MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CAMPUS SENADOR HELVÍDIO NUNES DE BARROS
Bacharelado em Sistemas de Informação
Prof. Ivenilton.
Disciplina: Lógica para Computação.
Alunos (as): Luis Eduardo Silva

No capítulo seis do livro de Lógica para Ciência da Computação de João Nunes de Souza aborda a linguagem da lógica de predicados. A lógica de predicados é um termo genérico para sistemas formais simbólicos como lógica de primeira ordem, lógica de segunda ordem, many-sorted logic. Esse sistema formal se distingue de outros sistemas em que suas fórmulas contêm variáveis que podem ser quantificadas.

Dois quantificadores comuns são: os quantificadores existencial ∃ (“existe um”) e universal ∀ ("para todo"). As variáveis poderiam ser elementos no domínio do discurso, ou talvez as relações ou funções sobre este universo. Por exemplo, um quantificador existencial sobre um símbolo de função poderia ser interpretado como um modificador "Existe uma função".

No uso informal, o termo "lógica de predicados" ocasionalmente se refere à lógica de primeira ordem. Alguns autores consideram que o **cálculo de predicados** seja a forma axiomática da lógica de predicados, e a lógica de predicados para ser derivado de uma informal, num desenvolvimento mais intuitivo. e também se incluem lógicas misturando operadores modais e quantificadores.

No tópico 6.2 é explicado o alfabeto da lógica de predicados que é formado por:

- símbolos de pontuação “(“ e “)”.
- Um conjunto $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, ...\}$ de variáveis.
- Um conjunto $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, ...\}$ de constantes.
- Um conjunto $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ...\}$ de predicados.
- Um conjunto $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, ...\}$ de funções.
- Conectivos = ¬, ∨, ∧, →, ∀, ∃.

Os símbolos para variáveis formam um novo conjunto, o que não ocorre na Lógica Proposicional, O símbolo $\check{P}$ é utilizado para representar qualquer símbolo proposicional do conjunto {P, Q, R, J, P1, Q1, R1, S1, P2, Q2, . . .}. Na Lógica de Predicados também há metavariáveis. Os símbolos para predicados são utilizados para representar propriedades e relações entre objetos. por exemplo: “Maria é bonita”, temos que nesse caso p(x) é verdadeiro se, e somente se, x é bonita. Os símbolos para função têm utilização análoga àquela que ocorre na Aritmética. Se temos símbolos para funções, temos as constantes. Isso porque cada símbolo para função possui um número k, não negativo, associado, que representa sua aridade.

No tópico 6.3 o autor define as fórmulas da lógica de predicados por meio da explicação de termos, átomos e fórmulas. O conjunto dos termos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:

1. as variáveis são termos;
2. se t1, t2, . . . , tn são termos e ˇf é um símbolo para função n-ária, então ˇf(t1, t2, . . . , tn) é um termo.

▲ Alguns exemplos de termos:

- x, 9, y, 10 são termos, pois variáveis e constantes são termos.
- +(4, 8) é um termo, pois a função + aplicada a dois termos é um termo. Nesse caso, o resultado é interpretado como sendo igual a 13, isto é, o resultado é um novo termo.
- +(−(8, 7), 3) também é um termo. A adição aplicada aos termos −(8, 7) e 3 é um termo. O resultado é interpretado como sendo igual a 4, que é um termo.

O conjunto dos átomos da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:

1. os símbolos proposicionais são átomos;
2. se t1, t2, . . . , tn são termos e pˇ é um símbolo para predicado n-ário, então, pˇ(t1, t2, ..., tn) é um átomo.

▲ Alguns exemplos de átomos:

- A expressão aritmética > (+(5, 8), 3) representa um átomo. Isso porque +(5, 8) e 3 são termos. E o predicado > aplicado a esses termos é um átomo. Nesse caso, o resultado da interpretação da aplicação do predicado > aos termos +(5, 8) e 3 é igual ao valor de verdade T.
- A expressão aritmética 6= (−(8, 7), 3) é um átomo. A desigualdade é um predicado. A aplicação de 6= aos termos −(8, 7) e 3 é um átomo. O resultado da interpretação deste átomo é igual ao valor de verdade T.

