目录

1 定义 8.4.2(微分流形)

文件

设 $(M,\mathscr{D}^0)$ 为 n 维拓扑流形,Γ 为指标集

n 维拓扑流形就是与 $\mathbb{R}^n$ 同胚

如果 $\mathscr{D}'=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\,|\alpha\in\Gamma\}\subset\mathscr{D}^0$ 满足:

(1)$\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha=M$

需要完全覆盖 M

(2)C^r 相容性

如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha,),(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathscr{D}',U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$

$\mathscr{D}'$ 是局部坐标系的全体 $\mathscr{D}^0$ 中的那些可以覆盖整个 M 的开集构成的集合.

这句话的意思就是说任意两点都存在两个包含他们的局部坐标系不交.

则坐标变换 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 是 C^r 的,$r\in\{1,2,\cdots,\infty,\omega\}$(由对称性, 当然 $\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ 也是 C^r 的)

从一个坐标变换到另一个坐标当然要先解套, 再加套, 也就是先逆射再映射.

即

$$\begin{cases} y_1=\left(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\right)_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ \qquad\vdots\\ y_n=\left(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\right)_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\end{cases}$$

是 C^r 的.

这蕴含着方程组有唯一解的含义，也预示与本章内容的关联.

则称 $\mathscr{D}'$ 为 $(M,\mathscr{T})$ 上的一个 C^r 微分构造的基.

因为 $\mathscr{D}'$ 可以构造出其他涵盖 M 的坐标系，所以视为坐标系的基.

而由 $\mathscr{D}'$ 唯一生成的 $\mathscr{D}=\big\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^\circ|\,(U,\varphi)\text{与}\mathscr{D}'\text{中任意元素}C^r\text{相容}\big\}$，称 $\mathscr{D}$ 为 $(M,\mathscr{T})$ 上的一个 C^r **微分构造**，而 $(M,\mathscr{D})$ 称为 M 上的 C^r **微分流形**.

实现了从拓扑到流形的过渡

当 $r=\omega$ 时,$(M,\mathscr{D})$ 称为 M 上的实解析流形"

2 定理 8.4.5 C^k 微分流形秩定理

文件

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为开集,$\boldsymbol{f}:U\mapsto\mathbb{R}^m$ 为 $C^k\,(1\leq k\leq\,+\infty)$ 映射,

且在 U 上,$\operatorname{rank} f=\operatorname{rank}\boldsymbol{Jf}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}\equiv l(\text{常数})$

则 $M=\boldsymbol{f}^{-1}(q)=\{\boldsymbol{x}\in U|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{q}\}=\{\boldsymbol{x}\in U|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}\}$ 或为空集或为 $n-l$ 维 C^k 流形,

也就是说他映到某一点，可以视作一个等式，借助秩的行列式性质，就能套入隐射逆射的定理，接着靠流形的定义再搞出来.

其中 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$ 用分量表达为

$$\begin{cases}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)-q_1=0\\ \vdots\\ F_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)-q_m=0\end{cases}$$

证明

设 M 不为空集，对于任何 $\boldsymbol{p}\in M$，存在 $\boldsymbol{p}$ 在 U 中的开邻域 $U_{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{I_p}\times\boldsymbol{J_p}\subset\mathbb{R}^{n-l}\times\mathbb{R}^l\subset U$

划了个区域

使得 $\dfrac{\partial(F_{i_1},F_{i_2},\cdots,F_{i_l})}{\partial(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_l})}=\dfrac{\partial(f_{i_1},f_{i_2},\cdots,f_{i_l})}{\partial(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_l})}\neq 0$

显然这个区域由秩的性质他一定存在，这里预示能找到 $\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^l$ 的同胚函数

根据隐射定理，解上述方程组得到 C^k 函数组

$$\begin{cases}x_{j_i}=g_{j_1}(x_1,x_2,\cdots,\hat{x_{j_1}},\cdots,\hat{x_{j_l}},\cdots,x_n)\\ \vdots\\ x_{j_l}=g_{j_l}(x_1,x_2,\cdots,\hat{x_{j_1}},\cdots,\hat{x_{j_l}},\cdots,x_n)\end{cases}\quad(\hat{x}_i$$

表示删去)

隐射定理条件与结论,

条件:(1)f 要 C^k 的.(2)$F(x^0,y^0)=0$.(3)det $\boldsymbol{J_yF}\neq 0$

C^k 映射 + 方程有解 + 偏导行列式非 0

结论:(1)$F(x,f(x))=0$.(2)$f\in C^k$.(3)$\boldsymbol{Jf(x)=-(J_yF(x,y))^{-1}J_xF(x,y)}$

方程有 $y=f(x)$ 的解+f 是 C^k+f 的导数可求.

