 : 25 : 28$. Izračunajte duljine stranica trokuta i polumjer trokutu opisane kružnice.

VI. RJEŠENJA ZADATAKA ZA VJEŽBU I OGLEDNIH ISPITA

Brojevi i algebra	444
Zadatci višestrukog izbora	444
Zadatci kratkih odgovora	445
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	446
Osnovna razina	446
Viša razina	447
Funkcije	448
Zadatci višestrukog izbora	448
Zadatci kratkih odgovora	449
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	453
Osnovna razina	453
Viša razina	455
Jednadžbe i nejednadžbe	457
Zadatci višestrukog izbora	457
Zadatci kratkih odgovora	458
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	460
Osnovna razina	460
Viša razina	461
Geometrija	462
Zadatci višestrukog izbora	462
Zadatci kratkih odgovora	463
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	465
Osnovna razina	465
Viša razina	466
Modeliranje i zadatci produženih odgovora	467
Izbor zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja	469
Osnovna razina	469
Viša razina	470
Ogledni ispiti	470
Osnovna razina	470
Viša razina	473

•Brojevi i algebra •

Brojevi i algebra – rješenja zadataka višestrukog izbora

- | | | | |
|-------|-------|--------|--------|
| 1. B | 45. B | 89. C | 133. D |
| 2. A | 46. C | 90. C | 134. C |
| 3. C | 47. D | 91. C | 135. C |
| 4. A | 48. D | 92. B | 136. A |
| 5. A | 49. C | 93. C | 137. C |
| 6. D | 50. D | 94. D | 138. B |
| 7. B | 51. D | 95. C | 139. A |
| 8. B | 52. A | 96. B | 140. C |
| 9. C | 53. C | 97. D | 141. A |
| 10. B | 54. A | 98. B | |
| 11. B | 55. B | 99. B | |
| 12. D | 56. C | 100. B | |
| 13. D | 57. D | 101. C | |
| 14. B | 58. B | 102. B | |
| 15. B | 59. B | 103. A | |
| 16. B | 60. C | 104. D | |
| 17. A | 61. A | 105. B | |
| 18. D | 62. D | 106. C | |
| 19. D | 63. B | 107. C | |
| 20. A | 64. A | 108. A | |
| 21. A | 65. A | 109. C | |
| 22. D | 66. B | 110. C | |
| 23. B | 67. C | 111. D | |
| 24. B | 68. B | 112. D | |
| 25. D | 69. D | 113. A | |
| 26. C | 70. C | 114. B | |
| 27. C | 71. D | 115. C | |
| 28. C | 72. C | 116. A | |
| 29. D | 73. B | 117. B | |
| 30. B | 74. C | 118. C | |
| 31. A | 75. D | 119. B | |
| 32. C | 76. C | 120. A | |
| 33. D | 77. D | 121. C | |
| 34. C | 78. B | 122. B | |
| 35. D | 79. D | 123. C | |
| 36. B | 80. A | 124. D | |
| 37. B | 81. D | 125. A | |
| 38. A | 82. B | 126. D | |
| 39. B | 83. D | 127. B | |
| 40. C | 84. B | 128. C | |
| 41. B | 85. C | 129. B | |
| 42. A | 86. C | 130. D | |
| 43. B | 87. C | 131. C | |
| 44. A | 88. C | 132. A | |

Brojevi i algebra – rješenja zadataka kratkih odgovora

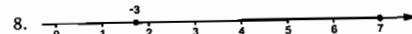
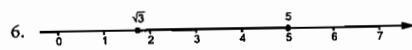
1. 1, 2, 3, 4

2. 1, 2, 3

3. 2 i 3

4. -2 i -1

5. $70 \text{ cm} \leq v \leq 120 \text{ cm}$



9. Da.

10. $x \in [-1, 2)$

11. $i + 1$

12. $\sqrt{13}$

13. 144

14. $\frac{3}{2}$

15. $\frac{9}{100}$

16. $\frac{1}{80}$

17. 10

18. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

19. $\frac{1}{2}$

20. -33554432 i

21. $12 - 14i$

22. $\sqrt{5}$

23. -8

24. a) 12.356; b) 12.3563; c) 12.35628

25. $32\sqrt{7} - 8\sqrt{5} \approx 66.7755$

26. 10^{-6}

27. 10

28. $2a^x b^y - 3a^x b^y + 1$

29. $6 \cdot 5^n$

30. $13 \cdot 3^n$

31. 8

32. $\sqrt{2}$

33. $\sqrt{\frac{11}{3}}$

34. $3\sqrt{3} - 4$

$$35. \begin{cases} x < 1; 2 - 2x \\ x = 1; 0 \\ x > 1; 2x - 2 \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} x < 1; \frac{x-1}{x-2} \\ x = 1; 0 \\ 1 < x < 2; \frac{x-1}{2-x} \\ x > 2; \frac{x-1}{x-2} \end{cases}$$

za $x = 2$ funkcija nije definirana

$$37. \begin{cases} -2x + 6; x < 3 \\ 0; x = 3 \\ 2x - 6; x > 3 \end{cases}$$

38. $2\sqrt{5} - 4$

39. 0

40. $-\frac{19}{12}$

41. $\frac{1}{3}$

42. xy

43. $-\frac{1}{x+y}$

44. 3^{b-a}

45. $\frac{a^3b^3}{8} - \frac{3}{10}a^3b^2 + \frac{6}{25}a^3b - \frac{8}{25}a^3$

$\frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{2}{5}a^2b + \frac{4}{25}a^2$

46. $x^3y^3 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{3}{4}xy - \frac{1}{8}$

$x^2y^2 - xy + \frac{1}{4}$

47. $1 - \frac{1}{x}$

48. $x - 1$

49. $1 - \frac{6}{x} + \frac{15}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^5} + \frac{1}{x^6}$

50. $x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}$

51. $b = \frac{2a}{a-3}$

52. $y = \frac{2x+1}{x}$

53. $\frac{1-y}{y+1}$

54. $\frac{27\pi}{25} \text{ cm}^2$

55. $\frac{189\pi}{4} \text{ cm}^3$

56. 44.44 %

57. 13.04347 %

58. $\frac{300}{7}\%$
59. $p = 9.76043\%$

60. $\frac{9}{20}$

61. $\frac{47}{80}$

62. $x = 75\%y$

63. $P = \frac{243}{2} \text{ cm}^2$

64. $o = 51.46618 \text{ cm}$

65. $o \approx 28.83516 \text{ cm}$

66. $o = 40.2073 \text{ cm}$

67.

Količina (kg)	25	100	50	47.4074
Cijena (kn)	135	540	270	256

68.

Količina benzina	7	105	21	50.75
Prijedjeni kilometri	100	1 500	300	725

69. $p_{\text{ek}} = \frac{p - p_0}{gh}$

70. $S = \frac{\rho l}{R}$

71.
250 g 0.25 kg

1 000 cm³ $1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

12 g/cm³ 0.012 kg/m³

12 min 5 s 725 s

2 h 15 min 135 min

72. $\operatorname{tg} 78^\circ 12' ; \frac{1}{2} \log_8 8 ; \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} ; \left(1 \cdot 10^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}$

73. 15 191.97 kn

74. 0.25 g/m³; 1.25 kg/m³; 7 g/cm³; 12 kg/cm³

75. $1 \cdot 10^{-6} \text{ h} \quad 2 \cdot 10^{-3} \text{ min} \quad \frac{7}{8} \text{ s}$

$\frac{1}{2} \min 2 \text{s}$

76. $4 \cdot 10^{-2} \text{ t} \quad 4 800 \text{ g} \quad 2 \text{ kg } 38 \text{ g} \quad 2 \cdot 10^2 \text{ dag } 3 \text{ g}$

77. Da, $o = 13 \text{ cm} = 130 \text{ mm}$

78. Ne, jer je prva duljina 0.2 cm, a ostale 6 i 4 cm, pa ne vrijedi nejednakost $4 + 0.2 > 6$.

79. $101^\circ 43'$

80. $33^\circ 39'$

81. $86^\circ 12'$

82. 0.09602 m

83. $\rho = 21.2206 \text{ g/cm}^3$

84. 0.133 m

85. m = 2.34 kg

Brojevi i algebra – rješenja zadataka izabralih iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, osnovna razina

- | | | |
|---|-------------------------|----------------------|
| 1. D | 14. A | 27. C |
| 2. A | 15. C | 28. C |
| 3. B | 16. D | 29. D |
| 4. C | 17. C | 30. B |
| 5. B | 18. -1 | 31. D |
| 6. C | 19. $\frac{5}{4}$ | 32. A |
| 7. B | | 33. B |
| 8. C | 20. $\frac{76}{5}$ | 34. B |
| 9. A | 21. $\frac{3}{4}$ | 35. D |
| 10. $\frac{1}{8}, \frac{4}{30}, \frac{16}{125}$ | 22. $\frac{3402}{3125}$ | 36. A |
| 11. na brojevnom pravcu sve točke lijevo od 2.5 | 23. D | 37. D |
| | 24. C | 38. D |
| 12. B | 25. C | 39. B |
| 13. C | 26. C | 40. A |
| | | 41. $4x^2 - 12x + 9$ |
| | | 42. $x^2 - 8x + 16$ |

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------|------------------|
| 43. $x^2 - x - 12$ | 58. B | 75. 20 dag |
| 44. D | 59. C | 76. 4.6; 1.76784 |
| 45. C | 60. B | 77. A |
| 46. B | 61. C | 78. C |
| 47. B | 62. D | 79. D |
| 48. B | 63. B | 80. D |
| 49. Nina najviše,
Ana najmanje. | 64. A | 81. B |
| | 65. C | 82. C |
| 50. 42.5 | 66. D | 83. C |
| 51. 175 kuna, 70 kuna | 67. $\frac{1}{5}$, 40 % | 84. A |
| 52. 1001.88 | | 85. C |
| 53. 320 | 68. 44 | 86. D |
| 54. 11.1. dobar(3) | 69. 97.9 kn | 87. C |
| 11.2. 53 | 70. 97.9 | 88. B |
| 55. 12.1. 10 | 71. 3.4675 g | 89. C |
| 12.2. 15 kuna | 72. 375 | 90. B |
| 56. 80 | 73. 1911.88, 134.3075 | |
| 57. D | 74. 19.7907, 62.15 | |

Brojevi i algebra – rješenja zadataka izabralih iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, viša razina

- | | | |
|---|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 1. B. | 23. B | 49. A |
| 2. C. | 24. C | 50. C |
| 3. Za $n = 9$, najveći je D.
Za $n > 9$, najveći je C. | 25. D | 51. D |
| | 26. A | 52. C |
| 4. D | 27. A | 53. $a = \frac{b \cdot v - p}{b + v}$ |
| 5. B | 28. D | 54. -1 |
| 6. A | 29. A | 55. $b = a \cos \varphi + c$ |
| 7. D | 30. D | 56. D |
| 8. C | 31. A | 57. A |
| 9. C | 32. $(3 + 2x)^2 = 9 + 12x + 4x^2$ | 58. C |
| 10. C | 33. 20 | 69. C |
| 11. $11 - 2i$ | 34. D | 60. A |
| 12. $a = 4$, $b = -\frac{3}{4}$ | 35. C | 61. D |
| 13. -1 | 36. C | 62. a) 1 288.48 b) 46 |
| 14. a) 28 561, b) $2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$ | 37. C | 63. 3.4675 g |
| | 38. B | |
| 15. a) $z = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$, b) 16 | 39. B | |
| | | 40. Najviše Nina, najmanje Ana. |
| 16. B | | 41. a) 7.847 % b) 3.66 % |
| 17. D | | 42. a) 11.5 g, b) 43.20875 g, c) 50 |
| 18. A | | 43. D |
| 19. $\frac{46}{3}$ | | 44. A |
| 20. C | | 45. C |
| 21. A | | 46. B |
| 22. B | | 47. B |
| | | 48. B |

