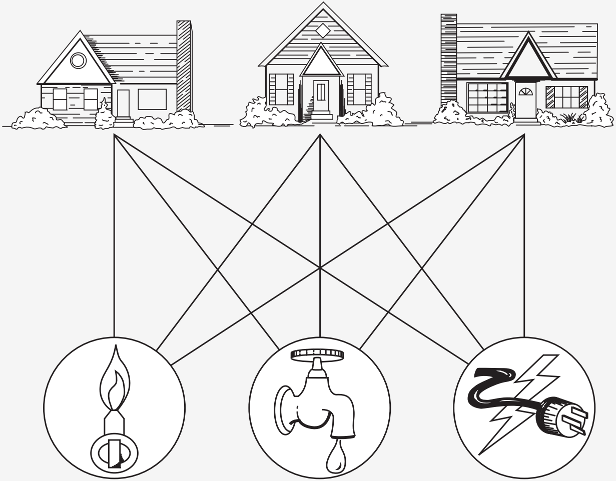
Đồ thị phẳng & Tô màu đồ thị

Trần Vĩnh Đức

Ngày 10 tháng 1 năm 2017

Nội dung

Giới thiệu



Đồ thị phẳng

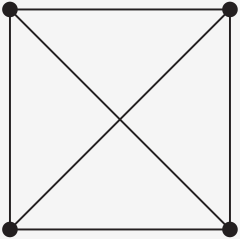
Định nghĩa

Một đồ thị được gọi là *phẳng* nếu ta *có thể* vẽ nó trên mặt phẳng mà không có cạnh nào cắt nhau. Hình vẽ như thế gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị.

Đồ thị phẳng

Định nghĩa

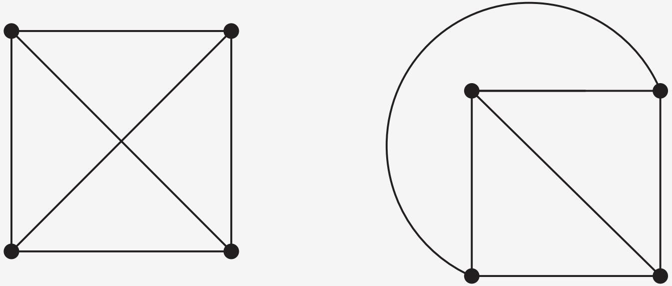
Một đồ thị được gọi là *phẳng* nếu ta *có thể* vẽ nó trên mặt phẳng mà không có cạnh nào cắt nhau. Hình vẽ như thế gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị.



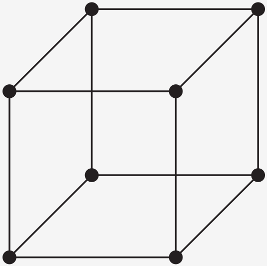
Đồ thị phẳng

Định nghĩa

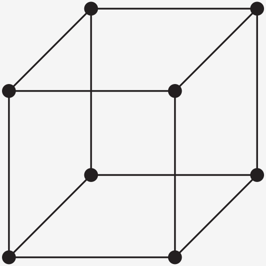
Một đồ thị được gọi là *phẳng* nếu ta *có thể* vẽ nó trên mặt phẳng mà không có cạnh nào cắt nhau. Hình vẽ như thế gọi là một biểu diễn phẳng của đồ thị.

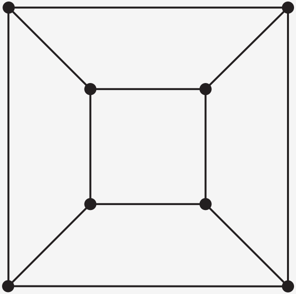


Ví dụ



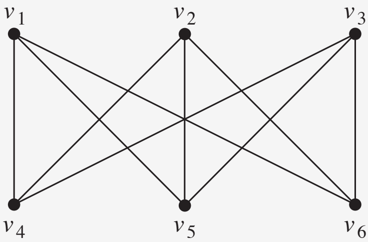
Ví dụ





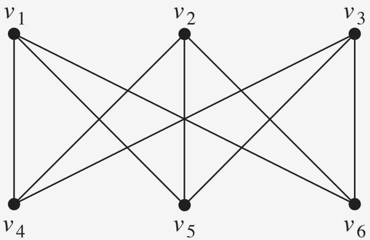
Ví dụ

Đồ thị $K_{3,3}$:

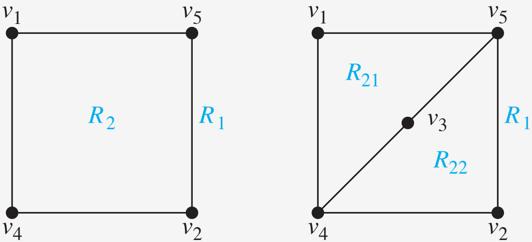


Ví dụ

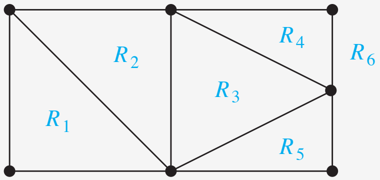
Đồ thị $K_{3,3}$:



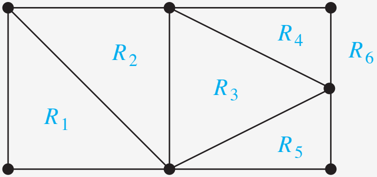
không phẳng vì



- Euler chứng minh rằng mọi biểu diễn phẳng của một đồ thị đều chia mặt phẳng thành cùng số miền như nhau.



- Euler chứng minh rằng mọi biểu diễn phẳng của một đồ thị đều chia mặt phẳng thành cùng số miền như nhau.



Định lý (Công thức Euler)

Gọi G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh và v đỉnh. Gọi r là số miền trong biểu diễn phẳng của G. Khi đó $r = e - v + 2$.

Ví dụ

Xét một đơn đồ thị phẳng liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Ví dụ

Xét một đơn đồ thị phẳng liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

- Tổng bậc bằng $3v = 3 \times 20 = 60$
- Số cạnh $e =$

Ví dụ

Xét một đơn đồ thị phẳng liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

- Tổng bậc bằng $3v = 3 \times 20 = 60$
- Số cạnh $e = 30$

Ví dụ

Xét một đơn đồ thị phẳng liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

- Tổng bậc bằng $3v = 3 \times 20 = 60$
- Số cạnh $e = 30$
- Theo công thức Euler

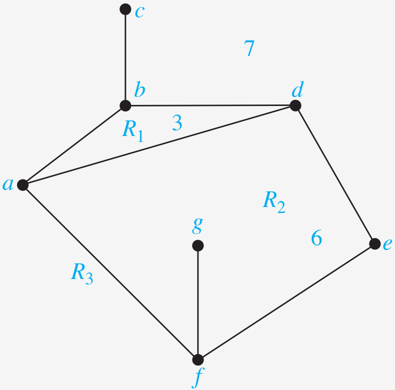
$$r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$$

Hệ quả

Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh, trong đó $v \geq 3$, thì $e \leq 3v - 6$.

Hệ quả

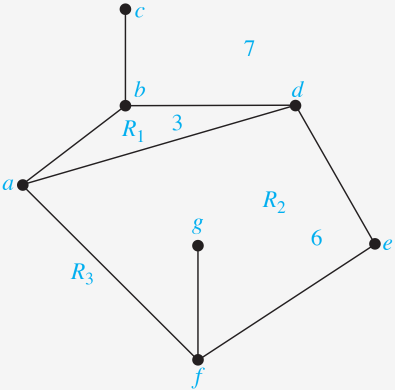
Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh, trong đó $v \geq 3$, thì $e \leq 3v - 6$.



- *Bậc* của một miền là số cạnh trên biên của miền đó.

Hệ quả

Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông với e cạnh, v đỉnh, trong đó $v \geq 3$, thì $e \leq 3v - 6$.



- *Bậc* của một miền là số cạnh trên biên của miền đó.
- Bậc của mỗi miền ít nhất phải bằng 3.
- Tổng bậc các miền bằng bao nhiêu cạnh?

Chứng minh.

- Tổng bậc các miền

$$\sum_{R} deg(R) = 2e \geq 3r$$

Chứng minh.

- Tổng bậc các miền

$$\sum_R deg(R) = 2e \geq 3r$$

Vậy ta có $2e/3 \geq r$.

