Modelagem Dinâmica de um Pêndulo Invertido em um Carro

Renan Duarte

17 de agosto de 2024

Resumo

Este documento apresenta a modelagem dinâmica de um pêndulo invertido montado em um carro, um sistema clássico utilizado para testar técnicas de controle devido à sua complexidade não linear. O objetivo principal é manter o pêndulo equilibrado na posição vertical, utilizando a força aplicada ao carro como entrada de controle. O documento inicia com a modelagem do carro, simplificando o problema ao considerar a aceleração como entrada direta. A modelagem do pêndulo é abordada em seguida, com a linearização das equações não lineares para facilitar a análise. Finalmente, os modelos do carro e do pêndulo são combinados em um sistema completo representado no espaço de estados. As matrizes de estado são derivadas e apresentadas, oferecendo uma visão integrada das dinâmicas do carro e do pêndulo. Esta abordagem permite a análise e o desenvolvimento de controladores para o sistema integrado, fornecendo uma base sólida para a implementação de estratégias de controle.

1 Introdução

O estudo do pêndulo invertido montado sobre um carro (IPC) é um problema clássico em sistemas dinâmicos e controle, exemplificando um sistema não linear com múltiplos graus de liberdade. Este tipo de sistema é frequentemente utilizado para testar e demonstrar técnicas de controle devido à sua dinâmica complexa e não linear. O sistema consiste em um pêndulo de comprimento l e massa m montado em um carro que se move ao longo de um eixo horizontal. A posição do carro no eixo horizontal é denominada p e o ângulo do pêndulo em relação à vertical é denotado por θ, conforme apresentado na Figura 1.

O objetivo é manter o pêndulo equilibrado na posição vertical usando a força atuante no carro u no eixo horizontal como entrada de controle.

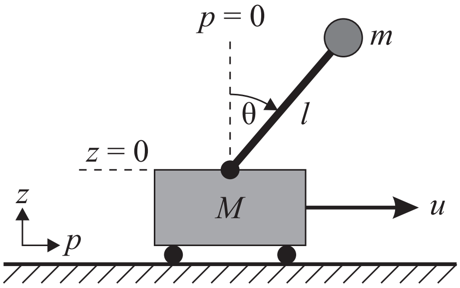

Figura 1: Pêndulo Invertido em um Carro

A modelagem desse sistema é fundamental para entender sua dinâmica, prever o comportamento do pêndulo e desenvolver controladores eficientes para estabilizá-lo.

2 Modelo matemático do carro

2.1 Equação do movimento

Vamos iniciar a modelagem pelo carro que suporta o pêndulo. Consideramos que o carro se move ao longo de um eixo horizontal e que sua dinâmica é governada pela segunda lei de Newton.

A equação do movimento do carro é dada por (1).

$$M\frac{d^2p}{dt^2} = F_a + F_r - F_p \tag{1}$$

Onde:

- p é a posição do carro no eixo horizontal [m].
- M é a massa do carro [kg].
- F_a é a força resultante da aceleração aplicada ao carro [N].
- F_r é a soma das forças resistivas, incluindo o atrito e a resistência do ar [N].
- F_p é a força horizontal exercida pelo pêndulo no ponto de suporte, que depende do ângulo θ e da velocidade angular ω [N].

Modelar os coeficientes que afetam o movimento do carro, como o atrito entre o carro e o trilho, a resistência do ar, e as interações dinâmicas com o pêndulo, pode ser uma tarefa complexa e sujeita a incertezas. Esses coeficientes são influenciados por diversos fatores, como variações na superfície do trilho, mudanças nas condições ambientais, e até mesmo a forma como o pêndulo oscila. Devido a essa complexidade, obter valores precisos para esses coeficientes pode ser desafiador e pode introduzir erros no modelo.

Para simplificar a modelagem do movimento do carro, consideramos como entrada (ou variável de controle) a aceleração a, que é aplicada diretamente ao carro. Essa suposição é razoável quando o sistema possui um motor com torque suficiente para impor a aceleração desejada, sem que as forças resistivas interfiram significativamente. Com essa simplificação, podemos focar na análise da dinâmica do carro em resposta à aceleração aplicada, sem a necessidade de modelar explicitamente as forças de propulsão e resistência que poderiam complicar o sistema.

