# Undersökning av rörelsemängds- och energibevaring i stötar mellan makroskopiska kroppar

Axel Danielsson, axelda David Tonderski, davton Program: Teknisk Fysik.

Kurs: Experimentell fysik 1 - mätteknik, TIF082, del C.

## Sammandrag

Denna rapport presenterar en undersökning av hur väl en perfekt elastisk stöt mellan makroskopiska kroppar kan realiseras. Genom att utföra stötar i en och två dimensioner på luftskena och luftbord samlades data in och analyserades. Experimenten lyckades som bäst realisera stötar då ca 96% av rörelseenergin bevarades i en dimension. I två dimensioner bevarades som mest 91% av rörelseenergin. I det endimensionella fallet återficks en tydlig minskning av elasticitet med relativ hastighet, vilket var förväntat, eftersom krafterna och därmed förlusterna i stöten ökar med hastighet. I två dimensioner ökade däremot elasticiteten svagt med relativ hastighet. Ingen tydlig förklaring till detta hittades. Dessutom undersöktes hur rullande kulor agerar efter en stöt med en fast vägg, speciellt huruvida de erhåller en vertikal hastighet. Kulor rullades nerför en ramp mot en fast vägg där en stöt inträffade och data om deras rörelse samlades in och analyserades. Som förväntat återficks ett ganska linjärt samband mellan den vertikala och horisontella hastigheten, men eftersom objekten inte hade tröghetsmomentet på formen  $I = kmr^2$  kunde inte dessa linjära samband jämföras med teoretiska värden.

#### Abstract

This report presents an examination of how well a perfect elastic collision between macroscopic bodies can be realized. Data was gathered by performing several collisions between bodies in both one and two dimensions on an air track and an air table and then analyzed. The experiment managed to at best create collisions in which 96% of the kinetic energy was retained in the one-dimensional case. In two dimensions, at most 91% of the kinetic energy was retained. In the one-dimensional case, a clear decrease of elasticity with relative velocity was found, which was to be expected, because the forces and therefore the energy losses in the collision increase with velocity. In two dimensions, however, the elasticity increased slightly with relative velocity. No clear explanation for this was found. Furthermore, the movement of rolling balls when they impact a stationary wall was examined, especially whether the balls gained any vertical velocity after the collision. Balls were rolled down a ramp towards a stationary wall where a collision occurred and data of their movement was collected and analyzed. As expected, a quite linear relation between the vertical and the horisontal velocity was found, but because the moment of inertia of the examined objects could not be written as  $I = kmr^2$ , these relations could not be compared with theoretical values.

# $Inneh \aa ll$

1	Intro	ntroduktion 1				
2	Teor	2.1.1 2.1.2	Grunduppgift	1 1 2		
3	Met	od		2		
	3.1	Försök	ksuppställning	2		
		3.1.1	Grunduppgift	2		
			En dimension	2		
			Två dimensioner	3		
		3.1.2	Extrauppgift	3		
	3.2	Utföra		4		
		3.2.1	Grunduppgift	4		
			En dimension	4		
			Två dimensioner	4		
		3.2.2	Extrauppgift	4		
		3.2.3	MATLAB-analys	4		
4	Resi	ultat		5		
		4.1.1	Grunduppgift	5		
			En dimension	5		
			Två dimensioner	6		
		4.1.2	Extrauppgift	6		
5	Disk	cussior	ı	7		
		5.1.1	Grunduppgift	7		
			En dimension	7		
			Två dimensioner	8		
		5.1.2	Extrauppgift	8		
Re	eferer	ıser		8		
$\mathbf{A}$	Extr	ra data	a	i		
R	Lahl	blogg		iii		
_	-400	∼∸∨ຽຽ				

# 1 Introduktion

Stötar mellan atomer och ännu mindre partiklar som  $\alpha$ -partiklar kan vara mycket nära perfekt elastiska men med makroskopiska kroppar är detta mycket svårare att uppnå [1][2]. Denna rapport redogör för en undersökning av hur väl en perfekt elastisk stöt i både en och två dimensioner kan realiseras med makroskopiska kroppar i en laboratoriemiljö. Energi- och studskoefficienternas beroende på relativ hastighet och andra parametrar analyserades.

