Đồ thị 2

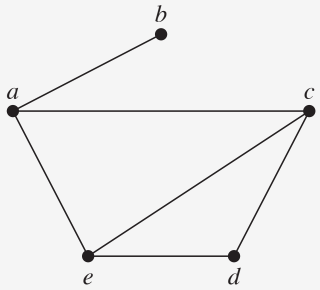
Trần Vĩnh Đức

Ngày 28 tháng 12 năm 2016

Nội dung

Danh sách kề

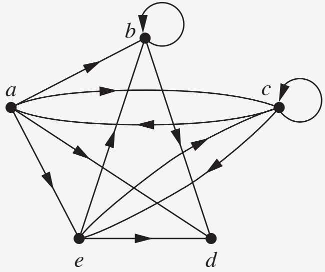
Xác định các đỉnh kề với mỗi đỉnh



Vertex	*Adjacent Vertices*
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Danh sách kề của đồ thị có hướng

Xác định các đỉnh kề với mỗi đỉnh



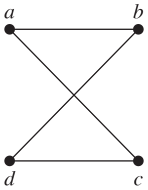
Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

Ma trận kề

- Xét đồ thị $G = (V, E)$ với $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$
- Ma trận kề của G là ma trận $A = [a_{ij}]$ kích thước $n \times n$, được định nghĩa bởi:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

Ví dụ

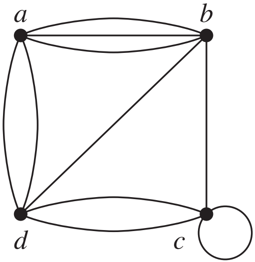


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận kề của giả đồ thị

Vị trí biểu diễn số cạnh

Ví dụ



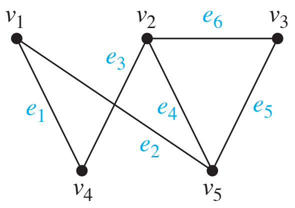
$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận liên thuộc

- Xét đồ thị $G = (V, E)$ với $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ và $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.
- Ma trận liên thuộc của G tương ứng với thứ tự của V và E là ma trận $M = [m_{ij}]$ kích thước $m \times n$, trong đó:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{khi } e_j \text{ liên thuộc với } v_i \\ 0 & \text{ngược lại} \end{cases}$$

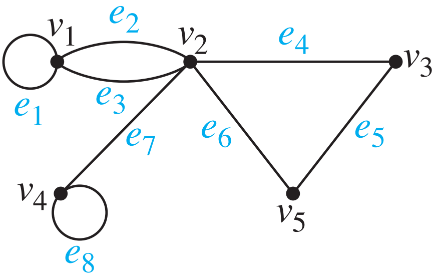
Ví dụ



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Bài tập

Tìm ma trận liên thuộc của giả đồ thị sau:



Đẳng cấu đồ thị

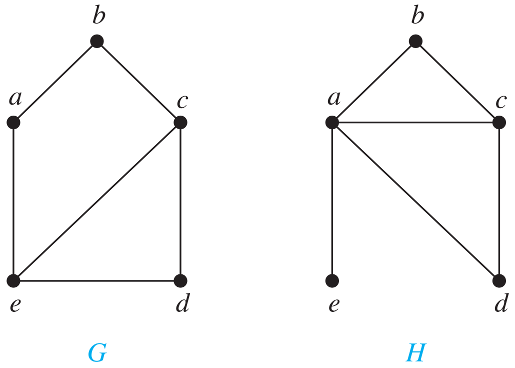
Định nghĩa

Hai đơn đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là đẳng cấu nếu có một song ánh f từ V_1 lên V_2 thỏa mãn: a và b kề nhau trong G_1 nếu và chỉ nếu $f(a)$ và $f(b)$ kề nhau trong G_2.

Ánh xạ f như vậy gọi là đẳng cấu.

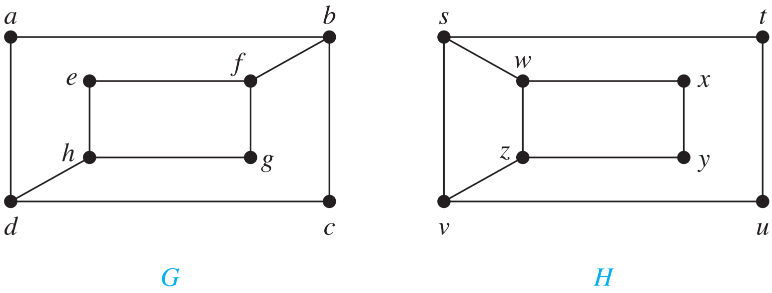
Bài tập

Hai đồ thị sau có đẳng cấu hay không?