•Funkcije•

Funkcije – rješenja zadataka višestrukog izbora

- | | | | |
|-----------|-------|--------|--------|
| 1. C | 41. D | 86. B | 131. A |
| 2. D | 42. B | 87. C | 132. B |
| 3. A | 43. C | 88. C | 133. A |
| 4. C | 44. A | 89. D | 134. A |
| 5. D | 45. B | 90. C | 135. A |
| 6. B | 46. A | 91. B | 136. B |
| 7. B | 47. B | 92. A | 137. B |
| 8. C | 48. C | 93. A | 138. C |
| 9. C | 49. B | 94. B | 139. C |
| 10. A | 50. B | 95. D | 140. D |
| 11. D | 51. D | 96. B | 141. C |
| 12. C | 52. C | 97. D | 142. C |
| 13. B | 53. A | 98. B | 143. C |
| 14. A | 54. B | 99. A | 144. B |
| 15. D | 55. C | 100. A | 145. D |
| 16. B | 56. C | 101. B | 146. C |
| 17. C | 57. C | 102. D | 147. A |
| 18. B | 58. B | 103. B | 148. C |
| 19. D | 59. A | 104. B | 149. B |
| 20. C | 60. C | 105. A | 150. C |
| 21. D | 61. C | 106. C | 151. A |
| 22. a). C | 62. C | 107. C | 152. D |
| 22. b). D | 63. B | 108. C | 153. C |
| 22. c). B | 64. A | 109. C | 154. C |
| 22. d). C | 65. B | 110. B | 155. D |
| 22. e). B | 66. C | 111. C | 156. B |
| 22. f). C | 67. B | 112. B | 157. C |
| 23. A | 68. A | 113. C | 158. A |
| 24. C | 69. B | 114. D | 159. B |
| 25. A | 70. C | 115. B | 160. A |
| 26. C | 71. C | 116. B | 161. B |
| 27. B | 72. A | 117. C | 162. D |
| 28. D | 73. C | 118. B | 163. A |
| 29. B | 74. D | 119. D | 164. D |
| 30. C | 75. A | 120. D | 165. A |
| 31. B | 76. A | 121. A | 166. B |
| 32. C | 77. C | 122. B | 167. D |
| 33. B | 78. D | 123. A | 168. A |
| 34. D | 79. B | 124. D | 169. B |
| 35. B | 80. A | 125. D | 170. B |
| 36. C | 81. C | 126. A | 171. B |
| 37. D | 82. B | 127. C | 172. C |
| 38. D | 83. A | 128. B | 173. B |
| 39. B | 84. A | 129. C | 174. D |
| 40. A | 85. D | 130. B | |

Funkcije – rješenja zadataka kratkih odgovora

1. 798

2.



$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}$



-2	-1	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

3.



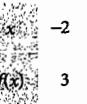
$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	-1	$-\frac{4}{3}$	$-1 - \frac{\sqrt{2}}{6}$

17. $-2 - 4i$
 18. a) $2x^3 - x^2 + 2x - 2$
 b) $2x^3 - x^2$
 c) $2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1$
 d) $2x^3 + x + 2$ i ostatak 1
 e) $2x^3 - 7x^2 + 9x - 5$
 f) $2x^3 - x^2 + x - 2$

4. $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{5}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f\left(\frac{5}{2}\right) = 1.9990, f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}.$

5. $f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, f(\sqrt{3}) = 5, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}, f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{33}{4}.$

6.



-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	3	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$

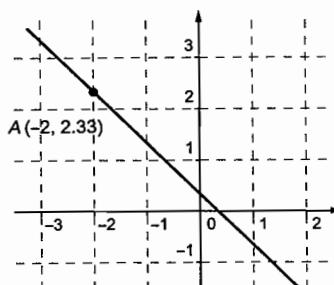
19. $2^{x-1} - 2$
 20. 5
 21. $\log_3(1 - 3^x) - x$
 22. $\langle -1, +\infty \rangle$
 23. -5
 24. 1
 25. $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x}}$

26. $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 5}$

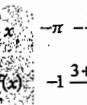
27. $f^{-1}(x) = 2^{x^2} + 1$

28. $f^{-1}(x) = (x^2 + 1) \pm \sqrt{x^2(x^2 + 3)}$

29.



7.



x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0
$f(x)$	$-1 - \frac{3+\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}-1$	nije def.	$-1 - \sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}+3}{3} - 1$		

8. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

9. $D_f = \langle -\infty, -5 \rangle \cup [3, +\infty)$

10. $D_f = \left\langle -\frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$

11. $D_f = \left\langle \frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty \right\rangle \setminus \{2\}$

12. $\frac{1}{2}$

13. 1

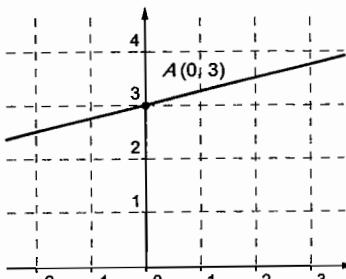
14. $f(g) = \log_3 \frac{8}{9}$

15. Npr.



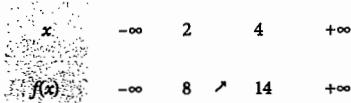
x	2	1	4	8
$f(x)$	-1	0	-2	-3

30.



16.

31. $f(x)$ stogo raste na \mathbb{R}



32. $f(x)$ stogo raste na \mathbb{R}



33. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

34. \mathbb{R}

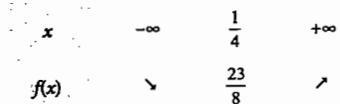
35. $[-2, +\infty)$

36. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

37.



38.



39. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

40. $f(x) = -2x^2 - 5x - 2$

41. $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{11}{6}$

42. $f(x) = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{2}$

43. $f(x) = 2x^2 - x + 2$

44. $f(x) = -2x^2 + x + 3$

45. $f(x) = x^2 + 4x - 4$

46. $f(x) = \frac{1}{6}x^2 - x + 5$

47. $x \in \{1, 2\}$.

48. $x \in \{2, 4\}$.

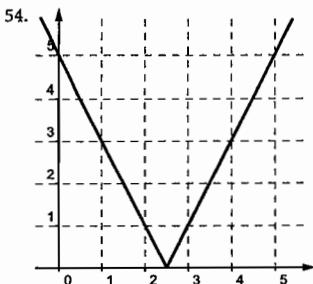
49. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

50. $\mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$

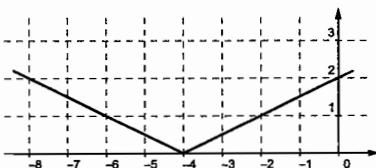
51. $(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$

52. $(-\infty, 0) \cup [3/2, +\infty)$

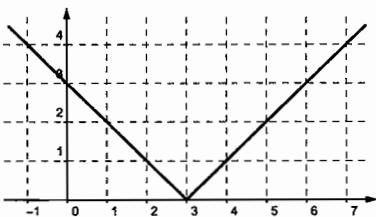
53. $(5, +\infty)$



55.



56.



57. $\text{Im } f = [0, +\infty)$, $D_f = \mathbb{R}$

58. $D_f = \mathbb{R}$, $K_f = [0, +\infty)$

59. a) intervali rasta $(-\infty, -1)$ i

$(1, +\infty)$ intervali pada $(-1, 1)$

b) $(0, 4)$

c) $x = 2$

d) lokalni maksimum $(-1, 5)$, lokalni maksimum $(1, 3)$

60. a) intervali rasta $(0, 1)$, intervali pada $(-\infty, 1)$ i

$(1, +\infty)$

b) $(0, 3)$

c) $x = 2.5$

d) lokalni maksimum $(1.5, 4)$, lokalni maksimum $(0, 3)$

61. $x = -1$

62. $x = \frac{1}{2}$

63. a) $f(1) = -\frac{1}{8}$, $f(-1) = -\frac{1}{8}$, $f(0) = -\frac{1}{9}$, $f(4) = \frac{1}{7}$

b) nema

c) $\left(0, -\frac{1}{9}\right)$

64. a) $f(3) = -\frac{1}{5}$, $f(-3) = -\frac{1}{5}$, $f(1) = \frac{1}{3}$, $f(-1) = \frac{1}{3}$

b) nema

c) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

65.

x	0	-2	1	-1
$f(x)$	1	4	$\frac{1}{2}$	2

66.

x	0	-2	-1	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	3

67. a) R

b) $(0, +\infty)$

c) padajuća

d) sjecišta s osi x nema, sjecište s osi y $(0, 1)$

68. a) R

b) $(0, +\infty)$

c) rastuća

d) sjecišta s osi x nema, sjecište s osi y $(0, 1/3)$

69. $f(x) = 3^x$

70. $f(x) = 5^x$

71. a) 10 000 b) 398107 c) 631

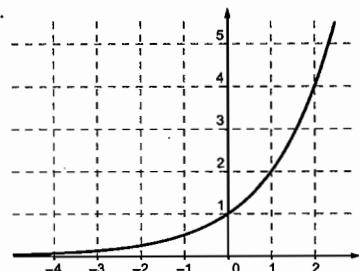
72. -3

73. 1

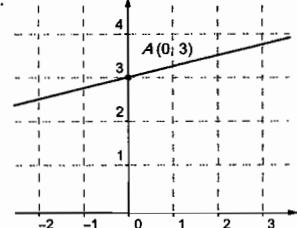
74. 1 500

75. $2\sqrt{5}$

76.

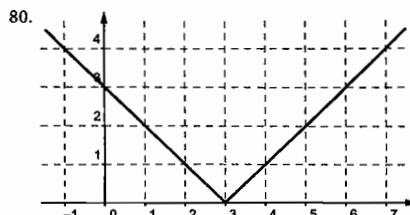


77.

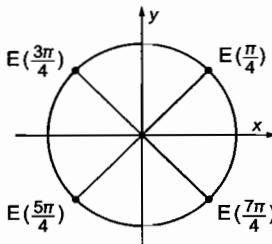


78. $\frac{\log_2 \frac{16}{3} \cdot \log_2 3}{1 - (\log_2 3)^2}$

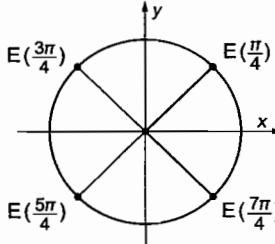
79. $\log_{\frac{5}{3}} 2$



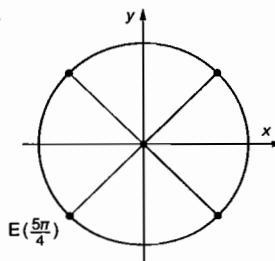
81.



82.



83.



84.

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
----------	---------------	---------------	----------------------------

 $\frac{5\pi}{4}$

-

-

+

 175°

+

-

-

 325°

-

+

-

 $\frac{7\pi}{4}$

-

+

-

85. drugi kvadrant

86. drugi kvadrant

87.

α	-560°	535°	275°
$\operatorname{tg} \alpha$	-	-	-

88.

α	1350°	735°	-1053°
$\operatorname{tg} \alpha$	nije definirano	+	+

89.

$\sin \alpha$	$\frac{4\sqrt{3}}{7}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.6
$\cos \alpha$	$\frac{1}{7}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{5}$

90.

$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{51}}{10}$	0.3
$\cos \alpha$	0.7	$\frac{\sqrt{91}}{10}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{51}}{7}$	$\frac{3\sqrt{91}}{91}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{7\sqrt{51}}{51}$	$\frac{\sqrt{91}}{3}$

91. $\frac{-\sin^2 10^\circ}{\sin^2 10^\circ + 1}$

92. $\frac{\sin^2 45^\circ}{\cos^2 45^\circ} = 1$

93. 0

94. $3 - 2\sqrt{2}$

95. 1

96. $\cos 3^\circ$

97. $-\sin 9^\circ$

98. 1

99. 1

100. $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

101. 0

102. $\frac{3\sqrt{91} - 25\sqrt{3}}{66}$

103. $\frac{-9\sqrt{15} - 32\sqrt{5}}{55}$

104. $\frac{1+\sqrt{2}}{4}$

105. $\frac{1}{4}$

106. a) $x_1 = -\frac{3\pi}{4}$, $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$, $x_4 = \frac{3\pi}{4}$

b) -1

c) 1

d) π

e) intervali rasta $(-\pi, -\pi/2)$, $(0, \pi/2)$ intervali pada $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi)$

107. a) $x_1 = -\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = \frac{\pi}{2}$, $x_5 = \pi$

b) -1

c) 1

d) π

e) intervali rasta $(-\pi, -3\pi/4)$, $(-\pi/4, \pi/4)$, $(3\pi/4, \pi)$ intervali pada $(-3\pi/4, \pi/4)$, $(\pi/4, 3\pi/4)$

108. a) $x = 0$

b) -2

c) 2

d) na zadanom intervalu funkcija nije periodična

e) intervali rasta $(-\pi, \pi)$, intervala pada nema

109. a) $x = 0$

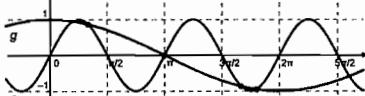
b) -2

c) 2

d) funkcija nije periodična na zadanom intervalu

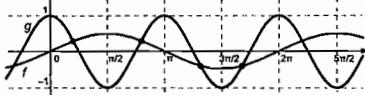
e) strogo pada na intervalu $(-\pi, \pi)$,

110.