在题目中, 上述方程就是 $\boldsymbol{f\left(\hat{x}^{n-l},(x_{s_1\dots s_l})\right)-q=0}$, 给的条件中, 前两条已经满足, 利用秩的性质满足了第 (3) 条, 于是可以套隐射定理. 得到一个从 $\mathbb{R}^{n-l}\to\mathbb{R}^l$ 的 C^k 映射 $\boldsymbol{g}$,(因为只给了 l 个秩, 所以像只能是 l 维的)

即 $\boldsymbol{g}=(g_{j_1},g_{j_2},\cdots,g_{j_l}):\boldsymbol{I_p}:\mapsto\boldsymbol{J_p}$,

$(x_1,x_2,\cdots,x_{j_1},\cdots,x_{j_l},\cdots,x_n)\mapsto(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_l})$

$\varphi_p:U_p\cap M\mapsto I_p$

因为隐射与逆射的条件相同, 所以有隐射一定有逆射.

$(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_l})\mapsto(x_1,x_2,\cdots,x_{j_1},\cdots,x_{j_l},\cdots,x_n)$

可见 g 为同胚, 因此 $U_p\cap M$ 为 p 的一个局部坐标系

局部坐标系的定义:housdorff 空间的开集 U+ 到 $\mathbb{R}^n$ 的同胚 φ= 局部坐标系

令 $\mathscr{D}'=\{(U_p\cap M,\varphi_p)\,|p\in M\}$

2020-08-10 全体局部坐标系的集合 $\mathscr{D}'$详情请看这个定义,

则有

(1)$\bigcup_{p\in M}(U_p\cap M)=M$

2020-08-11 实现从拓扑流形到微分流形的过渡所需必备条件之一

(2) 如果 $(U_{p_1}\cap M,\varphi_{p_1}),\{x_1,x_2,\cdots,x_{j_1},\cdots,x_{j_l},\cdots,x_n\}\in\mathscr{D}'$

$,(U_{p_2}\cap M,\varphi_{p_2}),\{x_1,x_2,\cdots,x_{s_1},\cdots,x_{s_l},\cdots,x_n\}\in\mathscr{D}'$,

且 $(U_{p_1}\cap M)\cap(U_{p2}\cap M)\neq 0$

2020-08-11 这就是说, 两个属于全体局部坐标系集合的不同的点 p_1,p_2**, 和他各自不同的局部坐标邻域和局部坐标映射, 他们的邻域有非空交集**

则由上述可知,$\{x_1,x_2,\cdots,x_{j_1},\cdots,x_{j_l},\cdots,x_n\}$ 与 $\{x_1,x_2,\cdots,x_{s_1},\cdots,x_{s_l},\cdots,x_n\}$ 彼此为 C^k 函数.

2020-08-11 上面这段话实际上说的是两者彼此互为 C^k **的坐标变换, 对应定义 8.4.2 的条件 (2) 的** C^r **相容的需求**

因此 $\mathscr{D}'$ 是 C^k 相容的, 它是 M 上的一个 C^k 微分构造的基.

由 $\mathscr{D}'$ 唯一生成了 C^k 微分构造 $\mathscr{D}=\left\{(U,\varphi)\in\mathscr{D}^0|\,(U,\varphi)\text{与}\mathscr{D}'C^k\text{相容}\right\}$,

使得 $(M,\mathscr{D})$ 成为 M 上的一个 C^k 微分流形.