Bài tập

Hai đồ thị sau có đẳng cấu hay không?

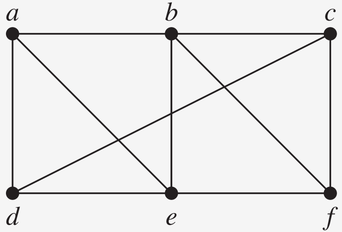


Nội dung

Đường đi

Định nghĩa

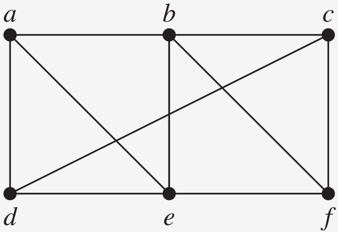
Xét n là một số nguyên không âm và G là một đồ thị vô hướng. Một *đường đi* độ dài n từ u tới v là một dãy n cạnh $e_1, e_2, \ldots, e_n$ của G thỏa mãn: có tồn tại một dãy đỉnh $x_0 = u, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = v$ sao cho e_i có các đầu mút là x_{i-1} và x_i.



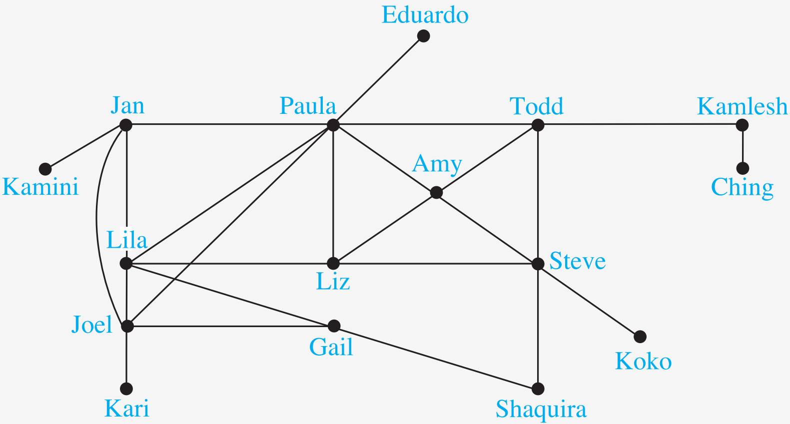
Đường đi & chu trình

Định nghĩa

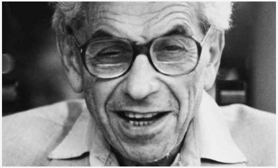
- Một đường đi gọi là *chu trình* nếu đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối.
- Một đường đi hoặc chu trình là *đơn* nếu nó không đi qua cùng một cạnh quá một lần.



Đồ thị quen biết



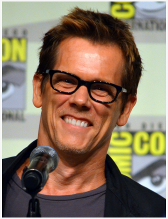
Đồ thị cộng tác



- Đỉnh: các tác giả
- Đỉnh a nối b nếu hai tác giả a và b viết chung bài báo.
- Số Erdös của nhà toán học m là đường đi ngắn nhất giữa m và Paul Erdös.

Erdős Number	*Number of People*
0	1
1	504
2	6,593
3	33,605
4	83,642
5	87,760
6	40,014
7	11,591
8	3,146
9	819
10	244
11	68
12	23
13	5

Đồ thị Hollywood



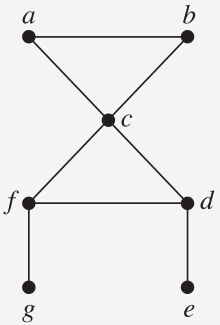
- Đỉnh: các diễn viên
- Diễn viên a nối với diễn viên b nếu a và b đóng chung một bộ phim
- Số Bacon của diễn viên c là đường đi ngắn nhất giữa c và Kevin Bacon.

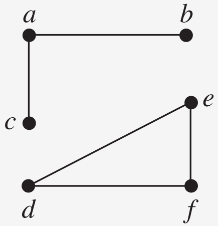
Bacon Number	*Number of People*
0	1
1	2,367
2	242,407
3	785,389
4	200,602
5	14,048
6	1,277
7	114
8	16

Tính liên thông trong đồ thị vô hướng

Định nghĩa

Một đồ thị vô hướng là *liên thông* nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt.