O conjunto das fórmulas da linguagem da Lógica de Predicados é o menor conjunto que satisfaz as regras a seguir:

1. Todo átomo é uma fórmula.
2. Se H é uma fórmula, então (¬H) é uma fórmula.
3. Se H e G são fórmulas, então (H ∨ G) é uma fórmula.
4. Se H é uma fórmula e xˇ uma variável, então ((∀xˇ)H) e ((∃xˇ)H) são fórmulas.

▲ Alguns exemplos de átomos:

- Os átomos p(x), R e q(x, a, z) são fórmulas.
- Como (p(x) → R) é uma fórmula, então ((∀x)(p(x) → R)) também é uma fórmula.

No tópico 6.4 o autor ele estabelece a correspondência entre quantificadores e Considera uma fórmula H e uma variável xˇonde os quantificadores existencial ∃ e universal ∀ se relacionam pelas correspondências:

1. ((∀xˇ)H) denota ¬((∃xˇ)(¬H));
2. ((∃xˇ)H) denota ¬((∀xˇ)(¬H)).

Qualquer um dos quantificadores pode ser definido a partir do outro. O quantificador existencial, por exemplo, pode ser definido a partir da correspondência entre as fórmulas ((∃xˇ)H) e ¬((∀xˇ)(¬H)).

No tópico 6.5 João Nunes aborda os símbolos de pontuação e a ordem de precedência desses símbolos, Na Lógica de Predicados, a ordem de precedência dos conectivos é a seguinte:

1. maior precedência: ¬;
2. precedência intermediária superior: ∀ , ∃;
3. precedência intermediária inferior: → , ↔;

4. precedência inferior: $\vee$, $\wedge$.

Neste exemplo considera a simplificação de uma fórmula pela eliminação de símbolos de pontuação. Considerando a ordem de precedência dos conectivos, a concatenação de símbolos $(\forall x)(\exists y)p(x, y) \rightarrow (\exists z)\neg q(z) \wedge r(y)$ representa a fórmula $((((\forall x)((\exists y)p(x, y))) \rightarrow ((\exists z)(\neg q(z))) \wedge r(y))$.

No tópico 6.6 João Nunes estabelece as caracteristicas sintáticas das fórmulas, definindo os conceitos de subtermo, subfórmula e subexpressão. Os elementos a seguir definem as partes de um termo ou fórmula E:

1. Se E = $\check{x}$, então a variável $\check{x}$ é um subtermo de E;
2. Se E = $\check{f}(t1, t2, . . . , tn)$, então, $\check{f}(t1, t2, . . . , tn)$ e ti, para todo i, são subtermos de E;
3. Se t1 é subtermo de t2 e t2 é subtermo de E, então t1 é subtermo de E;
4. Se E = $(\neg H)$ então H e $(\neg H)$ são subfórmulas de E;
5. Se E é uma das fórmulas $(H \vee G)$, $(H \wedge G)$, $(H \rightarrow G)$ ou $(H \leftrightarrow G)$, então H, G e E são subfórmulas de E;
6. Se E = $((\forall \check{x})H)$, então H e $((\forall \check{x})H)$ são subfórmulas de E;
7. Se E = $((\exists \check{x})H)$, então H e $((\exists \check{x})H)$ são subfórmulas de E;
8. Se H1 é subfórmula de H2 e H2 é subfórmula de E, então H1 é subfórmula de E;
9. Todo subtermo ou subfórmula é também uma subexpressão.

Considere H = $(((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)) \wedge ((\forall y)r(y)))$. A fórmula $p(x)$ é uma subfórmula de H que ocorre duas vezes em H. As outras subfórmulas de H são: H, $(\forall x)p(x)$, $(\forall y)r(y)$, $r(y)$, e $((\forall x)p(x)) \rightarrow (p(x)$. Dada uma fórmula H, da Lógica de Predicados, o comprimento de H, denotado por comp[H], é definido como se segue: 1. se H é um átomo, então comp[H] = 1; 2. comp[$\neg$H] = comp[H] + 1; 3. comp[H $\vee$ G] = comp[H] + comp[G] + 1; 4. comp[H $\wedge$ G] = comp[H] + comp [G] + 1; 5. comp[H $\rightarrow$ G] = comp[H] + comp[G] + 1; 6. comp[H $\leftrightarrow$ G] = comp[H] + comp[G] + 1; 7. se H = $(\forall \check{x})G$, então comp[$(\forall \check{x})G$] = 1 + comp[G]; 8. se H = $(\exists \check{x})G$, então comp[$(\exists \check{x})G$] = 1 + comp[G].

