Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Высшая школа бизнеса

КУРСОВАЯ РАБОТА
«Некоторые задачи аналитической геометрии с использованием геометрической алгебры»

по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика
образовательная программа «Бизнес-информатика»

Курсовую работу выполнила:
Дубнова Евгения Аркадьевна, ББИ2003

Руководитель курсовой работы:
к.ф.-м.н., доцент Департамента математики
Факультета экономических наук
Широков Дмитрий Сергеевич

Курсовая работа
соответствует / не соответствует
требованиям *(нужное подчеркнуть)*

Москва 2022

Содержание

Введение

Алгебры Клиффорда (или Геометрическая алгебра) – это математический аппарат, применяющийся во многих разделах математики, физики, инженерии, робототехники и др. В алгебре Клиффорда вводятся новые операции умножения и новые объекты, которые не включены в рассмотрение в стандартном курсе линейной алгебры и аналитической геометрии. Геометрическая алгебра также включает в себя операции и объекты Внешней алгебры, которая является алгебраической системой, применяемой для описания подпространств векторного пространства. Предоставляемые алгеброй Клиффорда математические инструменты позволяют по-другому решать некоторые задачи аналитической геометрии.

В рамках моей курсовой работы я рассматривала четыре операции умножения, использующиеся в линейной алгебре и в алгебре Клиффорда: скалярное, векторное, внешнее и геометрическое (или, по-другому, произведение Клиффорда), и то, как они между собой связаны. Также было разобрано, как эти операции расширяются на новые объекты – бивекторы и тривекторы – в пространствах размерности 2 и 3. Разобранные формулы были предложены для решения некоторых задач аналитической геометрии.

Целью моей курсовой работы было исследовать, какие нестандартные способы решения есть у задач аналитической геометрии, если иметь в распоряжении такой математический аппарат, как алгебра Клиффорда; рассмотреть, какие задачи могут появляться при работе с новыми объектами.

В 1-ой главе я кратко ввожу понятия скалярного и геометрического произведений, во 2-ой рассматриваю определение, свойства и некоторые применения внешнего произведений, в 3-ей – более подробно останавливаюсь на геометрическом произведении и его связях с остальными рассмотренными операциями умножения, в 4-ой и 5-ой главах я разбираю алгебры Клиффорда Cl_2, Cl_3 и возможности, которые предоставляет их аппарат в работе с бивекторами и тривекторами.

В качестве основных источников были использованы книги [Lou01; DFM07; LD02]. Дополнительно я пользовалась [Вау19; Шир12].

1 Введение в понятие произведения Клиффорда

1.1 Скалярное произведение

В классическом курсе линейной алгебры вводится определение скалярного произведения векторов $a \cdot b \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^2$, где $a = a_1e_1 + a_2e_2, b = b_1e_1 + b_2e_2$, (e_1, e_2) - базис $\mathbb{R}^2$. $\measuredangle(a, b) = \gamma$, $0 < \gamma < 180$.

Определение 1.1. *Скалярным произведением принято называть* $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$ *или* $a \cdot b = |a||b| \cos \gamma$.

Скалярное произведение обладает свойствами:

1. $a \cdot b = b \cdot a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^2$ – коммутативность;
2. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^2$ – дистрибутивность относительно сложения;
3. $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $a \cdot a > 0$ для $a \neq 0$ – положительно определенное.

Свойства (2) и (3) можно назвать линейностью по первому аргументу. Коммутативность и линейность по первому аргументу вместе называют *билинейностью*, то есть линейностью по обоим аргументам.

Вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^2$, обладающее билинейностью, симметричностью и положительно определенным произведением, называется Евклидовым пространством $\mathbb{R}^2$.

В Евклидовом пространстве определена метрика (норма)

$$r = xe_1 + ye_2 \to |r| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

1.2 Определение произведения Клиффорда (геометрического произведения)

Попробуем определить произведение векторов, удовлетворяющее тем же аксиомам, что и произведение вещественных чисел - дистрибутивность, ассоциативность и коммутативность, а также потребовать, чтобы $|ab| = |a||b|$. Так как это невозможно в пространстрах размерности $n \geq 3$, мы остановимся на выполнении дистрибутивности и ассоциативности, но опустим коммутативность.

Возьмем ортонормированный базис (e_1, e_2) в пространстве $\mathbb{R}^2$. Длина вектора r вычисляется по формуле (1). Если умножить r на себя же, $rr = r^2$, естественно будет ожидать, что произведение будет равняться квадрату длины вектора:

$$r^2 = |r|^2.$$

В координатах это означает, что

$$(xe_1 + ye_2)^2 = x^2 + y^2.$$

Воспользовавшись дистрибутивностью без предположений о коммутативности, получается

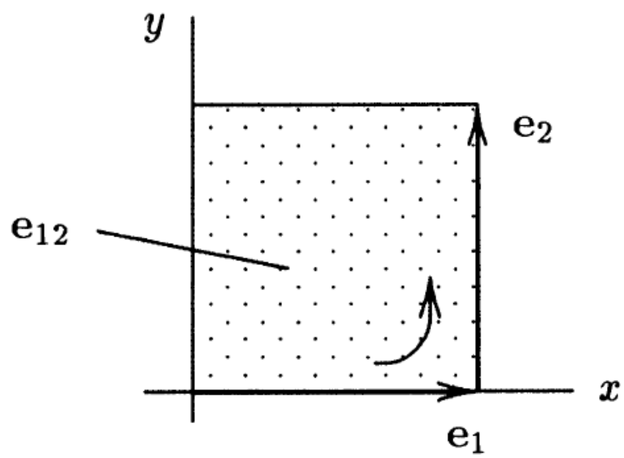
$$x^2e_1^2 + y^2e_2^2 + xy(e_1e_2 + e_2e_1) = x^2 + y^2.$$

Так как мы брали ортонормированный базис (e_1, e_2), это равенство будет выполнено для него только в случае

$$e_1^2 = e_2^2 = 1$$

$$e_1e_2 = -e_2e_1$$

Вычислим, используя ассоциативность: $(e_1e_2)^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -e_1^2e_2^2 = -1$. Так как квадрат произведение e_1e_2 отрицательный, мы можем утверждать, что это ни скаляр, ни вектор. Это произведение - объект нового типа, названный *бивектором*, отражает ориентированное плоское пространство, прямоугольник со сторонами e_1 и e_2. Для краткости будем писать $e_{12} = e_1e_2$.



Определение 1.2. *Клиффордово (геометрическое) произведение двух векторов* $a, b \in \mathbb{R}^2$, $a = a_1e_1 + a_2e_2, b = b_1e_1 + b_2e_2$ *определяется как*

$$ab = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12},$$

сумма скаляра и бивектора.

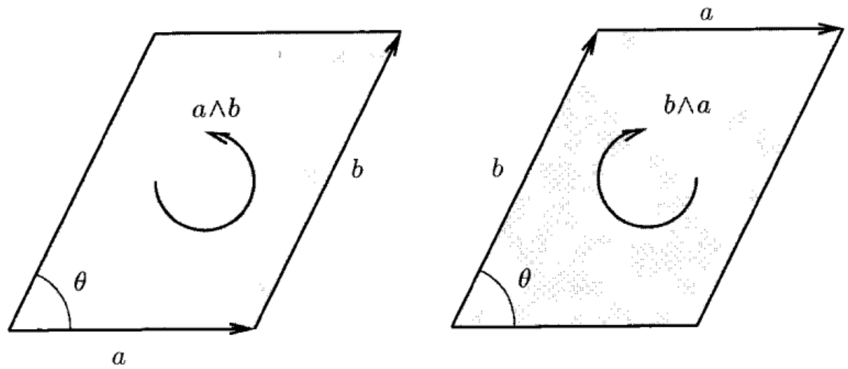
В общем случае геометрическое произведение определяется как

$$ab = a \cdot b + a \wedge b,$$

сумма скалярного и внешнего произведений.