Broj rješenja: četiri

111.



Broj rješenja: četiri

112. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$

113. $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

114. $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

115. 16, 19, 22

116. $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

117.

n	2	7	8	3
a_n	2	14	$\frac{8}{7}$	6

118.

n	3	4	2	1
a_n^1	27	27	3	3

119.

d	a_1	a_3	a_5	a_8
-3	14	8	2	-7

120.

d	a_1	a_3	a_5	a_8
6	1	7	13	22

121. 59.5 metara

122. $q = 2, a_7 = 768$

123. $q = 5, a_{11} = 68\ 359\ 375$

124. $q = \frac{753}{235}, a_1 = 20.8569$

125. $-\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{(1+\cos \alpha) \cdot (1-\sin \alpha)}$

126. $\frac{40}{41}$

127. $\frac{-2}{(x-5)^2}$

128. $\frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$

129. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

130. $\frac{11}{4}$

131. $2 \cdot (x-3) \cdot \cos(x-3)^2$

132. $-\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

133. $y = \frac{1}{8}x + \frac{33}{4}$

134. $y = \frac{1}{4}x + 1$

135. 0

136. $8\sin 2x$

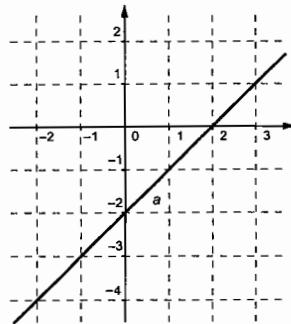
137. rastuća

138. minimum $\left(\frac{3}{4}, \frac{31}{8}\right)$

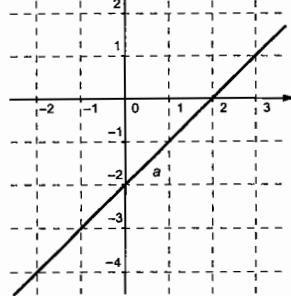
139. $\left(\frac{5}{3}, -\frac{142}{27}\right)$

Funkcije – rješenja izabranih zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, osnovna razina

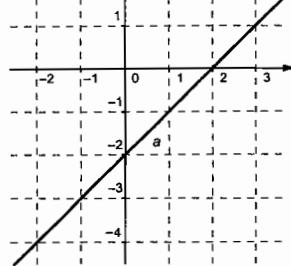
1. B



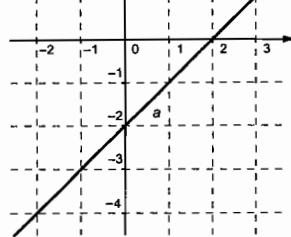
2. A



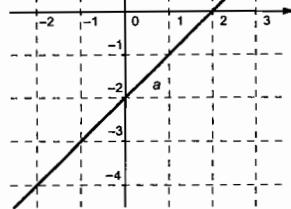
3. C



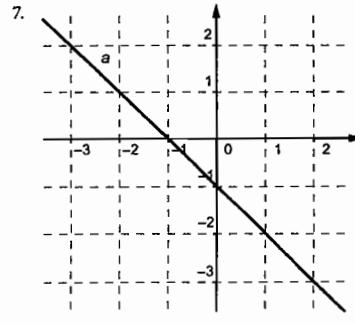
4. D



5. A

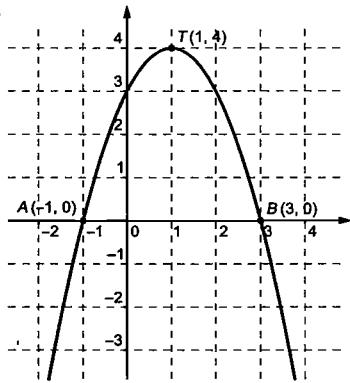


6.

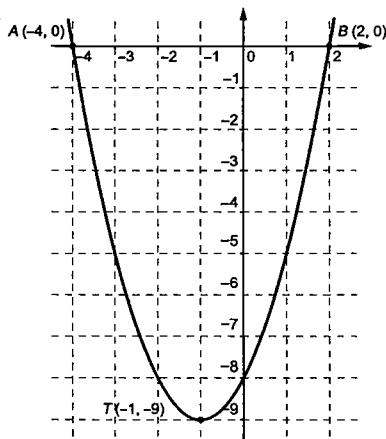


8. B
9. A
10. A
11. D
12. A
13. B
14. D
15. A
16. D
17. C

18.



19.

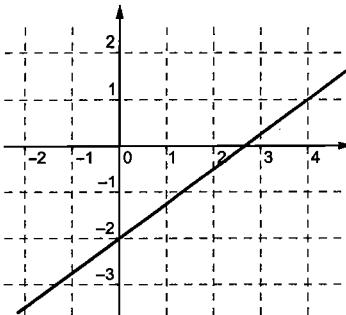


Odgovor: Tjeme: $T(-1, -9)$

Sjecište s osi x : $A(-4, 0)$ i $B(2, 0)$

Sjecište s osi y : $C(0, -8)$

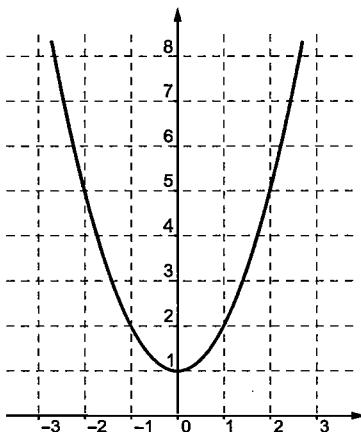
20. a)



b) $\frac{10}{3}$

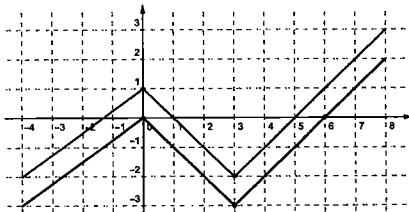
c) $y = -\frac{3}{4}x + 1$

21.



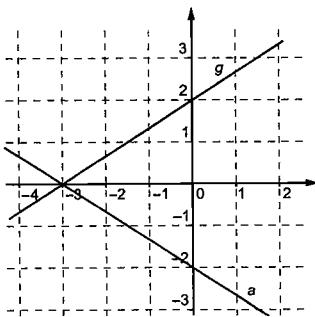
Funkcije – rješenja izabranih zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, viša razina

1. D
2. C
3. A
4. D
5. B
6. D
7. a) $D_f = \mathbb{R}/\{7\}$, b) $D_h = (4, +\infty)/\{7\}$, c) $D_g = (4, +\infty)$
8. $f(-2) > g(-2)$
9. $(-3, -2) \cup (0, 3)$
10. a) 21° , b) 5, c) 5°
- 11.



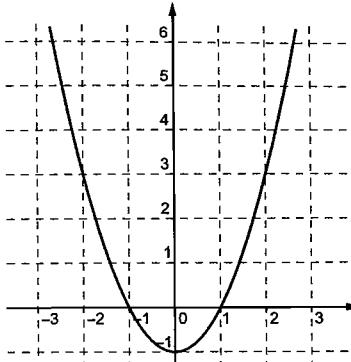
12. a) 20 000, b) 5, c) $t = \frac{K - 20000}{80000 - K}$

13.

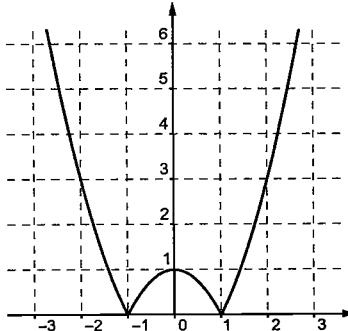


14. A
15. B
16. A
17. B
18. C
19. D
20. C
21. a) 15 m b) 50.3968 m c) 12.6 m
22. $x_2 = 7$
23. $(0, -4.5)$ b) $a = -9/14$
24. npr. $f(x) = x^2 - 1$
25. D

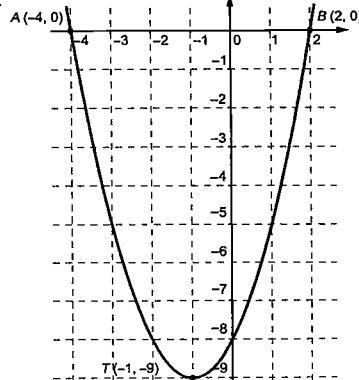
26. a)



b)



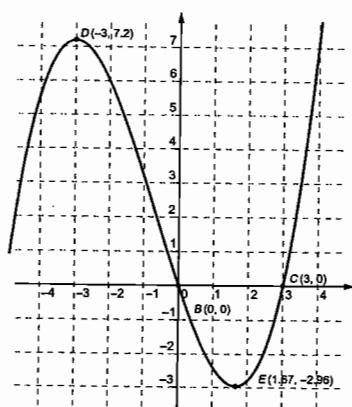
27.



Tjeme $(-1, -9)$, sjecište s osi y $(0, 8)$;
sjecište s osi x $(-4, 0)$ $(2, 0)$

28. a) A(0, 0) B(3, 0) C(-5, 0), b) $f'(x) = \frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5}x - 3$
 c) $(-\infty, -3) \cup (5/3, +\infty)$, d) $\left(-3, \frac{36}{5}\right) \left(\frac{5}{3}, -\frac{74}{25}\right)$

e)



29. A

30. C

31. C

32. D

33. A

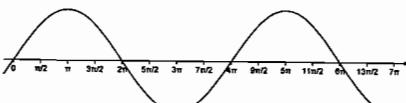
34. A

35. $\frac{5\pi}{6}$

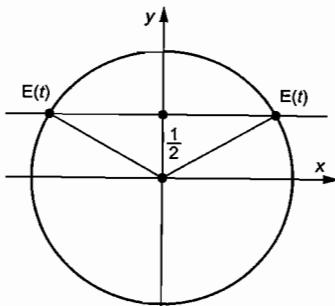
36. 5 rješenja

37. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

38. a) $A = 3, T = 4\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$
 b)



c)



d) 0.96, e) $\frac{a+1}{a-1}$

39. a) 4, b) 12

40. a) 1 868, b) 48 950

41. a) 62 kn, b) $C(n) = 86 - 3n$, c) 18, d) 28

42. a) 7 975, b) 1.2

•Jednadžbe i nejednadžbe•

Jednadžbe i nejednadžbe – rješenja zadataka višestrukog izbora

1. A	44. B	87. C	130. C	173. D
2. B	45. D	88. B	131. B	174. B
3. D	46. A	89. A	132. D	175. A
4. B	47. C	90. D	133. A	176. B
5. D	48. C	91. A	134. C	177. C
6. B	49. A	92. D	135. A	178. A
7. D	50. B	93. C	136. D	179. B
8. A	51. A	94. D	137. C	180. A
9. D	52. C	95. D	138. D	181. C
10. D	53. C	96. B	139. B	182. B
11. C	54. D	97. C	140. B	183. D
12. A	55. A	98. A	141. C	184. A
13. B	56. B	99. A	142. C	
14. D	57. B	100. D	143. D	
15. A	58. C	101. C	144. B	
16. A	59. A	102. D	145. B	
17. A	60. C	103. A	146. C	
18. D	61. B	104. D	147. B	
19. B	62. D	105. B	148. D	
20. B	63. D	106. A	149. A	
21. A	64. A	107. D	150. C	
22. C	65. D	108. B	151. D	
23. B	66. C	109. D	152. B	
24. B	67. B	110. B	153. D	
25. D	68. C	111. A	154. A	
26. C	69. B	112. A	155. C	
27. A	70. C	113. A	156. D	
28. C	71. D	114. B	157. D	
29. B	72. B	115. D	158. B	
30. D	73. C	116. B	159. A	
31. B	74. D	117. C	160. C	
32. B	75. A	118. B	161. D	
33. D	76. B	119. D	162. B	
34. B	77. C	120. B	163. B	
35. B	78. D	121. A	164. A	
36. C	79. C	122. C	165. A	
37. D	80. A	123. D	166. C	
38. B	81. D	124. B	167. D	
39. B	82. C	125. C	168. B	
40. A	83. A	126. A	169. B	
41. C	84. C	127. A	170. A	
42. A	85. B	128. B	171. D	
43. D	86. C	129. A	172. C	