Dessutom undersöktes hur rullande kulor agerar vid en stöt med en fast yta, speciellt huruvida de efter stöten erhåller en vertikal hastighet till följd av deras rörelsemängdsmoment. Olika massor, material och hastigheter testades för att bestämma hur dessa påverkade stöten och kulornas vertikala rörelse efteråt.

# 2 Teori

# 2.1.1 Grunduppgift

En stöt är en interaktion mellan två eller fler kroppar då de ändrar riktning och hastighet på grund av krafterna de utsätter varandra för. Dessa stötar kan samlas i två kategorier: elastiska och inelastiska stötar. I en inelastisk stöt omvandlas delar av rörelseenergin till t.ex. värme eller ljud och den totala rörelseenergin efter stöten är då mindre. En helt elastisk stöt är istället en stöt där all rörelseenergi är bevarad. Alla stötar vi upplever i vardagen är till olika grad inelastiska. Ett mått på en stöts elasticitet är studskoefficienten. Den definieras vid en stöt mellan kropp A och kropp b som

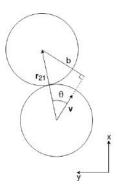
$$e_s = \frac{v_B - v_A}{u_A - u_B} \tag{1}$$

Ett annat mått på elasticitet kallas för energikoefficient och definieras som andelen av rörelseenergin som finns kvar efter stöten:

$$e_E = \frac{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}{m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2} \tag{2}$$

där  $u_A$ ,  $u_B$  är kropparnas hastighet före stöten och  $v_B$ ,  $v_A$  är kropparnas hastighet efter stöten. Både energi- och studskoefficienten antar typiskt värden mellan 0 och 1 där 1 är en helt elastisk stöt. Värden större än 1 kan dock också förekomma när annan energi omvandlas till kinetisk energi i stöten [3]. Studskoefficienten kan bli 0, vilket innebär en helt inelastisk stöt där kropparna sitter fast i varandra efter stöten, och mindre än 0, vilket betyder att kropparna 'passerade igenom' varandra.

I det tvådimensionella fallet används liknande ekvationer som i det endimensionella fallet ovan, men endast de komponenterna av hastigheten som är vinkelräta mot kollisionslinjen används. Eftersom studsen i verkligheten inte är momentan och inte sker i endast en infinitesimal punkt kan detta lätt leda till felaktiga resultat. Förutom den relativa hastigheten kan även kollisionens vinkel spela roll i det tvådimensionella fallet. Vinkelns variation är ekvivalent med variation av b, se figur 1.



Figur 1: Den sökta storheten är b, de kända storheterna är vektorerna  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{r}_{21}$ .

Värdet av b kan beräknas genom trigonometri,  $b = |\mathbf{r}_{21}|\sin(\theta) = |\mathbf{r}_{21}|\sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ . Skalärprodukten används för att få  $\cos(\theta) = \frac{|\mathbf{v}_x||\mathbf{r}_{21_x}|-|\mathbf{v}_y||\mathbf{r}_{21_y}|}{|\mathbf{r}_{21}||\mathbf{v}|}$ , och b kan räknas ut.

I det endimensionella fallet ska alltså den relativa hastigheten samt energi- och studskoefficienten mätas. I två dimensioner ska den relativa hastigheten, b och energikoefficienten mätas.

## 2.1.2 Extrauppgift

När ett objekt med massan m, radien r och tröghetsmomentet  $I = kmr^2$  längs rotationsaxeln rullar nerför ett lutande plan uppnår det enligt energikonserveringsprincipen hastigheten

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(k+1)}}\tag{3}$$

efter att det har förlorat höjden h. Detta är en strikt ökande funktion av h, vilket leder till att man enkelt kan variera hastigheten genom att variera höjden. I härledningen av ekvation 3 antas det att kulan inte glider och luftmotståndet är försumbart.

Om objektet med hastigheten  $v_2$  sedan träffar en vägg studsar det inte bara tillbaka, utan även uppåt. Med antagandet att det inte glider mot väggen bevaras rörelsemängsmomentet runt kollisionspunkten och den vertikala komponenten av hastigheten ges av:

$$v_z = \frac{v_2 k}{k+1}. (4)$$

Några värden av k för vanliga rotationssymetriska objekt visas i tabell 1.