2 Внешнее произведение

Внешнее произведение $a \wedge b$ позволяет описать плоскость без привязки к нормалю - вектору, перпендикулярному этой плоскости, как мы привыкли. Таким образом, его результат не является ни скаляром, ни вектором: это новый объект, бивектор. Он может быть представлен в пространстве как параллелограмм, полученный с помощью пронесения вектора a вдоль b. Его модуль - это $|a||b| \sin \theta$, то есть площадь полученного параллелограмма.



Таким образом, внешнее произведение векторов возвращает ориентированный элемент плоскости с площадью, равной $|a||b| \sin \theta$. Ориентация параллелограмма определяется порядком $a, b, -a, -b$: правая, если они расположены против часовой стрелки, и левая, если по часовой. Изменение порядка векторов меняет ориентацию, а значит знак внешнего произведения. То есть $a \wedge b$ и $b \wedge a$ имеют одинаковый модуль бивектора (площадь соответсвующего параллелограмма), но разный знак засчет направления.

Внешнее произведение обладает следующими свойствами:

1. $a \wedge b = -b \wedge a$ – антисимметричность;

2. $a \wedge a = 0$ – для всех векторов a, следует из п. 1;

3. $a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c$ – дистрибутивность относительно сложения.

Бивекторы образуют линейное пространство, точно так же, как векторы. Мы рассмотрим пространства бивекторов размерностей 2 и 3.

2.1 Пространство бивекторов над $\mathbb{R}^2$

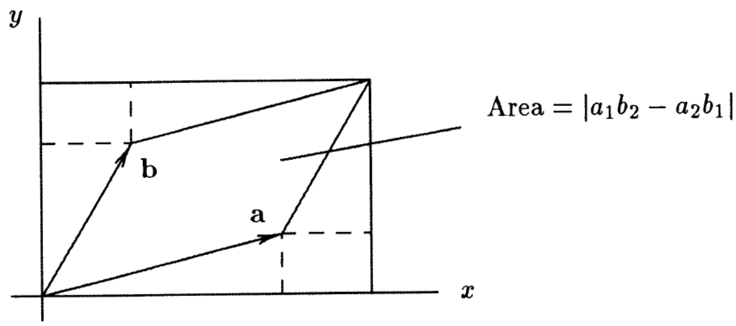
Так как внешнее произведение определяет плоскость, имеет смысл рассматривать пространства размерности ≥ 2. Возьмем ортонормированный базис плоскости $\{e_1, e_2\}$ и два вектора $a = a_1e_1 + a_2e_2$, $b = b_1e_1 + b_2e_2$. Тогда их внешнее произведение

$$a \wedge b = a_1b_1e_1 \wedge e_1 + a_1b_2e_1 \wedge e_2 + a_2b_1e_2 \wedge e_1 + a_2b_2e_2 \wedge e_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)e_1 \wedge e_2. \tag{2}$$

Имея два вектора a, b, у нас определен параллелограмм, построенный на этих векторах как на сторонах, в точности до порядка, в котором расположены эти векторы. Его площадь равняется $|\det[a, b]| = |\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}| = |a_1b_2 - a_2b_1|$.

Видно, что коэффициент при бивекторе во внешнем произведении (2)- это и есть значение определителя матрицы параллелограмма, образованного векторами a, b. Площадь всегда положительная, тогда как этот коэффициент может быть как положительным, так и отрицательным. Знак этого коэффициента определяется ориентацией параллелограмма, которая зависит как раз от порядка расположения векторов a, b. Если параллелограмм имеет ту же ориентацию, что и $e_1 \wedge e_2$, то коэффициент будет положительным. По умолчанию будем считать правую ориентацию (против часов стрелки) основной.

Таким образом, пространство, образованное внешним произведением векторов a, b - *signed area* - обладает площадью, равной обычной площади этого параллелограмма, и знаком, указывающим на взаимное расположение векторов. *Модулем бивектора* будем называть $|a \wedge b| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.



Таким образом, бивектор в пространстве $\mathbb{R}^2$ обладает следующими характеристиками:

1. Модуль (площадь параллелограмма)
2. Направление

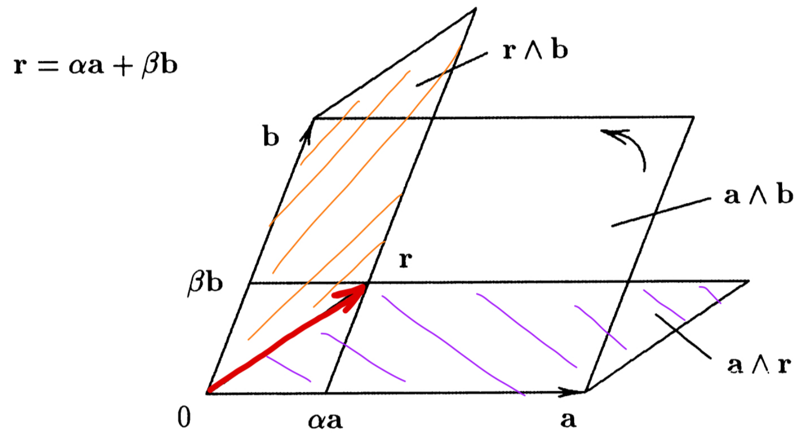
2.1.1 Разложение вектора по направлениям

Попробуем представить вектор r как сумму двух компонент, одна из которых параллельна вектору a, а вторая - вектору b, при этом $a \nparallel b$. То есть нам надо подобрать коэффициенты α и β в уравнении $r = \alpha a + \beta b$. Мы можем выразить α через $r \wedge b = (\alpha a + \beta b) \wedge b = \alpha(a \wedge b)$ (воспользовались свойством внешнего произведения $b \wedge b = 0$). Аналогично, выразим β через $a \wedge r = \beta(a \wedge b)$. В получившихся уравнениях обе части можно сократить на бивектор e_{12} (присутствует во внешнем произведении по определению). Таким образом получаем

$$\alpha = \frac{r \wedge b}{a \wedge b},$$

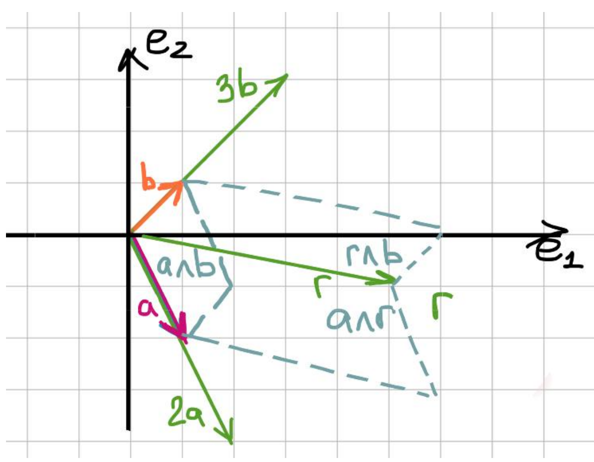
$$\beta = \frac{a \wedge r}{a \wedge b}.$$