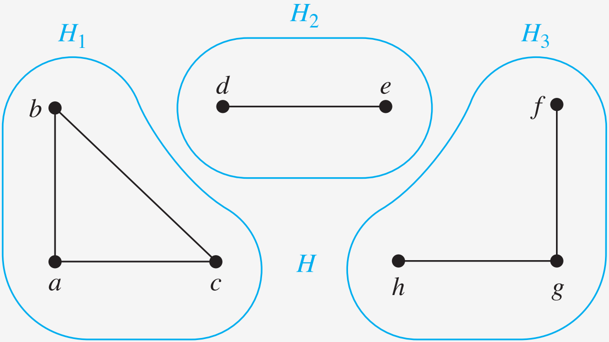


Định lý

Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn.

Thành phần liên thông

- Một đồ thị không liên thông là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông.
- Các đồ thị con liên thông như vậy được gọi là *thành phần liên thông* của đồ thị đang xét.

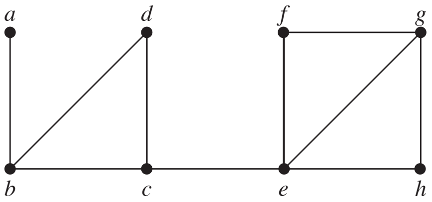


Đỉnh khớp và cầu

- *Đỉnh khớp* là đỉnh mà khi xóa nó sẽ tạo ra đồ thị con có số thành phần liên thông nhiều hơn số thành phần liên thông của đồ thị ban đầu.
- *Cầu* là cạnh mà khi xóa nó tạo ra một đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị ban đầu.

Ví dụ

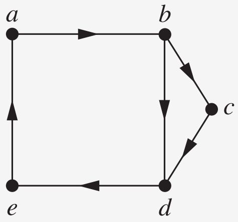
Hãy tìm các đỉnh khớp và các cầu của đồ thị sau:



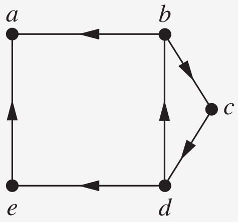
Tính liên thông trong đồ thị có hướng

Định nghĩa

- Đồ thị có hướng gọi là *liên thông mạnh* nếu có đường đi từ a tới b và từ b tới a, với mọi cặp đỉnh a và b.
- Đồ thị có hướng gọi là *liên thông yếu* nếu đồ thị vô hướng nền của nó liên thông.



G



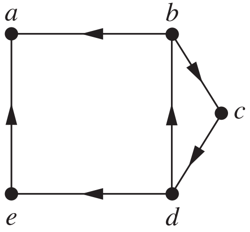
H

Thành phần liên thông mạnh

- Một *thành phần liên thông mạnh* của một đồ thị có hướng G là một đồ thị con liên thông mạnh cực đại của G.

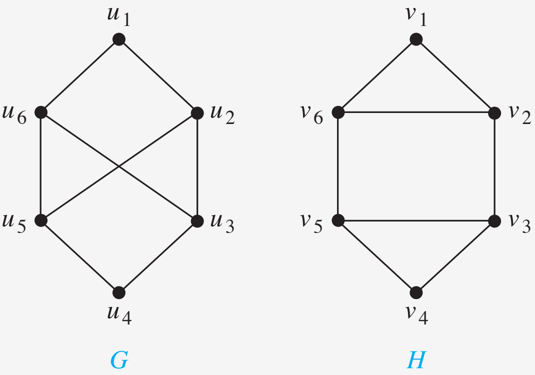
Ví dụ

Đồ thị sau có ba thành phần liên thông mạnh. Chúng gồm các đỉnh $\{a\}, \{e\}, \{b, c, d\}$



Đường đi và sự đẳng cấu

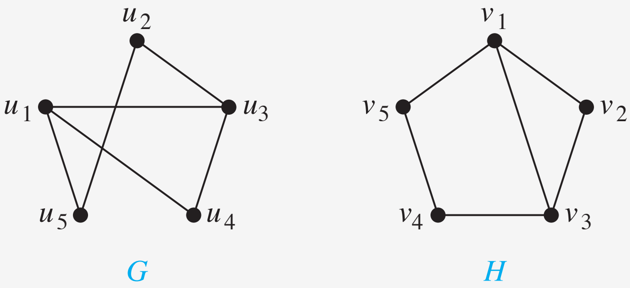
- Hai đồ thị sau có đẳng cấu không?



- Không! H có chu trình đơn độ dài ba v_1, v_2, v_6, v_1 còn G thì không.

Đường đi và sự đẳng cấu (tiếp)

- Hai đồ thị sau có đẳng cấu không?



