

FUF050 Datoruppgift

Hur stor är en atomkärna?

David Tonderski
davton@student.chalmers.se

Fredrik Nyström Lindé
lindef@student.chalmers.se

2 juni 2020

Sammanfattning

Med syfte att bestämma storleken på en atomkärna analyseras data från elastisk spridning av elektroner mot ^{40}Ca . Genom att anpassa parametrarna hos en sfärisk protondensitet till datan återfås en laddningsradie på 3.537 518 fm, med ett relativt fel på 1.7% jämfört med det vedertagna värdet.

1 Teori och metod

I denna rapport beskrivs processen att bestämma storleken på en atomkärna. Detta grundas på data från ett experiment där det differentiella tvärsnittet har uppmätts vid elastisk spridning av elektroner mot ^{40}Ca . Genom att söka efter tre optimala parametrar för atomkärnans protondensitet kan den experimentella datan reproduceras och utifrån det kan rms-laddningsradien beräknas.

Neutrontätheten i en kärna visar sig vara väldigt svår att mäta då de laddningsfria neutronerna varken växelverkar med protoner eller elektroner. Vi fokuserar därmed på protondensiteten $\rho_{ch}(\mathbf{r})$, som kan beräknas utifrån elektronspridning. Eftersom ^{40}Ca har både 20 (ett "magiskt tal") protoner och neutroner så fyller de helt $1d_{3/2}$ -tillstånden och därför kan vi ansätta en sfärisk protondensiteten

$$\rho_{ch}(r, \mathbf{X}) = \frac{\rho_{ch}^0}{1 + e^{(r-a)/b}}, \quad (1)$$

där de okända värdena samlas i vektorn $\mathbf{X} = [\rho_{ch}^0, a, b]$. Uppgiften blir då att hitta det värdet på \mathbf{X} som bäst reproducerar uppmätta spridningstvårsnitt för den elastiska reaktionen $e^- + ^{40}\text{Ca} \longrightarrow e^- + ^{40}\text{Ca}$. I LAB-systemet inkommer elektronerna med den totala energin 250 MeV mot ett fixerat strålmål bestående av ^{40}Ca . För det optimala värdet \mathbf{X}_* kan vi sedan beräkna rms-radien som

$$r_{rms} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \frac{4\pi}{Ze} \int r^2 \rho_{ch}(r, \mathbf{X}_*) dr \quad (2)$$

och jämföra det erhållna värdet med det vedertagna $r_{rms} = 3.4776(19)$ fm. Denna integral evalueras numeriskt med hjälp av Riemannsummor. För att den numeriska beräkningen ska konvergera används $dr = 0.01$ fm, och summan beräknas från 0 till 100 fm.

Det differentiella tvärsnitt som krävs för att en elektron ska spridas med en vinkel θ från det stillastående strålmålet kan i CM-systemet beskrivas med Mott-tvärsnittet

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{Z_p^2 Z_t^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4\beta^4 E^2 \sin^4(\theta/2)} [1 - \beta^2 \sin^4(\theta/2)], \quad (3)$$

där konstanterna $\alpha = 7.297\,352\,533 \cdot 10^{-3}$, $\hbar = 1.054\,571\,60 \cdot 10^{-34}$ Js, $c = 299\,792\,458$ m s $^{-1}$ är tagna ur Physics Handbook [1]. Antal laddningar för projektil och target är $Z_p = 1$ och $Z_t = 20$. Denna ekvation gäller som sagt för CM-systemet men eftersom strålmålet är fixerat i LAB-systemet, och dess kärnor är mycket tyngre än elektronerna (nästan 5 storleksordningar), så kommer även masscentrum att vara approximativt stillastående även i LAB-systemet. Vi kan därför använda oss av dessa uttryck och approximativt beskriva reaktionen i LAB-systemet.