Jednadžbe i nejednadžbe – rješenja zadataka kratkih odgovora

1. $x^2 = 1$

2. $x^2 = 16$

3. $x = -7$

4. $x = 3$

5. $x = \frac{16}{3}$

6. $x = \frac{-6}{13}$

7. $x = -63$

8. $x = -5$

9. a) $x = \frac{3}{a-5}$

b) za $a \in \{6, 8\}$ c) za $a = 5$

10. a) $x = \frac{a+1}{2a-3}$

b) za $a \in \{2, 4\}$

c) za $x = \frac{-3}{2}$

d) za $a \in \{-1, 1, 2, 4\}$

11. $x > \frac{1}{10}$ ili $x \in \left(\frac{1}{10}, +\infty\right)$

12. $x > -\frac{18}{19}$ ili $x \in \left(-\frac{18}{19}, +\infty\right)$

13. $x^2 = 36$

14. $x \geq \frac{1}{7}$ ili $x \in \left[\frac{1}{7}, +\infty\right)$

15. a) beskonačno mnogo

b) beskonačno mnogo

c) nema rješenja

d) nema rješenja

16. a) nijedno rješenje

b) beskonačno mnogo

c) nijedno rješenje

d) beskonačno mnogo

17. $x < -\frac{36}{53}$

18. $x > -\frac{5}{2}$

19. $|x_1| + |x_2| = 2$

20. $\left(-\frac{1}{12}, 0\right)$

21. $\left(0, \frac{7}{2}\right)$

22. $\left(-\infty, \frac{13}{8}\right)$

23. $k = -\frac{2}{3}$

24. $k < -\frac{1}{12}$

25. $k = -14$

26. $4x^2 + 5x - 6 = 0$

27. $4x^2 - 16x + 41 = 0$

28. $\frac{9+4\sqrt{2}}{2}$

29. a) $x_1 + x_2 = \frac{5}{3}$

b) $x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{3}$

c) $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 3$

30. a) $x_1 + x_2 = 7$

b) $x_1 \cdot x_2 = 10$

c) $(2x_1 - 1)(2x_2 - 1) = 27$

31. $x_{1,2} = 1 \pm 2i$

32. $x_1 = -1; x_2 = -19$

33. $x \in [-2, 2]$

34. $x \in [-2, 2]$

35. $x_{1,2} = \pm 1; x_{3,4} = \pm 3$

36. $x_{1,2} = \pm \sqrt{5}; x_{3,4} = \pm 2i$

37. $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

38. $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$

39. Nejednadžba nema rješenja.

40. $x \in (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

41. 21 i 23

42. a) $x_1 = 3; x_2 = \frac{1}{3}$

b) $x \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$

c) $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [3, +\infty)$

43. a) $x_1 = \frac{-3}{2}; x_2 = -5$

b) $\left(-5, \frac{-3}{2}\right)$

c) $x \in (-\infty, -5] \cup \left[-\frac{3}{5}, +\infty\right)$

44. $x_1 = -18; x_2 = 22$

45. $|x_1| + |x_2| = 3$

46. Nema rješenja.

47. $|x_1| + |x_2| = 4\sqrt{10}$

48. $6x^2 - 17x - 3 = 0$

49. $9x^2 + 12x + 13 = 0$

50. $x^2 = \frac{25}{9}$

51. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty)$

52. $-4 + \sqrt{7}$

53. $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$

54. 0

55. $x = -\frac{3}{16}$

56. Jednadžba nema rješenja

57. $x^2 = 4$

58. $x = \frac{1}{2}$

59. $x^2 = \frac{9}{49}$

60. $x = \frac{11}{4}$

61. $x^2 = 121$

62. $x^2 = \frac{1}{25}$

63. $x < 2$ ili $x \in (-\infty, 2)$

64. $x = \frac{1}{2}$

65. $x = 2$

66. $(-\infty, \log_{11} 7)$

67. $x > \frac{9}{4}$

68. $\left(\log_{\frac{1}{2}} 2, +\infty\right)$

69. $x = 2$

70. $x^2 = 3^{-10}$

71. $x^{-1} = \frac{1}{2}$

72. 0

73. $x = 5$

74. $t = \log_2 30 \approx 1.74787$

75. $x^2 = 8^6 = 2^{18}$

76. $x_1 = \frac{1}{6}(5 - \sqrt{145}); \quad x_2 = \frac{1}{6}(5 + \sqrt{145})$

77. Jednadžba nema rješenja

78. $(\log_5 8, +\infty)$

79. $x^{-1} = \frac{25}{3}$

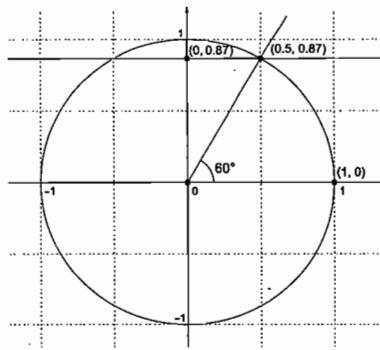
80. $x^{-1} = \frac{1}{5}$

81. $x = 6$

82. $x_1 = 4; x_2 = -25$

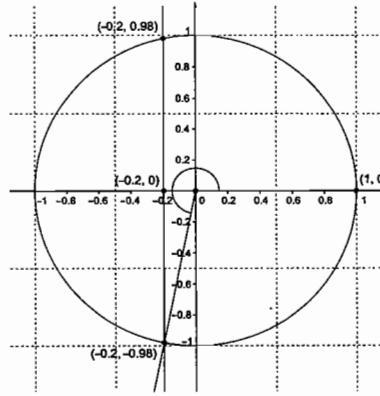
83. $\log_5 3$

84. Jedino rješenje: $x = \frac{\pi}{6}$



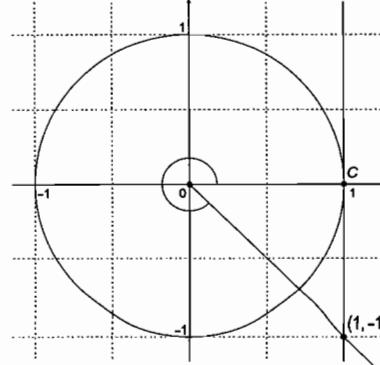
85. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

86. Jedino rješenje je $x = 258^\circ 27' 47''$



87. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

88. Jedino rješenje je $x = \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$



89. $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

90. $x = k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

91. $x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{24} + k \cdot \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

92. $x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{5}; x_2 = \frac{7\pi}{30} + k \cdot \frac{2\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}$

93. $x = -18^\circ 26' 6'' + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

94. $x_1 = \frac{\pi}{30}; x_2 = \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi}{5};$
 $x_3 = \frac{\pi}{30} + \frac{4\pi}{5}; x_4 = \frac{\pi}{30} + \frac{6\pi}{5};$
 $x_5 = \frac{\pi}{30} + \frac{8\pi}{5}; x_6 = \frac{\pi}{6};$
 $x_7 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{5}; x_8 = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{5};$
 $x_9 = \frac{\pi}{6} + \frac{6\pi}{5}; x_{10} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{5}.$

95. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z},$

$x_2 = -21^\circ 48' 5'' + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

96. $x_1 = \frac{-\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z},$

$x_2 = \frac{7\pi}{18} + k \cdot \frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}.$

97. $x_1 = k\pi; k \in \mathbb{Z}, x_2 = \frac{-\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

98. $x_{1,2} = \pm 35^\circ 15' 52'' + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

99. $x = 33^\circ 41' 24'' + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

100. $x_{1,2} = \pm 63^\circ 26' 6'', x_{3,4} = \pm \frac{\pi}{4}.$

101. $x = \frac{\pi}{30} + k \cdot \frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$

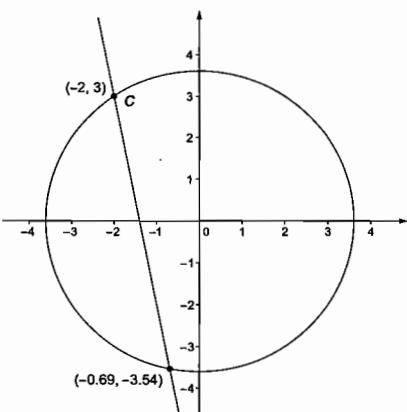
102. Jednadžba nema rješenja.

103. $(-2, -3)$

104. $(4, -4)$

105. $(-3, 5)$

106. $\left(-\frac{9}{13}, -\frac{46}{13}\right); (-2, 3).$



Jednadžbe i nejednadžbe – rješenja izabralih zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, osnovna razina

1. C

2. A

3. A

4. B

5. $\frac{1}{2}$

6. 4

7. $x = 4$

8. $x > -\frac{4}{3}$

9. $x = -\frac{4}{3} \quad x < -\frac{9}{4}$

10. $x = 12 \quad x < -20$

11. C

12. C

13. $x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

14. $x_1 = 2 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

15. $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{5}$

16. $x = \frac{5}{4}$

17. $\frac{22}{5}$

18. $\sqrt{3}-1 \quad \sqrt{3}+1$

19. $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

20. A

21. C

22. B

23. B

24. C

25. C

26. $x=2 \quad y=\frac{7}{2}$

27. $x=\frac{60}{13} \quad y=\frac{4}{13}$

28. a) $x-y=5$

b) $2x-2y+1=11$

29. $a=9$

30. $x=-6$

31. $y=\frac{1}{5}$

Jednadžbe i nejednadžbe – rješenja izabralih zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, viša razina

1. A
2. D
3. B
4. $x = 4$
5. $-\frac{7}{4}$
6. $x = -\frac{8}{5}$
7. B
8. C
9. C
10. D
11. A
12. D
13. $x = 4$
14. $t_1 = -1 \quad t_2 = 2$

15. $\langle -2, +\infty \rangle$

16. $[3, 1]$

17. $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

18. a) $x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = 2$, b) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

19. a) $x_1 = 0 \quad x_2 = 2$
b) $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

20. $k = 3$

21. a) -1 , b) $x_1 = -2 \quad x_2 = 3$

22. a) $\langle -\infty, -4 \rangle \cup [-3, +\infty)$ b) $y = -5x$

23. $(3, 5)$

24. $\langle -\infty, -1 \rangle \cup (5, +\infty)$

25. jednadžba nema realnih rješenja

26. C

27. D

28. A

29. $x = \frac{1}{2}$

30. $b = 2$

31. $\langle 3, 5 \rangle$

32. a) $x = \frac{28}{9}$, b) $x \leq -\frac{11}{10}$

33. C

34. A

35. $x_1 = 0 \quad x_2 = 2\pi$

36. $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

37. a) $\sin \alpha$, b) $\frac{2\pi}{3}$

38. C

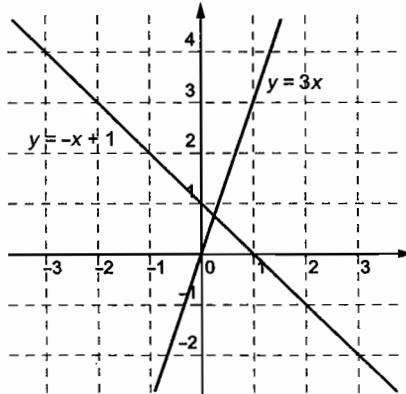
39. B

40. A

41. A

42. $x = \frac{60}{13} \quad y = \frac{4}{13}$

43. a)



b) jedno rješenje

44. 6 crvenih i 11 bijelih

45. $a = 138 \text{ cm}, b = 32 \text{ cm}, c = 141.66 \text{ cm}$

46. $y = -x - 14$

•Geometrija•

Geometrija – rješenja zadataka višestrukog izbora

1. D	46. B	91. B	136. D
2. C	47. A	92. D	137. C
3. D	48. C	93. A	138. D
4. C	49. B	94. B	139. C
5. A	50. D	95. C	140. D
6. C	51. B	96. B	141. C
7. B	52. C	97. A	142. B
8. A	53. D	98. B	143. C
9. C	54. A	99. C	144. A
10. C	55. C	100. B	145. D
11. C	56. B	101. C	146. A
12. B	57. C	102. D	147. C
13. D	58. B	103. B	148. B
14. C	59. A	104. A	149. B
15. A	60. B	105. C	150. C
16. D	61. B	106. D	151. D
17. B	62. C	107. C	152. C
18. C	63. C	108. A	153. D
19. B	64. A	109. B	154. C
20. A	65. B	110. A	155. A
21. B	66. C	111. C	156. B
22. B	67. D	112. D	157. C
23. B	68. A	113. D	158. B
24. D	69. D	114. A	159. C
25. A	70. C	115. A	160. B
26. A	71. C	116. D	161. C
27. A	72. A	117. C	162. A
28. A	73. B	118. D	163. C
29. A	74. C	119. B	164. A
30. D	75. D	120. A	165. A
31. C	76. A	121. B	166. C
32. C	77. A	122. D	167. B
33. B	78. B	123. A	168. C
34. C	79. C	124. B	169. A
35. B	80. D	125. C	170. B
36. C	81. D	126. C	171. A
37. A	82. B	127. D	172. B
38. B	83. A	128. B	173. C
39. B	84. B	129. B	174. B
40. D	85. D	130. C	175. A
41. C	86. D	131. A	176. A
42. B	87. C	132. B	177. A
43. C	88. A	133. C	178. B
44. A	89. B	134. B	179. C
45. D	90. C	135. A	180. D