Objekt	k
Kula	$\frac{2}{5}$
Sfär	$\frac{2}{3}$
Cylinder	$\frac{1}{2}$

Tabell 1: Tabellen visar värden av k för en kula, en sfär och en cylinder [1].

I extrauppgiften kommer alltså den horisontella hastigheten innan kollisionen med väggen och den vertikala hastigheten efter kollisionen att mätas. Sambandet mellan dessa kommer att jämföras med kulornas parametrar för att kunna dra slutsatser om deras inverkan.

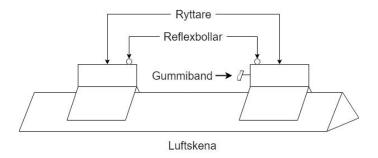
# 3 Metod

# 3.1 Försöksuppställning

## 3.1.1 Grunduppgift

#### En dimension

Försöksuppställningarna bestod av två 500 Hz Qualisys-kameror monterade i taket som kopplades till en dator, två ryttare, en luftskena, två magneter, reflexbollar, ett gummiband som kopplades till en av ryttarna med en hållare. Den ena uppställningen visualiseras i figur 2.

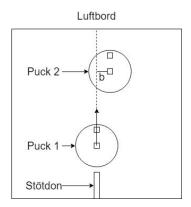


Figur 2: Uppställningen för endimensionell mätning bestod av två ryttare med påklistrade reflexbollar som placerades på en luftskena. Den filmades av två Qualisys-kameror uppifrån.

Den andra uppställningen var likadan som den första, men istället för gummibandet sattes två magneter fast på ryttarna, orienterade så att de repellerade varandra.

### Två dimensioner

Försöksuppställningen bestod av två 500 Hz Qualisys-kameror kopplade till en dator, två puckar med diametern 25 mm och massa 27 g, ett stötdon, ett luftbord och reflextejp. Uppställningen visualiseras i figur 3.



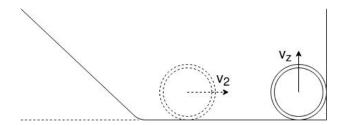
Figur 3: Uppställningen för tvådimensionell mätning bestod av ett stötdon och två puckar, vardera med två påklistrade reflextejpbitar, som placerades på ett luftbord. Den filmades av två Qualisyskameror uppifrån. De små kvadraterna på puckarna i figuren bemärker tejpbitarna.

## 3.1.2 Extrauppgift

Försöksuppställningen bestod av två 500 Hz Qualisys-kameror monterade i taket som kopplades till en dator, en ramp, en vertikal fast yta och 4 olika kulor:

- 1. En innebandyboll en ihålig kula med massan  $22\,\mathrm{g}$ , diametern  $72\,\mathrm{mm}$ , tjockleken  $1\,\mathrm{mm}$  och hade 26 jämt fördelade hål med diameterna  $9\,\mathrm{mm}$ .
- 2. En tennisboll en ihålig kula med massan 53 g, diametern 60 mm och tjockleken 5 mm.
- 3. En träkula med massan 121 g, diametern 69 mm och ett hål med diametern 7 mm genom mitten.
- 4. En träkula med massan 66 g, diametern 60 mm och ett hål med diametern 7 mm genom mitten.

Försöksuppställningen visualiseras i figur 4.



Figur 4: Uppställningen för extrauppgiften bestod av en ramp, ett antal kulor med påklistrade reflextejpband (ringarna på figuren) och en vertikal fast yta. Den filmades av två Qualisys-kameror.

# 3.2 Utförande

# 3.2.1 Grunduppgift

#### En dimension

Qualisys-kamerorna, som var monterade i taket, kalibrerades. Luftskenan placerades på ett bord och ryttarna placerades på den enligt figur 2. Till den ena ryttaren kopplades en hållare med ett gummiband som skulle öka stötens elasticitet. Reflexbollarna fästes på toppen av ryttarna. Sedan skjöts den ena ryttaren framåt medan den andra stod still och datan analyserades i MATLAB. Därefter skjöts den andra ryttaren framåt medan den första stod still. Till sist skjöts båda ryttarna mot varandra. Processen upprepades med varierande hastigheter tills tillräckligt mycket mätdata hade samlats in.

