Contents

Skapar de nödvändiga matriserna, vektorerna och variablerna

```
%Skapar cell-arrayer med de första Hilbertmatriserna, x-vektorerna,
%b-vektorerna, xhat-vektorerna, fel-vektorerna och residual-vektorerna och
%lägger i de första elementen
H = {hilb(1)};
x = {[1]};
b = {H{1}*x{1}};
xhat = {H{1}\b{1}};
fel = {xhat{1}-x{1}};
r = {b{1}-H{1}*xhat{1}};

%Skapar arrayer med normena av felen, normena av residualen och
%konditionstalen och lägger i de första värdena
normfel = [norm(xhat{1}-x{1})];
normr = [norm(r{1})];

%Anger toleransen som behövs för att beräkna det maximala n-värdet
tol = 1e-2;

%Skapar en array som kommer att innehålla alla n-värden (behövs för att
%plotta mot n)
N = [1];

%Skapar en array som ska innehålla konditionstalen till hilbertmatriserna
condtal = [cond(H{1})];


%Börjar while-loopen från i=2
i = 2;

%Skapar de nödvändiga matriserna, vektorerna och talen för i = 2, ..., n
%till normen av felet är större en sqrt(i)*tol. Termen sqrt(i) kommer från att
%normen av vektorn x är sqrt(k)  och vi är intresserade av det relativa
%felet
while normfel(i-1)/sqrt(i)<tol
    %Fyller ut cell-arrayerna med Hilbertmatriserna, x-vektorerna,
```

```
    %b-vektorerna, xhat-vektorerna, fel-vektorerna och residual-vektorerna
    H{i} = hilb(i);
    %En for-loop skapar x-vektorn för varje i
    x{i} = [1];
    for k = 2:i
        x{i} = [x{i};1];
        k = +k;
    end

    b{i} = H{i}*x{i};
    xhat{i} = H{i}\b{i};
    fel{i} = xhat{i}-x{1};
    r{i} = b{i}-H{i}*xhat{i};

    %Fyller ut arrayerna med normerna av felen och normerna av residualerna
    normfel = [normfel,norm(xhat{i}-x{i})];
    normr = [normr,norm(r{i})];

    %Fyller ut arrayen med alla n-värden
    N = [N,i];

    %Fyller ut arrayen med alla konditionstal
    condtal = [condtal, cond(H{i})];

    i = i+1;
end
n = i-1
%Det maximala n för vilket approximationen är användbar bedöms att vara 12


n =

    12
```

Plottar normen av felen mot n, normen av residualerna mot n, konditionstalen mot n och normen av felen mot konditionstalen

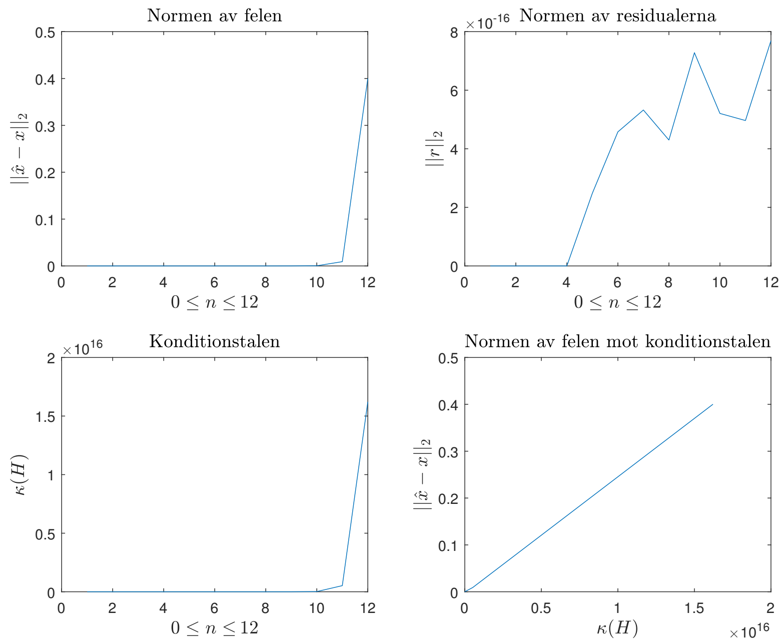
```
%Sätter manuellt figurens storlek
f = figure;
FS = get(f,'Position');
set(f,'Position',[FS(1) FS(2) FS(3)*1.5 FS(4)*1.5])

%Plottar normen av felen mot n
subplot(2,2,1)
plot(N,normfel)
xlabel(['$0 \leq n \leq \,$', num2str(n)],'Interpreter','latex','fontsize',13)
title('$\textnormal{Normen av felen}$','fontsize',13,'Interpreter','latex')
ylabel('$||\hat{x}-x||_2$','Interpreter','latex','fontsize',13)

%Plottar normen av residualerna mot n
subplot(2,2,2)
plot(N,normr)
xlabel(['$0 \leq n \leq \,$', num2str(n)],'Interpreter','latex','fontsize',13)
title('$\textnormal{Normen av residualerna}$','fontsize',13,'Interpreter','latex')
ylabel('$||r||_2$','Interpreter','latex','fontsize',13)

%Plottar konditionstalen mot n
subplot(2,2,3)
plot(N,condtal)
xlabel(['$0 \leq n \leq \,$', num2str(n)],'Interpreter','latex','fontsize',13)
title('$\textnormal{Konditionstalen}$','fontsize',13,'Interpreter','latex')
ylabel('$\kappa(H)$','Interpreter','latex','fontsize',13)

%Plottar normen av felen mot konditionstalen
subplot(2,2,4)
plot(condtal,normfel)
xlabel('$\kappa(H)$','Interpreter','latex','fontsize',13)
title('$\textnormal{Normen av felen mot konditionstalen}$','Interpreter','latex','fontsize',
ylabel('$||\hat{x}-x||_2$','Interpreter','latex','fontsize',13)
```



Slutsatser från graferna

Residualen verkar inte vara ett bra mått på felets storlek i allmänhet. Om man dock plottar till t.ex. n=100 så ser man att när normen av felet blir ovanligt stort så blir också residualen ovanligt stor, residualens kurva följer alltså ungefär normen av felets kurva. Detta fenomen är dock inte sant för n<13. Enligt teorin är residualen ett mått på δb.