Geometrija – rješenja zadataka kratkih odgovora

1. $P = 270 \text{ cm}^2$
2. $P = 2\ 100 \text{ cm}^2$
3. $n = 12$
4. $n = 17$
5. $O = 7(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}$
6. $O = 18(3 + \sqrt{3}) \text{ cm}$
7. $P = 288(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2, b = 48 \text{ cm}$
8. $P = 84.5(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2, b = 26 \text{ cm}$
9. $\frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$
10. $\frac{11\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$
11. $|A'B'| = 10\sqrt{14} \text{ cm}$ ako su A i B s iste strane s obzirom na ravninu, te $|A'B'| = 0$ ako su A i B sa suprotne strane ravnine
 $|AA'| + |BB'| = |AB| > |A'B'| = 0$
12. $|A'B'| = 3\sqrt{5} \text{ cm}$
13. $|BC| = \sqrt{937} \approx 30.61 \text{ cm}$
14. $|BC| = 25\sqrt{13} \approx 90.14 \text{ cm}$
15. Zadatak ima dva rješenja:
 $|AB| = 5\sqrt{10} \text{ cm}$ i $|AB| = 32.65 \text{ cm}$
16. Zadatak ima dva rješenja:
 $|AB| = 9\sqrt{2} \text{ cm}$ i $|AB| = 41.98 \text{ cm}$
17. $|AB| = 68 \text{ cm}$
18. $|AB| = 34 \text{ cm}$
19. $V = 729 \text{ cm}^3$
20. $V = 1\ 331 \text{ cm}^3$
21. $c = 20 \text{ cm}$
22. $c = 6 \text{ cm}$
23. $O = 211.98 \text{ cm}^2$
24. $O = 583.89 \text{ cm}^2$
25. $V = 9\ 261 \text{ cm}^3$
26. $V = 3\ 375 \text{ cm}^3$
27. $P = 1\ 540.08 \text{ cm}^2$
28. $P = 362.04 \text{ cm}^2$
29. $V = 49.03 \text{ cm}^3$
30. $V = 267.66 \text{ cm}^3$
31. $R = 18 \text{ cm}$
32. $R = 27 \text{ cm}$
33. $\frac{a}{V} = \frac{1}{25} \text{ cm}^{-2}$
34. $\frac{a}{V} = \frac{\sqrt{3}}{49} \text{ cm}^{-2}$
35. $O = 374.64 \text{ cm}^2$
36. $O = 71.79 \text{ cm}^2$
37. $V = 11.3 \text{ cm}^3$
38. $V = 1\ 687.5 \text{ cm}^3$
39. $P = 104.1 \text{ cm}^2$
40. $P = 122.8 \text{ cm}^2$
41. $v = 14.4 \text{ cm}$
42. $v = 41.01 \text{ cm}$
43. $O = 420\pi \text{ cm}^2$
44. $O = 400\pi \text{ cm}^2$
45. $O = 1\ 911.43 \text{ cm}^2$
46. $O = 994.86 \text{ cm}^2$
47. $R = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ cm}$
48. $R = 3.88 \text{ cm}$
49. $b = 8 \text{ cm}$
50. $b = 12\sqrt{15} \approx 46.48 \text{ cm}$
51. $\alpha = 40^\circ 49' 56''$
52. $\alpha = 20^\circ 29' 14''$
53. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$
54. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$
55. $\beta = 17^\circ 27' 27''$
56. $\alpha = 76^\circ 51' 48''$
57. $d = 9.85 \text{ cm}$
58. $d = 22.3 \text{ cm}$
59. $O = 28.73 \text{ cm}$
60. $O = 44.73 \text{ cm}$
61. $P = 63.32 \text{ cm}^2$
62. $P = 37.95 \text{ cm}^2$
63. $P = 55.71 \text{ cm}^2$
64. $P = 32.42 \text{ cm}^2$
65. $\alpha = 44^\circ 14' 27''$
66. $\alpha = 42^\circ 50' 37''$
67. $e = 15.51 \text{ cm}$
68. $e = 26.18 \text{ cm}$
69. $\alpha = 40^\circ 19' 3''$
70. $\alpha = 39^\circ 50' 11''$
71. $\alpha = 48^\circ 34' 58''$
72. $\alpha = 55^\circ 51' 52''$
73. $P = 301 \text{ cm}^2$
74. $P = 8\ 988 \text{ cm}^2$
75. $P = 42.82 \text{ cm}^2$
76. $P = 1\ 433.26 \text{ cm}^2$
77. $d = 18.19 \text{ cm}$
78. $d = 7.06 \text{ cm}$
79. $O = 23.23 \text{ cm}$
80. $O = 20.03 \text{ cm}$
81. $\sqrt{65}, \sqrt{37}, 2\sqrt{17}$
82. $\sqrt{85}, 2\sqrt{26}, \sqrt{265}$

83. $\sqrt{52}, \sqrt{10}, \sqrt{34}$
84. Ne
85. A (-3, -8)
86. B (1, -1)
87. $O = 4\sqrt{65}$ cm
88. $O = 4\sqrt{37}$ cm
89. $C_1(7, 0); C_2(-17, 0)$
90. $C_1(0, -3); C_2(0, 13)$
91. $P = 8$ kvadratnih jedinica
92. $P = 6$ kvadratnih jedinica
93. T (1, 0)
94. T (0, 2)
95. D (-3, 5)
96. D (10, 0)
97. Ne
98. Da
99. $|\vec{v}| = 5$
100. $|\vec{v}| = \sqrt{41}$
101. $4\vec{i} + 8\vec{j}$
102. $-14\vec{i} + 7\vec{j}$
103. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{2}$
104. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$
105. D (-5, -3)
106. C (0, -2)
107. 4
108. $4\sqrt{13}$
109. $\alpha = 49^\circ 23' 55''$
110. $\alpha = 105^\circ 15' 18''$
111. $\lambda = \frac{3}{4}$
112. $\lambda = -2$
113. $7x + 2y - 3 = 0$
114. $2x - 3y - 11 = 0$
115. $k = -\frac{3}{2}$
116. $k = 6$
117. $\varphi = 45^\circ$
118. $\varphi = 78^\circ 41' 24''$
119. Pravci se sijeku, ali nisu okomiti
120. Pravci su okomiti i sijeku se
121. $d(T, p) = 3.9$
122. $d(T, p) = 4.8$
123. $P = 4.8$ kvadratnih jedinica
124. $P = 4$ kvadratnih jedinica
125. $S(4, 2)$
126. $S(34, 20)$
127. $2x - 3y + 10 = 0$
128. $2x + y - 7 = 0$
129. $d = 3\sqrt{5}$
130. $d = 2\sqrt{10}$
131. $x - 3y + 8 = 0$
132. $3x + 2y - 14 = 0$
133. Jednu
134. Dvije
135. $d = 10$
136. $d = 4$
137. $x + y - 1 = 0$
138. $3x + 4y + 25 = 0$
139. $t_1: y = -1; t_2: x = 7$
140. $t_1: 4x - 3y + 2 = 0$
 $t_2: 3x + 4y - 36 = 0$
141. $4x^2 + 13y^2 = 52$
142. $16x^2 + 41y^2 = 656$
143. $2a = 4$
144. $2a = 6$
145. $d = 9.55$
146. $d = 2.98$
147. $t_1: y = 3x + 2.65$
 $t_2: y = 3x - 22.65$
148. $t_1: y = -3x - 1.68$
 $t_2: y = -3x - 14.32$
149. $4x + 6y - 25 = 0$
150. $2x - 3y - 50 = 0$
151. $S(12, 12)$
152. $S(16, -16)$

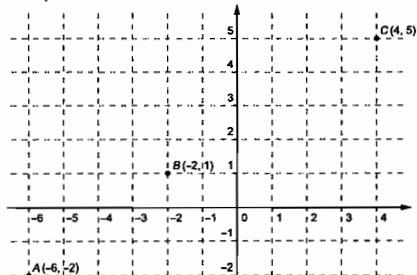
Geometrija – rješenja izabranih zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, osnovna razina

1. D
2. A
3. C
4. C
5. a) 54° b) AC
6. 0.77 m^2
7. 10
8. a) $\sqrt{34} \text{ cm}$, b) $O = 22 + \sqrt{34} \text{ cm} \approx 27.83 \text{ cm}$
9. a) 42.5 cm^2 , b) $o = 27.83 \text{ cm}$
10. a) 33.6 cm , b) $P_{ABCD} = 168 \text{ cm}^2$

11. B
12. C
13. B
14. B
15. B

16. a) 5 učenika odigralo igricu do kraja za više od 50 a manje od 60 minuta
 b) 200
 c) 10%
17. a) 100 cm
 b) u srijedu u 6.00 sati
 c) 90 cm
18. a) 78 cm
 b) 16 mjeseci
 c) 7 cm
19. a) 50 cm
 b) 90 cm
 c) snijeg se topio
20. a) 711 km
 b) 2.5 h
 c) 8:30 do 9:30
 d) dobit od 36 kuna

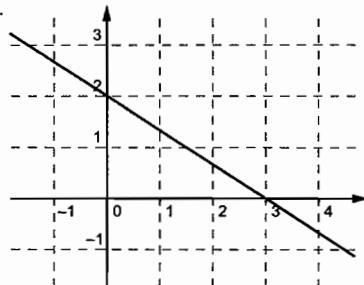
21. a)



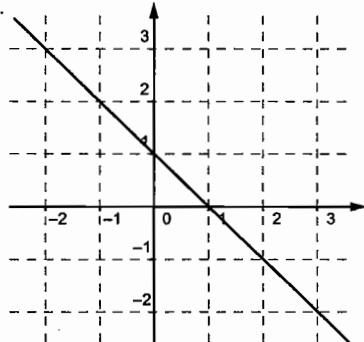
b) $|AB| + |BC| - |AC| = 4.55$
 c) Ne

22. D

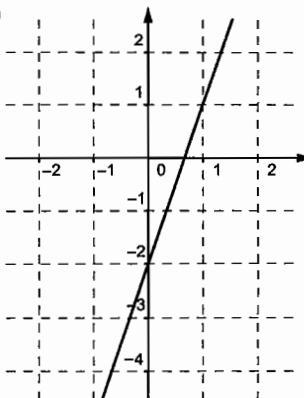
23.



24.



