1.

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & -\infty \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < x_0 \\ \infty, & x_0 \leq x < \infty \end{cases} \quad , \quad x_0 = a_0(1+f(t))$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi$$

Introducera $dz = \frac{dx}{x_0(t)}$, $d\tau = \frac{dt}{x_0(t)^2}$

(I) $$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \boxed{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\frac{1}{x_0(t)^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}}$$

(II) $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial x}}_{=0}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{1}{x_0(t)}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{1}{x_0(t)}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{1}{x_0(t)}\right)\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial x}}_{=0} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{x_0(t)^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}}$$

$$dz = \frac{dx}{x_0(t)} \Rightarrow \int_0^z dz' = \frac{1}{x_0(t)}\int_0^x dx' \Rightarrow \boxed{z = \frac{x}{x_0(t)}}$$

(III) $$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{x}{x_0(t)}\right)}{\partial t} = \frac{x}{a_0}\frac{\partial \frac{1}{1+f(t)}}{\partial t} = -\frac{x}{a_0(1+f(t))^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial t} =$$

$$= -\frac{z}{1+f(t)}\frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \boxed{\frac{-z}{1+f(t)}\frac{\partial f}{\partial \tau}\cdot\frac{1}{x_0(t)^2}}$$

Kombinera (I), (II) och (III) för att få:

$$\boxed{i\hbar\left[\frac{\partial \psi}{\partial \tau}\frac{1}{x_0(t)^2} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{z}{1+f(t)}\cdot\frac{\partial f}{\partial \tau}\cdot\frac{1}{x_0(t)^2}\right] = \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\cdot\frac{1}{x_0(t)^2} + V\psi} \quad (1)$$

Det återstår att hitta $x_0(\tau) = a_0(1+f(\tau))$. Vi måste alltså hitta $t(\tau)$. Vi har att

$$d\tau = \frac{dt}{x_0(t)^2} \Rightarrow \tau = \int_0^t \frac{dt'}{x_0(t')^2}$$

Integralen går inte att lösa i det allmänna fallet, men för en specifik $f(t)$ kan vi lösa den och ta inversen för att hitta $t(\tau)$.

$\psi(x,0) = u(x)$, $u(0) = u(x_0(0)) = 0$

$|f(t)| << 1$ och $\left|\frac{df}{dt}\right| |\psi| << \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|$

Vi får nu:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot \frac{z}{1+f(t)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{x_0(t)^2}\right| \approx \left|\frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot z \cdot \frac{df}{dt}\right|$$

Potentialen är:

$$V(z) = \begin{cases} \infty, & -\infty \le z < 0 \\ 0, & 0 \le z < 1 \\ \infty, & 1 \le z < \infty \end{cases}$$

Vi är intresserade av området $z \in [0,1)$, ty annars måste $\psi = 0$ då $V = \infty$. Vi har alltså:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot z \cdot \frac{df}{dt}\right| < \left|\frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot \frac{df}{dt}\right| = \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \left|\frac{df}{dt}\right|$$

Låt oss nu anta att $\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|$ är av samma storleksordning som $\max_z |\psi|$ för varje tidpunkt. Detta är inte helt orimligt, för det gäller t.ex. för snusvågor (men inte alltid för linjärkombinationer av dem). Vi har då att:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right| \left|\frac{df}{dt}\right| \approx |\psi| \left|\frac{df}{dt}\right| << \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right| = \left|\frac{\partial\psi}{\partial \tau} \frac{1}{x_0(t)^2}\right|$$

Vi har alltså:

$$\left|\frac{\partial\psi}{\partial z} \cdot \frac{z}{1+f(t)} \cdot \frac{\partial f}{\partial \tau} \cdot \frac{1}{x_0(t)^2}\right| << \left|\frac{\partial\psi}{\partial \tau} \frac{1}{x_0(t)^2}\right|$$

därmed blir ekvation (1) nu:

$$i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \frac{1}{x_0(t)^2} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \cdot \frac{1}{x_0(t)^2} + V\psi$$

Använd $V = 0$ och multiplicera med $x_0(t)^2$ för att få:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}}$$