Grafen som relaterar normalen av felet till konditionstalet påminner tydligt om en graf till en linjär funktion.

Grafen som relaterar konditionstalet till n verkar vara en exponentialfunktion. Låt oss testa detta genom att ansätta $\kappa = a \cdot e^{b \cdot n}$ och lösa ut a och b genom fit-funktionen i MATLAB för olika n och ta medelvärdet av koefficienterna.

```
k=[];
for i = 2:n
    f=fit(N(1:i)’,condtal(1:i)’,’exp1’);
    k=[k, coeffvalues(f)’];
end
k
a1=mean(k(1,:))
b2=mean(k(2,:))
```

```
k =
```

```
  Columns 1 through 7

    0.0519    0.0262    0.0202    0.0174    0.0157    0.0145    0.0135
    2.9591    3.3014    3.3877    3.4249    3.4458    3.4593    3.4687

  Columns 8 through 11

    0.0128    0.0122    0.0119    0.0201
    3.4757    3.4811    3.4836    3.4359


a1 =

    0.0197


b2 =

    3.3930
```

Koefficienterna verkar alltså vara ungefär a= 0.02, b= 3.4. Som vi ser är det inte mycket varians mellan koefficienterna för de olika n-värdena. Därmed kan vi med ganska stor sannolikhet säga att $\kappa = 0.02 * e^{3.4*n}$.

Relation mellan $||\hat{x} - x||_2$ och $\kappa(H)$, jämförelse med teorin

Vi försöker hitta ett samband mellan condtal och normfel. Figuren ovan visar att det sannolikt är ett linjärt samband för n som bedöms vara rimliga, så vi försöker hitta det sambandet genom polyfit.

Sedan jämför vi med teorin. I boken Numerisk Analys finns sambandet:

$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \kappa * \frac{||\delta b||}{||b||}$

Om vi antar att det finns ett linjärt samband på formen:

$a * \kappa = ||\hat{x} - x|| = ||\delta x||$,

så kan vi sätta in det i den teoretiska formeln och få sambandet:

$\frac{a}{||x||} \leq \frac{||\delta b||}{||b||}$,

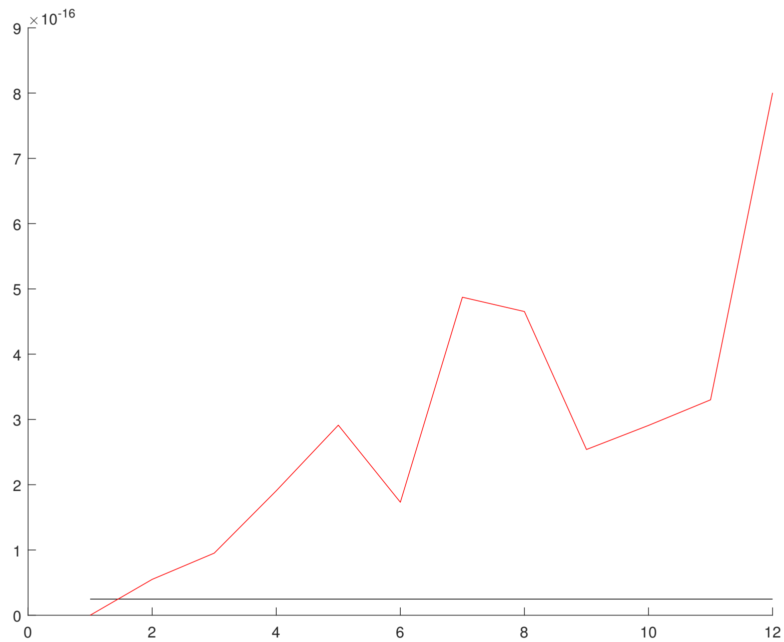
vilket leder till:

$a \leq \frac{||\delta b||*||x||}{||b||}$.

Då kan vi plotta a och $\frac{||\delta b||*||x||}{||b||}$ mot n och lätt kolla om sambandet stämmer.

```
%Vi börjar alltså genom att hitta a med polyfit.
warning('off');
c = polyfit(condtal,normfel,1);
%Vi får att a = 2.4698e-17. Nu måste vi beräkna högerledet. Som vanligt
%börjar vi med att skapa arrayer och lägga in de första värdena. Sedan
%använder vi en for-loop för att beräkna de resterande värdena.
K = [norm(H{1}*(xhat{1}-x{1}))*norm(x{1})/norm(b{1})];
a = [2.4698e-17];
for i = 2:n
    K = [K, norm(H{i}*(xhat{i}-x{i}))*norm(x{i})/norm(b{i})];
    a = [a,2.4698e-17];
end
%Nu plottar vi a mot N (svart) och K mot N (rött). Om vårt samband stämmer
%så ska den svarta kurvan ligga 'under' den röda.

clf
hold on
plot(N,a, 'black')
plot(N,K, 'red')
```



Som vi ser ligger den röda funktionen ovanför den svarta för alla $n \geq 2$. Resultatet stämmer inte för n=1 eftersom då är felet exakt lika med 0.