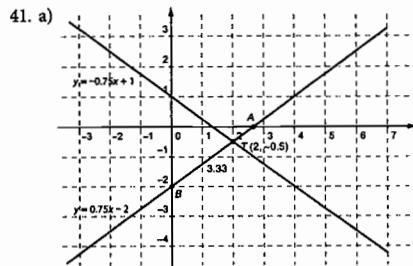
25. a)



b) $y = 3x - 7$

Geometrija – rješenja izabranih zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, viša razina

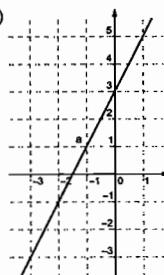
1. D
2. D
3. C
4. C
5. C
6. A
7. C
8. D
9. D
10. A
11. B
12. a) 26° , b) $\alpha = 77^\circ$
13. a) 44° , b) 88°
14. $P = 152.428 \text{ cm}^2$
15. a) 68.022 m , b) $31^\circ 18' 52''$, c) $2\ 402.91 \text{ m}^2$
16. C
17. B
18. C
19. a) $r = 6 \text{ cm}$,
b) $h = 10.42 \text{ cm}$
20. $\frac{260\pi}{3} \text{ cm}^3$
21. C
22. B
23. $44^\circ 11' 04''$
24. 0.77 m^2
25. $P = 13.43 \text{ cm}^2$
26. 5.745 cm
27. A
28. a) 20, b) 18°
29. a) $P = 23.79 \text{ cm}^2$, b) $|AC| = 6.02 \text{ cm}$
30. A
31. $(a, 10^\circ + 3)$, $a \in \mathbb{R}$
32. a) 50 cm,
b) 90 cm,
c) u petak u 6.00 sati
- d) Visina snijega se do subote u 6.00 sati smanjuje, a nakon toga se do nedjelje u 6.00 sati povećava.
33. a) 3 puta, b) 2.5 sati, c) od 8: 30 do 9: 30 sati, d) 4.5 kn
34. (5, 12)
35. D
36. D
37. C
38. a) $\overline{AB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$, b) -10 , c) 12
39. a) $B(2, -1)$, b) $\alpha = 148^\circ 40' 17''$
40. D



b) $|AB| = \frac{10}{3}$, c) npr. q: $y = -\frac{3}{4}x + 2$

42. a) $y = \frac{4}{3}x - 3$, b) $\frac{27}{8}$

43. a) b) $63^\circ 26' 06''$



44. a) $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$, b) $k = -\frac{3}{4}$, c) $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}$

45. a) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$, b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

46. a) $\frac{3}{2}$, b) $y = -x + 3$

47. C

48. D

49. B

50. B

51. A

52. B

53. a) $T(-1, 7)$, b) $3x + 4y - 30 = 0$

54. a) $a = 4$, b) $y = \frac{1}{2}x + 4$

55. a) $a = 5$

56. a) $y = 1$, b) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

57. a) $p = \frac{3}{2}$, b) $\frac{11\sqrt{5}}{5}$, c) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}$

58. $(3, 2)\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

• Modeliranje i zadatci produženih odgovora •

1. a) 216
b) 600
c) 216

2. a) 1
b) $-1, 1$

3. a) $(x-3) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$
b) $\frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

4. a) $|x-3| = \begin{cases} x-3; & x \geq 3 \\ 3-x; & x < 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{-1}{2x+6}; & x > 3 \\ 0; & x = 3 \\ \frac{1}{2x+6}; & x < 3 \end{cases}$

c) $-\frac{1}{14}$

5. a) 46.2 %

b) Tri kriške.

c) Približno tri i pol kriške, tj. 3.456.

6. a) 27 putnika
b) 17 putnika

7. a) $r = \frac{\sqrt[3]{54\pi^2}}{\pi}$ cm

b) $P = \frac{3}{4} \sqrt{6} \text{ cm}^2$

8. a) $\frac{4}{3}$ litre mlijeka i $\frac{2}{3}$ dag šećera

b) $\frac{5}{3}$ litre mlijeka

9. a) $a = 34.0876 \text{ cm}$

$b = 52.2677 \text{ cm}$

$c = 63.6303 \text{ cm}$

b) $o = 149.986 \text{ cm}$

10. a) $f(0) = 3$

$f(-1) = 3$

$f(1) = 3$

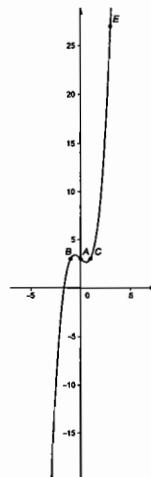
$f(-4) = -57$

$f(3) = 27$

b)

x	0	-1	1	-4	3
$f(x)$	3	3	3	-57	27

- c)
d) $D = (-4, -57)$



11. a) U 17:00 sati

- b) Od 6:00 do 11:00 i od 18:00 do 20:00

- c) 3 000 kuna

- d) Mogli smo postići veću cijenu.

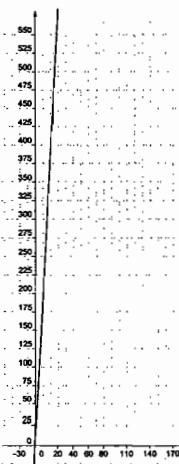
12. $f(x) = \begin{cases} 1600 - 50 \cdot x, & \text{za } 0 \leq x \leq 6 \\ 1300, & \text{za } 6 < x \leq 10 \\ 1300 \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{x-10}, & \text{za } 10 < x \leq 13 \end{cases}$

13. a) $f(x) = 19.6 \cdot x$

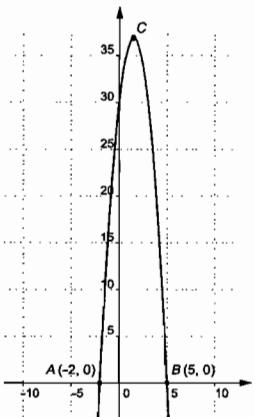
b)

c) 196 kuna

d) 28 kilograma



14. a) $D = 441$
 b) $(5, 0), (-2, 0)$
 c) Maksimum
 je 36.75.
 d)



15. a) $a = 2$
 b) $x \in (-1.62, 0.62) \cup (1, +\infty)$
 c) $K_f = (-\infty, 0]$
 d) Funkcija nije ni parna ni neparna.
16. a) $k = 0.0669$
 b) 19.481°C
 c) 36 minuta i 47 sekundi

17. a) $T_i = \frac{1}{f_0}$
 b) $s\left(\frac{1}{2f_0}\right) = 0$
 $s\left(1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2\pi \cdot f_0)$
 $s\left(\frac{1}{3f_0}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4}$
 $s\left(\frac{1}{4f_0}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $t = \frac{2k+1}{4f_0}, (k \in \mathbb{Z})$

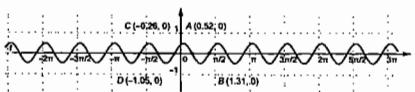
18. a) $x_0 = -\frac{\pi}{12}, x_1 = \frac{\pi}{6}$
 $x_2 = -\frac{\pi}{3}, A = \frac{1}{2}$

b) globalni maksimum $\left(\frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, \frac{1}{2}\right)$

globalni minimum $\left(-\frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

c) $T = \frac{\pi}{2}$

d)



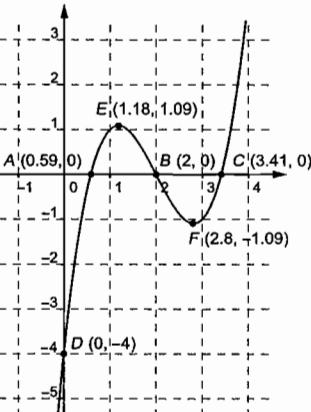
19. a) $f(x) = 150 - 0.05t$

- b) 120 cm^3

- c) 50 minuta

20. a) $(0.59, 0) (2, 0) (3.41, 0) (0, -4)$
 b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$
 c) $(-\infty, 1.18) (2.8, +\infty)$
 d) lokalni maksimum $(1.18, 1.09)$ lokalni minimum $(2.8, -1.09)$

e)



21. a) $x = \frac{a+1}{a+4}$

- b) za $a \in \{-7, -5\}$
 c) za $a = -4$

22. a) 180, b) 44, c) 80.

23. a) $N = 2000 + 11.52 P$.

b) 31 491.20 kn.
 c) $P = \frac{N - 2000}{11.52} = \frac{25N - 50000}{288}$
 d) 1 200.
 e) 8 703.20 kn.

24. a) $x_1 = \frac{1}{7}; x_2 = -4$

b) $x \in \left(-4, \frac{1}{7}\right)$

c) $(-4, 0) i \left(\frac{1}{7}, -\frac{29}{7}\right)$

d) $d = \frac{29\sqrt{2}}{7} \approx 34.326531$

25. 10, 15 i 18.

26. Duljina male kazaljke je 0.73 cm ako zanemarimo njezin pomak tijekom pet minuta, a 0.78 cm ako taj pomak uzmemos u obzir. Pogreška je 0.048 cm ili 6.165% .

27. $t = 2.826 \approx 3 \text{ godine.}$

28. $E = 10^{25} \text{ J.}$

29. a) pločice: 115 kn; ljepilo: 43 kn.
 b) 8 121 kn.

30. 11 kutija i 34 kartona.

31. a) $a = \sqrt{17} = 4.12$

b) $P_b = (-2.5, 0)$

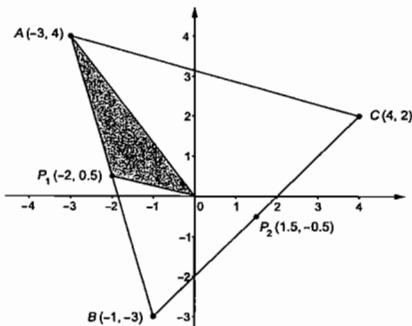
c) $P = 3.25$ kv. jedinica

d) $\overline{AK} : \overline{KB} = 1 : 4$.

32. a) Trokut je jednakokračan: $|AB| = |AC| = \sqrt{53}$.

b) $P = 5.62$ kv. jedinica.

c)



33. 7.5 m.

34. a) $a = 15$ cm; $c = 12$ cm.

b) $v = 16$ cm.

c) $P = 216$ cm².

35. a) $d = 3\sqrt{2}$ m ≈ 4.243 m.

b) $3\sqrt{2}$ m ≈ 4.243 m.

c) $l = 5\sqrt{2}$ m ≈ 7.07 m.

36. 52 stupa

37. $P = 68.1$ cm².

38. $V = 31\ 172.45$ L; $s = 445\ 320.75$ km

39. 63 zadatka.

40. a) $V = 36\pi$ mm³

b) $r = 2.381$ mm

c) $a = 3.838$ mm

41. a) 30 učenika

b) 7 učenika

c) $\frac{1}{30}$ razreda

42. a) $V = 94.64$ m³

b) $V = 77.32$ m³

c) 18.3 %

Modeliranje i zadatci produženih odgovora – rješenja izabralih zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, osnovna razina

1. nakon 504 minute

2. a) $T = 10^\circ\text{C}$, b) $t = 55$ minuta

3. a) 1.23 kn, b) 16

4. a) 232.7° , b) -40°

5. a) 4 000, b) 125, c) 4 sata

6. a) 62 kn

b) $C(n) = 86 - 3n$

c) 18, d) 128

7. a) $h = 6.69$ m, b) $x = 50.4$ m, c) $h_{\max} = 8$ m

8. 1.2 m

9. a) $y = \frac{32}{5}x + 23$

b) 215°C

c) 24 minute

10. a) K(600, 250)

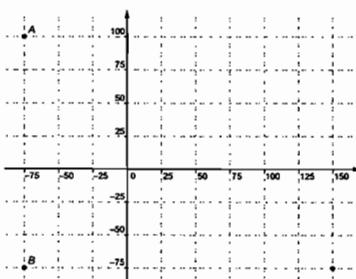
b) 14 000 m

c) 122.8 m

11. a) 20 cm^2

b) 50

12. a)



b) 285 m

c) 115 m

13. A

14. C

15. B

16. C

17. A

18. D

19. B

20. C

21. A

Modeliranje i zadatci produženih odgovora – rješenja izabralih zadataka iz dosadašnjih ispita Centra za vanjsko vrednovanje obrazovanja, viša razina

1. B
2. C
3. A
4. D
5. B
6. C
7. A
8. a) 7, b) 344
9. a) $(-4, 0)$ $(-1, 0)$ $(4, 0)$
b) $f'(x) = -\frac{1}{4}(3x^2 + 2x - 16)$
- c) $\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$
d) min. $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{100}{27}\right)$ max. (2,9)
10. 20,5 mm
11. 90 paketa, 1 440 kg
12. a) $(1, 0)$ $(4, 0)$ $(0, -4)$
b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
c) $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
d) max. (1, 0) min. (3, -4)
13. 3,161 m/s

•Ogledni ispiti•

Ogledni ispiti – rješenja zadataka i način bodovanja, osnovna razina

1. ISPIT

1. A (1b)
2. D (1b)
3. B (1b)
4. B (1b)
5. B (1b)
6. B (1b)
7. D (1b)
8. D (1b)
9. C (1b)
10. A (1b)
11. B (1b)
12. B (1b)
13. B (2b)
14. D (2b)
15. B (2b)
16. C (2b)
17. $I = \frac{x \cdot d}{\lambda \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2 \cdot x \cdot d}{2 \cdot \lambda \cdot n - \lambda}$ (1b)
18. $[-1, +\infty)$ (1b)
19. 8 (1b)
20. 5 (1b)
21. $-\frac{2}{3}$ (1b)
22. $x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2}$. (1b)
23. 52,5; 42 (2b)
24. 6,25 kv. jedinica (2b)
25. a) $\frac{1}{9} - \frac{4a}{3} + 4a^2$ (2b)
b) $\frac{1}{27} - \frac{2a}{3} + 4a^2 - 8a^3$
26. a) 46,2 %
b) $48,75 \text{ m}^2$ (2b)
27. a) -3
b) $(0,5, 0)$
c) $\frac{1}{4}$ kv. jedinica (3b)
28. a) $V = \frac{125}{6}\pi = 65,45 \text{ mm}$ (3b)
b) $r = 1,984 \text{ mm}$.
c) $a = 3,199 \text{ mm}$.