- Các đường đi qua u_1, u_4, u_3, u_2, u_5 trong G và v_3, v_2, v_1, v_5, v_4 trong H, qua đỉnh có bậc tương ứng bằng nhau. Ta có đẳng cấu

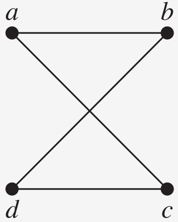
$$u_1 \to v_3, \quad u_4 \to v_2, \quad u_3 \to v_1, \quad u_2 \to v_5, \quad u_5 \to v_4$$

Đếm số đường đi giữa các đỉnh

Định lý

Xét đồ thị G với ma trận kề $\mathbf{A}$ với chỉ số hàng cột tương ứng với các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ đồ thị (với cạnh định hướng hoặc không định hướng, cho phép cả cạnh bội hoặc khuyên). Số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận $\mathbf{A}^r$.

- Có bao nhiêu đường đi độ dài 4 từ a tới d trong đồ thị sau?



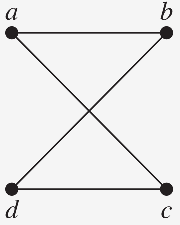
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Đếm số đường đi giữa các đỉnh

Định lý

Xét đồ thị G với ma trận kề $\mathbf{A}$ với chỉ số hàng cột tương ứng với các đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ đồ thị (với cạnh định hướng hoặc không định hướng, cho phép cả cạnh bội hoặc khuyên). Số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận $\mathbf{A}^r$.

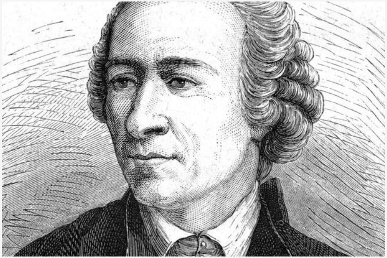
- Có bao nhiêu đường đi độ dài 4 từ a tới d trong đồ thị sau?



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Nội dung

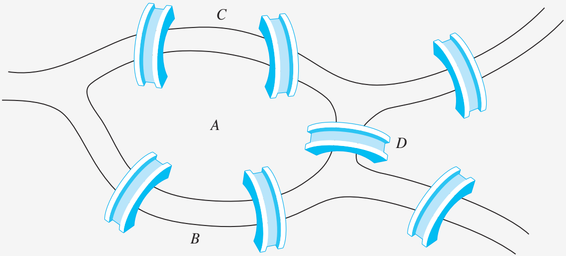
Giới thiệu



Leonhard Euler

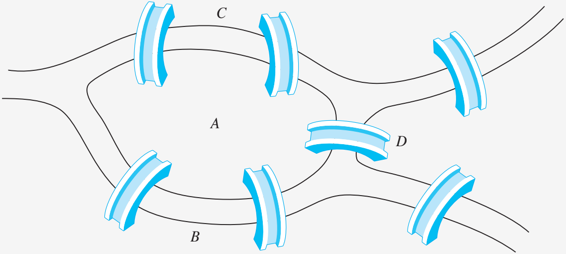
- Chúng ta có thể đi dọc theo các cạnh của đồ thị, xuất phát từ một đỉnh sao cho chỉ đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần được không?
- xuất phát từ một đỉnh và quay trở lại đỉnh đó sao cho chỉ đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần được không?

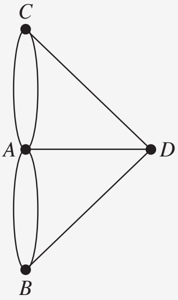
Bài toán Bảy cây cầu



Hình: Bảy cây cầu ở thành phố Königsberg.

Bài toán Bảy cây cầu



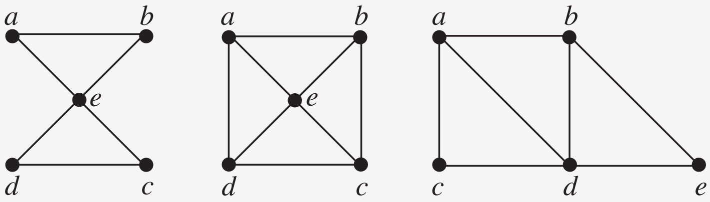


Hình: Bảy cây cầu ở thành phố Königsberg.

Đường đi & chu trình Euler

Định nghĩa

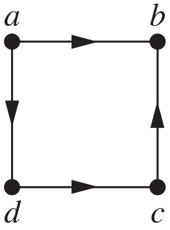
- *Chu trình Euler* là chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị.
- *Đường đi Euler* là đường đi đơn chứa mọi cạnh của đồ thị.