Nästa del av experimentet påbörjades genom att koppla bort gummibandet och sätta fast magneter på ryttarna. Därefter upprepades experimentet enligt samma metod som med gummibandet för att undersöka om stötens elasticitet påverkades av att ryttarna aldrig rör varandra.

#### Två dimensioner

Qualisys-kamerorna, som var monterade i taket, kalibrerades. Puckarna och stötdonet placeras på luftbordet. Två reflextejpbitar fästes på varje puck för att kunna mäta både deras position och rotation. Därefter skjöts pucken vid stötdonet mot den andra och datan analyserades i MATLAB. Detta upprepades med olika hastigheter. Sedan ändrades b genom att flytta på den andra pucken (se figur 3). Den första pucken skjöts igen med olika hastigheter. Hela processen upprepades tills tillräckligt mycket mätdata hade samlats in. Detta försök utfördes för att undersöka hur stötens elasticitet förändras när kropparna kan röra sig fritt i ett plan och dessutom rotera.

# 3.2.2 Extrauppgift

Qualisys-kamerorna, som var monterade i taket, kalibrerades. Rampen placerades på bordet och reflextejp fästes i ett band runt kulan (se figur 4. Rampen delades upp i 14 jämt fördelade höjder för att variera hastigheten på ett kontrollerat sätt. Därefter släpptes kulan på rampen och datan analyserades i MATLAB. Sedan upprepas försöket med olika höjder och olika kulor tills tillräckligt med mätdata samlats in för att kunna analysera den vertikala hastigheten relativt olika kulor och hastigheter.

## 3.2.3 MATLAB-analys

När MATLAB-programmet skrevs upptäcktes att en metod för att hitta kollisionernas början och slut behövdes. För att göra detta beräknades först hastighetensvektorn  $v(k) = \frac{s(k+1)-s(k)}{t(k+1)-t(k)}, 0 < k < n$ , där n är antalet mätpunkter och s(k) är positionen i mätpunkten k. Denna har längden n-1, men på grund av den stora mängden data (n > 1000) är denna skillnad försumbar. MATLAB:s funktion

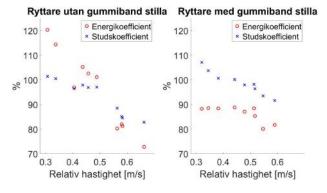
'smoothdata' med metoden 'gaussian' och fönstret 40 användes för att ta bort bruset från hastighetsdatan. Kollisionernas start- och slutpunkter hittades med hjälp av funktionen 'ischange' med metoden 'linear' och 'MaxNumChanges' satt till  $2 \cdot n_{kollisioner}$ . För att hitta hastigheterna innan togs medelvärdet av en tjugondel av intervallet från början av insamlingen av data till kollisionens början. För att hitta hastigheterna efter togs medelvärdet av en tjugondel av intervallet från kollisionens slut till antingen nästa kollision om den fanns eller till mätdatans slut. Den originella, 'brusiga' datan användes för dessa beräkningar.

# 4 Resultat

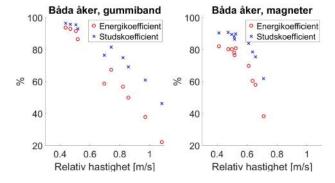
## 4.1.1 Grunduppgift

#### En dimension

Det första experiementet som utfördes var de då en av ryttarna stod stilla. Resultaten för dessa försök återfinns i figur 5. En tydlig avtagande trend då den relativa hastigheten ökar ses i båda försöken, men även värden över 100%, vilket tyder på att energi tillförs utifrån, troligtvis från luftskenan. För att motverka detta utfördes nästa försök med båda ryttarna i rörelse innan stöten och därefter utfördes samma försök med magneter på ryttarna istället för gummiband. Båda resultaten visas grafiskt i figur 6. Även här syns en avtagande trend när hastigheten ökar. Försöken med magneter utfördes med något lägre hastigheter då magneterna hade en tendens att trycka av ryttarna från skenan vid stötar med högre relativ hastighet.