No tópico 6.7 o autor classifica as variáveis por meio de escopos de quantificadores, ocorrência livre e ligada, variável livre e ligada, símbolos livres, fórmula fechada, fecho de uma fórmula.

- Escopo de um quantificador: seja E uma fórmula da Lógica de Predicados:

1. Se $(\forall \check{x})H$ é uma subfórmula de E, então o escopo de $(\forall \check{x})$ em E é a subfórmula H;
2. Se $(\exists \check{x})H$ é uma subfórmula de E, então o escopo de $(\exists \check{x})$ em E é a subfórmula H.

- Ocorrência livre e ligada: sejam $\check{x}$ uma variável e E uma fórmula:

1. Uma ocorrência de $\check{x}$ em E é ligada se $\check{x}$ está no escopo de um quanticador $(\forall \check{x})$ ou $(\exists \check{x})$ em E;
2. Uma ocorrência de $\check{x}$ em E é livre se não for ligada.

- Variável livre e ligada: sejam $\check{x}$ uma variável e E uma fórmula que contém $\check{x}$:

1. A variável $\check{x}$ é ligada em E, se existe pelo menos uma ocorrência ligada de $\check{x}$ em E;
2. A variável $\check{x}$ é livre em E, se existe pelo menos uma ocorrência livre de $\check{x}$ em E.

- Símbolos livres: Dada uma fórmula E, os seus símbolos livres são as variáveis que ocorrem livres em E, os símbolos de função e os símbolos de predicado. Os símbolos livres de uma fórmula são todos os seus símbolos, exceto as variáveis ligadas, as variáveis dos quanticadores, os conectivos, e os símbolos de pontuação.

- Fórmula fechada: Uma fórmula é fechada quando não possui variáveis livres.
- Fecho de uma fórmula: Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados e {x˘1, ..., x˘n} o conjunto das variáveis livres em H:

  1. O fecho universal de H, indicado por (∀∗)H, é dado pela fórmula (∀x˘1)...(∀x˘n)H;
  2. O fecho existencial de H,indicado por (∃∗)H, é dado pela fórmula (∃x˘1)...(∃x˘n)H.

No tópico 6.8 que aborda as formas normais, forma literal, cláusula de um programa, cláusula unitária, programa lógico, Um literal, na Lógica de Predicados, é um átomo ou a negação de um átomo. Um átomo é um literal positivo. A negação de um átomo é um literal negativo.

- As fórmulas a seguir são literais:

  1. Como P é um átomo, então P e ¬P são literais;
  2. Como p(f(x, a), x) é um átomo, ¬p(f(x, a), x) é um literal; 3. q(x, y, z) e ¬q(x, y, z) são literais.

- Forma normal: Seja H uma fórmula da Lógica de Predicados. 1. H está na forma normal conjuntiva, fnc, se é uma conjunção de disjunções de literais. 2. H está na forma normal disjuntiva, fnd, se é uma disjunção de conjunções de literais.
- Cláusula de programa: Uma cláusula de programa, na Lógica de Predicados, é uma cláusula do tipo C = (∀∗)G, onde G está na forma normal disjuntiva e contém exatamente um literal positivo.
- (cláusula unitária) Uma cláusula de programa unitária é uma cláusula do tipo B ← . Nesse caso, a cláusula não contém literais negativos. Uma cláusula unitária é também denominada como fato.
- Programa lógico: Um programa lógico é um conjunto de cláusulas de programa.

Portanto, de fato em si a obra é muito explicativa, o cápitulo é bem compreensivel, o estudo é bem interessante, porém as fórmulas são de dificil compreendimento do leitor, principalmente para quem é leigo no assunto.

Bibliografia

SOUSA, João Nunes. Lógica para Ciência da Computação: Uma introdução concisa. Segunda Edição Revisada e Atualizada, Rio de janeiro: Elsevier, 2008.