3 例 8.4.4 线性变换/C^ω 流形

文件

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n \times m$ 实矩阵,rank $\boldsymbol{A}=l, \boldsymbol{F}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$,

可见 $\boldsymbol{F}$ 是一个线性变换,

其次, 他满足定义 所讲的拓扑流形,$\boldsymbol{F}$ 是一个局部坐标映射

根据线性代数知识,$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 确定的解空间 $M=\boldsymbol{F}^{-1}(\mathbf{0})=\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的 $n-l$ 维线性子空间.

因为 rank $\boldsymbol{A}=l$, 故不妨设 $\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{bmatrix}$ 为非奇异矩阵,

由

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1l}x_l+a_{1,l+1}x_{l+1}+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{l1}x_1+a_{l2}x_2+\cdots+a_{ll}x_l+a_{l,l+1}x_{l+1}+\cdots+a_{ln}x_n=0 \end{array}\right.$$

解得 $x_1, x_2, \cdots, x_l$ 为 $x_{l+1}, x_{l+2}, \cdots, x_n$ 的函数,

$n-l$ 个变量 $x_{l+1}, x_{l+2}, \cdots, x_n$ 为其独立变量, 使得 $\{x_{l+1}, x_{l+2}, \cdots, x_n\}$ 为 M 上点的整体坐标, 当然也是局部坐标.

因此,M 为一个 $n-l$ 维 C^ω 流形.

来源

4 定义 8.4.1(拓扑流形, 局部坐标)

文件

设 $(M, \mathscr{T})$ 为 Hausdorff 空间,

Hausdorff 空间定义

$\forall p \neq q, \exists U_p \ni p, \exists U_q \ni q, U_p \cap U_q=\emptyset$

说人话就是这个空间两个不同的点之间总存在各自不交的开集

如果 $\forall p \in M$均有$U \in \mathscr{T}, s.t. p \in U$,

也就说每一点都有开集在里面 (个人感觉, 只要是 hausdorff 空间, 每一点就一定在某个开集里面, 但 hausdorff 空间好像没有强调没有开集包裹的点的情况)

这么做是让其能和 $\mathbb{R}^n$ 同胚的必不可少条件, 因为 $\mathbb{R}^n$ 中的任意点也都被开集包围

且有同胚 $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$, 其中 $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 为开集,

这个映射将 M 上的开集映到了 $\mathbb{R}^n$ 空间中, 而且还能映回来.

则称 M 为 n维拓扑流形 或 C^0流形.

之所以是 C^0 是因为可导性未知.

U 称为 **局部坐标邻域**,φ 称为 **局部坐标映射**.(U,φ) 称为 * 局部坐标系 *.

注意, 这里的 U,φ,U 是 M 中某一点 p 的开集,φ 是这个开集 U 的映射, 两个合起来称作局部坐标系.

记局部坐标系的全体为 $\mathscr{D}^0$,

注意这个全体是指每个点的局部坐标系构成的全体.

而 $x_i(p)=(\varphi(p))_i\,,1\le i\le n$ 为 $p\in U$ 的 **局部坐标**

注意,$x_i(p)$ 表示点 p 在 $\mathbb{R}^n$ 中的坐标分量 i 的值, 他实质上就是, 映射 φ 的分量.

想想, 这个定义和前面所学有什么联系?

5 例 8.4.3(浸入 \ 微分同胚)

文件

设 $\boldsymbol{U}\subset\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{V}\subset\mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ 均为开集, $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{U}\to\boldsymbol{V}$ 为同胚, 且 f 为 $C^k(1\le k\le\ +\infty)$ 映射与 浸入 . 则 $\boldsymbol{f}$与$\boldsymbol{f}^{-1}$ 都称为 C^k微分同胚 .

什么是浸入, 就是

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{f}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}=n\,.$$

显然由秩的性质知道, $n\le m$.