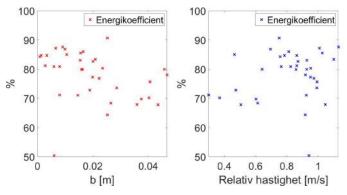
Figur 5: Energikoefficient och studskoefficient (definierade enligt avsnitt 2.1.1) som funktioner av relativ hastighet mellan ryttarna då en av ryttarna stod stilla innan stöten. Till vänster då ryttaren utan gummiband stod stilla och till höger då ryttaren med gummiband stod stilla.

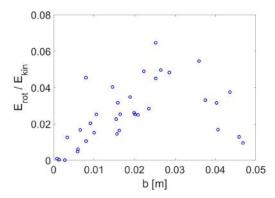


Figur 6: Energikoefficient och studskoefficient (definierade enligt avsnitt 2.1.1) som funktioner av relativ hastighet mellan ryttarna då de båda åker mot varandra innan stöten. Till vänster med gummiband på en av ryttarna och till höger med en magnet på varje ryttare.

#### Två dimensioner

I två dimensioner utfördes försöken med samma puck men med varierande hastigheter och sidledes avstånd b. Resultaten från dessa försök visas i figur 7a. I den första delen, som visar energikoefficient som funkton av avståndet b, kan en avtagande trend då b ökar urskiljas med lite god vilja. Den andra delen, med energikoefficient som funktion av relativ hastighet, tycks visa en ökande trend när den relativa hastigheten ökar. Till höger visas andelen av energin som omvandlas till rotationsenergi efter stöten. Här ser vi att mätserien verkar ha ett maximum vid  $b \approx 0.5b_{max}$ , gå mot 0 vid  $b = b_{max}$  och b = 0.



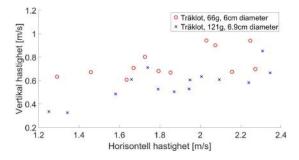


- (a) Energikoefficient som funktion av b och relativ hastighet innan stöten.
- (b) Rotationsenergi dividerad med total energi efter stöten som funktion av b.

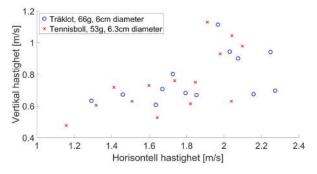
Figur 7: Stötar i 2 dimensioner.

# 4.1.2 Extrauppgift

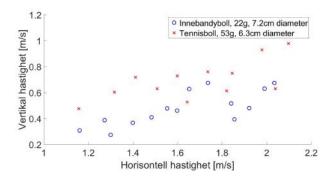
I extrauppgiften utfördes försöken med 4 olika kulor definierade i avsnitt 3.1.2. I alla mätserier observeras en ökande trend mellan den vertikala och den horisontella hastigheten. I figur 8 visas två träkulor med olika massa. Den lättare kulan har överlag en högre vertikal hastighet. Sedan jämförs tennisbollen med det lättare träklotet i figur 9. De har liknande vertikala hastigheter. Till sist jämförs en tennisboll med en innebandyboll i figur 10. Här har tennisbollen konsekvent högre vertikal hastighet än innebandybollen. Till sist visas för varje dataserie de bäst anpassade linjära funktionerna i tabell 2.



Figur 8: Vertikal hastighet efter stöt med vägg som en funktion av horisontell hastighet innan stöten. Jämförelse mellan två träkulor som båda beskrivs i avsnitt 3.1.2.



Figur 9: Vertikal hastighet efter stöt med vägg som en funktion av horisontell hastighet innan stöten. Jämförelse mellan en tennisboll och ett träklot som båda beskrivs i avsnitt 3.1.2.



Figur 10: Vertikal hastighet efter stöt med vägg som en funktion av horisontell hastighet innan stöten. Jämförelse mellan en tennisboll och en innebandyboll som båda beskrivs i avsnitt 3.1.2.

Tabell 2: Tabellen visar för varje objekt k- och m-koefficienterna av de bäst anpassade linjära funktionerna, där  $v_z = k \cdot v_x + m$ . Dessa linjära funktioner ritas ut i figur 11 i appendix A.