● A SEMÂNTICA DA LÓGICA DE PREDICADOS

■ **Interpretações informais:** Considere, de maneira informal, o predicado q e uma interpretação I tal que: q(x) é interpretado como verdadeiro se, e somente se, x é interpretada como um número par. Escrito de outra forma: I[q(x)] = T, se, e somente se, I[x] é número par. Nesse caso, q(x) é um átomo dado por um predicado que identifica a categoria dos números pares.

1. Para interpretar um átomo, como p(x), devemos definir o domínio da interpretação I. Nesse caso, a interpretação não é tão simples como na Lógica Proposicional, caso em que não é necessário definir o domínio da interpretação.
2. O resultado da interpretação de um átomo é T, ou F.
3. O resultado da interpretação de uma constante é um elemento do domínio da interpretação.
4. Os átomos podem ser combinados utilizando conectivos e a interpretação das fórmulas obtidas segue as ideias da Lógica Proposicional.
5. O símbolo p é um objeto sintático que pertence ao alfabeto da Lógica de Predicados. Por outro lado, I[p(x)] é um objeto semântico que pertence ao conjunto {T, F}.

A interpretação informal de uma função é dada pela interpretação I[f(x)].

1. Para interpretar uma função, como f(x), devemos definir o domínio da interpretação I.
2. O resultado da interpretação de um termo é um elemento do domínio, ou universo da interpretação.
3. Os termos não podem ser combinados utilizando conectivos, como ocorre com os átomos.
4. O símbolo f é um objeto sintático que pertence ao alfabeto da Lógica de Predicados. Por outro lado, I[f(x)] é um objeto semântico que pertence ao domínio da interpretação I.

Interpretações incorretas: I[f(a)] = √ 20. , pois, necessariamente, devemos ter I[f] : N → N. E, uma interpretação I sobre os números naturais N. E seja a uma constante, tal que I[a] = Zé.

■ **Interpretação de átomos e termos:** A interpretação dos termos e átomos, segundo I, é dada por:

1. Para toda variável x˘, x˘I é um elemento semântico que pertence ao domínio U;
2. Para todo símbolo proposicional P˘, P˘I é um elemento semântico que pertence ao conjunto {T, F};
3. Para todo símbolo de função ˘f, n-ário, ˘fI é uma função semântica n-ária em U, isto é, ˘fI : U n → U;
4. Para todo símbolo de predicado p, ˘ n-ário, p˘I é um predicado semântico n-ário em U, isto é, p˘I : U n → {T, F};
5. Dado um termo ˘f(t1, ..., tn), então I[˘f(t1, ..., tn)] = ˘fI (t1I , ..., tnI);
6. Dado um átomo p˘(t1, ..., tn), então I[˘p(t1, ..., tn)] = pI (t1I , ..., tnI).

- A interpretação I é uma função total que tem como domínio, todos os símbolos de função, de predicado e expressões da Lógica de Predicados.
- uma função zero-ária denota uma constante. Nesse caso, dada uma interpretação sobre U, para toda função zero-ária ˘b, se I[˘b] = ˘bI , então ˘bI ∈ U e ˘bI é uma constante.

- A interpretação das variáveis tem como resultado algum elemento do domínio da interpretação. Dada uma interpretação sobre U, se I[x] = ˇxI , então xˇI ∈ U.

- Interpretação de símbolos proposicionais. A interpretação de um predicado zero-ário é igual à interpretação de um símbolo proposicional. Para todo símbolo proposicional Pˇ, se I[Pˇ] = PˇI , então PˇI ∈ {T, F}.

- a diferença entre as interpretações de funções e predicados. Dada uma interpretação sobre U, se ˇf é um símbolo para função n-ário, então: ˇfI : U n → U. Nesse caso, o contradomínio de ˇfI é igual a U. Por outro lado, se pˇ é um símbolo para predicado n-ário: pˇI : U n → {T, F}. Nesse caso, o contradomínio de pˇI é igual a {T, F}.

- domínio da interpretação) Seja I uma interpretação sobre os naturais, tal que I[a] = 25, I[b] = 5 e I[f(x, y)] = (xI÷yI). Observe que I interpreta a constante a como 25, a constante b como 5 e f como a função divisão. Dessa forma, f(a, b) é interpretada como 5, isto é, I[f(a, b)] = 5.