Chứng minh.

- Tổng bậc các miền

$$\sum_R deg(R) = 2e \geq 3r$$

  Vậy ta có $2e/3 \geq r$.

- Theo công thức Euler

$$r = e - v + 2 \leq 2e/3.$$

Chứng minh.

- Tổng bậc các miền

$$\sum_R deg(R) = 2e \geq 3r$$

Vậy ta có $2e/3 \geq r$.

- Theo công thức Euler

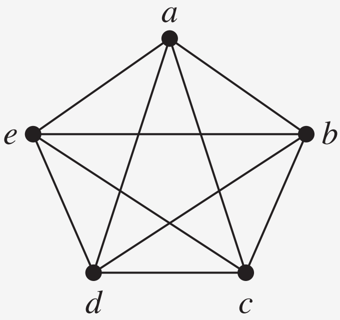
$$r = e - v + 2 \leq 2e/3.$$

- Kết luận $e \leq 3v - 6$.

$\square$

Bài tập

- Dùng hệ quả trước, chỉ ra rằng đồ thị K_5 không phẳng.



Hệ quả

Nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông thì G có một đỉnh bậc không vượt quá 5.

Chứng minh.

Dùng hệ quả trước & Định lý bắt tay. $\square$

Hệ quả

Nếu một đơn đồ thị phẳng liên thông có e cạnh, v đỉnh trong đó $v \geq 3$ và không có chu trình độ dài 3 thì $e \leq 2v - 4$.

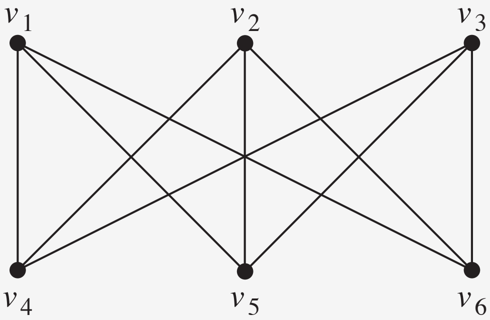
Chứng minh.

- Nếu không có chu trình độ dài 3 thì bậc của mỗi miền ≥ 4.
- Bài tập: Chứng minh tiếp hệ quả này.

$\square$

Bài tập

- Dùng hệ quả trước, hãy chứng minh rằng đồ thị $K_{3,3}$ không phẳng?



Định nghĩa

Độ dài của chu trình ngắn nhất trong đồ thị được gọi là ***chu vi nhỏ nhất*** của đồ thị đó.
Nếu như đồ thị không tồn tại chu trình, thì chu vi nhỏ nhất của G được định nghĩa bằng ∞.

Định lý (Bất đẳng thức cạnh đỉnh)

Xét đồ thị phẳng liên thông với v đỉnh và e cạnh và có chu vi nhỏ nhất g thỏa mãn $3 \leq g < \infty$. Khi đó

$$e \leq \frac{g}{g-2}(v-2).$$

Bài tập

Dùng bất đẳng thức cạnh đỉnh để chứng minh rằng $K_{3,3}$ và K_5 không phải đồ thị phẳng.

Chứng minh bất đẳng thức cạnh đỉnh

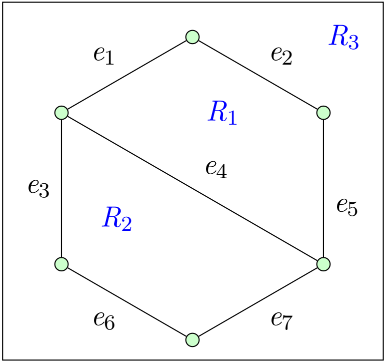
- Xét $G = (V, E)$ là đồ thị phẳng liên thông với chu vi nhỏ nhất $3 \leq g \leq \infty$.
- Đặt tập cạnh $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_t\}$.
- Xét một biểu diễn phẳng bất kỳ của G với ℓ miền là

$$\{R_1, R_2, \ldots, R_\ell\}.$$

- Xây dựng bảng $X = (x_{ij})$ gồm t hàng và ℓ cột như sau

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } e_i \text{ là một cạnh trên biên của của miền } R_j \\ 0 & \text{trong trường hợp ngược lại} \end{cases}$$

Ví dụ



	R_1	R_2	R_3
e_1	1	0	1
e_2	1	0	1
e_3	0	1	1
e_4	1	1	0
e_5	1	0	1
e_6	0	1	1
e_7	0	1	1

- Mỗi hàng có nhiều nhất 2 số 1. Tại sao?
- Mỗi cột có ít nhất g số 1. Tại sao?

