マクローリン展開 例題集

$f(x)$ の $x=0$ におけるテイラー展開（マクローリン展開）は、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

で与えられます。しかし、多くの場合、既知の関数の展開（基本展開）を利用して級数の形で求める方が効率的です。

基本となる展開：

- $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$
- $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$
- $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$
- $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots\quad(|x|<1)$
- $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\quad(|x|<1, x=1)$
- $(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots\quad(|x|<1)$

1 問題 1

$f(x)=e^{2x}$ のマクローリン展開を求めよ。

解答

解法：基本展開への代入

e^t のマクローリン展開は、

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

である。ここで $t=2x$ とおくと、

$$f(x)=e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n$$

書き下すと、

$$f(x)=1+(2x)+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\cdots=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\cdots$$

2 問題 2

$f(x)=\sin(x^2)$ のマクローリン展開を求めよ。

解答

解法：基本展開への代入

$\sin t$ のマクローリン展開は、

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

である。ここで $t = x^2$ とおくと、

$$f(x) = \sin(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

書き下すと、

$$f(x) = \frac{x^2}{1!} - \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} - \cdots = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} - \cdots$$

別解：項別微分（書き下し）

$f(x) = \sin(x^2)$ として、定義通りに微分を計算する。

- $f(x) = \sin(x^2) \implies f(0) = 0$
- $f'(x) = 2x\cos(x^2) \implies f'(0) = 0$
- $f''(x) = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2) \implies f''(0) = 2$
- $f'''(x) = -4x\sin(x^2) - 8x\sin(x^2) - 4x^3\cos(x^2) = -12x\sin(x^2) - 4x^3\cos(x^2) \implies f'''(0) = 0$
- $f^{(4)}(x) = -12\sin(x^2) - 24x^2\cos(x^2) - 12x^2\cos(x^2) + 8x^4\sin(x^2) \implies f^{(4)}(0) = 0$
- $f^{(5)}(x) = \cdots \implies f^{(5)}(0) = 0$
- $f^{(6)}(x) = \cdots \implies f^{(6)}(0) = -120 = -5!$ （計算は非常に煩雑）

したがって、

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$f(x) = 0 + 0 + \frac{2}{2!}x^2 + 0 + 0 + 0 + \frac{-120}{6!}x^6 + \cdots$$

$$f(x) = x^2 - \frac{120}{720}x^6 + \cdots = x^2 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots$$

となり、級数による解法の結果と一致する。この例から、合成関数の展開は、定義に従って微分を繰り返すよりも、既知の展開に代入する方が圧倒的に効率が良いことがわかる。

3　問題 3

$f(x) = \log(1-x)$ のマクローリン展開を求めよ。

解答

解法：基本展開への代入

$\log(1+t)$ のマクローリン展開は、

$$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

である。ここで $t=-x$ とおくと、

$$f(x)=\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(-1)^n\frac{x^n}{n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

書き下すと、

$$f(x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots$$

別解：項別積分

$f(0)=\log(1)=0$ である。$f(x)$ を微分すると、

$$f'(x)=\frac{1}{1-x}\cdot(-1)=-\frac{1}{1-x}$$

$f'(x)$ は基本展開 $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$ を用いて、

$$f'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=-(1+x+x^2+x^3+\cdots)$$

と展開できる。これを 0 から x まで項別積分すると、

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=0+\int_0^x\left(-\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)dt$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ここで $k=n+1$ とおくと、 $n=0$ のとき $k=1$ なので、

$$f(x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$$

となり、同じ結果が得られる。

4 問題 4

$f(x)=e^x\cos x$ のマクローリン展開を求めよ。

解答

解法：オイラーの公式と指数関数の展開

オイラーの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ より、 $\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix})$ である。($\mathrm{Re}(z)$ は複素数 z の実部）よって、

$$f(x)=e^x\cdot\mathrm{Re}(e^{ix})=\mathrm{Re}(e^x\cdot e^{ix})=\mathrm{Re}(e^{(1+i)x})$$

e^t の展開 $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$ に $t=(1+i)x$ を代入する。

$$e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((1+i)x)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n$$

ここで、 $1+i$ を極形式で表すと $1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ 。ド・モアブルの定理より、 $(1+i)^n=(\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}=2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})$ 。これを代入すると、

$$e^{(1+i)x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n$$

$f(x)$ はこの実部であるから、

$$f(x)=\mathrm{Re}(e^{(1+i)x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n/2}\cos(\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n$$