■ **Interpretação de fórmulas com estruturas iniciais simples:** Uma fórmula da Lógica de Predicados tem uma estrutura inicial simples se, e somente se, ela tem umas das formas (¬H), (H ∨ G), (H ∧ G), (H → G), ou (H ↔ G).

- A fórmula a ((∀x)p(x) → (∃y)q(y)) possui uma estrutura inicial simples. Nesse caso, ela é do tipo (H → G) e escrita na notação polonesa, é denotada por → (∀x)p(x)(∃y)q(y), que inicia com o conectivo →.

- . A interpretação de E conforme I, denotada por I[E], é determinada pelas regras a seguir:

1. se E = (¬H), onde H é uma fórmula, então I[E] = I[(¬H)] = T se I[H] = F e I[E] = I[¬H] = F se I[H] = T;
2. se E = (H ∨ G), onde H e G são duas fórmulas, então I[E] = I[(H ∨ G)] = T se I[H] = T e/ou I[G] = T e I[E] = I[(H ∨ G)] = F se I[H] = I[G] = F;
3. se E = (H ∧ G), onde H e G são duas fórmulas, então I[E] = I[(H ∧ G)] = T se I[H] = T e I[G] = T e I[E] = I[(H ∧ G)] = F se I[H] = F e/ou I[G] = F;
4. se E = (H → G), onde H e G são duas fórmulas, então I[E] = I[(H → G)] = T se I[H] = F e/ou I[G] = T e I[E] = I[(H → G)] = F se I[H] = T e I[G] = F;
5. se E = (H ↔ G), onde H e G são duas fórmulas, então I[E] = I[(H ↔ G)] = T se I[H] = I[G] e I[E] = I[(H ↔ G)] = F se I[H] 6= I[G].

■ **Interpretação informal de fórmulas com quantificadores:** Numa fórmula com um quantificador universal a representação e interpretação da sentença "Todo número é par", é dada dessa forma: I[q(x)] = T, se, e somente se, I[x] é número par. Para interpretar uma fórmula da Lógica de Predicados, é necessário seguir alguns passos para definir uma interpretação adequada.

1. definir o domínio da interpretação, que corresponde ao universo do discurso;
2. selecionar constantes na linguagem para representar os nomes presentes no domínio do discurso;
3. selecionar símbolos de predicado e de função para representar relações de predicado e funcionais entre os elementos do domínio.

- Dada a sentença da aritmética: "Para quaisquer dois números x e y, temos que x + y = y + x". Essa sentença pode ser representada por: I[p(x, y)] = T se, e somente se, I[x] = I[y], I[f(x, y)] = (I[x] + I[y]).

■ **Interpretação de fórmulas com quantificadores:** Seja I uma interpretação sobre um domínio U. Considere x uma variável qualquer da

Lógica de Predicados e d um elemento de U. Uma extensão de I, conforme x e d, é uma interpretação sobre U, denotada por < x ← d > I, tal que:

$$< x \leftarrow d > I[\breve{y}] = \{ \text{se } \breve{y} = x \text{ e } I[\breve{y}] \text{ se } \breve{y} \neq x$$

- regra semântica para o quantificador universal: considere I uma interpretação sobre o conjunto dos alunos de Ciência da Computação, CC. Considere, também, um predicado p tal que I[p(x)] = T, se, e somente se, I[x] é um aluno inteligente.
- regra semântica para o quantificador existencial: considere a sentença "existe aluno de Ciência da Computação que é inteligente" corresponde, segundo I, à fórmula G, tal que, G = (∃x)p(x). Nesse caso, queremos identificar que condições devem ser satisfeitas para que a fórmula G seja verdadeira, segundo a interpretação I.
- regras semânticas para fórmulas com quantificadores: Sejam H uma fórmula da Lógica de Predicados, x uma variável qualquer e I uma interpretação sobre o domínio U. Os valores semânticos de I[(∀x)H] e I[(∃x)H] são definidos pelas regras:
  1. I[(∀x)H] = T se, e somente se, ∀ d ∈ U, < x ← d > I[H] = T;
  2. I[(∀x)H] = F se, e somente se, ∃ d ∈ U; < x ← d > I[H] = F;
  3. I[(∃x)H] = T se, e somente se, ∃ d ∈ U; < x ← d > I[H] = T; 4. I[(∃x)H] = F se, e somente se, ∀ d ∈ U, < x ← d > I[H] = F.
- interpretação de fórmula com quantificador: Seja I uma interpretação sobre o domínio dos números naturais N, tal que I[x] = 3, I[a] = 5, I[y] = 4, I[f] = + e I[p] = < .Considere a fórmula H3 tal que H3 = (∀x)p(x, y). Queremos responder, neste exemplo, se I[H3] = T, ou I[H3] = F. Podemos verificar que, conforme I, temos informalmente que: I[H3] = "Para todo número natural x, x < 4". Evidentemente, essa afirmação é falsa e, por isso, devemos ter I[H3] = F.