Chứng minh (tiếp)

- Mỗi cạnh chỉ nằm trên biên của nhiều nhất hai miền, nên mỗi hàng của X có nhiều nhất hai số 1.
- Các cạnh trên biên của mỗi miền tạo ra một chu trình trong G, nên mỗi cột có ít nhất g số một.
- Đặt

$$s := \text{số lượng số } 1 \text{ trong } X$$

ta được

$$g\ell \leq s \leq 2t.$$

với ℓ là số miền và t là số cạnh.

Chứng minh (tiếp)

Kết hợp với công thức Euler

$$\ell = t - |V| + 2$$

ta được

$$g\ell \;=\; g\ell - g|V| + 2g \;\leq\; 2t$$

Vậy thì

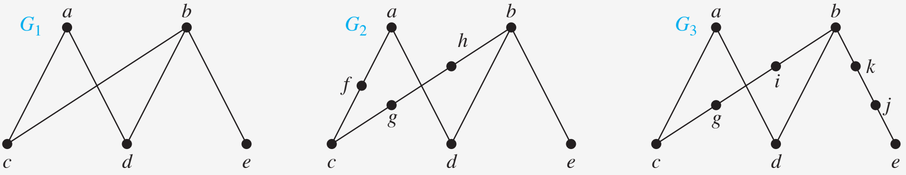
$$t(g-2) \leq g(|V|-2) \quad \Longleftrightarrow \quad |E| \leq \frac{g}{g-2}(|V|-2)$$

Ta hoàn thành chứng minh của bất đẳng thức cạnh đỉnh.

Hai đồ thị đồng phôi

Định nghĩa

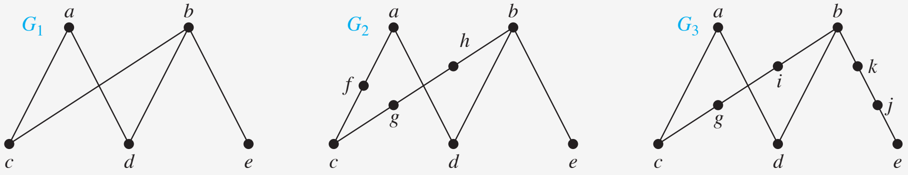
- Phép toán loại bỏ cạnh $\{u, v\}$ và thêm một đỉnh mới w cùng hai cạnh $\{u, w\}, \{w, v\}$ gọi là *phép phân chia sơ cấp*.



Hai đồ thị đồng phôi

Định nghĩa

- Phép toán loại bỏ cạnh $\{u, v\}$ và thêm một đỉnh mới w cùng hai cạnh $\{u, w\}, \{w, v\}$ gọi là *phép phân chia sơ cấp*.
- Hai đồ thị gọi là *đồng phôi* nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy phép phân chia sơ cấp.



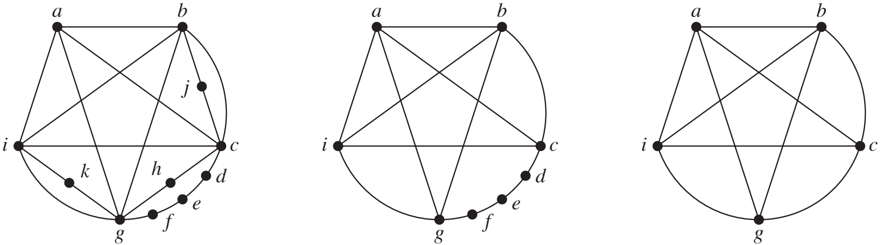
Định lý (Kuratowski)

Đồ thị là không phẳng nếu và chỉ nếu nó chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ *hoặc* K_5.

Định lý (Kuratowski)

Đồ thị là không phẳng nếu và chỉ nếu nó chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5.