Также, зная, что модуль внешнего произведения - это площадь ориентированных параллелограммов, мы можем получить α, β геометрически, сравнив площади:



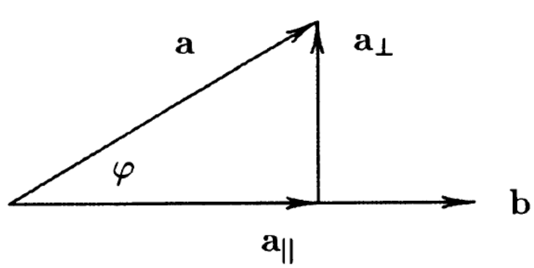
Пример 1. *Найти* α, β *в разложении* $r = \alpha a + \beta b$, $r = 5e_1 - e_2$; $\quad a = e_1 - 2e_2$; $\quad b = e_1 + e_2$.

$$\alpha = \frac{r \wedge b}{a \wedge b} = \frac{5 - (-1)}{1 - (-2)} = 2;$$
$$\beta = \frac{a \wedge r}{a \wedge b} = \frac{-1 + 10}{3} = 3;$$
$$r = 2a + 3b$$



2.1.2 Ортогональные проекции и отражения

Посчитаем проекцию вектора a на вектор b, $\measuredangle(a, b) = \varphi$, $0 < \varphi < 180$.



Заметим, что скаляр проекции $a_{\|} = |a|\cos\varphi$. Так как мы хотим, чтобы эта проекция была направлена вдоль вектора b, мы умножаем ее на нормированный (единичный) вектор $\frac{b}{|b|}$:

$$a_{\|} = |a|\cos\varphi\frac{b}{|b|}$$

Домножив и разделив все выражение на $|b|$, мы ничго не изменим, но получим более понятное выражение:

$$a_{\|} = |a||b|\cos\varphi\frac{b}{|b|^2}$$

Посмотрим ближе на множитель $\frac{b}{|b|^2}$. Предполагая, что $b \neq 0$ и $b = b_1e_1 + b_2e_2 \in Cl_2$:

$$\begin{aligned} b\frac{b}{|b|^2} = \frac{b^2}{|b|^2} = \frac{b_1^2e_1^2 + b_2^2e_2^2 + b_1b_2e_1e_2 + b_1b_2e_2e_1}{b_1^2 + b_2^2} &= \\ \frac{b_1^2e_1^2 + b_2^2e_2^2 + b_1b_2e_1e_2 - b_1b_2e_1e_2}{b_1^2 + b_2^2} &= \frac{b_1^2 + b_2^2}{b_1^2 + b_2^2} = 1 \end{aligned}$$

Заметим, что $b\frac{b}{|b|^2} = \frac{b}{|b|^2}b = 1$, таким образом мы получили *обратный вектор* $b^{-1} = \frac{b}{|b|^2}$. Вернемся к проекции:

$$a_{\|} = |a||b|\cos\varphi b^{-1} = (a \cdot b)b^{-1}$$

Зная $a_{\|}$, можно найти вторую составляющую вектора a, $a_{\perp}$:

$$a = a_{\|} + a_{\perp} \Leftrightarrow a_{\perp} = a - a_{\|} = a - (a \cdot b)b^{-1} = (ab - a \cdot b)b^{-1} = (a \wedge b)b^{-1}$$

Посмотрим, что происходит при изменении порядка множителей. Пусть $a \wedge b = (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12} = \lambda e_{12}$, $b^{-1} = \beta_1e_1 + \beta_2e_2$

$$\begin{aligned} (a \wedge b)b^{-1} &= \lambda e_{12}(\beta_1e_1 + \beta_2e_2) = \lambda\beta_1e_{12}e_1 + \lambda\beta_2e_{12}e_2 = -(\lambda\beta_1e_1e_{12} + \lambda\beta_2e_2e_{12}) \\ &= -(\beta_1e_1 + \beta_2e_2)\lambda e_{12} = -b^{-1}(a \wedge b). \end{aligned}$$

По только что доказанному, а также по свойствам внешнего произведения выводим цепочку связей:

$$(a \wedge b)b^{-1} = -b^{-1}(a \wedge b) = b^{-1}(b \wedge a) = -(b \wedge a)b^{-1}.$$

Заметим, что параллелограмм, образованный внешним произведением, имеет площадь, также равную $|a_{\perp}b| = |a \wedge b| = |a||b|\sin\varphi$

Пример 2. *Пусть* $a = 8e_1 - e_2, \quad b = 2e_1 + e_2$. *Задача: найти* $a_{\perp}$, $a_{\|}$. $b^{-1} = \frac{b}{|b|^2}$.

$$a_{\|} = (a \cdot b)b^{-1} = \frac{15(2e_1 + e_2)}{5} = 6e_1 + 3e_2$$

Найти $a_{\perp}$*, не зная угла между* a *и* b*, можно двумя способами:*

1. $a_{\perp} = a - a_{\|} = 8e_1 - e_2 - 6e_1 + 3e_2 = 2e_1 - 4e_2$

2. $a_{\perp} = (a \wedge b)b^{-1} = \frac{(8-(-2))e_{12}(2e_1+e_2)}{5} = 2e_{12}(2e_1 + e_2) = -4e_1^2e_2 + 2e_1e_2^2 = 2e_1 - 4e_2$

2.2 Пространство бивекторов над $\mathbb{R}^3$

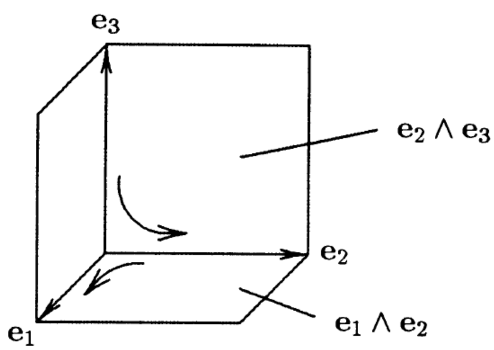
Возьмем правую тройку векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$, являющуюся базисом $\mathbb{R}^3$ и два вектора $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = a_ie_i, b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 = b_je_j$. Тогда внешнее произведение векторов a, b будет иметь вид

$$a \wedge b = (a_ie_i) \wedge (b_je_j) = (a_2b_3 - a_3b_2)e_{23} + (a_3b_1 - a_1b_3)e_{31} + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12}.$$

Ориентированные плоские сегменты, принадлежащие координатным плоскостям, получающиеся, если взять внешние произведения

$$e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_3,$$

образуют базис линейного пространства бивекторов $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$.



Любой вектор этого пространства является линейной комбинацией базисных элементов,

$$B = B_{12}e_1 \wedge e_2 + B_{13}e_1 \wedge e_3 + B_{23}e_2 \wedge e_3,$$

и такие линейные комбинации образуют линейное пространство $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$. По аналогии с $\bigwedge \mathbb{R}^2$, буду называть $e_1 \wedge e_2 = e_1e_2 = e_{12}$, $e_1 \wedge e_3 = e_1e_3 = e_{13}$, $e_2 \wedge e_3 = e_2e_3 = e_{23}$, так как вектора e_1, e_2, e_3 ортогональны друг другу (взяты из базиса $\mathbb{R}^3$), $e_i \cdot e_j = 0, i \neq j$.

Скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, определяемое как $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, где $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$, расширяется до симметричного билинейного произведения в пространстве бивекторов $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$.

$$< x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2 >= \begin{vmatrix} x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_2 \\ x_2 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_2 \end{vmatrix} = (x_1 \cdot y_1)(x_2 \cdot y_2) - (x_1 \cdot y_2)(x_2 \cdot y_1). \tag{3}$$

Замечание. *Заметим, что определяемое тут скалярное произведение в пространстве $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ - это скалярная часть геометрического произведения бивекторов $(a \wedge b)(c \wedge d)$, взятая с обратным знаком. $\langle\rangle_n$ - это выделение из полного геометрического произведения элементов ранга n, то есть например $\langle ab\rangle_0 = a \cdot b$, $\langle ab\rangle_2 = a \wedge b$.*

$$\begin{aligned}\langle a \wedge b, c \wedge d\rangle_0 = (a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1)e_{12}^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2)e_{23}^2 \\ + (a_1b_3 - a_3b_1)(c_1d_3 - c_3d_1)e_{13}^2 = -((a_1b_2 - a_2b_1)(c_1d_2 - c_2d_1) \\ + (a_2b_3 - a_3b_2)(c_2d_3 - c_3d_2) + (a_1b_3 - a_3b_1)(c_1d_3 - c_3d_1))\end{aligned} \tag{4}$$

Если посчитать получающиеся коэффициенты, то получится формула (3), взятая с минусом.

В частности, $< x \wedge y, x \wedge y >= (x \cdot x)(y \cdot y) - (x \cdot y)(y \cdot x) =$
$= |x|^2|y|^2 - (x \cdot y)^2 = |x|^2|y|^2(1 - \cos^2 \varphi) = |x|^2|y|^2 \sin^2 \varphi$, где φ - угол между x, y. Тогда видно, что перед нами площадь параллелограмма, образованного векторами x, y, в квадрате. Получается, что норма бивектора $B = B_{12}e_{12} + B_{13}e_{13} + B_{23}e_{23}$ равна

$$|B| = \sqrt{< B, B >} = \sqrt{B_{12}^2 + B_{13}^2 + B_{23}^2}.$$

Пример 3. *Вычислить площадь S треугольника с вершинами (0, 0, 0), (1, -4, -6), (5, -4, -2).*

Треугольник построен на векторах $a = e_1 - 4e_2 - 6e_3, b = 5e_1 - 4e_2 - 2e_3$. Их внешнее произведение - параллелограмм со сторонами a, b.

$$a \wedge b = (-4 + 20)e_{12} + (8 - 24)e_{23} + (-2 + 30)e_{13} = 16e_{12} - 16e_{23} + 28e_{13}$$

$$S = \frac{1}{2}|a \wedge b| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2 + 16^2 + 28^2} = 18.$$

Вычислим теперь ту же площадь, не пользуясь свойствами внешнего произведения. Например, через синус угла φ между векторами a, b.

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{5 + 16 + 12}{\sqrt{(1 + 16 + 36)(25 + 16 + 4)}} = \frac{33}{\sqrt{2385}}$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{1089}{2385}} = \sqrt{\frac{1296}{2385}} = \frac{36}{\sqrt{2385}}$$

$$S = \frac{1}{2}|a||b| \sin \varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2385}\frac{36}{\sqrt{2385}} = 18.$$

Через внешнее произведение счет менее громоздкий и не требует угла между векторами. Формула Герона тоже его не требует, однако считать по ней было бы еще дольше.

2.2.1 Связь с векторным произведением

Имея два вектора $a = a_i e_i$, $b = b_j e_j$, можем получить их внешнее произведение как

$$a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2)e_{23} + (a_3b_1 - a_1b_3)e_{31} + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12},$$

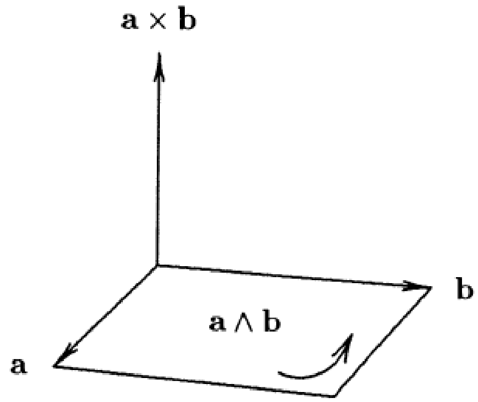
которое также может быть выражено через определитель

$$a \wedge b = \begin{vmatrix} e_{23} & e_{31} & e_{12} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты внутри внешнего произведения совпадают с коэффициентами векторного, определяющегося как

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3,$$

однако в векторном произведении это компоненты вектора, перпендикулярного a и b, а во внешнем - это компоненты бивектора $a \wedge b$.



Направление $a \times b$ перпендикулярно плоскости $a \wedge b$, а длина векторного произведения равна модулю внешнего произведения:

$$|a \times b| = |a \wedge b| = |a||b| \sin \varphi,$$

где φ - угол между a, b.

2.2.2 Изоморфизм $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3$, оператор Ходжа

Так как оба пространства $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^3$ имеют размерность 3, они линейно изоморфны, то есть между ними существует взаимно однозначное отображение.

Линейный оператор звезда Ходжа, обозначаемый $\star$, отображает вектор $a \in \mathbb{R}^3$ в бивектор $\star a \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ и определяется как

$$b \wedge \star a = (b \cdot a) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

для всех $b \in \mathbb{R}^3$. Таким образом любой вектор $a \in \mathbb{R}^3$ связан с бивектор $\star a \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ следующим образом: $A = \star a; a = \star A$,

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in \mathbb{R}^3$$

$$A = \star a = a_1e_{23} + a_2e_{31} + a_3e_{12} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3.$$

Также отметим, что по определению оператор Ходжа зависит не только от метрики (скаляра), но и от выбора направления: обычно используют правую тройку ортонормированных векторов базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Мы можем выразить и обратное отражение бивектора $A \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ в вектор $\star A \in \mathbb{R}^3$ с помощью оператора Ходжа, определенного как

$$B \wedge \star A =< B \cdot A > e_1 \wedge e_2 \wedge e_3,$$

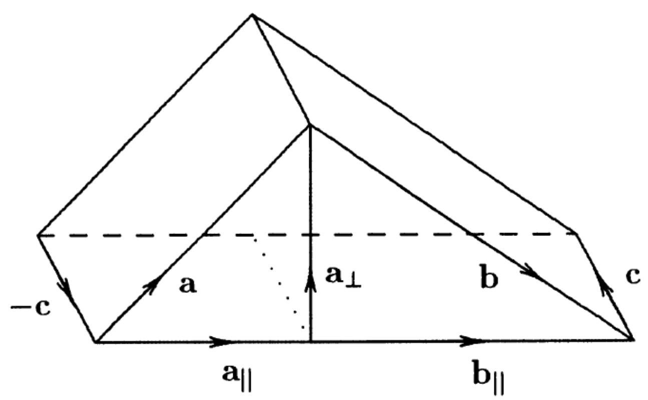
для всех $B \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3$.

Таким образом, мы можем зафиксировать связь между внешним и векторным произведениями:

$$a \wedge b = \star(a \times b),$$
$$a \times b = \star(a \wedge b).$$

2.2.3 Сложение бивекторов

Геометрическую интерпретацию сложения бивекторов легче всего понять через внешнее произведение с общим вектором. Так как в $\mathbb{R}^3$ любые две плоскости (содержащие бивекторы, которые мы хотим сложить) либо параллельны, либо пересекаются по прямой, любые два бивектора можно представить в виде $A = a \wedge c, \quad B = b \wedge c$. В пространстве $\mathbb{R}^3$ мы расположим эти векторы так, чтобы они обладали разной ориентацией их общей стороны: в данном случае вектора c. То есть чтобы общая грань бивекторов $a \wedge c = (-c) \wedge a$ и $b \wedge c$ была направлена в противоположные сторону (в данном случае c и $-c$). Тогда $A + B := a \wedge c + b \wedge c = (a + b) \wedge c$.



