

Outils pour la gestion de projet (IT-S601)

Stéphane Genaud

September 23, 2010

Plan

1 La planification

Plan

- 1 La planification
 - Méthode PERT
 - Méthode PERT probabiliste
 - Diagramme Gantt

Techniques de planification

Objectif : gérer le découpage temporel et structurel

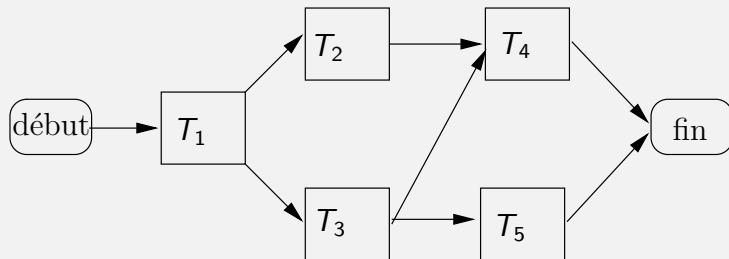
Techniques :

- Graphe PERT pour :
 - ▶ mettre en évidence les dépendances entre tâches
 - ▶ mettre en évidence le parallélisme potentiel
 - ▶ calculer la durée minimum du projet
 - ▶ mettre en évidence les temps d'attente
- Diagramme Gantt pour :
 - ▶ faire des hypothèses sur les *ressources*
 - ▶ faire des hypothèses sur les disponibilités
 - ▶ établir un calendrier de travail

Méthode PERT

Project Evaluation and Review Technique (PERT)

- Établissement de l'ensemble des tâches et leurs durée estimée
- Ordonnancement des tâches selon dépendances

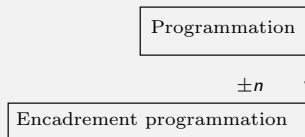


Méthode PERT (2)

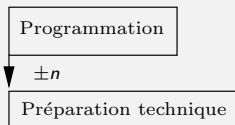
fin-début



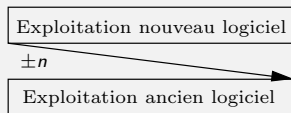
fin-fin



début-début



début-fin



Graphe PERT

- Le projet est caractérisé par
 - ▶ un ensemble de tâches T
 - ▶ une date de début t_0
 - ▶ une date de fin t_f
- Une tâche T_i possède :
 - ▶ une durée $d(T_i)$
 - ▶ un ensemble de prédécesseurs $Pred(T_i)$
 - ▶ un ensemble de successeurs $Succ(T_i)$

⇒ Objectif : définir

- la date *au plus tôt* de chaque tâche
- la date *au plus tard* de chaque tâche
- le *chemin critique*

Dates au plus tôt

la tâche ne peut débuter avant $d_{tot}(T_i)$

la tâche ne peut finir avant $f_{tot}(T_i)$

$$\begin{array}{l} d_{tot}(T_i) = \begin{cases} \max(f_{tot}(Pred(T_i))) & \text{si } Pred(T_i) \neq \{\} \\ t_0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_{tot}(T_i) = d_{tot}(T_i) + d(T_i) \end{array}^*$$

★ : si tous les liens sont de type fin-début

Dates au plus tard

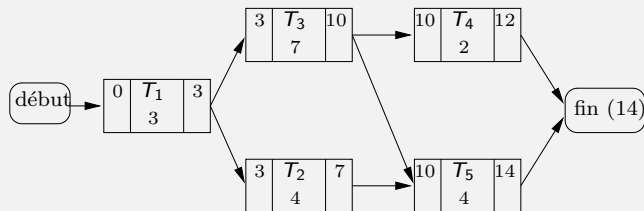
la tâche doit débiter au plus tard à $d_{tard}(T_i)$

la tâche doit finir au plus tard à $f_{tard}(T_i)$

$$\left. \begin{aligned} f_{tard}(T_i) &= \begin{cases} \min(d_{tard}(Succ(T_i))) & \text{si } Succ(T_i) \neq \{\} \\ t_f & \text{sinon} \end{cases} \\ d_{tard}(T_i) &= f_{tard}(T_i) - d(T_i) \end{aligned} \right\}^*$$

★ : si tous les liens sont de type fin-début

Exemple dates au plus tôt

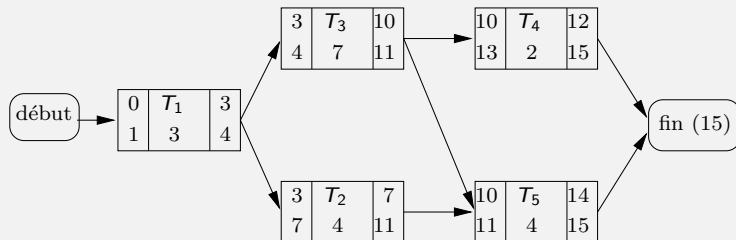


Remarquer la tâche T_5 avec plusieurs prédécesseurs :

