Análise Numérica
Relatório 2 - Determinação de Raízes

Grupo 29

José Dias
Luís Pinto
Samuel Neves
Bárbara Gonçalves

27 de Março de 2019

1 Introdução

Com este trabalho pretendemos determinar raízes de uma dada função usando o método de Newton e o método iterativo simples com um erro inferior a um dado ϵ. Dito isto, alguns pontos a ter em consideração quanto ao mesmo:

1. A linguagem utilizada foi *Python* e *wxMaxima*, portanto, os cálculos foram feitos em dupla precisão.
2. Para a auxiliar a resposta ao problema em questão serão usados alguns dos seguintes métodos:
   - Resolução Teórica;
   - Código do programa;
   - Gráficos;
   - Tabelas;
   - Comentários.
3. A função F referida em todos os exercícios é $F(x) = sin(10x) - x - 0.1$ que é contínua em todo o seu domínio, pois resulta da soma e composição de funções contínuas.

Exercício 1.

Alínea a)

```python
from math import *
def F(x): #Funcao dada
    return sin(10*x)-x-0.1
def dfdx(x):  #Derivada da funcao dada
    return 10*cos(10*x)-1
def suc1(n,x0): '''n-esimo termo da sucessao x_n'''
    x = x0
    for i in range(n):
        x = -F(x)/dfdx(x)+x
    return x
def Ex1():
    x0 = float(input('Indique o valor inicial, x0: '))
    epsilon = input('Indique o erro que pretende estimar a sua solucao: ').split('*')
    if epsilon[0]=='10':
        epsilon = float(int(epsilon[0])**int(epsilon[2]))
    else:
        epsilon = float(int(epsilon[0])*10**int((epsilon[3])))
    count = 0
    erro = abs(x0-(-F(x0)/dfdx(x0)+x0))
    while erro > epsilon:
        x1 = x0
        x0 = suc1(1,x0)
        erro = abs(x0-x1)
        count+=1
        if count>100000:
          print('Numero de iteracoes excedida.', 'Erro =',erro, 'x0 =',x0)
          return('void')
    print('Foram precisas %d iteracoes e o valor obtido foi'% (count),x0, "erro absoluto estimado: ",erro)
```

Alínea b)

Gráfico de F(x):

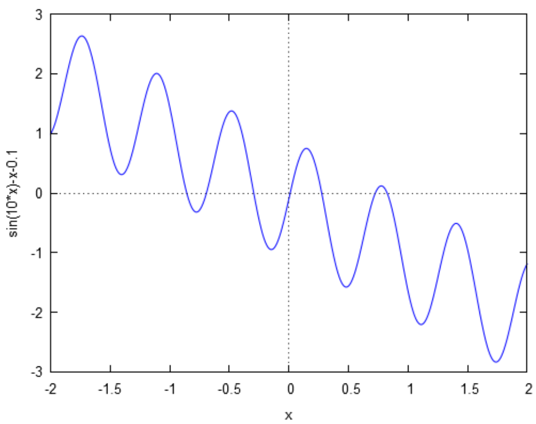


Figura 1: Gráfico da função $y = F(x)$

Separação das Raízes:

x	$F(x)$
-1	$\approx 1.444 > 0$
-0.75	$\approx -0.288 < 0$
-0.5	$\approx 1.359 > 0$
-0.25	≈ -0.448
0.1	$\approx 0.641 > 0$
0.5	$\approx -1.559 < 0$
0.75	$\approx 0.088 > 0$
1	$\approx -1.641 < 0$

Análise do gráfico e tabela:

Analisando o gráfico da função F(x) verifica-se que tem 7 raízes e, com auxílio da *Fig.1* obtém-se a separação das raízes nos seguintes intervalos:

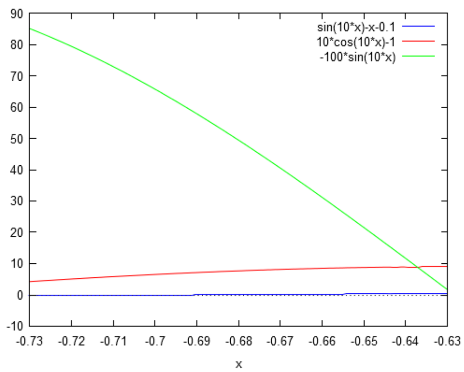
1. $[-1, -0.75]$
2. $[-0.75, -0.5]$
3. $[-0.5, -0.25]$
4. $[-0.25, 0.1]$
5. $[0.1, 0.5]$
6. $[0.5, 0.75]$
7. $[0.75, 1]$

Pretende-se encontrar um intervalo, I, cuja amplitude não exceda 10^{-1} e que contenha uma raiz. A partir do intervalo 2, por exemplo, obtém-se o intervalo $I = [-0.73, -0.63]$ pois $F(-0.73) \approx -0.22 < 0$ e $F(-0.63) \approx 0.51 > 0$ e, como a função F(x) é contínua em I, conclui-se, pelo Teorema de Bolzano, que existe pelo menos uma raíz em I que, neste caso, é única. Fica assim determinado o intervalo, I, com amplitude 10^{-1}.

Resposta: $I = [-0.73, -0.63]$

Alínea c)

Gráficos de F(x), F'(x) e F"(x):



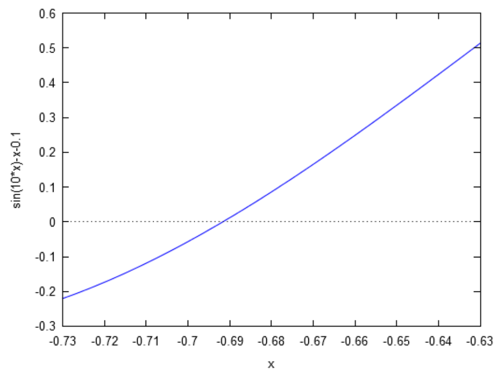


Figura 2: Gráficos das funções $F(x)$, $F^{'}(x)$ e $F^{''}(x)$

Dados para a resposta ao problema : O valor inicial, x_0, da sucessão $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que vamos utilizar é $x_0 = -0.65$. $F(x) = \sin(10x) - x - 0.1$, $F^{'}(x) = 10 \times \cos(10x) - 1$ e $F^{''}(x) = -100 \times \sin(10x)$.

1. $F(x)$, $F^{'}(x)$, $F^{''}(x)$ são contínuas em $\mathbb{R}$ pois são soma de funções polinomiais e funções contínuas trigonométricas e, portanto, em I também o são.
2. $F(-0.73) \times F(-0.63) \approx -0.11 < 0$.
3. Observando a *Fig.2*, verifica-se que $F'(x) \neq 0, \forall x \in I$.
4. $F''(x) \geq 0$ pois, $I \subseteq [\frac{-3\pi}{10}, \frac{-2\pi}{10}] = A$ e $\forall x \in A, \sin(10x) \leq 0$.
5. $F(-0.65) \times F''(-0.65) \approx 7.20 > 0$ e $x_0 \in I$.

Alínea d)

Output do programa:

```
>>> Ex1()
Por favor indique qual o valor inicial de x para aplicar o processo de newton: -0.65
Indique o erro que pretende estimar a sua solucao: 5*10**-12
Foram precisas 4 iteracoes e o valor obtido foi -0.6916259425670042 erro absoluto estimado:
    3.3306690738754696e-16
```

Resposta ao problema: O valor da raíz é $-0.6916259425670042 \pm 1 \times 10^{-15}$.[1]

Alínea e)

Resolução teórica: A majoração do erro absoluto em cada iteração pode ser obtida recursivamente pela expressão: $|\Delta x_{n+1}| \leq M \times {\Delta x_n}^2, n \geq 0$ onde $M = \frac{1}{2} \times \frac{max_{x\in I}|F^{''}(x)|}{min_{x\in I}|F^{'}(x)|}$ e, resolvendo a recursão, obtém-se a seguinte expressão:

$$|\Delta x_n| \leq M^{2^n - 1} \times |\Delta x_0|^{2^n}$$

[1] O erro foi arredondado por excesso pelo facto de a máquina ter um sistema de vírgula flutuante de 16 algarismos significativos