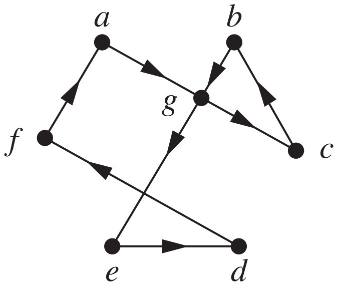
G_1 G_2 G_3

Ví dụ

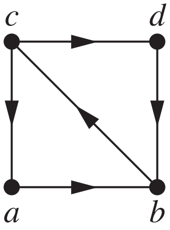
Đồ thị nào dưới đây có chu trình Euler? nếu không, có đường đi Euler không?



H_1



H_2

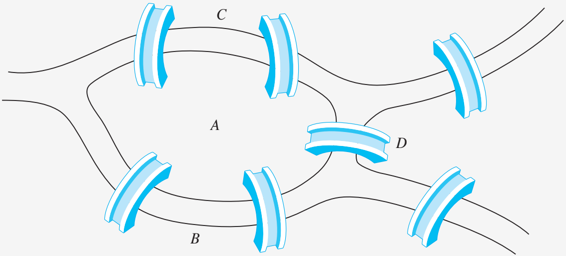


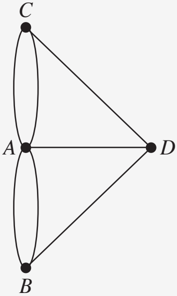
H_3

Có chu trình Euler không?

Định lý

Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler nếu và chỉ nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.





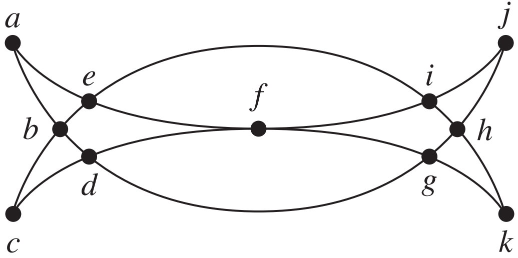
Xây dựng chu trình Euler

Thuật toán `Euler`(Đa đồ thị G liên thông với mọi đỉnh đều bậc chẵn)

$K =$ một chu trình đơn bắt đầu từ một đỉnh
$H =$ đồ thị thu được từ G sau khi bỏ các cạnh của K
while H *còn có cạnh* **do**
  $W =$ một chu trình đơn trong H từ một đỉnh nằm trên K
  $K = K \cup W$
  $H =$ đồ thị thu được từ H sau khi loại bỏ các cạnh của W
end
return K

Ví dụ

Hãy vẽ hình sau đây mà không rời bút khỏi mặt giấy.

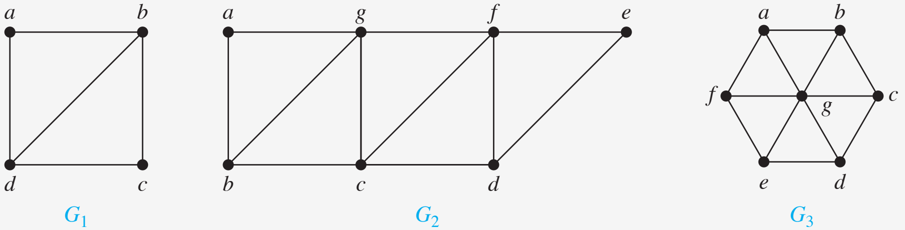


Hình: Thanh mã tấu của Mohammed

Có đường đi Euler không?

Định lý

Đa đồ thị liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler ***nếu và chỉ nếu*** *nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.*

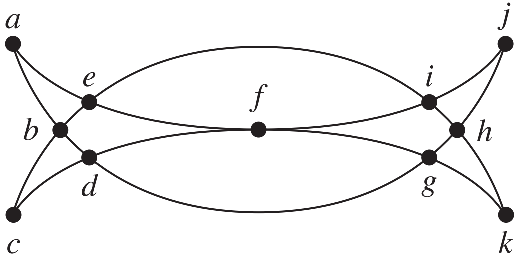


Thuật toán Fleury: Tìm chu trình hoặc đường đi Euler

1. Kiểm tra để đảm bảo rằng đồ thị phải có 0 hoặc 2 đỉnh bậc lẻ.
2. Nếu có 0 đỉnh bậc lẻ, bắt đầu đi từ một đỉnh bất kỳ. Nếu có 2 đỉnh bậc lẻ, bắt đầu đi từ một trong hai đỉnh này.
3. Đi dọc theo mỗi cạnh đúng một lần. Nếu phải lựa chọn giữa một cạnh cầu và một cạnh không phải cầu, luôn lựa chọn cạnh không phải cầu.
4. Dừng khi không còn cạnh nào để đi.