Отразим векторы a и b на вектор их суммы $a + b$, разложив их на составляющие, как в п. 2.3, так что $a = a_{\parallel} + a_{\perp}$ и $b = b_{\parallel} + b_{\perp}$. Одна компонента из каждого разложения параллельна $a + b$, и сумма этих компонент равна $a + b$. По построению, $a_{\perp} = -b_{\perp}$, так что у нас получилось свести сумму двух любых бивекторов в пространстве $\mathbb{R}^3$ к сумме двух компланарных бивекторов:

$$a \wedge c + b \wedge c = (a + b) \wedge c = (a_{\parallel} + b_{\parallel}) \wedge c = a_{\parallel} \wedge c + b_{\parallel} \wedge c.$$

Пример 4. *Пусть векторы* $a = 3e_1 + 2e_2 - e_3, \quad b = 4e_1 - e_2 - e_3, \quad c = -e_1 + 2e_2 + 4e_3$. *Найти* $a \wedge c + b \wedge c$, $a_{\parallel}, b_{\parallel}, a_{\perp}, b_{\perp}$.

Сначала найдем сумму векторов a, b: $v = a + b = 7e_1 + e_2 - 2e_3$. *Теперь найдем компоненты* a, b, *параллельные их сумме:*

$$a_{\parallel} = (a \cdot v)v^{-1} = (21 + 2 + 2)\frac{7e_1 + e_2 - 2e_3}{(49 + 1 + 4)} = \frac{25}{54}(7e_1 + e_2 - 2e_3)$$

$$b_{\parallel} = (b \cdot v)v^{-1} = (28 - 1 + 2)\frac{7e_1 + e_2 - 2e_3}{54} = \frac{29}{54}(7e_1 + e_2 - 2e_3)$$

Проверка, что $a_\perp = -b_\perp$:

$$a_\perp = a - a_\parallel = (3e_1 + 2e_2 - e_3) - \frac{25}{54}(7e_1 + e_2 - 2e_3) = -\frac{13}{54}e_1 + \frac{83}{54}e_2 - \frac{2}{27}e_3,$$

$$b_\perp = b - b_\parallel = (4e_1 - e_2 - e_3) - \frac{29}{54}(7e_1 + e_2 - 2e_3) = \frac{13}{54}e_1 - \frac{83}{54}e_2 + \frac{2}{27}e_3.$$

Теперь найдем два компланарных вектора:

$$\begin{aligned} a_\parallel \wedge c = \frac{25}{54}(7e_1 + e_2 - 2e_3) \wedge (-e_1 + 2e_2 + 4e_3) &= \frac{25}{54}((14+1)e_{12} + (4+4)e_{23} + (28-2)e_{13}) \\ &= \frac{25}{54}(15e_{12} + 8e_{23} + 26e_{13}); \end{aligned}$$

$$b_\parallel \wedge c = \frac{29}{54}(7e_1 + e_2 - 2e_3) \wedge (-e_1 + 2e_2 + 4e_3) = \frac{29}{54}(15e_{12} + 8e_{23} + 26e_{13}),$$

Сложив $a_\parallel \wedge c$ и $b_\parallel \wedge c$, мы получим $v \wedge c = (a + b) \wedge c = (15e_{12} + 8e_{23} + 26e_{13})$. Таким образом, чтобы найти бивектор суммы двух бивекторов, раскладывать на параллельные компоненты необязательно.

3 Клиффордово (геометрическое) произведение

Клиффорд ввел понятие геометрического произведения, определяемого как

$$ab = a \cdot b + a \wedge b,$$

сумму скалярного и внешнего произведений.

3.1 Связь операций умножения

Так как скалярное произведение коммутативно, а внешнее - антикоммутативно, получаем что

$$ba = a \cdot b - a \wedge b.$$

Выразим из получившейся системы:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba); \tag{5}$$

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba). \tag{6}$$

Отметим, что $a \parallel b$ тогда и только тогда, когда когда $a \wedge b = 0$, то есть они не образуют плоский направленный параллелограмм, а это означает, что $ab = ba$. А $a \perp b$ тогда и только тогда, когда $a \cdot b = 0$, то есть $ab = -ba$. Таким образом получаем

$$ab = ba \Longleftrightarrow a \parallel b \Longleftrightarrow a \wedge b = 0 \Longleftrightarrow ab = a \cdot b$$

$$ab = -ba \Longleftrightarrow a \perp b \Longleftrightarrow a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow ab = a \wedge b$$

Вычислим произведение $abba$:

$$(a \cdot b + a \wedge b)(a \cdot b - a \wedge b) = (a \cdot b)^2 - (a \wedge b)^2$$

При этом

$$(a \wedge b)^2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 e_{12}^2 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = -|a_1 b_2 - a_2 b_1|^2 = -|a \wedge b|^2. \tag{7}$$

Мы можем переставлять множители в геометрическом произведении "по кругу" , то есть $abba = aabb = baab = bbaa$, так что получим

$$abba = a^2 b^2 = (a \cdot b)^2 + |a \wedge b|^2 \tag{8}$$

Можем проверить, если это кажется неочевидным, воспользовавшись свойствами внешнего произведения:

$$aabb = (a \cdot a + a \wedge a)(b \cdot b + b \wedge b) = (a \cdot a)(b \cdot b) = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \tag{9}$$

$$\begin{aligned} abba = (a \cdot b)^2 + |a \wedge b|^2 &= (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 \\ &= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \end{aligned} \tag{10}$$

Видим, что так как получившиеся выражения (9) и (10) равны, то равенство (8) справедливо.

4 Алгебра Клиффорда Cl_2 над $\mathbb{R}^2$

Базис алгебры Клиффорда Cl_2 над полем вещественных чисел $\mathbb{R}^2$ образуют четыре элемента:

1 – скаляр;

e_1, e_2 – векторы;

e_{12} – бивектор.

Таким образом, любой элемент в Cl_2

$$u = u_0 + u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_{12} e_{12}$$

является линейной комбинацией скаляра u_0, вектора $u_1 e_1 + u_2 e_2$ и бивектора $u_{12} e_{12}$.

Замечание. *Алгебра Клиффорда Cl_n над полем вещественных чисел $\mathbb{R}^n$ содержит 0-вектора (скаляры), 1-вектора (просто векторы), 2-вектора (бивекторы), ..., n-вектора. Объединение k-векторов задают линейному пространству Cl_n мультивекторную структуру*

$Cl_n = \mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \oplus ... \oplus \bigwedge^n \mathbb{R}^n$

Базисные элементы Cl_2 образуют следующую таблицу умножения:

	e_1	e_2	e_{12}
e_1	1	e_{12}	e_2
e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

4.1 Зеркальное отражение вектора

Зеркально отразим вектор r от вектора a и получим r'. Чтобы это сделать, заметим, что проекция на a у отражений будет одна и та же, $r_\parallel$, а $r_\perp$ будет противоположной по знаку и равной по модулю. Отразим $r = r_\parallel + r_\perp$, получим $r' = r_\parallel - r_\perp$, где $r_\parallel = (r \cdot a)a^{-1}$ и $r_\perp = (r \wedge a)a^{-1}$.