2. ISPIT

1. B (1b)
2. A (1b)
3. B (1b)
4. A (1b)
5. C (1b)
6. D (1b)
7. D (1b)
8. B (1b)
9. C (1b)
10. D (1b)
11. A (1b)
12. D (1b)
13. C (2b)
14. C (2b)
15. C (2b)
16. B (2b)
17. $(2, -3)$ (1b)
18. $-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{3}$ (1b)
19. $\frac{2a-3}{a^2}$ (1b)
20. $2x + 3y - 10 = 0$ (1b)
21. $5\sqrt{2}$ (1b)
22. -25 (1b)
23. 9 kg (2b)
24. 30; $\frac{900}{181} \approx 4.9724$ (2b)
25. $\frac{5\ 000}{5\ 427} \text{ m}^3$ (2b)
26. a) $V = 1.9486 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. (2b)
b) 1 870.62 kn.
27. a) f ne siječe os x (3b)
b) -5
c) raste
28. a) 40 (3b)
b) 12
c) $\frac{1}{4}$

3. ISPIT

1. C (1b)
2. B (1b)
3. A (1b)
4. D (1b)
5. B (2b)
6. D (2b)
7. B (1b)
8. B (1b)
9. C (1b)
10. A (1b)
11. B (1b)
12. A (1b)
13. C (1b)
14. D (1b)
15. B (2b)
16. C (2b)
17. $\frac{1}{y-2}$ (1b)
18. $\frac{9}{100}$ (1b)
19. -12 (1b)
20. $\frac{3}{7}$ (1b)
21. $V = 234.248 \text{ cm}^3$ (1b)
22. $\frac{1}{2}$ (1b)
23. a) 4 (2b)
b) $(1.241, 0)$ i $(-1.0744, 0)$
24. b = 12, a = 8 (2b)
25. a) 500g za 7 kuna (2b)
b) 20 kn
26. a) 240 (2b)
b) 200
27. a) -9 (3b)
b) 5
c) 14
28. a) $\frac{7\ 776}{5}\pi = 4\ 885.8049 \text{ cm}^3$ (3b)
b) $864\pi = 2\ 714.3361 \text{ cm}^3$
c) 25%

4. ISPIT

1. C (1b)
2. A (1b)
3. B (1b)
4. A (1b)
5. C (1b)
6. B (1b)
7. D (1b)
8. B (1b)
9. C (1b)
10. D (1b)
11. A (1b)
12. D (1b)
13. B (2b)
14. B (2b)
15. A (2b)
16. A (2b)
17. (1b)

18. 10^{-1} (1b)



19. $-\frac{1}{2}$ (1b)
20. $a = \frac{3b}{b-2}$ (1b)
21. ne (1b)
22. $x = 3$ (1b)
23. a) 12 (2b)
b) 0
24. a) 750 m^2 (3b)
b) 1500 m^2
25. 2.5; 0.12 (2b)
26. 7, $\frac{17}{4}$ (2b)
27. a) 2 (2b)
b) $\frac{1}{6}$
28. a) 3 cm (3b)
b) $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$
c) $\frac{81\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$

5. ISPIT

1. C (1b)
2. B (1b)
3. A (1b)
4. B (1b)
5. C (2b)
6. A (2b)
7. C (1b)
8. A (1b)
9. D (1b)
10. A (1b)
11. C (1b)
12. D (1b)
13. B (1b)
14. B (1b)
15. C (2b)
16. C (2b)
17. a) 9.602 cm (2b)
b) 96.02 mm
18. $-1, 0, 1, 2, 3$ (1b)
19. (1b)

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$

20. 5 (1b)

21. 12.5 (1b)

22. (2b)

15 g/cm^3

0.015 kg/m^3

$15 \text{ min } 25 \text{ s}$

925 s

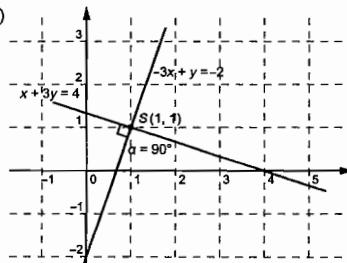
23. a) 22 mlađica (2b)
b) Ne, jedna je djevojka „višak“.
24. $4.6296 \cdot 10^{-3}$ sati (2b)

25. a) $O = 11\sqrt{2} + \sqrt{130}$ (2b)
b) 8 puta

26. a) $f(t) = 70 \text{ cm}^3 - 0.02t \text{ cm}^3$ (2b)
b) $f(1800) = 70 \text{ cm}^3 - 0.02 \cdot 1800 \text{ cm}^3 =$
 $= 70 - 36 = 34 \text{ cm}^3$

27. (2b)

a)



b) pravci su okomiti

28. 720 kn (2 b)

Ogledni ispiti – rješenja zadataka i način bodovanja, viša razina

1. ISPIT

1. B (1b)

2. D (1b)

3. A (1b)

4. B (1b)

5. B (1b)

6. D (1b)

7. A (1b)

8. B (1b)

9. D (1b)

10. D (1b)

11. C (2b)

12. A (2b)

13. A (2b)

14. C (2b)

15. B (2b)

16. $x \in [0, 3]$ (1b)

17. $V = 2304\pi \text{ cm}^3$ (1b)

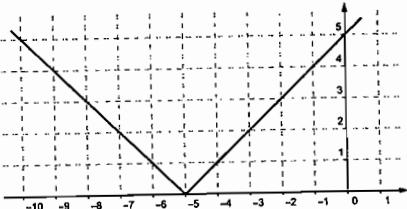
18. a) $\frac{1}{x^2} - \frac{2y}{x} + y^2$, b) $\frac{1}{x^3} - \frac{3y}{x^2} + \frac{3y^2}{x} - y^3$ (2b)

19. a) $\sqrt{113}$, b) $\varphi = 104^\circ 34' 27''$ (2b)

20. a) $f(x) = 3^{x-1}$, b) $f(-5) = 3^{-6} = \frac{1}{729}$ (2b)

21. a) $a = 18 \text{ cm}$, b) $P = \frac{243}{2} \text{ cm}^2$ (2b)

22. a) (2b)



b) $f(-5) = 0$

23. = 999 276 (2b)

24. (2b)

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{5\pi}{4}$	-	-	+
325°	-	+	-

25. $P = \frac{1}{14}$ kv. jedinica (2b)

26. a) $2\sqrt{5}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2b)

27. a) $x = \frac{2a+7}{3-a}$ (3b)

b) 2

c) $a = 3$

28. a) $245\sqrt{3} \text{ m}^3$ (1b)

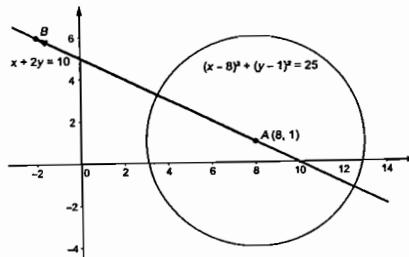
b) $\frac{3}{7}$ (2b)

29. a) $\overrightarrow{AB} = -10\vec{i} + 5\vec{j}$ (1b)

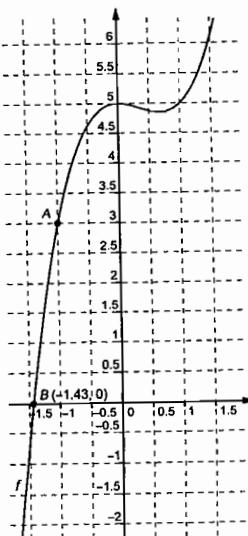
b) $x + 2y - 10 = 0$ (1b)

c) $(x-8)^2 + (y-1)^2 = 25$ (1b)

d) (1b)



30. (10 b)



2. ISPIT

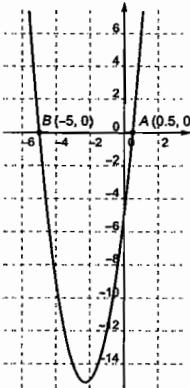
1. D (1b)
2. A (1b)
3. B (1b)
4. D (1b)
5. A (1b)
6. B (1b)
7. B (2b)
8. B (1b)
9. A (1b)
10. A (1b)
11. D (1b)
12. C (2b)
13. B (2b)
14. D (2b)
15. C (2b)
16. $x = \frac{1}{y-2}$ (1b)
17. $V = 2048\pi \text{ cm}^3$ (1b)
18. $k = 4$ (1b)
19. (1b)



3. ISPIT

1. B (1b)
2. C (1b)
3. C (1b)
4. A (1b)
5. C (1b)
6. C (1b)
7. A (1b)
8. B (1b)
9. C (2b)
10. C (2b)
11. D (1b)
12. D (2b)
13. A (2b)
14. A (1b)
15. D (2b)
16. $\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ (1b)
17. 1 (1b)
18. $2 \cdot (x-3) \cdot \cos(x-3)^2$ (1b)
19. a) $81+9\sqrt{41}$, b) 8 puta (2b)
20. $x \in \left[-5, \frac{1}{2}\right]$ (2b)

20. B(-2, 1) (1b)
21. $f(\sqrt{5}) = 7, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$ (2b)
22. a) $\sqrt{113}$, b) $\varphi = 165^\circ 57' 50''$ (2b)
23. $x = \frac{4}{3}$ (2b)
24. a) $f(n) = 70 \text{ cm}^3 - 0.02n \text{ cm}^3$ (2b)
b) $f(1800) = 70 \text{ cm}^3 - 0.02 \cdot 1800 \text{ cm}^3$
 $= 70 - 36 = 34 \text{ cm}$
25. a) 46.2 % (3b)
b) 48.75 m^2
c) 56.16 m^2
26. a) 57 (3b)
b) 126
c) 315
27. 7.3485 cm^2 (3b)
28. a) 4 (1b)
b) $(1.241, 0)$ i $(-1.0744, 0)$ (2b)
c) $\left(\frac{1}{12}, \frac{193}{48}\right)$ (1b)
29. a) $V = \frac{1}{425} \text{ m}^3$ (6b)
b) $r = 0.0825 \text{ m} = 8.25 \text{ cm}$
c) $m_1 = 249.9076 \text{ kg} \approx 250 \text{ kg}$
30. $r = 5$, $P = 31.990 \text{ cm}^2$ (8b)



21. 10 (2b)
22. a) 40 000 g; 2 003 g; 4 800 g; 2 038 g (1b)
b) $2 \cdot 10^2 \text{ dag } 3 \text{ g}$ (1b)
23. $P = 0.81 \text{ cm}^2$ (2b)
24. a) $2x^3 - 7x^2 + 9x - 5$ (1b)
b) $2x^3 - x^2 + x - 2$ (1b)

25. a) $\frac{7}{5}\sqrt{30}$ (2b)

b) $\sqrt{\frac{3}{10}}$

26. $a = 10 \text{ cm}, b = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ (2b)

27. a) 108 (1b)

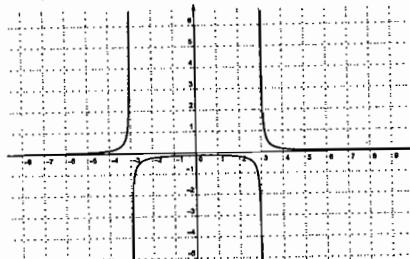
b) 37 (1b)

c) 48 (1b)

28. a) nema (1b)

b) $\left(0, -\frac{1}{9}\right)$ (1b)

c) (2b)



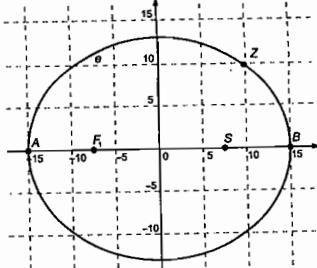
29. a) $a = 150\,000\,000 \text{ km}$ (3b)