而且因为 f 同胚, 不可能 $n<m$, 所以 $n=m$

因为如果 $n<m$, 根据秩的性质, 我们对任意 $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{U}$, 可选 $\boldsymbol{p}$ 中适当的分量 $(y_{s_1},\cdots,y_{s_n})$, 使得 $\left.\dfrac{\partial(y_{s_1},\cdots,y_{s_n})}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{p}}\ne0$

由于上述行列式为连续函数, 整个命题的条件满足逆射定理的三个条件,

条件 (1) $\boldsymbol{f}$ 是 C^k 映射 $\to$ $\boldsymbol{f}$的分量映射也是C^k的

条件 (2) 在映射的定义域上有 $\det\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}\ne0\to$ 在 $\boldsymbol{p}$ 的开邻域 $\boldsymbol{U_p}$ 上有 $\left.\dfrac{\partial(y_{s_1},\cdots,y_{s_n})}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|_{\boldsymbol{U_p}}\ne0$ (连续性)

条件 (3) 映射为单射.

于是选取这些分量作为点 $(y_{s_1},\cdots,y_{s_n})$ 与 $\boldsymbol{U}$ 构成新的可逆映射 $\boldsymbol{g}:\boldsymbol{U}\to\mathbb{R}^n$, 可知固定 $s_1,\cdots,s_n$ 不变, 剩余的 $m-n$ 个分量是可以任意给的, 可使同一点 $\boldsymbol{p}$ 映到不同的 $(y_1,\cdots,y_m)$, 这与 $\boldsymbol{f}$ 是同胚映射矛盾.

什么是微分同胚?

6 例 8.4.5 C^k 超曲面

文件

设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为开集,$f:U\mapsto\mathbb{R}^1$ 为 $C^k(1\le k\le\ +\infty)$ 映射, 且在 U 上有

$$\text{rank } f = \text{rank } \boldsymbol{J} f = \text{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \equiv 1(\text{常值}),$$

则 $M = f^{-1}(q) = \{\boldsymbol{x} \in U | f(\boldsymbol{x}) = q\} = \{\boldsymbol{x} \in U | f(\boldsymbol{x} - q = 0\}$

或为空集, 或为 $n-1$ 维 C^k 流形, 也称 C^k **超曲面.**

如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$, 根据隐函数定理 8.4.1, 解方程

$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - q = 0$ 得到

$x_i = g_i(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$

这是坐标函数

$\varphi_p : U_p \cap M \mapsto I_p : (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n)$

这是同胚映射

且 $(U_p \cap M, \varphi_p), \{x_1, x_2, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n\}$ 为 $\boldsymbol{p}$ 点的局部坐标系.

例如:$\boldsymbol{U} = \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$, $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 为 C^∞ 函数.

且在 $\mathbb{R}^n \backslash \mathbf{0}$ 上, 有

$$\text{rank } f = \text{rank } \boldsymbol{J} f = \text{rank}(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) = 1$$

于是, 单位球面

$$S^n = f^{-1}(1) = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} | f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0\right\}$$

为 $n-1$维C^∞ 超曲面.

如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = 2x_i \neq 0$ 即 $x_i \neq 0$, 则从方程

$f(\boldsymbol{x}) - 1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1 = 0$ 得到 $x_i = g_i(x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n)$

对本例可直接解得 $x_i = \pm\sqrt{1 - \sum\limits_{j \neq i}^{n} x_j^2}$

7 例 8.4.9 求 z 对 x 的导数

文件

设 $z = f(x, y), g(x, y) = 0$ 而 f 与 g 都为可微的二元函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\, z}{\mathrm{d}\, x}$.

解 2

2020-08-11 利用隐射定理完成证明, 为此需要构造辅助映射

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z - f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

当 $\det \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}} \boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} -f_y' & 1 \\ g_y' & 0 \end{vmatrix} = -g_y' \neq 0$ 时.

2020-08-11 上面这条是隐射定理的条件所要求的

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} \end{bmatrix} = -\left(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}}\boldsymbol{F}(x,y,z)\right)^{-1} \begin{bmatrix} -f'_x \\ g'_x \end{bmatrix} = \frac{1}{g'_y} \begin{bmatrix} -g'_x \\ f'_x g'_y - f'_y g'_x \end{bmatrix}$$

2020-08-11 为什么这里要这么求. 我还想不明白, 下次再想想

2020-08-11 想明白了, 实际上就是因为雅可比矩阵无法和数相乘, 所以搞了个列向量用来做矩阵乘法, 至于为什么选的是 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}, \dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x}$ 我还不是很清楚, 大概分析一下,