Objekt	k	m
Trä, 66 g	0.25	0.31
Trä, 121 g	0.32	-0.03
Innebandy	0.36	-0.1
Tennis	0.46	-0.04

# 5 Diskussion

## 5.1.1 Grunduppgift

#### En dimension

Resultatet i en dimension med en av ryttarna stillastående före stöten visar i figur 5 att vi i båda mätserierna har fått mätningar med mer energi efter stöten än innan. Slutsatsen vi drar från detta är att luftskenan påverkar de olika ryttarna på olika sätt beroende på vilken hastighet de har och därför tillför energi. För att motverka detta utfördes tester då båda ryttarna rörde sig mot varandra med ungefär samma hastighet. Dessa mätningar visualiseras i figur 6. Dessa mätningar tyder på ökande energiförluster när den relativa hastigheten mellan ryttarna innan stöten ökar. Vår slutsats är att detta beror på att gummibandet utsätts för större påfrestningar vid högre hastigheter och därför agerar mer plastiskt. Vid ännu högre hastigeter slår ryttarna i varandra och förlorar ännu mer energi. För magneterna ledde höga hastigheter till att magneterna inte bara tryckte rakt på varandra utan även till att ryttarna studsade till i stötögonblicket. Detta ledde till stora energiförluster och

i vissa fall helt inelastiska stötar när magneterna under stöten började attrahera varandra och höll ihop ryttarna efter stöten. I fallet när båda ryttarna åker fås de maximala värdena av studs- och energikoefficienterna till 96.51% respektive 93.75%, vilket är en nästan helt elastiskt stöt. Detta värdet fås när gummibandet används för experimentet.

## Två dimensioner

Från den första delen av figur 7a kan en minskande trend möjligtvis urskiljas. Den första tanken var att detta verkade rimligt eftersom rotationsenergin intuitivt också borde öka med b. Denna tanke visade sig vara falskt på grund av två skäl. För det första är rotationsenergin i alla mätningar mindre än 7% av den totala energin, och kan därmed inte förklara trenden. För det andra ökar den inte monotont med b, utan verkar ha ett maximum vid  $b \approx 0.5b_{max}$  och gå mot 0 vid b = 0 och  $b = b_{max}$ . Därmed har inte en anledning till elasticitetens minskning med b hittats.

Den andra delen av figur 7a visar att elasticiteten ökar med puckarnas relativa hastighet. Det är inte intuitivt eftersom krafterna, och därmed förlusterna, ökar med den relativa hastigheten. Dessutom säger detta emot resultaten som vi hittade i det endimensionella fallet, där elasticiteten tydligen minskade med den relativa hastigheten. En möjlig förklaring är att de hårda puckarna kräver mycket högre krafter och hastigheter än de mjuka gummibanden för att deformeras såpass mycket att elasticiteten i stöten förändras märkbart. Den tydliga minskningen från en dimension skulle då kunna återfinnas även i två dimensioner men vid högre hastigheter. Det maximala värdet för energikoefficienten blev 90.65%. Detta värde är lägre än i det endimensionella fallet, men är också nära en helt elastisk stöt. Om elasticiteten verkligen ökar med den relativa hastigheten, vilket datan verkar indikera, kan dock elasticiteten lätt göras högre genom att öka hastigheten.