2.2 Representação em espaço de estados

Para modelar o comportamento do carro em espaço de estados, devemos primeiro definir os estados do sistema, que são as variáveis necessárias para descrever completamente sua dinâmica em qualquer instante de tempo. No caso do carro, podemos escolher os seguintes estados:

- $x_1 = p$: A posição do carro ao longo do eixo horizontal [m].
- $x_2 = v = dp/dt = \dot{p}$: A velocidade do carro [m/s].

Esses dois estados, x_1 e x_2, são suficientes para capturar a dinâmica do movimento do carro.

Utilizando a simplificação mencionada anteriormente, (1) pode ser reescrita em função das variáveis de estado do sistema como (2).

$$\dot{x_2} = a \tag{2}$$

A forma geral do modelo de espaço de estados é:

$$\dot{\mathbf{x_c}} = \mathbf{A_c}\mathbf{x_c} + \mathbf{B_c}\mathbf{u} \tag{3}$$

Onde:

- $\mathbf{x_c} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} p & v \end{bmatrix}^\top$ é o vetor de estados.
- $\mathbf{u} = a$ é a entrada do sistema (a aceleração do carro).
- $\mathbf{A_c}$ é a matriz que descreve a dinâmica do sistema.
- $\mathbf{B_c}$ é a matriz que relaciona a entrada com os estados do sistema.

Assim, a reescrita das equações dos estados na forma matricial resulta nas matrizes A_c e B_c dadas em (4). O modelo dinâmico do carro em espaço de estados é apresentado em 5).

$$\mathbf{A_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a \tag{5}$$

Essas matrizes capturam a dinâmica do carro no espaço de estados. A matriz $\mathbf{A_c}$ define como os estados do sistema evoluem ao longo do tempo, enquanto a matriz $\mathbf{B_c}$ descreve como a entrada (aceleração a) influencia os estados.

3 Modelagem matemática do pêndulo

3.1 Equação do movimento

A equação do movimento do pêndulo pode ser derivada a partir do princípio de conservação do momento angular e das forças atuantes no sistema. As principais forças que afetam o movimento do pêndulo incluem a força gravitacional, a força de atrito, a resistência do ar e a força de Coulomb.

Considerando a soma dos torques em torno do ponto de rotação e aplicando a segunda lei de Newton para rotações, a equação do movimento do pêndulo é dada por (12).

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \tau_g - \tau_d - \tau_{dr} - \tau_c + \tau_a \tag{6}$$

Essa equação diferencial não linear representa a dinâmica angular do pêndulo em relação ao ponto de rotação, onde:

- θ é o ângulo do pêndulo em relação à vertical [rad].
- I é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto de rotação [$kg \cdot m^2$].
- τ_g é o torque em torno do ponto de rotação devido à força gravitacional [Nm].
- τ_d é o torque causado pelo atrito linear do eixo de rotação que resiste ao movimento do pêndulo [Nm].
- τ_{dr} é o torque causado pela resistência do ar [Nm].
- τ_c é o torque causado pela força de Coulomb [Nm].

- τ_a é o torque devido ao movimento do carro [Nm].

Os termos τ_g, τ_d, τ_{dr}, τ_c e τ_g são dados em (7-11).

$$\tau_g = mgl\sin(\theta) \tag{7}$$

$$\tau_d = K_d\omega \tag{8}$$

$$\tau_{dr} = K_{dr}\omega^2 \tag{9}$$

$$\tau_c = K_c \cdot \text{sign}(\omega) \tag{10}$$

$$\tau_a = ml\cos(\theta) \cdot a \tag{11}$$

Nestas equações:

- ω é a velocidade angular do pêndulo ($\dot{\theta}$) [rad/s].
- l é o comprimento do pêndulo [m].
- m é massa do pêndulo [kg].
- K_d é coeficiente de atrito linear no ponto de suspensão [$N \cdot s/m$].
- K_{dr} é o coeficiente de resistência do ar [$N \cdot s^2/m^2$].
- K_c é a força de Coulomb [N].