Vidare kan vi anta att elektronen och atomkärnan bara växelverkar en gång och kan därför beskriva det teoretiska spridningstvårsnittet som

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Theo}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q}^2)|^2, \quad (4)$$

där $F(\mathbf{q}^2)$ är vår formfaktor. Denna är viktig eftersom den tar hänsyn till att vår atomkärna faktiskt inte är punktformig. Den definieras som fouriertransformen av laddningsfördelningen och från ekvation (1) får vi då

$$F(\mathbf{q}^2; \mathbf{X}) = \frac{4\pi\hbar}{Ze q} \int_0^\infty r \rho_{ch}(r; \mathbf{X}) \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr, \quad (5)$$

där rörelsemängden $\mathbf{q}^2 = 4p^2 \sin^2(\theta/2)$ är skillnaden i rörelsemängd för inkommande och spridd elektron. Även integralen i ekvation (5) evalueras likt tidigare med hjälp av Riemannsummor.

För att få ett mått på skillnaden mellan tvärsnitten \mathcal{T} som föreslås av vår modell och tvärsnitten \mathcal{E} som mäts upp experimentellt används reducerad χ^2 statistik. Vi får då

$$\chi^2(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{N_\theta} \left(\frac{\mathcal{T}_i(\mathbf{X}) - \mathcal{E}_i}{\delta_i} \right)^2, \quad (6)$$

där δ_i är mätfelet för mätpunkten i , och $N_\theta = 31$ är antalet mätpunkter. Det antas här att datapunkterna är okorrelerade, vilket inte är sant. Detta kan innebära att mätfelet underskattas, men det ligger utanför den här rapportens omfattning att ta hänsyn till korrelation mellan datapunkterna. Vi har också ett bivillkor

$$Z_t = \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty r^2 \rho_{ch}(r, \mathbf{X}) dr, \quad (7)$$

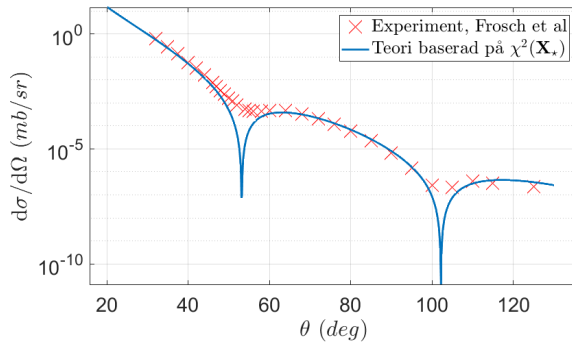
där $Z_t = 20$ eftersom vi vet att kärnan har 20 protoner. Vi tar hänsyn till detta genom att lägga till termen $(Z_t - \frac{4\pi}{e} \int_0^\infty r^2 \rho_{ch}(r, \mathbf{X}) dr) \cdot 10^6$ till χ^2 -termen. Om detta bivillkor inte tas med så kommer vi att hitta lösningar för kärnor som inte har 20 protoner. Den slutliga χ^2 termen minimeras sedan med avseende på \mathbf{X} med hjälp av MATLABs *fminsearch*. Startpunkterna approximeras från figur 2.

2 Resultat och diskussion

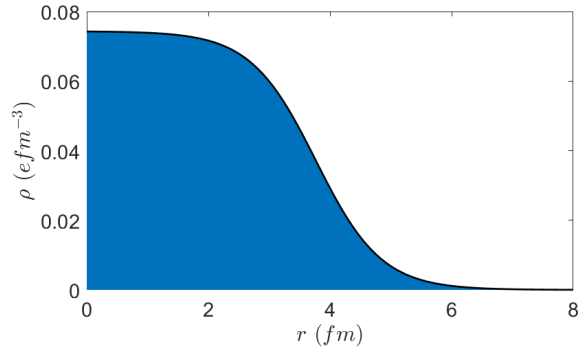
Det optimala värdet på \mathbf{X}_\star visas i tabell 1. Dessa värden ger upphov till en rms-laddningsradie för ^{40}Ca som är $r_{rms} \approx 3.537518$ fm vilket skiljer sig från det angivna $r_{rms} = 3.4776(19)$ fm. De leder även till kurvorna för teoretiskt tvärsnitt och laddningstäthet som syns i figur 1 respektive 2.

Tabell 1: Optimala värden på \mathbf{X}_\star .

ρ_{ch}^0	a	b
0.07431523 e fm ⁻³	3.767905 fm	0.5377656 fm



Figur 1: Teoretisk beskrivning av tvärsnittet för elastisk spridning av 250 MeV elektroner mot ^{40}Ca .