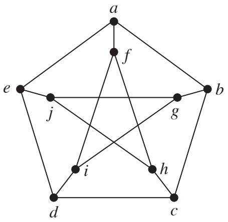
Ví dụ



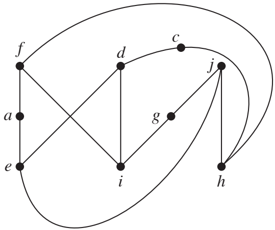
G H K_5

Đồ thị Petersen

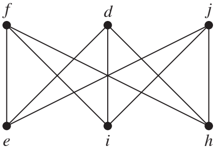
Ví dụ



(a)



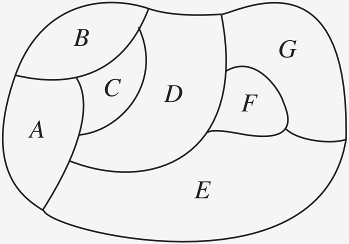
(b) H

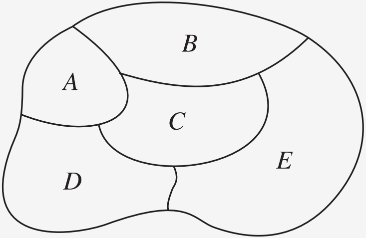


(c) $K_{3,3}$

Nội dung

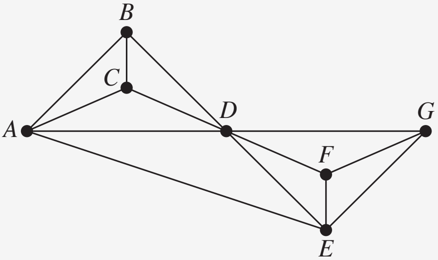
Tô màu bản đồ

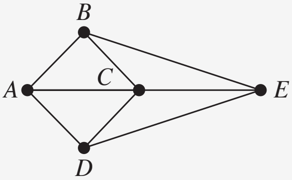




Hình: Hai bản đồ

Tô màu đồ thị





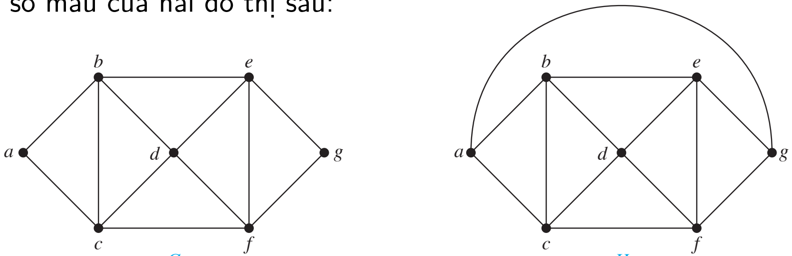
Hình: Các đồ thị của hai bản đồ trước

Định nghĩa

- *Tô màu* một đơn đồ thị là một cách gán màu cho mỗi đỉnh sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau.
- *Số màu* của đồ thị là số lượng màu ít nhất cần thiết để tô màu đồ thị này.

Ví dụ

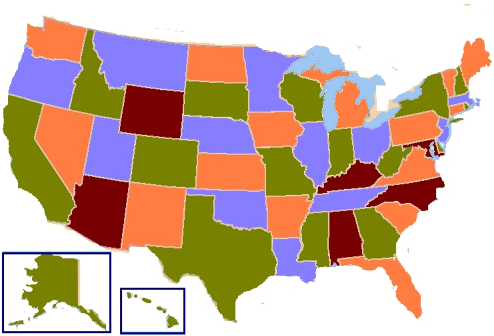
Tìm số mầu của hai đồ thị sau:



G H

Định lý (Bốn màu)

Số màu của một đồ thị phẳng không lớn hơn 4.



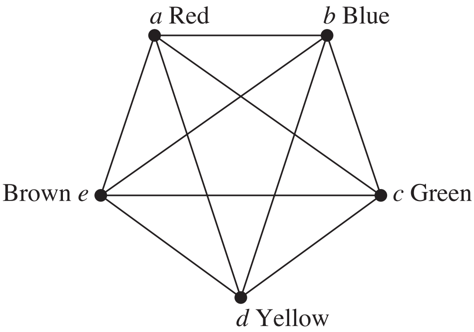
Hình: từ wikipedia

Ví dụ

Tìm số màu của đồ thị K_n.