Para obter o número de iterações necessárias para obter a raiz com o erro absoluto majorado inferior a 5×10^{-14}, basta resolver a inequação em ordem a n, ou seja: $|\Delta x_n| \leq M^{2^n-1} \times |\Delta x_0|^{2^n} \leq \epsilon \Rightarrow n \geq \frac{\log(k)}{log(2)}$ com $k = \frac{\log(\epsilon)+\log(M)}{\log(M)+\log(|\Delta x_0|)}$.

Cálculo de M: Analisando a *Fig.2* verifica-se que, no intervalo I, $F^{'}(x)$ é monótona crescente, e, portanto, $min_{x\in I}|F^{'}(x)| = F^{'}(-0.73)$ e, analogamente, $max_{x\in I}|F^{''}(x)| = F^{''}(-0.73)$. Tem-se portanto, que $M = 9.97983... < 9.98$. Arredondando por excesso obtém-se $M = 9.98$.

Programa para calcular n:

```
from math import*

def numiter(eps,M,Dx0):
    k = (log(eps)+ log(M))/(log(M)+log(Dx0))
    x = log(k)/log(2)
    return(x)

#resposta
>>> numiter(5*10**-14,9.98,0.1)
13.788404043215902
```

Comentário: Como a segunda derivada admite valores muito maiores do que 1 no intervalo dado, o valor de M no cálculo da majoração irá ser bastante grande o que vai afetar o número de iterações a realizar. Este problema poderia ter sido resolvido escolhendo um intervalo de amplitude inferior a 10^{-1}.
Resposta ao problema: Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 14$.

Exercício 2

Alínea a)

```
def f(x):
    return sin(10*x)-0.1
def Ex2():
    x0 = float(input('Valor inicial de x0 para aplicar o metodo iterativo simples: '))
    epsilon = input('Indique o erro que pretende estimar a sua solucao: ')
    epsilon = epsilon.split('*')
    if epsilon[0]=='10':
        epsilon = float(int(epsilon[0])**int(epsilon[2]))
    else:
        epsilon = float(int(epsilon[0])*10**int((epsilon[3])))
    n = 0
    x1 = f(x0)
    erro = abs(x1-x0)
    while erro > epsilon and n<=500000:
        x0 = x1
        x1 = f(x0)
        erro = abs(x1-x0)
        n+=1
    if n >= 500000:
        print("Iteracoes: %d\nErro estimado: %f\nXn =" % (n,erro),x1)
        return('Numero de iteracoes excedido')
    print('Foram precisas %d iteracoes e o valor obtido foi' %(n),x0,"erro absoluto:",erro)
```

Alínea b)

A expressão de $g(x)$ foi obtida da seguinte forma: $F(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$, ou seja, $\sin(10x) - x - 0.1 = 0 \Leftrightarrow x = \sin(10x) - 0.1 = g(x)$

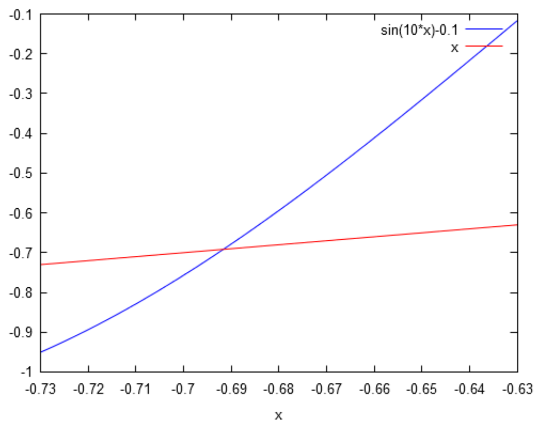


Figura 3: Gráfico y=sin(10x)-0.1 e y=x

Output do programa:

```
>>> Ex2()
Valor inicial de x0 para aplicar o metodo iterativo simples: −0.65
Indique o erro que pretende estimar a sua solucao: 5*10**−14
Iteracoes: 500001
Erro estimado: 0.995419
Xn = −0.6258843521531515
'Numero de iteracoes excedido'
```