書き下すと、

- $n=0$: $\frac{2^0\cos(0)}{0!}x^0=1$
- $n=1$: $\frac{2^{1/2}\cos(\pi/4)}{1!}x^1=\frac{\sqrt{2}\cdot(1/\sqrt{2})}{1}x=x$
- $n=2$: $\frac{2^{2/2}\cos(\pi/2)}{2!}x^2=\frac{2\cdot 0}{2}x^2=0$
- $n=3$: $\frac{2^{3/2}\cos(3\pi/4)}{3!}x^3=\frac{2\sqrt{2}\cdot(-1/\sqrt{2})}{6}x^3=-\frac{2}{6}x^3=-\frac{x^3}{3}$
- $n=4$: $\frac{2^{4/2}\cos(\pi)}{4!}x^4=\frac{4\cdot(-1)}{24}x^4=-\frac{4}{24}x^4=-\frac{x^4}{6}$

$$f(x)=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\cdots$$

別解：級数の積（書き下し）

e^x と $\cos x$ の展開をそれぞれ書き下して、その積を計算する。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots$$

$f(x)=(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots)(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cdots)$
x^n の項を次数が低い順に集める。

- x^0: $1\cdot 1=1$
- x^1: $x\cdot 1=x$
- x^2: $1\cdot(-\frac{x^2}{2})+\frac{x^2}{2}\cdot 1=0$
- x^3: $x\cdot(-\frac{x^2}{2})+\frac{x^3}{6}\cdot 1=-\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{6}=-\frac{2x^3}{6}=-\frac{x^3}{3}$
- x^4: $1\cdot(\frac{x^4}{24})+\frac{x^2}{2}\cdot(-\frac{x^2}{2})+\frac{x^4}{24}\cdot 1=\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{24}=\frac{1-6+1}{24}x^4=-\frac{4}{24}x^4=-\frac{x^4}{6}$

$$f(x)=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\cdots$$

となり、解法 1 の結果と一致する。

5　問題 5

$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$ **のマクローリン展開を求めよ。**

解答

解法：部分分数分解

分母 $1-x-x^2=0$ の解を $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{-2}=\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$ 。$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ （黄金比），$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおく。このとき $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-1$ である。分母は $1-x-x^2=1-(\alpha+\beta)x+(\alpha\beta)x^2=(1-\alpha x)(1-\beta x)$ と因数分解できる。(注： $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ は $t^2+t-1=0$ の解。 $x^2+x-1=0$ の解が t なら $1/t$ は $1/x^2+1/x-1=0 \implies 1+x-x^2=0$ の解。 t の逆数が α, β ではない)

$f(x)$ を部分分数分解する。

$$f(x)=\frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)}=\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x}$$

$A(1-\beta x)+B(1-\alpha x)=1$

$x=1/\alpha$ を代入: $A(1-\beta/\alpha)=1 \implies A(\frac{\alpha-\beta}{\alpha})=1 \implies A=\frac{\alpha}{\alpha-\beta}$

$x=1/\beta$ を代入: $B(1-\alpha/\beta)=1 \implies B(\frac{\beta-\alpha}{\beta})=1 \implies B=\frac{\beta}{\beta-\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha-\beta}$

ここで $\alpha-\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$ 。よって $A=\frac{\alpha}{\sqrt{5}}, B=-\frac{\beta}{\sqrt{5}}$ 。

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha}{1-\alpha x}-\frac{\beta}{1-\beta x}\right)$$

$\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n$ を用いて、

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha x)^n-\beta\sum_{n=0}^{\infty}(\beta x)^n\right) \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})x^n \end{aligned}$$

ここでフィボナッチ数列 F_n を $F_0=0, F_1=1, F_2=1, F_3=2, \ldots$ と定義すると、一般項（ビネの公式）は $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$ である。したがって、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n+1}x^n$$

書き下すと、

$$f(x)=F_1x^0+F_2x^1+F_3x^2+F_4x^3+\cdots=1+x+2x^2+3x^3+5x^4+\cdots$$

別解：漸化式（係数比較）

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ とおいて、 $f(x)$ の定義式に代入する。

$$1=(1-x-x^2)f(x)=(1-x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}$$

インデックスを揃える。 $k=n+1, m=n+2$

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k-\sum_{m=2}^{\infty}a_{m-2}x^m$$

$n=0, n=1$ の項を分離する。

$$1=(a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n)-(a_0x+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k-1}x^k)-\sum_{m=2}^{\infty}a_{m-2}x^m$$

$$1 = a_0 + (a_1 - a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1} - a_{n-2})x^n$$

両辺の係数を比較する。

- x^0: $a_0 = 1$
- x^1: $a_1 - a_0 = 0 \implies a_1 = a_0 = 1$
- $x^n (n \geq 2)$: $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \implies a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

これは $a_0 = 1, a_1 = 1$ で始まるフィボナッチ数列 F_{n+1} ($F_1 = 1, F_2 = 1, \ldots$) に他ならない。よって、 $a_n = F_{n+1}$ となり、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}x^n$$