Ví dụ

Tìm số màu của đồ thị K_n.

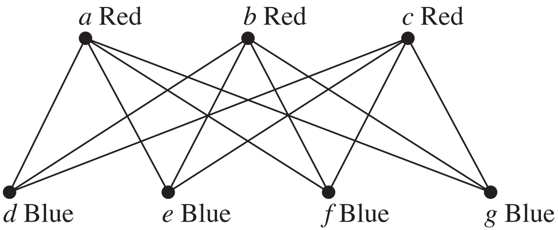


Ví dụ

Tìm số màu của đồ thị hai phần đầy đủ $K_{m,n}$.

Ví dụ

Tìm số màu của đồ thị hai phần đầy đủ $K_{m,n}$.

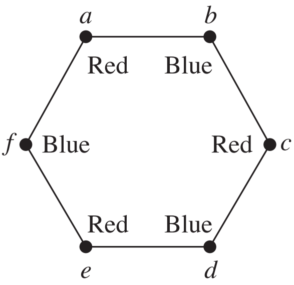


Ví dụ

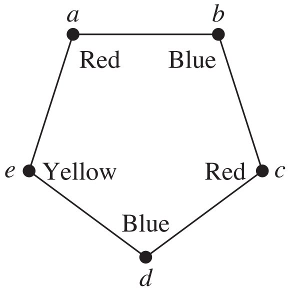
Tìm số màu của đồ thị vòng C_n.

Ví dụ

Tìm số màu của đồ thị vòng C_n.



C_6



C_5

Bài toán lập lịch

Lập lịch thi cho một trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng lúc.

- Mô hình bài toán bằng đồ thị.

Bài toán lập lịch

Lập lịch thi cho một trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng lúc.

- Mô hình bài toán bằng đồ thị.
- Các đỉnh là các môn thi.

Bài toán lập lịch

Lập lịch thi cho một trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng lúc.

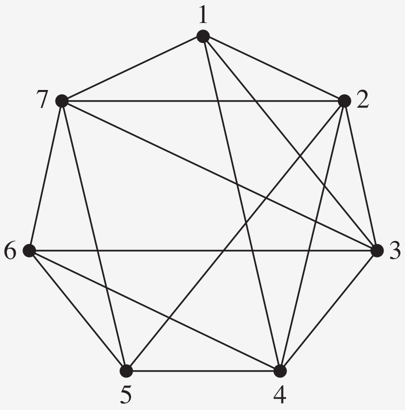
- Mô hình bài toán bằng đồ thị.
- Các đỉnh là các môn thi.
- Có cạnh giữa hai đỉnh i và j nếu tồn tại một sinh viên phải thi cả hai môn i và j.

Bài toán lập lịch

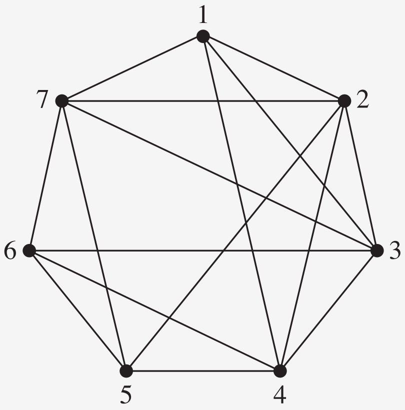
Lập lịch thi cho một trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng lúc.

- Mô hình bài toán bằng đồ thị.
- Các đỉnh là các môn thi.
- Có cạnh giữa hai đỉnh i và j nếu tồn tại một sinh viên phải thi cả hai môn i và j.
- Một lịch thi tương ứng với một cách tô màu đồ thị.

Lập lịch



Lập lịch



Đợt thi	Môn thi
I	$1, 6$
II	2
III	$3, 5$
IV	$4, 7$

Phân chia kênh

Bài toán

- Các kênh truyền hình từ số 2 tới số 13 được phân chia cho các đài truyền hình ở Bắc Mỹ
- sao cho các đài truyền hình cách nhau không quá 150 dặm phải phát ở những kênh khác nhau.
- Hãy tìm cách gán kênh cho mỗi đài truyền hình.