故 $\dfrac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{f'_x g'_y - f'_y g'_x}{g'_y}$

8 例 8.4.10 计算雅可比矩阵

设

文件

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_2 - 4x_2 + 2\mathrm{e}^{y_1} + 3 \\ 2x_1 - x_3 - 6y_1 + y_2 \cos y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

试计算: 当 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (x_1,x_2,x_3,y_1,y_2) = (-1,1,-1,0,1)$ 时的 jacobi 矩阵 $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right), i = 1,2; j = 1,2,3$ 其中 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

解法 1

$$\begin{aligned} JF(x,y) &= (J_x F, J_y F) \\ &= \begin{pmatrix} y_2 & -4 & 0 & 2\mathrm{e}^{y_1} & x_1 \\ 2 & 0 & -1 & -6 - y_2 \sin y_1 & \cos y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$JF(-1,1,-1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

由定理 8.4.2(4) 得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big|_{x=(-1,1,-1)} &= -\left(\boldsymbol{J}_y \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right)^{-1} \boldsymbol{J}_x \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Big|_{(x,y)=(-1,1,-1,0,1)} \\ &= -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 10 & -24 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

即 $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{(-1,1,-1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -1 & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -6 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

映射的雅可比矩阵的计算方法: 映射的分量, 一行一行地写, 映射的自变量, 一列一列地求导

9 例 8.4.12 极坐标变换公式/r, θ 关于 x, y 的偏导数

文件

设 $f : (0, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \mapsto \mathbb{R}^2$,

$(r, \theta) \mapsto (x, y) = \boldsymbol{f}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

为极坐标变换公式, 则

$$\det \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(r, \theta) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r \neq 0$$

因此,f 为局部 C^∞ 微分同胚.

> 2020-08-12 因为雅可比行列式不为 0, 所以根据例 8.4.3,rank $\boldsymbol{f} = 2$ 所以是微分同胚
>
> 2020-08-12 疑惑, 微分同胚/微分流形/拓扑流形三个有什么区别?

但由 $\boldsymbol{f}(1, 0) = \boldsymbol{f}(1, 2\pi)$ 知 $\boldsymbol{f}$ 非单射, 从而整体的 $\boldsymbol{f}^{-1}$ 不存在,$\boldsymbol{f}$ 不为整体 C^∞ 微分同胚.

再求 r, θ 关于 x, y 的偏导数

> 2020-08-12 解法 1 的思路: 从逆射下手, 处理 $f^{-1} : (x, y) \mapsto (r, \theta)$, 那么各自的偏导数就构成了雅可比矩阵:J f^{-1}, 再由逆射定理转为求 $(\mathrm{J}\,f)^{-1}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}\boldsymbol{f}^{-1}(x, y) &= [\boldsymbol{J}\boldsymbol{f}(r, \theta)]^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10 例 8.4.14 从 $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ 中获取 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的隐射和雅可比式.

文件

设 $U \subset \mathbb{R}^4$ 为开集,$F, G : U \mapsto \mathbb{R}^1$ 为 4 元函数.

如果 $\boldsymbol{H} = (F, G)^T$ 在点 $(\boldsymbol{z}_0 = (x_0, y_0), \boldsymbol{w}_0 = (u_0, v_0)) \in U$

> 2020-08-12 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ 的一个映射

的某个开邻域内满足隐射定理 8.4.2 的条件, 且 $\det \boldsymbol{J}_w\boldsymbol{H}(\boldsymbol{z_0}, \boldsymbol{w_0}) \neq 0$

则方程组 $\boldsymbol{H}(x, y, u, v) = 0$ 在点 z_0 的某开邻域内能确定一个 C^k 隐射 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})$

> 2020-08-12 这里的 $\boldsymbol{f}$ 是一个 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 的映射, 这些只要熟悉隐射定理就能看出来

证明:

$Jf(z) = -[J_wH(z, w)]^{-1} J_zH(z, w)$

2020-08-12 隐射定理给的结果

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}$$

2020-08-12 同步转化. 下面也没什么说的

$$= -\frac{1}{J}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial v} & -\dfrac{\partial F}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{J}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} & \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \\ \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} & \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)} \end{pmatrix}, J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$