Assim, a equação do movimento do pêndulo pode ser reescrita como em (12).

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = mgl\sin(\theta) - K_d\omega - K_{dr}\omega^2 - K_c \cdot \text{sign}(\omega) + mla\cos(\theta) \tag{12}$$

3.2 Representação em espaço de estados

Para obter uma representação em espaço de estados linear de um sistema não linear, precisamos linearizar as equações que descrevem seu comportamento dinâmico ao redor de um ponto de operação (ou ponto de equilíbrio).

No caso do pêndulo, temos dois possíveis pontos de equilíbrio: $\theta = 0$ (pêndulo para cima) e $\theta = \pi$ (pêndulo para baixo).

Como nosso objetivo de controle é equilibrar o pêndulo na vertical, faremos a linearização em torno do ponto $\theta = 0$.

O processo de linearização envolve a expansão da função não linear em torno do ponto de operação usando uma série de Taylor e a simplificação dos termos não lineares. Para pequenas perturbações ao redor desse ponto, os termos de ordem superior (como $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ são aproximados por suas versões lineares. A partir dessa aproximação, obtemos um sistema linearizado que pode ser representado no espaço de estados, permitindo a análise e o design de controladores com maior simplicidade e precisão.

Para pequenas perturbações em torno de $\theta = 0$, os termos não lineares de (12) serão:

- $\sin(\theta) \approx 0$
- $\cos(\theta) \approx 1$
- $\omega^2 \approx 0$
- sign$(\omega) \approx 0$

Assim, o modelo linearizado em torno do ponto $\theta = 0$ é dado em (13).

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx mgl\theta - K_d\omega + mla \tag{13}$$

Para representá-lo em espaço de estados, primeiramente definimos os os estados necessários para representar o comportamento do sistema. Para o pêndulo, os estados são definidos como:

- $x_1 = \theta$: O ângulo do pêndulo em relação à vertical [rad].
- $x_2 = \omega = \dot{\theta}$: A velocidade angular do pêndulo [rad/s].

Dessa forma, (13) pode ser reescrita em função dos estados do sistema como (14).

$$\dot{x_2} \approx \frac{mgl}{I}x_1 - \frac{K_d}{I}x_2 + \frac{ml}{I}a \tag{14}$$

Assim, a reescrita das equações dos estados na forma matricial resulta nas matrizes A_p e B_p dadas em (15). O modelo dinâmico do pêndulo em espaço de estados é apresentado em (16).

$$\mathbf{A_p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{I} & -\frac{K_d}{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B_p} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml}{I} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgl}{I} & -\frac{K_d}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ml}{I} \end{bmatrix} a \tag{16}$$

4 Modelo completo em espaço de estados

Para representar o sistema completo, combinamos os modelos do carro e do pêndulo. O vetor de estados completo pode ser definido como:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p & v & \theta & \omega \end{bmatrix}^\top \tag{17}$$

Assim, as equações dos estados do sistema completo podem serão dadas por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ a \\ \omega \\ \frac{mgl}{I}\theta - \frac{K_d}{I}\omega + \frac{ml}{I}a \end{bmatrix} \tag{18}$$

Este sistema pode ser representado na forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ com as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dadas em (19).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A_p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_c} \\ \mathbf{B_p} \end{bmatrix} \tag{19}$$

Dessa forma, o modelo completo do pêndulo em um carro, representado em espaço de estados é dado em (20).

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{mgl}{I} & -\frac{K_d}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{ml}{I} \end{bmatrix} a \tag{20}$$

Neste modelo completo, $\mathbf{u} = a$ é a aceleração aplicada ao carro e afeta tanto o carro quanto o pêndulo. A matriz $\mathbf{A}$ captura a dinâmica combinada do carro e do pêndulo, enquanto a matriz $\mathbf{B}$ descreve como a entrada (aceleração) influencia o sistema.

Dessa forma, temos uma representação completa do sistema em espaço de estados que permite a análise e o design de controladores para o sistema integrado carro-pêndulo.