Detta är ett klassiskt problem, lösningen ges av [2.36] och [2.37]:

$$\psi(z,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{2} \sin(n\pi z) e^{-i\left(\frac{n^2\pi^2\hbar}{2m}\right)\tau}, \quad c_n = \sqrt{2}\int_0^1 \sin(n\pi z)\,\psi(z,0)\,dz$$

Vi behöver finna $z(x)$ och $\tau(t)$.

$$dz = \frac{dx}{x_0(t)} \Rightarrow z = \frac{x}{x_0(t)}$$

$$d\tau = \frac{dt}{x_0(t)^2} \Rightarrow \tau = \int_0^t \frac{dt'}{x_0(t')^2}$$

Då $|f(t)| << 1$ kan $x_0(t)$ approximeras till konstanten a_0:

$$\tau = \frac{t}{a_0^2}$$

Vi har slutligen efter normering:

$$\boxed{\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{x_0(t)}} \sin\left(\frac{n\pi x}{x_0(t)}\right) e^{-i\left(\frac{n^2\pi^2\hbar}{2ma_0^2}\right)t}, \text{ där } c_n = \sqrt{2}\int_0^1 \sin(n\pi z)\,u(z\cdot x_0(0))\,dz}$$

för $x \in [0, x_0(t)]$, $\psi = 0$ annars.

I x-termerna används inte approximationen $x_0(t) \approx a_0$, ty då skulle inte randvillkoren uppfyllas.

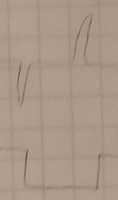
OBS: denna lösning använder antagandet $\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|\left|\frac{df}{dt}\right| << \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|$, som inte var givet i uppgiften

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \quad [1.38]$$

$$V = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a_0 \\ \infty & \text{annars} \end{cases}$$

Anta:

$$V = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a_0 \\ C & \text{annars} \end{cases}$$



Derivatan blir då:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = C(\delta(x-a) - \delta(x))$$

$$\left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = -C\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\rho(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\rho(x)\,dx\right)$$

På grund av symmetri har vi $\rho(x) = \rho(a)$,

så:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\rho(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\rho(x)\,dx$$

Därmed:

$$\left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = -C \cdot 0, \quad \text{och} \quad \lim_{C\to\infty} \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = 0$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\langle p\rangle = C_1}$$

$$[1.33] \quad m\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \langle p\rangle \Rightarrow \boxed{\langle x\rangle = \frac{C_1}{m}\cdot t + C_2}$$

I det klassiska fallet skulle partikeln studsa fram och tillbaka mellan väggarna, d.v.s.

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{a_0}{2}$$

4. Låt oss beräkna $\langle x \rangle$ och $\langle p \rangle$ för varje enskild lösning $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{x_0}} \sin\left(\frac{n\pi x}{x_0}\right) e^{-i\left(\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m x_0^2}\right)t}$.

$$\langle x_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, |\psi_n|^2 dx = \frac{2}{x_0} \int_0^{x_0} x \sin^2\left(\frac{n\pi x}{x_0}\right) dx = \frac{x_0}{2}$$

$$\langle p_n \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \frac{\partial}{\partial x} \psi_n \, dx$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi_n = \sqrt{\frac{2}{x_0}} \cdot \frac{n\pi}{x_0} \cos\left(\frac{n\pi x}{x_0}\right) e^{-i\left(\frac{n\pi^2\hbar^2}{2m x_0^2}\right)t}$$

$$\langle p_n \rangle = -i\hbar \cdot \frac{2}{x_0} \cdot \frac{n\pi}{x_0} \cdot \int_0^{x_0} \sin\left(\frac{n\pi x}{x_0}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{x_0}\right) dx = 0$$

Eftersom ψ är en linjärkombination av ψ_n så måste $\langle x_n \rangle = \langle x \rangle$. Dessutom måste $\langle p \rangle = 0$ om $\langle p_n \rangle = 0$. Därmed har vi:

$$\langle p \rangle = 0, \quad \langle x \rangle = \frac{x_0(t)}{2},$$

precis som i det klassiska fallet