$$d_{tot}(T_5) = \max(\{f_{tot}(T_2); f_{tot}(T_3)\}) = \max(\{7, 10\}) = 10$$

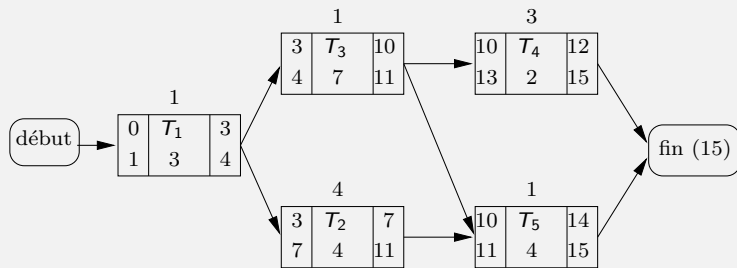
Exemple dates au plus tard

Supposons $t_f = 15$ (estimation de la fin du projet)



Marges et chemin critique

- Marge (de manœuvre) : $m(T_i) = d_{tard}(T_i) - d_{tot}(T_i)$
 $= f_{tard}(T_i) - f_{tot}(T_i)$
- Chemin critique :
chemin tel que la somme des marges est minimale
- Cas particulier avec uniquement liens fin-début
Chemin critique \Leftrightarrow Chemin le plus long



Ici : le chemin critique est $\{T_1; T_3; T_5\}$

Exercice graphe PERT

Tâche	durée	lien
t_1	5	fin t_1 - début t_3
t_2	2	fin t_2 - début t_4, t_5
t_3	10	fin t_3 - début t_6, t_8
t_4	8	fin t_4 - début t_6
t_5	10	fin t_5 - début t_7
t_6	25	fin t_6 - début t_{11}
t_7	4	fin t_7 - début t_{11}
t_8	10	fin t_8 - début t_9, t_{10}, t_{11}
t_9	2	fin t_9 - début t_{13}
t_{10}	1	fin t_{10} - début t_{13}
t_{11}	15	début t_{11} - début t_{12} fin t_{11} - début t_{13}
t_{12}	10	fin t_{12} - début t_{14}
t_{13}	12	fin t_{13} - fin
t_{14}	30	fin t_{14} - fin

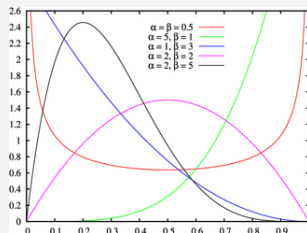
PERT Probabiliste

- Objectif: Inclure risque et incertitude dans la durée
- Durée d'une tâche considérée comme une variable aléatoire. Des études ont montré que la durée d'une tâche peut être modélisée une loi Beta.
- La durée d'un chemin est la somme de telles variables aléatoires. Théorème centrale limite \Rightarrow La durée d'un chemin suit une loi normale.
- Conditions
 - ▶ nombre suffisant de tâches
 - ▶ ordre de grandeur semblables pour les durées
 - ▶ indépendances entre durées des tâches

PERT Probabiliste en pratique

Les travaux de C. Clarke (1962) ont donné une méthode pour contrôler les paramètres de la loi de distribution Beta α et β à partir de 3 paramètres plus simples :

opt : durée optimiste
pes : durée pessimiste
vrai : durée vraisemblable



PERT probabiliste (2)

Pour une tâche :

- Calculer la durée probable d'une tâche i :

$$prob_i = \frac{opt_i + 4 \text{ vrai}_i + pes_i}{6}$$

- Mesurer l'incertitude de l'estimation en calculant l'indicateur de dispersion de la durée de la tâche i :

$$d_i = \frac{pes_i - opt_i}{6}$$

PERT probabiliste (3)

Pour un chemin constitué des tâches $\{1; 2; \dots; n\}$

- Mesurer la durée estimée du chemin

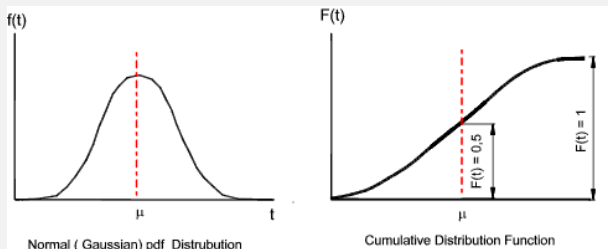
$$D = \sum_{i=1}^n prob_i$$

- Mesurer l'écart-type de l'estimation pour le chemin :

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}$$

PERT probabiliste (4)

Idée: on cherche une borne supérieure t de la durée d'un chemin avec un certain degré de confiance p .



Soit $F(t)$ est la fonction de répartition (ou CFD) de $\mathcal{N}(0, 1)$,
on cherche

$$t \text{ telle que } F(t) \leq p$$

PERT probabiliste (5)

Le comportement stochastique s'applique à l'incertitude déclarée sur le chemin : E .