Bài tập

Có sáu đài truyền hình A, B, C, D, E, F với khoảng cách giữa các đài (tính theo dặm) được cho bởi bảng sau

	A	B	C	D	E	F
A	-	85	175	100	50	100
B	85	-	125	175	100	130
C	175	125	-	100	200	250
D	100	175	100	-	210	220
E	50	100	200	210	-	100
F	100	130	250	220	100	-

Hãy tìm cách gán kênh phát cho mỗi đài truyền hình để số kênh là ít nhất có thể.

Bài toán

Cho đồ thị G. Hãy tìm số màu nhỏ nhất cần thiết để tô G.

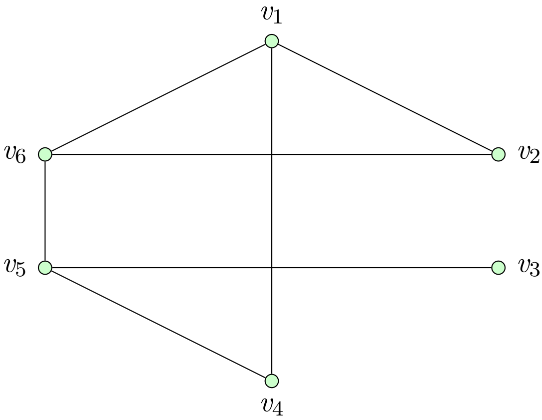
là bài toán khó. Người ta chưa biết thuật toán "nhanh" nào để giải nó, và hầu hết mọi người đều tin rằng không có thuật toán như vậy.

Thuật toán tham lam

1. Sắp thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \cdots, v_n$.
2. `for` $i = 1, 2, \ldots, n$:
3.   Gán màu hợp lệ nhỏ nhất cho v_i.

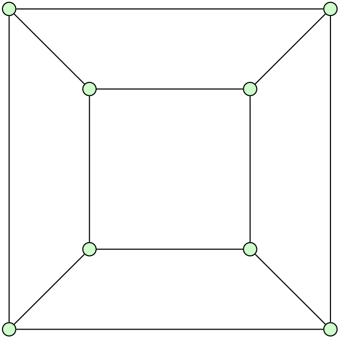
Ví dụ

Dùng thuật toán tham lam để tô màu đồ thị sau:



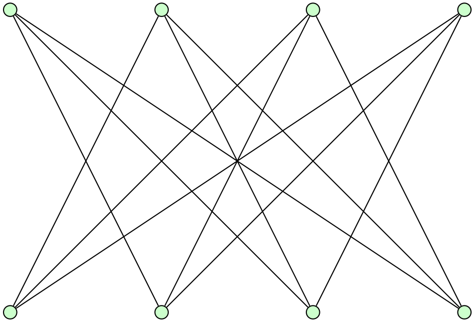
Ví dụ

Tìm một cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu đồ thị sau dùng ít màu nhất có thể.



Ví dụ

Tìm một cách sắp thứ tự các đỉnh để thuật toán tham lam tô màu đồ thị sau dùng ít màu nhất có thể.



Mệnh đề

Nếu mọi đỉnh trong G đều có bậc $\leq k$, thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu.

Mệnh đề

Nếu mọi đỉnh trong G đều có bậc $\leq k$, thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu.

Thử chứng minh bằng quy nạp theo k

Đặt $P(k) =$ "bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu"

Bước cơ sở : $P(0)$ đúng. Tại sao?

Bước quy nạp : Giả sử $P(k)$ đúng để chứng minh $P(k+1)$!!!

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

Đặt $P(n)$ = "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

Đặt $P(n)$ = "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì G không có cạnh nào.

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

Đặt $P(n) =$ "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k + 1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì G không có cạnh nào.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n + 1)$.

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

Đặt $P(n) =$ "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì G không có cạnh nào.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$.

- Xét G là đồ thị bất kỳ với n đỉnh và có bậc lớn nhất $\leq k$.

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

Đặt $P(n)$ = "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì G không có cạnh nào.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$.