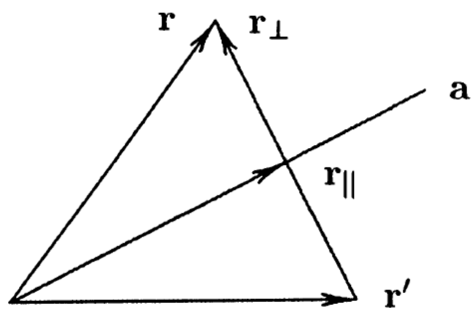
$$r' = r_\parallel - r_\perp = (r \cdot a)a^{-1} - (r \wedge a)a^{-1} = (r \cdot a - r \wedge a)a^{-1} = (a \cdot r + a \wedge r)a^{-1} = ara^{-1} \tag{11}$$

Проверим, что получившаяся формула сохраняет длины и углы между векторами. Для этого достаточно убедиться, что скалярное произведение не меняется, если оба вектора отразить:

$$(ara^{-1}) \cdot (asa^{-1}) = \langle (ara^{-1})(asa^{-1}) \rangle_0 = \langle arsa^{-1} \rangle_0 = \langle a^{-1}ars \rangle_0 = \langle rs \rangle_0 = r \cdot s.$$

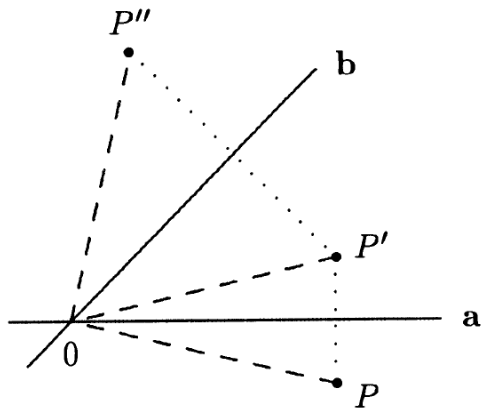
Помня, что $a \wedge r = a \cdot r - ra$ и $ar = a \cdot r + a \wedge r$, подставим:

$$r' = (2a \cdot r - ra)a^{-1} = 2(a \cdot r)a^{-1} - r$$



Теперь попробуем отразить r дважды $r \to r' \to r''$. Мы уже вывели, что
$r \to r' = ara^{-1}$

$$r' \to r'' = br'b^{-1} = b(ara^{-1})b^{-1} = (ba)r(ab)^{-1}.$$



Заметим, что композиция этих двух отражений - это дважды поворот на угол между векторами a, b, от которых мы отражаем r.

Пример 5. *Отразить вектор $r = 4e_1 - 3e_2$ от вектора $a = 3e_1 - e_2$, а потом результат - от вектора $b = 2e_1 + e_2$.*

$$a^{-1} = \frac{3e_1 - e_2}{10};$$

$$\begin{aligned} r' = ara^{-1} = (3e_1 - e_2)(4e_1 - 3e_2)a^{-1} = (12 + 3 + (-9 + 4)e_{12})a^{-1} &= \\ (15 - 5e_{12})\frac{3e_1 - e_2}{10} = \frac{(3 - e_{12})(3e_1 - e_2)}{2} &= \\ \frac{9e_1 - 3e_2 - 3e_{12}e_1 + e_{12}e_2}{2} &= \frac{10e_1}{2} = 5e_1. \end{aligned}$$

$$b^{-1} = \frac{2e_1 + e_2}{5};$$

$$\begin{aligned} r'' = br'b^{-1} = (2e_1 + e_2)5e_1\frac{2e_1 + e_2}{5} &= (2 + e_2e_1)(2e_1 + e_2) \\ &= 4e_1 + 2e_2 + 2e_2e_1^2 + e_2e_1e_2 \\ &= 3e_1 + 4e_2. \end{aligned}$$

Если бы нам был неинтересен промежуточный результат r', *можно было бы сразу посчитать по формуле* $r'' = (ba)r(ab)^{-1}$.

5 Алгебра Клиффорда Cl_3 над $\mathbb{R}^3$

Базис алгебры Клиффорда Cl_3 над полем вещественных чисел $\mathbb{R}^3$ образуют 8 элементов, $i, j = 1, 2, 3$:

1 – скаляр;
e_i – 3 вектора;
$e_i \wedge e_j$ – 3 бивектора;
$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ – три-вектор.

Так как $\{e_1, e_2, e_3\}$ - ортогональный базис и $e_i \cdot e_j = 0, i \neq j$, буду обозначать $e_i \wedge e_j = e_i e_j = e_{ij}$, $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_{123}$.

Имея три вектора a, b, c, три-вектор $a \wedge b \wedge c$ получен в результате пронесения бивектора $a \wedge b$ вдоль вектора c. Результат ради удобства может быть изображен как направленный параллелепипед, однако нужно помнить, что три-вектор на самом деле не хранит никакой информации о его форме, только об объеме и направлении. Некоторые алгебраические свойства тривектора имеют прямую геометрическую интерпретацию: один и тот же ориентированный объем можно получить, если пронести и $a \wedge b$ вдоль вектора c, и $b \wedge c$ вдоль a. То есть внешнее произведение ассоциативно:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

Тривектор $a \wedge b \wedge c$ меняет знак при изменении порядка любых двух идущих подряд векторов, что является прямым следствием антисимметричности внешнего произведения. Геометрически это означает, что если поменять местами любые два вектора, то изменяется ориентация, в которой выстраивается объем. После же двух изменений в порядке векторов тривектор возвращается к начальному состоянию:

$$a \wedge b \wedge c = c \wedge a \wedge b = b \wedge c \wedge a = -c \wedge b \wedge a = -a \wedge c \wedge b = -b \wedge a \wedge c.$$

Стандартным обозначением унарного право-направленного псевдоскаляра для $\mathbb{R}^3$ является I, так что

$$I = e_1 e_2 e_3,$$

где $\{e_1, e_2, e_3\}$ - любая правая тройка ортонормированных векторов. Если перемножается левая тройка векторов, то результатом будет $-I$.

5.1 Ориентированный элемент объема

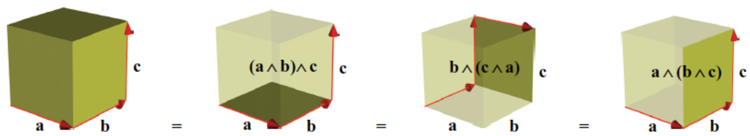
Имея три любых вектора, мы всегда имеем

$$a \wedge b \wedge c = \phi I,$$

где ϕ - скаляр. Внешнее произведение $a \wedge b \wedge c$ векторов $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$, $c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3$ представляет из себя ориентированный объем параллелепипеда со сторонами a, b, c:

$$a \wedge b \wedge c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2 \wedge e_3. \tag{12}$$

Это элемент одномерного пространства 3-векторов $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ с базисом $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_{123}$.



Норма или объем $|V|$ три-вектора $V = \Phi e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$, где $\phi \in \mathbb{R}$, это $|V| = |\phi|$, то есть $|\phi e_1 \wedge e_2 \wedge e_3| = \phi$ для $\phi \geq 0$ и $|\phi e_1 \wedge e_2 \wedge e_3| = -\phi$ для $\phi \leq 0$.