■ **Tradução de sentenças:** É necessário dizer em que contexto estamos comunicando e como estamos interpretando o predicado p. Isto é, devemos definir uma interpretação I1 que faz a associação entre a sentença da língua portuguesa e a fórmula da Lógica de Predicados. Sem a necessária formalidade, a representação não se adequa. Seja, então, uma interpretação I1 sobre o conjunto das pessoas, tal que: I1[p(x)] = T, se, e somente se, I1[x] é mortal.

- Considere a sentença "Nenhuma aranha é um inseto". Seja, então, uma interpretação I4 sobre o conjunto dos animais. Considere os predicados q e p tais que:

  I4[p(x)] = T se, e somente se, xI4 é um inseto;
  I4[q(x)] = T se, e somente se, xI3 é uma aranha.

Nesse caso, a sentença: "Nenhuma aranha é um inseto" é representada pela fórmula H1 = ¬(∃x)(q(x)∧p(x)).

■ **A Aritmética:**

- Representação dos números naturais: Seja I uma interpretação sobre N. Se I é um modelo padrão, então: 1. I[0] = 0.
- a função sucessor: S. A ideia é que o termo S(0) seja interpretado, pelo modelo padrão, como o número 1 e assim sucessivamente. I[S(0)] = 1, I[S(S(0))] = 2, I[S(S(S(0)))] = 3, I[S(S(S(S(0))))] = 4, . . . ,
- Representação das operações básicas da aritmética:
  1. I[^+] = + ;
  2. I[^x] = ×;

3. $I[S(x)] = I[x] + 1$;
4. $I[(x \,\hat{}+\, y)] = I[x] + I[y]$;
5. $I[(x \,\hat{}x\, y)] = I[x] \times I[y]$.
6. se t1 e t2 são termos, então $I[(t1 =b\ t2)] = T \Leftrightarrow I[t1] = I[t2]$;
7. $I[(\forall x)(x =b\ x)] = T$;
8. para toda fórmula H(x), $I[(x =b\ y) \rightarrow (H(x) =b\ H(y))] = T$.