$b = 149\,978\,323 \text{ km}$

$e = 2\,550\,000 \text{ km}$

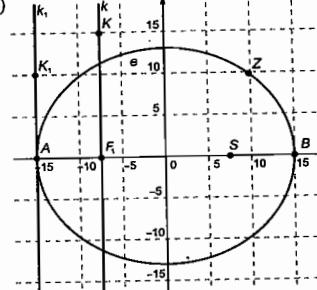
b) $2.25 \cdot 10^{16}x^2 + 2.24935 \cdot 10^{16}y^2 = 5.06 \cdot 10^{32}$ (2b)

c) (2b)



d) $1 : 10^{12}$ (1b)

e) (2b)



30. $k = 0.04055$ (4b)

$T(60) = 17.8996 \text{ }^\circ\text{C}$

$t = 48.29 \text{ minuta}$

4. ISPIT

1. C (1b)

2. C (1b)

3. C (1b)

4. D (1b)

5. D (1b)

6. B (1b)

7. C (1b)

8. D (1b)

9. A (1b)

10. B (1b)

11. C (2b)

12. B (2b)

13. C (2b)

14. D (2b)

15. D (2b)

16. a) -8 , b) $\frac{1}{2}$ (2b)

17. 613 (1b)

18. a) $x = \frac{1}{2}$ (1b)

b) $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (1b)

19. 264.44 cm^3 (1b)

20. 4 (1b)

21. $(2, -6)$ (2b)

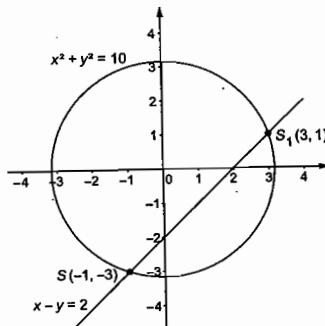
22. Da, 85 mm (2b)

23. 54 cm (2b)

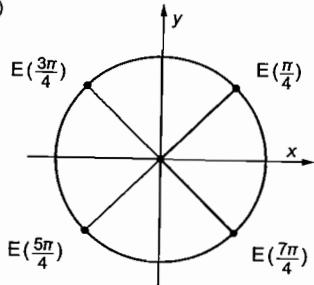
24. a) 75 % (2b)

b) 133.33 %

25. (2b)



26. a) (1b)



b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1b)

27. a) $\{0, \pi, 2\pi\}$, b) $(\pi/2, -2)$, c) $(3\pi/2, 2)$, d) 2π (4b)

28. a) $x_1 = 3; x_2 = 7$, b) $x \in (3, 7)$, c) $f(x) \in [-4, +\infty)$ (3b)

29. 29.1. a) $h(x) = 3.5 + 4x$ (1b), b) 31.5 m (1b)

c) 63.5 m (1b)

29.2. a) $a = 5$ (1b), b) $(0, 5)$ (1b), c) $f(x) > 5$ (1b)

d) $K_f = [5, 105]$ (1b), e) ni parna ni neparna (1b)

30. za 600 (6b)

5. ISPIT

1. B (1b)

2. C (1b)

3. A (1b)

4. D (1b)

5. C (1b)

6. C (2b)

7. D (1b)

8. C (1b)

9. C (1b)

10. B (1b)

11. B (1b)

12. A (2b)

13. B (2b)

14. C (2b)

15. A (2b)

16. $13 \cdot 3^8$ (1b)

17. $T(0, -6)$ (1b)

18. $x = \frac{1}{2}$ (1b)

19. 203.73 cm^3 (2b)

20. 674 kvadratne jedinice (1b)

21. a) $\frac{7776}{5} \pi \text{ cm}^3 = 4885.8049 \text{ cm}^3$ (3b)

b) $864\pi \text{ cm}^3 = 2714.3361 \text{ cm}^3$,

c) 25 %

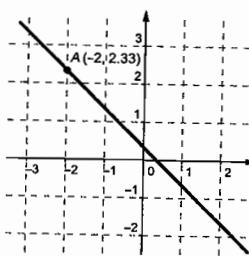
22. $(x_1 + x_2)^2 = \frac{9}{4}$ (2b)

23. b = 12, a = 8 (2b), $P = 32\sqrt{2} \text{ cm}^2$ (1b)

24. (2b)

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	-	$-\frac{4}{3}$	$-1 - \frac{\sqrt{2}}{6}$	$-1 - \frac{\sqrt{2}}{6}$

25. (2b)

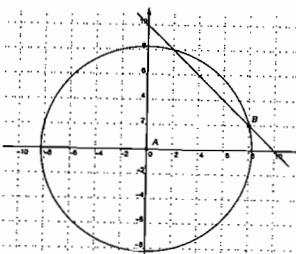


26. a) $x = \frac{2a+7}{3-a}$, b) 2, c) $a = 3$ (3b)

27. a) $f'(15) = 798$, b) 24 mjeseca (2b)

28. a) 2, b) $y = 2x - 6$, c) $26^\circ 33' 54''$ (3b)

29. a) 2 i 8 (2b), b) (1b)



c) $x^2 - 10x + 16 = 0$ (1b), d) $y = -x + 10$ (1b)

e) $d = 6\sqrt{2}$ (1b), P(5, 5) (1b)

f) $|2x - y| - |3x + y| = 4 - 14 = -10$ (1b)

g) $\log_2 y = \log_2 8 = 3$ (1b)

$\log_3 x = \log_8 2 = \frac{1}{3}$ (1b)

30. $r_0 = \frac{abc}{4P}$

$a = 34.9973 \text{ cm}$

$b = 51.4666 \text{ cm}$

$c = 57.6426 \text{ cm}$

$r_0 = 29.1644 \text{ cm}$ (5b)

Literatura

Dodatne zbirke zadataka

- Branko Šantić: *Zbirka +: jednadžbe, nejednadžbe, sustavi*, Školska knjiga, Zagreb
- Petar Javor: *Analitička geometrija ravnine*, Školska knjiga, Zagreb
- Boris Pavković, Branimir Dakić: *Polinomi*, Školska knjiga, Zagreb

Udžbenici za opću, jezičnu i klasičnu gimnaziju

- Jagoda Krajina, Ivica Gusić: *Matematika 1*, 1. dio udžbenika za 1. razred opće, jezične i klasične gimnazije, Školska knjiga, Zagreb
- Jagoda Krajina, Ivica Gusić: *Matematika 1*, 2. dio udžbenika za 1. razred opće, jezične i klasične gimnazije, Školska knjiga, Zagreb
- Jelena Gusić, Petar Mladinić, Marija Pavković: *Matematika 2*, 1. dio udžbenika za 2. razred opće, jezične i klasične gimnazije, Školska knjiga, Zagreb
- Jelena Gusić, Petar Mladinić, Marija Pavković: *Matematika 2*, 2. dio udžbenika za 2. razred opće, jezične i klasične gimnazije, Školska knjiga, Zagreb
- Nevenka Antončić, Eva Špalj, Sanja Antoliš, Vladimir Volenec: *Matematika 3*, 1. dio udžbenika za 3. razred opće, jezične i klasične gimnazije, Školska knjiga, Zagreb
- Nevenka Antončić, Eva Špalj, Sanja Antoliš, Vladimir Volenec: *Matematika 3*, 2. dio udžbenika za 3. razred opće, jezične i klasične gimnazije, Školska knjiga, Zagreb
- Sanja Antoliš, Aneta Copić, Nevenka Antončić: *Matematika 4*, 1. dio udžbenika za 4. razred opće, jezične i klasične gimnazije, Školska knjiga, Zagreb
- Sanja Antoliš, Aneta Copić, Nevenka Antončić: *Matematika 4*, 2. dio udžbenika za 4. razred opće, jezične i klasične gimnazije, Školska knjiga, Zagreb

Udžbenici za prirodoslovno-matematičku gimnaziju

- Mirela Kurnik, Željka Zorić, Marija Pavković: *Matematika 1*, 1. dio udžbenika za 1. razred prirodoslovno-matematičkih gimnazija, Školska knjiga, Zagreb
- Mirela Kurnik, Željka Zorić, Marija Pavković: *Matematika 1*, 2. dio udžbenika za 1. razred prirodoslovno-matematičkih gimnazija, Školska knjiga, Zagreb
- Jelena Gusić, Petar Mladinić, Boris Pavković: *Matematika 2*, 1. dio udžbenika za 2. razred prirodoslovno-matematičkih gimnazija, Školska knjiga, Zagreb
- Jelena Gusić, Petar Mladinić, Boris Pavković: *Matematika 2*, 2. dio udžbenika za 2. razred prirodoslovno-matematičkih gimnazija, Školska knjiga, Zagreb
- Nevenka Antončić, Eva Špalj, Vladimir Volenec: *Matematika 3*, 1. dio udžbenika za 3. razred prirodoslovno-matematičkih gimnazija, Školska knjiga, Zagreb
- Nevenka Antončić, Eva Špalj, Vladimir Volenec: *Matematika 3*, 2. dio udžbenika za 3. razred prirodoslovno-matematičkih gimnazija, Školska knjiga, Zagreb
- Sanja Antoliš, Aneta Copić: *Matematika 4*, 1. dio udžbenika za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb
- Sanja Antoliš, Aneta Copić: *Matematika 4*, 2. dio udžbenika za 4. razred prirodoslovno-matematičke gimnazije, Školska knjiga, Zagreb

Udžbenici za četverogodišnje strukovne škole

- ▶ Jagoda Krajina, Ivica Gusić: *Matematika 1*, 1. dio udžbenika za 1. razred četverogodišnjih strukovnih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Jagoda Krajina, Ivica Gusić: *Matematika 1*, 2. dio udžbenika za 1. razred četverogodišnjih strukovnih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Ljiljana Kelava-Račić, Zvonimir Šikić: *Matematika 2*, 1. dio udžbenika za 2. razred četverogodišnjih strukovnih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Ljiljana Kelava-Račić, Zvonimir Šikić: *Matematika 2*, 2. dio udžbenika za 2. razred četverogodišnjih strukovnih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Ivan Čavlović, Miljenko Lapaine: *Matematika 3*, 1. dio udžbenika za 3. razred četverogodišnjih strukovnih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Ivan Čavlović, Miljenko Lapaine: *Matematika 3*, 2. dio udžbenika za 3. razred četverogodišnjih strukovnih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Dobrila Golubović, Petar Javor: *Matematika 4*, 1. dio udžbenika za 4. razred četverogodišnjih strukovnih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Dobrila Golubović, Petar Javor: *Matematika 4*, 2. dio udžbenika za 4. razred četverogodišnjih strukovnih škola, Školska knjiga, Zagreb

Udžbenici za ekonomske škole

- ▶ Kristina Šorić: *Matematika 1*, 1. dio udžbenika sa zbirkom zadataka za 1. razred ekonomskih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Kristina Šorić: *Matematika 1*, 2. dio udžbenika sa zbirkom zadataka za 1. razred ekonomskih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Kristina Šorić: *Matematika 2*, 1. dio udžbenika sa zbirkom zadataka za 2. razred ekonomskih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Kristina Šorić: *Matematika 2*, 2. dio udžbenika sa zbirkom zadataka za 2. razred ekonomskih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Kristina Šorić: *Matematika 3*, 1. dio udžbenika sa zbirkom zadataka za 3. razred ekonomskih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Kristina Šorić: *Matematika 3*, 2. dio udžbenika sa zbirkom zadataka za 3. razred ekonomskih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Kristina Šorić: *Matematika 4*, 1. dio udžbenika sa zbirkom zadataka za 4. razred ekonomskih škola, Školska knjiga, Zagreb
- ▶ Kristina Šorić: *Matematika 4*, 2. dio udžbenika sa zbirkom zadataka za 4. razred ekonomskih škola, Školska knjiga, Zagreb

IZDAVAČ

Školska knjiga d.d.
Zagreb, Masarykova 28

ZA IZDAVAČA

Ante Žužul, prof.

UREDNUICA

Štefica Dumančić Poljski

RECENZENTI

Bojan Kovačić
Sanja Antoliš
Nives Jozić
Rebeka Kalazić
Ljiljana Kelava-Račić
Snježana Lukač
Petar Mladinić
Dinka Ugrina

GRAFIČKO-LIKOVNO OBLIKOVANJE

Siniša Kovačić

© ŠKOLSKA KNJIGA d.d., Zagreb, 2010.

Nijedan dio ove knjige ne smije se umnožavati,
fotokopirati ni na bilo koji način reproducirati
bez nakladnikova pisanog dopuštenja.