- Xét G là đồ thị bất kỳ với n đỉnh và có bậc lớn nhất $\leq k$.
- Sắp xếp các đỉnh theo thứ tự nào đó: $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$.

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

Đặt $P(n) =$ "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì G không có cạnh nào.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$.

- Xét G là đồ thị bất kỳ với n đỉnh và có bậc lớn nhất $\leq k$.
- Sắp xếp các đỉnh theo thứ tự nào đó: $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$.
- Xóa đỉnh v_{n+1} khỏi G ta thu được đồ thị G'.

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

Đặt $P(n) =$ "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì G không có cạnh nào.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$.

- Xét G là đồ thị bất kỳ với n đỉnh và có bậc lớn nhất $\leq k$.
- Sắp xếp các đỉnh theo thứ tự nào đó: $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$.
- Xóa đỉnh v_{n+1} khỏi G ta thu được đồ thị G'.
- Đồ thị G' cũng có bậc lớn nhất $\leq k$. Tại sao?

Chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh

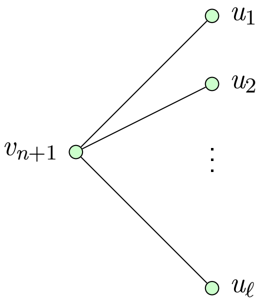
Đặt $P(n) =$ "Đồ thị G với n đỉnh và bậc mọi đỉnh trong G đều $\leq k$ thì thuật toán tham lam dùng nhiều nhất $k+1$ màu."

Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì G không có cạnh nào.

Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng để chứng minh $P(n+1)$.

- Xét G là đồ thị bất kỳ với n đỉnh và có bậc lớn nhất $\leq k$.
- Sắp xếp các đỉnh theo thứ tự nào đó: $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$.
- Xóa đỉnh v_{n+1} khỏi G ta thu được đồ thị G'.
- Đồ thị G' cũng có bậc lớn nhất $\leq k$. Tại sao?
- Theo quy nạp, thuật toán tham lam tô màu G' dùng nhiều nhất $k+1$ màu.

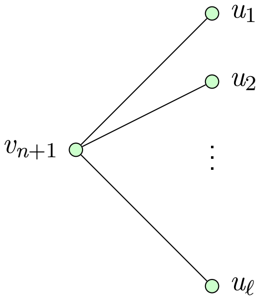
Chứng minh (tiếp)



v_{n+1} có $\ell \leq k$ hàng xóm

- Thêm đỉnh v_{n+1} và các cạnh liên quan vào lại G' để được G.

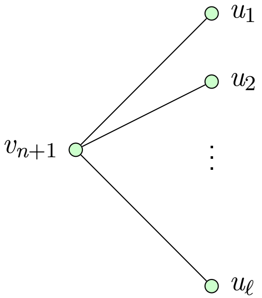
Chứng minh (tiếp)



v_{n+1} có $\ell \leq k$ hàng xóm

- Thêm đỉnh v_{n+1} và các cạnh liên quan vào lại G' để được G.
- Đỉnh v_{n+1} có $\leq k$ hàng xóm. Tại sao?

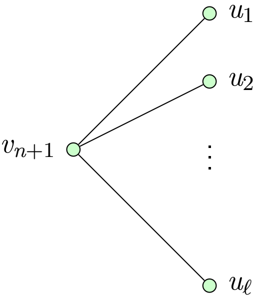
Chứng minh (tiếp)



v_{n+1} có $\ell \leq k$ hàng xóm

- Thêm đỉnh v_{n+1} và các cạnh liên quan vào lại G' để được G.
- Đỉnh v_{n+1} có $\leq k$ hàng xóm. Tại sao?
- Vậy tồn tại một màu hợp lệ trong $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ để tô cho v_{n+1}.

Chứng minh (tiếp)



v_{n+1} có $\ell \leq k$ hàng xóm

- Thêm đỉnh v_{n+1} và các cạnh liên quan vào lại G' để được G.
- Đỉnh v_{n+1} có $\leq k$ hàng xóm. Tại sao?
- Vậy tồn tại một màu hợp lệ trong $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ để tô cho v_{n+1}.
- Vậy thuật toán tham lam tô màu G dùng không quá $k+1$ màu.