Si on appelle $G = F^{-1}$,

La durée maximum du chemin avec une probabilité p est:

$$\mathcal{D}(p) = D + E \times G(p)$$

On utilise une table (ou calculatrice):

p	$G(p)$	p	$G(p)$
99,9	3,00	89,1	1,23
99	2,31	85,1	1,04
98	2,06	70,2	0,53
97	1,88	50	0
95	1,65	42,1	-0,2
92,1	1,41	34,5	-0,4
90	1,28	27,4	-0,6

PERT probabiliste (4)

Exemple : Les estimations sont $D = 100$ et $E = 15$.

La durée probable à 90% est

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(0, 9) &= 100 + 15 \times G(0, 9) \\ &= 100 + 15 \times 1,28 \\ &\approx 119\end{aligned}$$

La durée probable à 70% est

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(0, 7) &= 100 + 15 \times G(0, 7) \\ &= 100 + 15 \times 0,53 \\ &\approx 108\end{aligned}$$

La probabilité de terminer en 90 jours est

$$\begin{aligned}90 &= 100 + 15 \times G(p) \\ G(p) &= -10/15 = -2/3\end{aligned}$$

d'où $p \approx 27\%$

Exercice PERT probabiliste

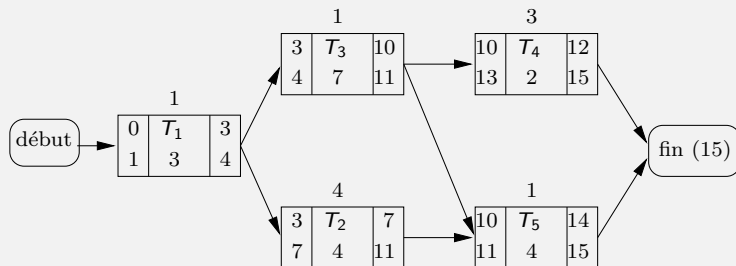
t_i	Description	opt	pes	$vrai$
t_1	faire fondre le beurre et le chocolat	6	9	7,5
t_2	séparer les oeufs en jaunes et blancs	1	4,5	3
t_3	ajouter les jaunes au mélange, faire cuire	6	8	7
t_4	monter les blancs en neige	2	12	5
t_5	arrêter la cuisson du mélange, et incorporer les blancs au mélange	2	6	3
t_6	faire cuire au four	16	22	18

- 1 Tracer le graphe PERT (sans contrainte de ressources)
- 2 Calculer la durée probable, l'écart-type de chaque chemin
- 3 Déterminer le chemin critique
- 4 Quelle est la durée estimée de préparation du gâteau,
 - avec une probabilité de 90% ?
 - avec une probabilité de 95% ?
- 5 Quelle est la probabilité de terminer en 37 minutes ?

Etablir un planning

- Un réseau PERT donne les dates (au plus tôt, au plus tard) sans tenir compte des contraintes de ressources
- Planning \Rightarrow faire des hypothèses sur les ressources
- Diagramme Gantt : qui fait quoi et quand ?
- Possibilité de modifier le planning en
 - ▶ jouant sur les ressources affectées
 - ▶ jouant sur le chargement (au plus tôt, au plus tard)

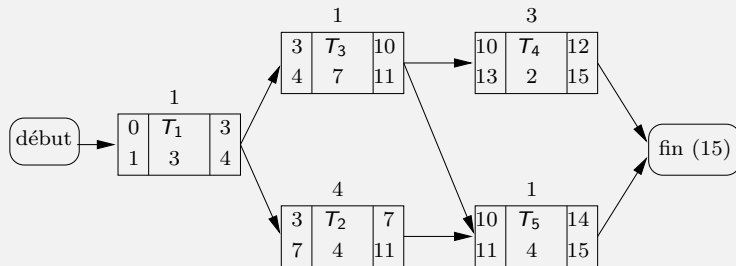
Diagramme Gantt (2)



Hypothèses : ressources R1 et R2, et chargement au plus tôt

Périodes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ressources															
R1		T1													
			T3												
										T5					
R2			T2												
										T4					

Diagramme de Gantt (3)



Hypothèses : ressources R1 et R2, et chargement au plus tard

Périodes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ressources R1															
		T1													
					T3							T5			
R2								T2							
												T4			

Diagramme Gantt : le nivellement

Le *nivellement* : limiter les ressources utilisées

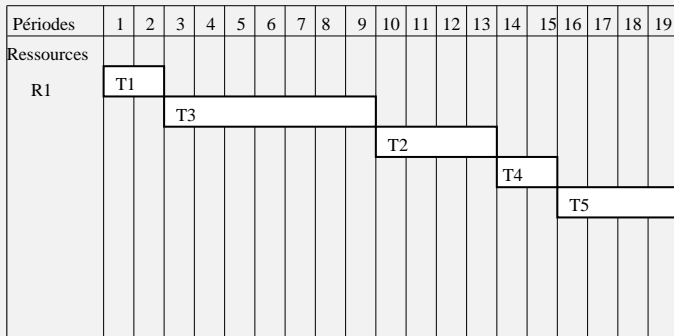


Diagramme Gantt : le lissage

Le *lissage* : répartir l'utilisation d'une ressource dans le temps