Ví dụ

Hãy vẽ hình sau đây mà không rời bút khỏi mặt giấy dùng thuật toán Fleury.

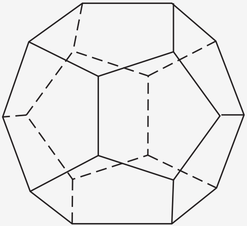


Nội dung

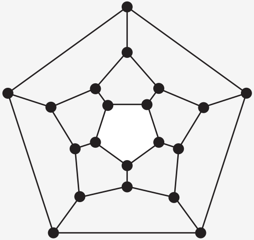
Đường đi & chu trình Hamilton

Định nghĩa

- Một đường đi được gọi là *đường đi Hamilton* nếu nó đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần.
- và một chu trình được gọi là *chu trình Hamilton* nếu nó đi qua mỗi đỉnh của đồ thị đúng một lần.



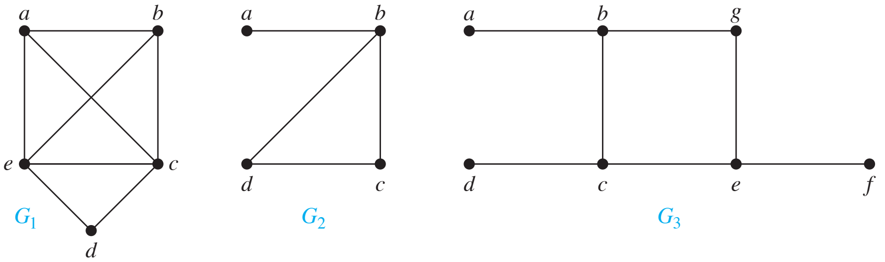
(a)



(b)

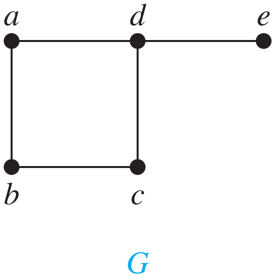
Ví dụ

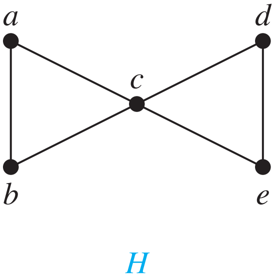
Đồ thị nào dưới đây có chu trình Hamilton? Nếu không, có đường đi Hamilton không?



Ví dụ

Đồ thị nào dưới đây có chu trình Hamilton? Nếu không, có đường đi Hamilton?





Ví dụ

Chứng minh rằng đồ thị đầy đủ K_n có chu trình Hamilton với mọi $n \geq 3$.

Điều kiện cần

Mệnh đề

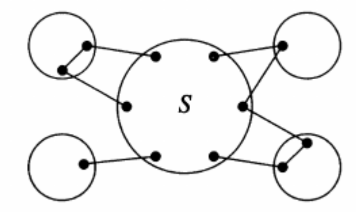
Nếu $G = (V, E)$ có chu trình Hamilton, vậy thì với mọi tập đỉnh khác rỗng $S \subseteq V$, đồ thị thu được từ G bằng cách xóa các đỉnh thuộc S chỉ có nhiều nhất $|S|$ thành phần liên thông.

Điều kiện cần

Mệnh đề

Nếu $G = (V, E)$ *có chu trình Hamilton, vậy thì với mọi tập đỉnh khác rỗng* $S \subseteq V$, *đồ thị thu được từ* G *bằng cách xóa các đỉnh thuộc* S *chỉ có nhiều nhất* $|S|$ *thành phần liên thông.*

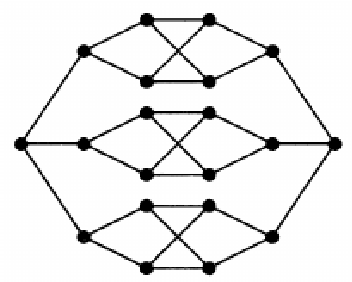
Chứng minh.



□

Ví dụ

Đồ thị sau có chu trình Hamilton không?



Bài tập

Alice và Bob nhìn trộm đề thi Toán Rời Rạc của thầy Đức. Alice thấy thầy đang mô tả một đồ thị với 17 đỉnh và 129 cạnh; còn Bob thấy thầy hỏi xem đồ thị này có chu trình Hamilton không.

- Bob nói rằng: "không cần biết chi tiết đồ thị thầy đang vẽ thế nào, chắc chắn đồ thị này **có** chu trình Hamilton."