# 5.1.2 Extrauppgift

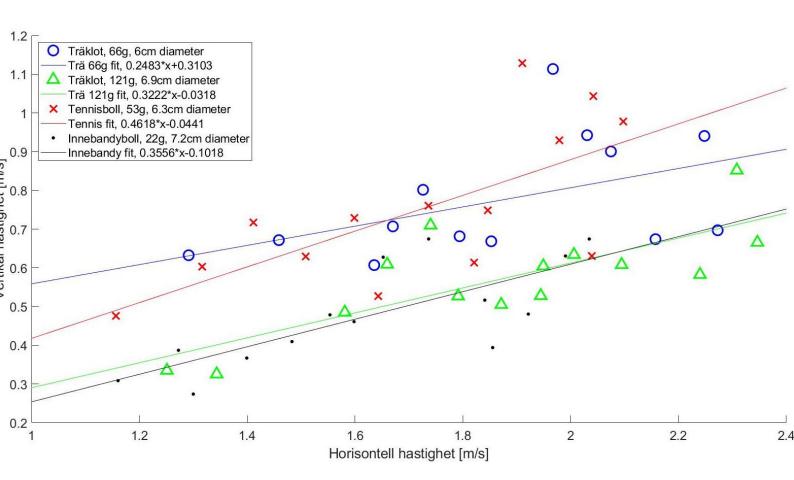
Resultatet för extrauppgiften visualiseras genom tre jämförelser i figurerna 8, 10 och 9. I alla figurerna kan vi notera en ökande trend då hastigheten innan stöten ökar. Detta stämmer väl överens med våra beräkningar i avsnitt 2.1.2. I figur 8 med två kulor av samma material kan vi se att den lättare av de två kulorna konsekvent har en högre vertikal hastighet efter stöten än den tyngre kulan. I figur 9 ligger träklotets och tennisbollens vertikala hastighet på ungefär samma nivå. Detta är något oväntat eftersom tennisbollen är betydligt mer 'studsig' än träklotet. Figur 9 visar att även att ett tyngre träklot har en högre vertikal hastighet än den lättare innebandybollen. Detta beror antaligen på att innebandybollen har ett flertal hål som påverkar friktionen och kan orsaka glidning.

Eftersom varken innebandybollens, tennisbollens eller träklotens tröghetsmoment är på formen  $I = kmr^2$  kan inte värdena i Tabell 2 jämföras med värdena i Tabell 1.

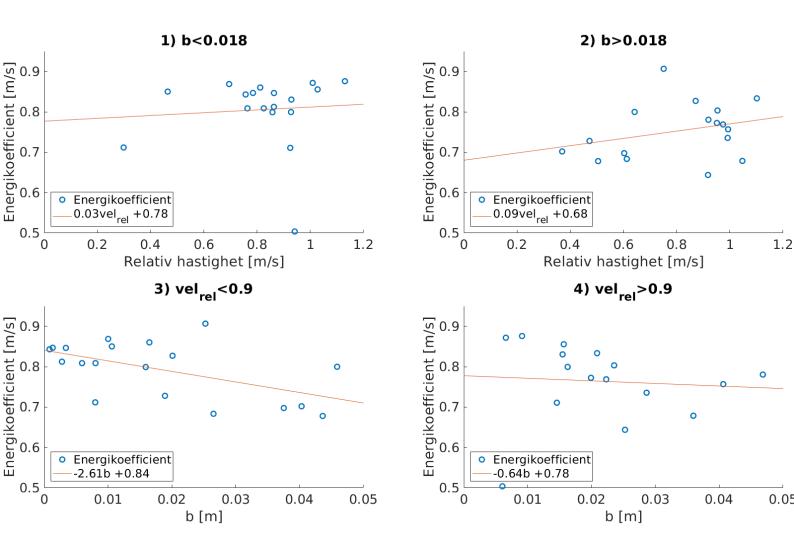
# Referenser

- [1] Kraige L.G. Meriam J.L. *Engineering Mechanics: Dynamics*. 8th SI Edition. John Wiley & Sons Inc. 2016.
- [2] Rutherford E. "The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom [Internet]". I: *Philosophical Magazine* 21.6 (1911 [citerad 14 mars 2019]), s. 669–688. DOI: https://www.lawebdefisica.com/arts/structureatom.pdf.
- [3] Shen et al. "Super-elastic collision of large-scale magnetized plasmoids in the heliosphere [Internet]". I: (2012 [citerad 14 mars 2019]). DOI: goo.gl/T6yh7K.

# A Extra data



Figur 11: Vertikal hastighet som funktion av horisontell hastighet för alla olika bollar som testades i extrauppgiften med tillhörande linjärt anpassade kurvor.



Figur 12: Energikoefficient som funktion av: 1) relativ hastighet för b < 0.018, 2) relativ hastighet för b > 0.018, 3) b för  $vel_{rel} < 0.9$ , 4) b för  $vel_{rel} > 0.9$ . En mycket svagt ökande trend återfinns i de första två mätserierna. En minskande trend syns i mätserie 3) och 4).

# B Labblogg