Figur 2: Laddningstäthet i ^{40}Ca enligt ekvation 1.

Vår rms-laddningsradie har alltså ett relativt fel på $\approx 1.7\%$, detta kommer till en viss grad från felen i de uppmätta tvärsnitten (som ligger på ungefär 8% i medelvärde). Dessutom har de uppmätta vinklarna också någon felmarginal, vilket ytterligare ökar den slutliga felmarginalen. Vi har dock många mätpunkter, vilket till en viss grad kommer betyda att felen “tar ut” varandra. Elektronenergierna anges som 250 MeV, vilket skulle kunna innebära att vi bara har två värdesiffror. Detta tillför ett fel på maximalt 2%. Dessutom har vi gjort ett antal approximationer som kan vara felkällor, som till exempel att datapunkterna inte är okorrelerade. Både toleransen vid sökningen efter funktionsminimum och integrationsdiskretiseringen ger upphov till fel som är storleksordningar mindre än de vi har nämnt, så dessa kan utan inskränkning försummas.

Referenser

- [1] C. Nordling och J. Österman, *Physics Handbook for Science and Engineering*. Professional Publishing House, 2006, ISBN: 9789144044538.

A MATLAB-kod

```

%% Laddar in data
clc, clf, clear, close all
format long
data = [32.0      6.34E-1      0.45E-1;
        35.0      2.77E-1      0.20E-1;
        37.5      1.40E-1      0.10E-1;
        40.0      5.89E-2      0.35E-2;
        42.0      3.25E-2      0.30E-2;
        44.0      1.61E-2      0.10E-2;
        46.0      7.95E-3      0.80E-3;
        47.0      5.32E-3      0.50E-3;
        48.0      3.46E-3      0.25E-3;
        49.0      2.40E-3      0.25E-3;
        50.0      1.62E-3      0.15E-3;
        51.0      1.19E-3      0.10E-3;
        52.0      8.27E-4      0.40E-4;
        54.0      5.38E-4      0.40E-4;
        55.0      4.71E-4      0.50E-4;
        56.0      4.32E-4      0.30E-4;
        58.0      4.50E-4      0.45E-4;
        60.0      4.82E-4      0.30E-4;
        64.0      4.54E-4      0.30E-4;
        68.0      3.24E-4      0.25E-4;
        72.0      2.11E-4      0.15E-4;
        76.0      1.18E-4      0.10E-4;
        80.0      6.12E-5      0.40E-5;
        85.0      2.23E-5      0.15E-5;
        90.0      6.50E-6      0.45E-6;
        95.0      1.42E-6      0.10E-6;
        100.0     2.70E-7      0.35E-7;
        105.0     2.13E-7      0.25E-7;
        110.0     3.92E-7      0.45E-7;
        115.0     3.13E-7      0.55E-7;
        125.0     2.21E-7      0.30E-7];

%% Nödvändiga konstanter
theta = data(:,1);           %deg
crosssection = data(:,2)*1e-31; %m^2/sr
error = data(:,3)*1e-31;     %m^2/sr

Z_t = 20;
epsilon = 1e-6;
hbar = 1.05457160e-34;       %Js
e = 1.60217646e-19;          %C
alpha = 7.297352533e-3;
c = 299792458;               %m/s
MeV = 1.6021765e-13;         %J
E = 250 .* MeV;              %J
me = 9.1093819e-31;          %kg
beta = sqrt(1-me.^2*c.^4./E.^2);

v = beta.*c;                 %m/s
p = me.*v./(sqrt(1-beta.^2)); %kg*m*s;
q = 2.*p.*sind(theta./2);    %kg*m*s

%% Optimering
X0 = [1.1e25,4e-15,0.55e-15];
fun = @(X) chi_squared(X, theta, crosssection, error, hbar, Z_t, c, beta,...
    E, alpha, q, e) + ((Z_condition(X,e)- Z_t)./epsilon).^2;

options = optimset('PlotFcns',@optimplotfvallog, 'MaxFunEvals', 1e6, 'MaxIter',1e6);
tic
x = fminsearch(fun, X0,options);
toc

%% Plot 2a
thetaplot2a = linspace(20,130, 1000);
theo = zeros(size(thetaplot2a));
qplot2a = 2.*p.*sind(thetaplot2a./2);

for i = 1:length(thetaplot2a)
    theo(i) = theo_crosssection(thetaplot2a(i), x, hbar, Z_t, c, beta, E, alpha, qplot2a(i), e);
end

figure(1)