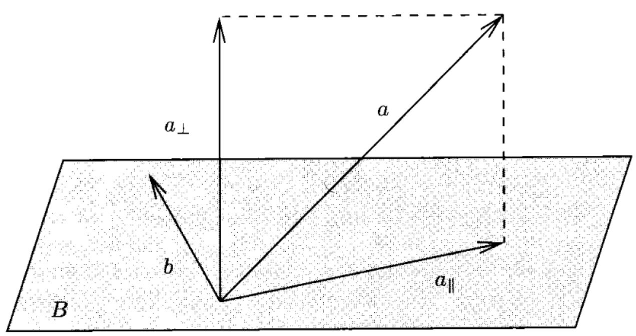
Скалярное произведение двух три-векторов является симметричным билинейным произведением в $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$

$$< x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, y_1 \wedge y_2 \wedge y_3 >= \begin{vmatrix} x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot y_2 & x_1 \cdot y_3 \\ x_2 \cdot y_1 & x_2 \cdot y_2 & x_2 \cdot y_3 \\ x_3 \cdot y_1 & x_3 \cdot y_2 & x_3 \cdot y_3 \end{vmatrix}, \tag{13}$$

определяя норму три-вектора $|V| = \sqrt{< V, V >}$.

5.2 Геометрическое произведение вектора и бивектора

Рассмотрим произведение aB, где a - вектор и B - бивектор. В случае, когда вектор a не принадлежит плоскости бивектора B, их произведение содержит векторную и три-векторную части. Чтобы разобраться в каждой из них, для начала снова разложим вектор a на компоненты: $a = a_{\parallel} + a_{\perp}$, где $a_{\parallel}$ лежит в плоскости бивектора B. Теперь можем записать $aB = (a_{\parallel} + a_{\perp})B = a_{\parallel}B + a_{\perp}B$.



Возьмем теперь вектор $b \perp a_{\parallel}$, лежащий в плоскости бивектора B и такой что

$$B = a_{\parallel} \wedge b = a_{\parallel} b,$$

так как $a_{\parallel} \cdot b = 0$.

Теперь видно, что

$$a_{\parallel}B = a_{\parallel}(a_{\parallel}b) = a_{\parallel}^2 b \tag{14}$$

является вектором. С другой стороны,

$$a_{\perp}B = a_{\perp}(a_{\parallel}b) = a_{\perp}a_{\parallel}b = a_{\perp} \wedge a_{\parallel} \wedge b \tag{15}$$

является три-вектором.

Таким образом, как и ожидалось, произведение вектора и бивектора в общем случае будет состоять из векторной и три-векторной части. Рассмотрим ближе произведение вектора и бивектора, воспользовавшись вычислением (5):

$$a(b \wedge c) = a\frac{1}{2}(bc - cb) = \frac{1}{2}(abc - acb). \tag{16}$$

Рассмотрим, что такое abc, acb с помощью разложения $ab = 2a \cdot b - ba$ (получено из вычисления (4)).

$$abc = (ab)c = (2a \cdot b - ba)c = 2(a \cdot b)c - bac;$$
$$acb = (ac)b = (2a \cdot c - ca)b = 2(a \cdot c)b - cab.$$

$$a(b \wedge c) = \frac{1}{2}(abc - acb) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b - \frac{1}{2}(bac - cab) = (a \cdot b)c - (a \cdot c)b + \frac{1}{2}(cab - bac). \tag{17}$$

Аналогично посчитаем

$$\begin{aligned}(b \wedge c)a = \frac{1}{2}(bca - cba) = \frac{1}{2}(2b(c \cdot a) - bac - 2c(b \cdot a) + cab) \\ = b(c \cdot a) - c(b \cdot a) - \frac{1}{2}(bac - cab) = b(c \cdot a) - c(b \cdot a) + \frac{1}{2}(cab - bac).\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, посчитав разность выражений (17) и (18), получаем, что

$$a(b \wedge c) - (b \wedge c)a = 2(a \cdot b)c - 2(a \cdot c)b, \tag{19}$$
$$(a \cdot b)c - (a \cdot c)b = \frac{1}{2}(a(b \wedge c) - (b \wedge c)a) \tag{20}$$

В левой части равенства (20) - вектор, выраженный с помощью разности произведений вектора с бивектором. Заметим, что таким образом мы и получили векторную часть произведения $a(b \wedge c)$ (из равенства (17)). Будем обозначать полученный вектор *левой сверткой* бивектора B к вектору a, $a \lrcorner B$:

$$a \lrcorner B = \frac{1}{2}(aB - Ba). \tag{21}$$

Как мы посчитали в выражении (13), векторная часть произведения aB - это $a_{\|}B$. Отсюда получаем, что $a \lrcorner B = a_{\|}B$.

Рассмотрим оставшуюся часть произведения вектора и бивектора: три-вектор $a \wedge B$. Мы знаем, что $a \wedge B = a_{\perp}B = a_{\perp} \wedge B$.

Таким образом мы выразили компоненты вектора a:

$$a_{\|} = (a \lrcorner B)B^{-1}; \tag{22}$$
$$a_{\perp} = (a \wedge B)B^{-1}, \tag{23}$$

где $B^{-1} = \frac{B}{B^2}$, $\quad B^2 = -|B|^2$ (вычисление (6)).

Воспользуемся уже проведенными вычислениями $a(b \wedge c)$ и $(b \wedge c)a$, теперь сложив их результаты. Получим

$$a(b \wedge c) + (b \wedge c)a = cab - bac \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}(a(b \wedge c) + (b \wedge c)a) = \frac{1}{2}(cab - bac), \tag{25}$$

где правая часть равенства является три-векторной частью $a(b \wedge c)$ (выражение (16)). Так что теперь мы выразили вторую часть произведения Клиффорда вектора и бивектора:

$$a \wedge B = \frac{1}{2}(aB + Ba). \tag{26}$$

Итак, мы получили, что

$$aB = a \lrcorner B + a \wedge B, \tag{27}$$

где $a \lrcorner B = \frac{1}{2}(aB - Ba)$ и $a \wedge B = \frac{1}{2}(aB + Ba)$.

Пример 6. *Посчитать левую свертку, внешнее и геометрическое произведения вектора $a = 2e_1 + 3e_2 + 7e_3$ и бивектора $B = 4e_{12} + 5e_{13} - e_{23}$.*

$$\begin{aligned} aB = (2e_1 + 3e_2 + 7e_3)(4e_{12} + 5e_{13} - e_{23}) = \\ 8e_1e_{12} + 10e_1e_{13} - 2e_1e_{23} + 12e_2e_{12} + 15e_2e_{13} - 3e_2e_{23} + 28e_3e_{12} + 35e_3e_{13} - 7e_3e_{23} \\ = 8e_2 + 10e_3 - 2e_{123} - 12e_1 - 15e_{123} - 3e_3 + 28e_{123} - 35e_1 + 7e_2 \\ = 15e_2 + 7e_3 - 47e_1 + 11e_{123} \end{aligned}$$

$$a \lrcorner B = -47e_1 + 15e_2 + 7e_3 - 47e_1,$$

$$a \wedge B = 11e_{123}.$$

Пример 7. *Найти параллельную и ортогональную компоненты вектора $a = 3e_1 + 4e_2 + 7e_3$ $B = 7e_{12} + e_{13}$.*

$$\begin{aligned} aB = (3e_1 + 4e_2 + 7e_3)(7e_{12} + e_{13}) = 21e_1e_{12} + 3e_1e_{13} + 28e_2e_{12} + 4e_2e_{13} + 49e_3e_{12} + 7e_3e_{13} \\ = 21e_1 + 3e_3 - 28e_1 - 4_{123} + 49e_{123} - 7e_1 = -35e_1 + 21e_2 + 3e_3 + 45e_{123} \end{aligned}$$

$$B^{-1} = \frac{7e_{12} + e_{13}}{-|49 + 1|} = -\frac{B}{50}$$

$$\begin{aligned} a_{\parallel} = (a \lrcorner B)B^{-1} = \frac{(-35e_1 + 21e_2 + 3e_3)(7e_{12} + e_{13})}{-50} = \frac{150e_1 + 35 \cdot 7e_2 + 35e_3}{50} \\ = 3e_1 + 4.9e_2 + 0.7e_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{\perp} = (a \wedge B)B^{-1} = \frac{45e_{123}(7e_{12} + e_{13})}{-50} = \frac{45 \cdot 7e_{123}e_{12} + 45e_{123}e_{13}}{50} \\ = \frac{-45 \cdot 7e_3 + 45e_2}{50} = -0.9e_2 + 6.3e_3. \end{aligned}$$