6 問題 6

$f(x) = \tan x$ のマクローリン展開を x^5 の項まで求めよ。
（注：この関数は級数の形で簡潔に表すのが難しいため、項を書き下す）

解答

解法：定義に基づく微分

$f(x) = \tan x$ とし、 $f'(x) = 1 + \tan^2 x = 1 + f(x)^2$ の関係を用いて高階微分を $x = 0$ で計算する。

- $f(x) = \tan x \implies f(0) = 0$
- $f'(x) = 1 + f(x)^2 \implies f'(0) = 1 + f(0)^2 = 1 + 0 = 1$
- $f''(x) = 2f(x)f'(x) \implies f''(0) = 2f(0)f'(0) = 0$
- $f'''(x) = 2(f'(x)^2 + f(x)f''(x)) \implies f'''(0) = 2(f'(0)^2 + f(0)f''(0)) = 2(1^2 + 0) = 2$
- $f^{(4)}(x) = 2(2f'(x)f''(x) + f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)) = 2(3f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x))$
  $\implies f^{(4)}(0) = 2(3f'(0)f''(0) + f(0)f'''(0)) = 2(0 + 0) = 0$
- $f^{(5)}(x) = 2(3f''(x)^2 + 3f'(x)f'''(x) + f'(x)f'''(x) + f(x)f^{(4)}(x))$
  $= 2(3f''(x)^2 + 4f'(x)f'''(x) + f(x)f^{(4)}(x))$
  $\implies f^{(5)}(0) = 2(3f''(0)^2 + 4f'(0)f'''(0) + f(0)f^{(4)}(0)) = 2(0 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 0) = 16$

マクローリン展開の定義式に代入する。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \cdots$$

$$f(x) = 0 + 1x + 0 + \frac{2}{6}x^3 + 0 + \frac{16}{120}x^5 + \cdots$$

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

別解：級数の商

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ とし、 $\sin x$ と $\cos x$ の展開の商を考える。

$$\tan x = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots}$$

$\tan x$ は奇関数なので、 $f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots$ とおける。$(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots)(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots$ 左辺を展開し、両辺の係数を比較する。

- x^1: $a_1 \cdot 1 = 1 \implies a_1 = 1$
- x^3: $a_3 \cdot 1 + a_1 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6} \implies a_3 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \implies a_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- x^5: $a_5 \cdot 1 + a_3 \cdot (-\frac{1}{2}) + a_1 \cdot (\frac{1}{24}) = \frac{1}{120}$
  $a_5 + (\frac{1}{3})(-\frac{1}{2}) + (1)(\frac{1}{24}) = \frac{1}{120}$
  $a_5 - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120} \implies a_5 - \frac{4}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120} \implies a_5 - \frac{3}{24} = \frac{1}{120}$
  $a_5 - \frac{1}{8} = \frac{1}{120} \implies a_5 = \frac{1}{8} + \frac{1}{120} = \frac{15}{120} + \frac{1}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

$$f(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

となり、解法 1 の結果と一致する。

7　問題 7

$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ **のマクローリン展開を求めよ。**

解答

解法：対数法則と基本展開

対数法則より $f(x) = \log(1+x) - \log(1-x)$ 。基本展開

$$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$\log(1-t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$$

（これは問題 3 の結果）を $t = x$ として用いる。

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\right) - \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n-1} + 1\right) \frac{x^n}{n}$$

n の偶奇で場合分けする。

- n が偶数 ($n = 2k$): $(-1)^{2k-1} + 1 = -1 + 1 = 0$
- n が奇数 ($n = 2k-1$): $(-1)^{(2k-1)-1} + 1 = (-1)^{2k-2} + 1 = 1 + 1 = 2$

したがって、奇数の項（ $n = 2k-1$ ）のみが残り、その係数は 2 となる。

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2k-1}}{2k-1}$$

$k = n+1$ ではなく $k = 1, 2, 3, \ldots$ で $n = 1, 3, 5, \ldots$ を表すために $n = 2k-1$ とした。$n = 0, 1, 2, \ldots$ を使うために $k - 1 = n$ とおくと $k = n+1$ で、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$$

書き下すと、

$$f(x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

別解：項別積分

$f(0) = \log(1/1) = 0$ 。$f'(x)$ を計算する。

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\log(1+x) - \log(1-x)) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$$

$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$ と $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$ を用いる。

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n + 1)x^n$$

n の偶奇で場合分けする。

- n が偶数（ $n = 2k$ ）: $(-1)^{2k} + 1 = 1 + 1 = 2$
- n が奇数（ $n = 2k+1$ ）: $(-1)^{2k+1} + 1 = -1 + 1 = 0$

よって、偶数の項（ $n = 2k$ ）のみが残り、その係数は 2 となる。

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k}$$

これを 0 から x まで項別積分すると、

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = 0 + \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2t^{2k}\right) dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2\int_0^x t^{2k}dt = \sum_{k=0}^{\infty} 2\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1}}{2k+1}$$

となり、同じ結果が得られる。