```

```

clf
semilogy(theta, crosssection*1e31, 'rx', 'MarkerSize', 20)
hold on
semilogy(thetaplot2a, theo*1e31, 'LineWidth', 2)
xlabel('\theta$ $(deg)$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('d$\sigma$/d$\Omega$ $(mb/sr)$', 'Interpreter', 'latex')
set(gca, 'FontSize', 22)
grid
set(gca, 'YMinorTick', 'off')
legend('Experiment, Frosch et al', 'Teori baserad p\aa \ $\chi^2(\mathbf{X\_star})$', 'Interpreter', '↵
    latex', 'Interpreter', 'latex')

%% Plot 2b
r_linspace = linspace(0,8e-15);
rho_linspace = rho_ch(r_linspace, x)*10^(-45)/e;

figure(2)
clf
hold on
area(r_linspace*10^15, rho_linspace, 'EdgeAlpha', 0)
plot(r_linspace*10^15, rho_linspace, 'LineWidth', 2, 'Color', 'black')
xlabel('$r$ $(fm)$', 'Interpreter', 'latex')
ylabel('$\rho$ $(e fm^{-3})$', 'Interpreter', 'latex')
set(gca, 'FontSize', 22)
box on

%% Skriver ut värden
r_rms = sqrt(4*pi/(Z_t*e)*integral(@(r) r.^4.*rho_ch(r,x), 0, 1e-13));
disp(strcat('r_rms =', {' '}, num2str(r_rms*10^15, '%.7f'), ' fm'))
disp(strcat('rho_ch =', {' '}, num2str(x(1)*10^-45/e, '%.7f'), ' e/fm^3'))
disp(strcat('a =', {' '}, num2str(x(2)*10^15, '%.7f'), ' fm'))
disp(strcat('b =', {' '}, num2str(x(3)*10^15, '%.7f'), ' fm'))
%% Nödvändiga funktioner
function chi = chi_squared(X, theta, crosssection, error, hbar, Z_t, c, beta, E, alpha, q, e)
    sum = 0;
    for i = 1:size(theta)
        theo = theo_crosssection(theta(i), X, hbar, Z_t, c, beta, E, alpha, q(i), e);
        sum = sum + ((theo - crosssection(i))./error(i)).^2;
    end
    chi = sum;
end

function theo = theo_crosssection(theta, X, hbar, Z_t, c, beta, E, alpha, q, e)
    mott = mott_crosssection(theta, hbar, Z_t, c, beta, E, alpha);
    F = form_factor(q, X, hbar, e, Z_t);
    theo = mott * (abs(F))^2;
end

function Z = Z_condition(X, e)
    syms r
    Z_integral = 0;
    r = 0;
    dr = 1e-17;
    while r < 1e-13
        Z_integral = Z_integral + r.^2.*rho_ch(r, X).*dr;
        r = r + dr;
    end
    Z = 4*pi/e * Z_integral;
end

function rho = rho_ch(r, X)
    rho_ch_0 = X(1);
    a = X(2);
    b = X(3);
    rho = rho_ch_0./(1+exp((r-a)./b));
end

function mott = mott_crosssection(theta, hbar, Z_t, c, beta, E, alpha)
    thetarad = deg2rad(theta);
    mott = Z_t.^2 .* alpha.^2 .* hbar.^2 .* c.^2 ./ (4.*beta.^4.*E.^2.*...
        (sin(thetarad./2)).^4).* (1 - beta.^2.*(sin(thetarad./2)).^2);
end

function F = form_factor(q, X, hbar, e, Z_t)
    syms r
    F_integral = 0;
    r = 0;
    dr = 1e-17;
    while r < 1e-13
        F_integral = F_integral + r.* rho_ch(r,X).*sin(q.*r./hbar).*dr;
    end

```

```
        r = r + dr;  
    end  
  
    F = 4.*pi.*hbar./(Z_t.*e.*q).* F_integral;  
end
```