- Números pares: Considere a fórmula Hpar, tal que: Hpar = $(\exists x)(2 \times b\ x =b\ y)$. Na fórmula Hpar, a variável y ocorre livre e para enfatizar tal fato, usamos a notação Hpar(y). Temos, então, que para todo modelo padrão I, se I[y] = n, então I[Hpar(y)] = T, $\Leftrightarrow$ n é um número par.
- Números ímpares: Se temos uma fórmula que expressa os números pares, a sua negação expressa os números ímpares. Considere a fórmula Himpar, tal que: Himpar = ¬Hpar = $\neg(\exists x)(2 \times b\ x =b\ y)$. Temos, então, que para todo modelo padrão I: Se I[y] = n, então I[Himpar(y)] = T, $\Leftrightarrow$ n é um número ímpar.
- Números primos: Considere a fórmula Hprimo, tal que: Hprimo = $\neg(x =b\ 1) \wedge (\forall y)(\forall z)(((y \times b\ z) =b\ x) \rightarrow ((y =b\ 1) \vee (z =b\ 1)))$ Na fórmula Hprimo, para todo modelo padrão I: Se I[x] = n, então I[Hprimo(x)] = T, $\Leftrightarrow$ n é um número primo.
- A Aritmética de Robinson: Denominada Aritmética básica, tem como fundamento sintático a linguagem da Lógica de Predicados, tal que: 1. o alfabeto contém, além dos símbolos usuais, os símbolos 0, S, +b e ×b, ou 2. o alfabeto contém apenas os símbolos usuais, mas existe nesse alfabeto os símbolos a, f, g, h e p tais que para todo modelo padrão I, temos: I[a] = 0, I[f] = função sucessor, I[g] = +, I[h] = ×, e I[p] = “ =00. Nesse caso, denotamos a por 0, f por S, g por ^+, h por ×b e p por ^=.
- Os princípios fundamentais da Aritmética de Robinson são definidos a seguir:
  1. $Bx1 = (\forall x)\neg(0 =b\ S(x))$;
  2. $Bx2 = (\forall x)(\forall y)((S(x) =b\ S(y)) \rightarrow (x =b\ y)$;
  3. $Bx3 = (\forall x)(\neg(x =b\ 0) \rightarrow (\exists y)(x =b\ S(y))$;
  4. $Bx4 = (\forall x)((x +b\ 0) =b\ x)$;
  5. $Bx5 = (\forall x)(\forall y)((x +b\ S(y)) =b\ S(x +b\ y))$;
  6. $Bx6 = (\forall x)((x \times b\ 1) =b\ x)$; 7. $Bx7 = (\forall x)(\forall y)((x \times b\ S(y)) = ((\ b\ x \times b\ y) +b\ x))$.
- Definições recursivas na Aritmética de Robinson:
  - função fatorial:
    1. $p(a, b) \leftarrow$
    2. $p(f(x), y) \leftarrow p(x, z), q(g(f(x), z),$
  - função exponencial: 2 3 é denotado por $2 \uparrow 3$.
    1. $(\forall x)((x \uparrow 0) =b\ 1)$
    2. $(\forall x)(\forall y)((x \uparrow S(y)) = ((\ b\ x \uparrow y) \times b\ x))$
  - (função de Ackermann) A função de Ackermann, denotada por fak, é uma função ternária definida, recursivamente, como se segue:
    1. $(\forall x)(\forall z)(fak(x, 0, z) =b\ x)$;
    2. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(fak(x, y, z) = ((\ b\ x \uparrow z\ y)$.
- A linguagem da Aritmética básica: A linguagem da Aritmética básica, denotada por La, é uma linguagem interpretada tal que:
  1. A linguagem de La e a linguagem da Lógica de Predicados, na qual incluímos os símbolos aritméticos: 0, S, +b e ×b;
  2. A interpretação dos símbolos extras de L_a
- A interpretação da Aritmética básica dene explicitamente a interpretação das sentenças como elas deveriam ser.

- A expressividade da Aritmética básica: Uma propriedade P rop sobre os números naturais N é expressa na linguagem La, da Aritmética básica, por uma fórmula Hprop(x), na qual x ocorre livre, se, e somente se, para todo número n em N, temos:

1. se n tem a propriedade P rop, então para toda interpretação I, I[Hprop(n)] = T;
2. se n não tem a propriedade P rop, então para toda interpretação I, I[¬Hprop(n)] = T.

- linguagem suficientemente expressiva: Uma linguagem aritmética é suficientemente expressiva se as condições a seguir são satisfeitas.

1. A linguagem expressa toda propriedade aritmética decidível.
2. A linguagem contém a linguagem da Lógica de Predicados.

■ **Representação de argumentos lógicos:** Considere o argumento: “Todos os padres são pacifistas. Nenhum general é padre. Portanto, nenhum general é pacifista.” Considere a interpretação I7 sobre o conjunto dos homens e os predicados p, q e r tais que:

I7[p(x)] = T se, e somente se, xI7 é um padre;
I7[q(x)] = T se, e somente se, xI7 é um pacifista;
I7[r(x)] = T se, e somente se, xI7 é um general.

Segundo I7, as premissas são representadas por: $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))$ e a conclusão por $\neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x))$. O argumento é representado, segundo I7, por:

$$((\forall x)(p(x) \rightarrow q(x)) \wedge \neg(\exists x)(r(x) \wedge p(x))) \rightarrow \neg(\exists x)(r(x) \wedge q(x)).$$

Link da apresentação do resumo:
https://drive.google.com/file/d/1Rs6yoMEx73SwD7lh1Q4dx_cnoKeujHnX/view?usp=sharing