Comentários: Como se pode verificar, a sucessão não converge nas condições a que foi submetida o que seria de esperar pois, para haver convergência, a sucessão dos erros tem de convergir para zero e, portanto, $|\Delta x_{n+1}| < |\Delta x_n|$ o que não acontece como mostra o seguinte programa:

```
def error(x0,eps,n):
    x1 = g(x0)
    erro = abs(x1−x0)
    for i in range(n):
        x0 = x1
        x1 = g(x0)
        erro = abs(x1−x0)
        print(n,erro)

#Resultado

>>> error(−0.65,5*10**−12,10)
1 0.224727067587575
2 0.7953703690914948
3 0.24853700945350954
4 0.4482665412240503
5 0.8606521425319984
6 1.827455373318947
```

```
7 0.11930421199942531
8 0.5592122391749063
9 0.6734636368369937
10 0.44759466767720935
```

Nota: O valor de $n = 10$ é arbitrário.

Além disso, para $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergir, a seguinte expressão tem de se verificar:

$$|\Delta x_{n+1}| < L|\Delta x_n|$$

onde $|g'(x)| \leq L < 1, \forall x \in I$. O que não acontece pois, observando a *Fig.4* no intervalo I, verifica-se que $g^{'}$ é monótona crescente e, portanto, $max_{x\in I}|g'(x)| = |g'(-0.63)| \approx 9.999 > 1$.

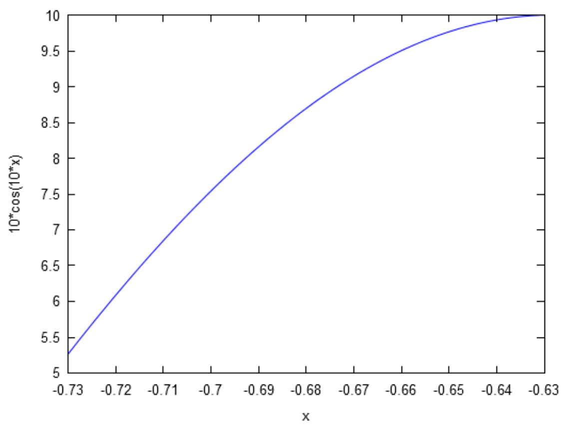


Figura 4: Gráfico de $y = g^{'}(x)$

Diagrama Teia de Aranha:

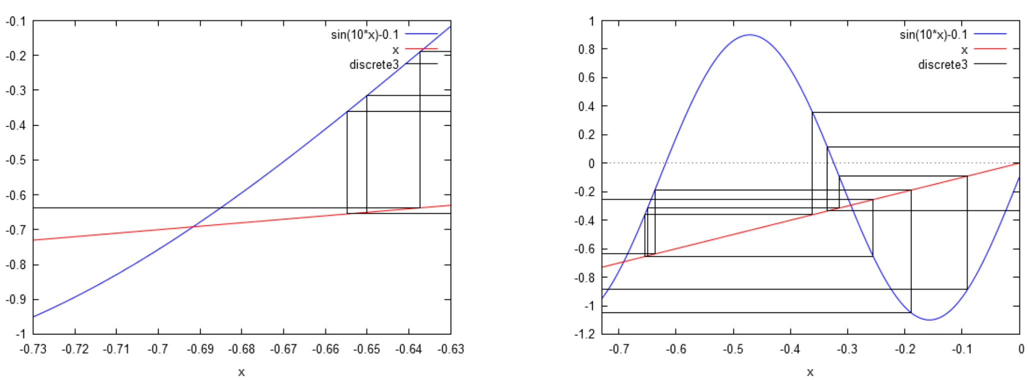


Figura 5: Diagramas de teia de aranha nos intervalos $[-0.73, -0.63]$ e $[-0.73, 0]$, respetivamente.