- Còn Alice nói: "Nếu không biết chi tiết thì không thể quyết định được đồ thị này **có** chu trình Hamilton hay không."

Ai đúng, ai sai? Bạn hãy giải thích.

Định lý (Ore)

Giả sử G là một đơn đồ thị với $n \geq 3$ đỉnh thỏa mãn: với mọi cặp đỉnh không liền kề u và v, ta có

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

khi đó G là đồ thị Hamilton.

Chứng minh định lý Ore

- Giả sử định lý không đúng.

Chứng minh định lý Ore

- Giả sử định lý không đúng.
- Tồn tại đồ thị $G = (V, E)$ với n đỉnh và có nhiều cạnh nhất thỏa mãn điều kiện của định lý Ore nhưng không là Hamilton. Tại sao?

Chứng minh định lý Ore

- Giả sử định lý không đúng.
- Tồn tại đồ thị $G = (V, E)$ với n đỉnh và có nhiều cạnh nhất thỏa mãn điều kiện của định lý Ore nhưng không là Hamilton. Tại sao?
- Vì G có nhiều cạnh nhất có thể nên đồ thị thu được bằng cách thêm một cạnh mới nối hai đỉnh không kề nhau phải có chu trình Hamilton chứa cạnh thêm đó. Tại sao?

Chứng minh định lý Ore

- Giả sử định lý không đúng.
- Tồn tại đồ thị $G = (V, E)$ với n đỉnh và có nhiều cạnh nhất thỏa mãn điều kiện của định lý Ore nhưng không là Hamilton. Tại sao?
- Vì G có nhiều cạnh nhất có thể nên đồ thị thu được bằng cách thêm một cạnh mới nối hai đỉnh không kề nhau phải có chu trình Hamilton chứa cạnh thêm đó. Tại sao?
- Vậy giữa hai đỉnh bất kỳ trong G có thể nối với nhau bằng một đường Hamilton.

Chứng minh (tiếp)

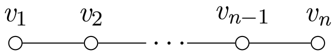
- Vì đồ thị K_n có chu trình Hamilton nên $G \neq K_n$.

Chứng minh (tiếp)

- Vì đồ thị K_n có chu trình Hamilton nên $G \neq K_n$.
- Vậy tồn tại hai đỉnh v_1 và v_n không kề nhau trong G,

Chứng minh (tiếp)

- Vì đồ thị K_n có chu trình Hamilton nên $G \neq K_n$.
- Vậy tồn tại hai đỉnh v_1 và v_n không kề nhau trong G,
- và tồn tại đường Hamilton:



Chứng minh (tiếp)

- Giả sử v_1 kề với k đỉnh là: $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ và

$$2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k$$

Chứng minh (tiếp)

- Giả sử v_1 kề với k đỉnh là: $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ và

$$2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k$$

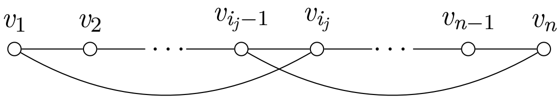
- Đỉnh v_n không thể kề với đỉnh v_{i_j-1} nào $(2 \leq j \leq k)$ vì nếu không sẽ tồn tại chu trình Hamilton:

Chứng minh (tiếp)

- Giả sử v_1 kề với k đỉnh là: $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ và

$$2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k$$

- Đỉnh v_n không thể kề với đỉnh v_{i_j-1} nào $(2 \leq j \leq k)$ vì nếu không sẽ tồn tại chu trình Hamilton:

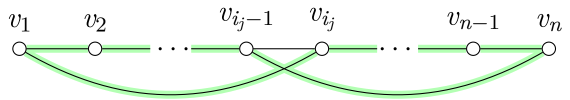


Chứng minh (tiếp)

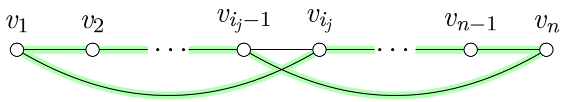
- Giả sử v_1 kề với k đỉnh là: $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}$ và

$$2 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k$$

- Đỉnh v_n không thể kề với đỉnh $v_{i_j - 1}$ nào $(2 \leq j \leq k)$ vì nếu không sẽ tồn tại chu trình Hamilton:



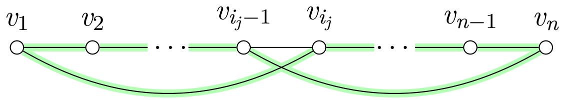
Chứng minh (tiếp)



- Vậy v_n không kề với ít nhất k đỉnh $\{v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \ldots, v_{i_k-1},\}$. Tức là

$$\deg(v_n) \leq n \;\; - 1 \;\; - k$$

Chứng minh (tiếp)



- Vậy v_n không kề với ít nhất k đỉnh $\{v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \dots, v_{i_k-1},\}$. Tức là

$$\deg(v_n) \leq n \ - 1 \ - k$$

- Nhưng vậy thì

$$n \leq \deg(v_1) + \deg(v_n) \leq k + (n - 1 - k) = n - 1$$

Định lý (Dirac)

Nếu G *là một đồ thị với* $n \geq 3$ *đỉnh thỏa mãn: bậc của mỗi đỉnh ít nhất bằng* $n/2$*, khi đó* G *là đồ thị Hamilton.*

Định lý (Dirac)

Nếu G là một đồ thị với $n \geq 3$ đỉnh thỏa mãn: bậc của mỗi đỉnh ít nhất bằng $n/2$, khi đó G là đồ thị Hamilton.

Chứng minh.

- Với hai đỉnh không kề nhau bất kỳ u và v ta có

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n/2 + n/2 = n$$

- Suy ra, G thỏa mãn các điều kiện của định lý Ore, vì thế nó có chu trình Hamilton.

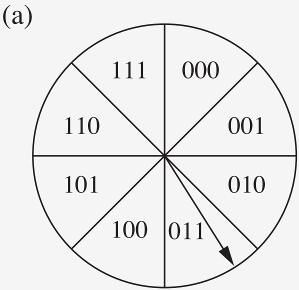
$\square$

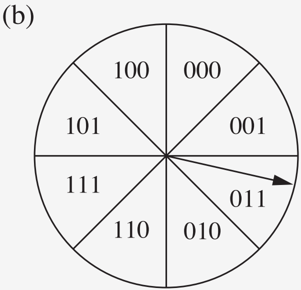
Bài tập

- Hãy chỉ ra rằng các điều kiện trên không phải điều kiện cần.
- Có nghĩa rằng: chỉ ra tồn tại đồ thị không thỏa mãn điều kiện Dirac mà vẫn có chu trình Hamilton.

Mã Gray

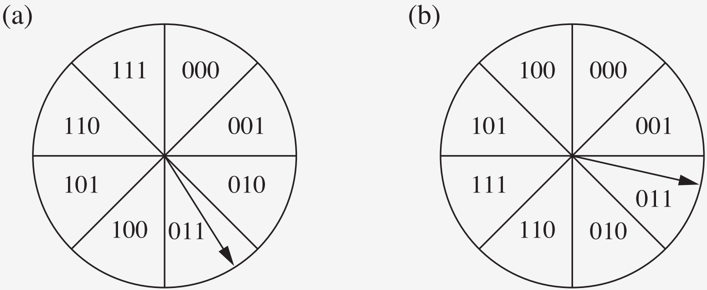
- Chia đường tròn thành 2^n cung có độ dài bằng nhau, và gán mỗi xâu bít độ dài n cho một cung.





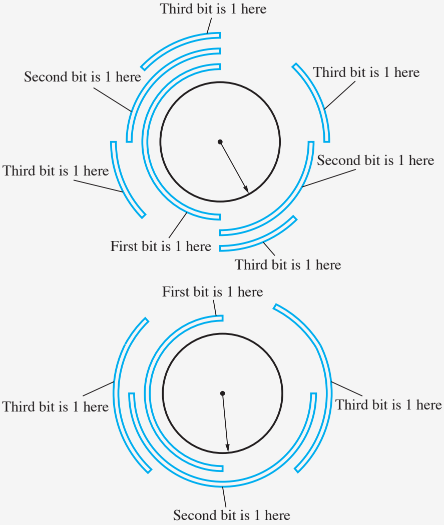
Mã Gray

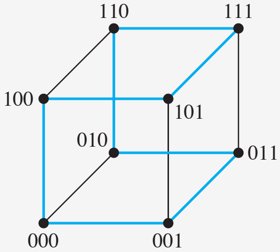
- Chia đường tròn thành 2^n cung có độ dài bằng nhau, và gán mỗi xâu bít độ dài n cho một cung.



- Tìm cách gán đảm bảo rằng hai cung cạnh nhau chỉ khác nhau một bit.

Mã Gray 2


Third bit is 1 here
Second bit is 1 here
Third bit is 1 here
Third bit is 1 here
Second bit is 1 here
First bit is 1 here
Third bit is 1 here
First bit is 1 here
Third bit is 1 here
Third bit is 1 here
Second bit is 1 here


110
111
100
101
010
011
000
001