5.3 Произведение вектора и тривектора

Рассмотрим теперь геометрическое произведение вектора e_1 и псевдоскаляра $I = e_1e_2e_3$:

$$e_1 I = e_1(e_1e_2e_3) = e_2e_3.$$

Результат умножения - бивектор, задающий площадь, перпендикулярную вектору-множителю e_1. Если умножить в другом порядке,

$$Ie_1 = e_1e_2e_3e_1 = -e_1e_2e_1e_3 = e_2e_3.$$

Видим, результат независим от порядка умножения, и это справедливо для любого базисного вектора. Таким образом, для любого вектора a в пространстве $\mathbb{R}^3$

$$aI = Ia.$$

Теперь мы можем представить каждый из базисных бивекторов как произведение псевдоскаляра и вектора:

$$e_1e_2 = Ie_3, \qquad e_2e_3 = Ie_1, \qquad e_3e_1 = Ie_2.$$

Операция умножения на псевдоскаляр называется дуальной трансформацией. Результат умножения aI может быть представлен как проекция на ту компоненту I (плоскость, задающуюся бивектором), которая перпендикулярна a.

5.4 Произведение бивектора и тривектора

Наконец, рассмотрим произведение бивектора и тривектора:

$$I(e_1 \wedge e_2) = e_1e_2e_3e_1e_2 = e_1e_2e_1e_2e_3 = -e_3.$$

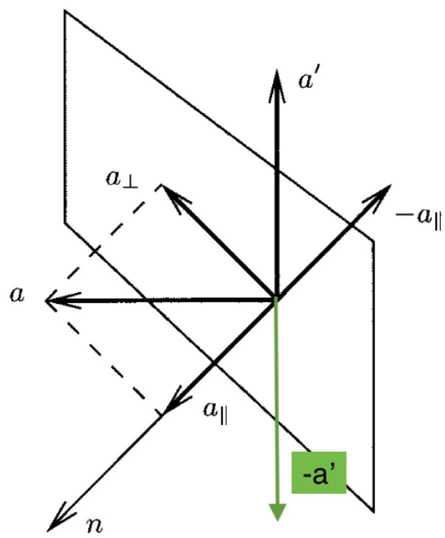
То есть произведение псевдоскаляра и бивектора, полученного из e_1 и e_2, это $-e_3$, то есть минус вектор, перпендикулярный плоскости $e_1 \wedge e_2$.

Таким образом, мы возвращаемся к связи векторного и внешнего произведений, и вместо записи через оператор Ходжа можем воспользоваться умножением на псевдоскаляр:

$$a \wedge b = (a \times b)I;$$
$$a \times b = -(a \wedge b)I.$$

5.5 Отражения

В пространстве рамерности 3 вектор n задает плоскость, которая ему перпендикулярна, и эта плоскость делит все пространство на 2 полупространства. Отражение a' вектора a от вектора n может лежать как в другом полупространстве, так и оставаться в том же, в котором находится вектор a $(-a')$.



В параграфе 4.1, где мы рассматривали зеркальное отражение вектора в пространстве $\mathbb{R}^2$, вся плоскость разделялась на 2 полуплоскости прямой, перпендикулярной вектору n, от которого мы отражали. И наш вектор r' оставался в той же полуплоскости, что и вектор r, и выражался как

$$r' = r_\parallel - r_\perp = nrn^{-1}.$$

Если бы мы хотели рассмотреть отражение r' в другой полуплоскости, то это было бы

$$r'' = -r' = r_\perp - r_\parallel = -nrn^{-1}.$$

5.5.1 Отражение бивектора

Построим теперь бивектор $B = a \wedge b$ и отразим каждый из формирующих его векторов от плоскости, перпендикулярной вектору n. Получим

$$B' = (nan^{-1}) \wedge (nbn^{-1}) = (-nan^{-1}) \wedge (-nbn^{-1}).$$

То есть для бивекторов отражения в обоих полупространствах равны.

$$(nan^{-1}) \wedge (nbn^{-1}) = \frac{1}{2}(nan^{-1}nbn^{-1} - nbn^{-1}nan^{-1}) =$$
$$\frac{1}{2}(nabn^{-1} - nban^{-1}) = \frac{1}{2}n(ab - ba)n^{-1} = nBn^{-1}$$

Получается, что $B' = nBn^{-1}$, то есть отражение для бивектора формируется так же, как и для вектора, только без перемены знака при отражении в другое полупространство.

5.5.2 Отражение тривектора

Последний объект в пространстве размерности 3, который мы еще не отразили, это тривектор $a \wedge b \wedge c$.

$$(nan^{-1}) \wedge (nbn^{-1}) \wedge (ncn^{-1}) = \langle (nan^{-1})(nbn^{-1})(ncn^{-1}) \rangle_3 = \langle nabcn^{-1} \rangle_3 \qquad (28)$$

Мы уже вывели, что геометрическое произведение abc, то есть произведение вектора и бивектора, может содержать только векторную и тривекторную части. И так как векторная часть в итоге не повлияет на тривектор общего произведения, мы можем записать выражение (28) как

$$(nan^{-1}) \wedge (nbn^{-1}) \wedge (ncn^{-1}) = \langle na \wedge b \wedge cn^{-1} \rangle_3. \tag{29}$$

При этом мы знаем, что любой три-вектор пропорционален псевдоскаляру I, то есть $a \wedge b \wedge c = \alpha e_{123} = \alpha I$, который, в свою очередь, коммутирует со всеми векторами. То есть

$$\langle na \wedge b \wedge cn^{-1} \rangle_3 = \langle n\alpha I n^{-1} \rangle_3 = \langle \alpha I n n^{-1} \rangle_3 = \alpha I = a \wedge b \wedge c. \tag{30}$$

Заметим, что если бы мы отражали в другое полупространство, то получили бы

$$(-nan^{-1}) \wedge (-nbn^{-1}) \wedge (-ncn^{-1}) = -a \wedge b \wedge c. \tag{31}$$

Таким образом, мы получили, что отражение тривектора в том же полупространстве - это и есть сам тривектор, в другом - он же с противоположным знаком. То есть если изначальный тривектор состоял из правой тройки векторов, то отражение этого тривектора в другое полупространство - это такая же, но левая тройка векторов.

Заключение

В данной курсовой работе были рассмотрены 4 операции умножения: векторное, скалярное, внешнее и геометрическое, и то, как они между собой связаны. Были разобраны новые объекты – бивекторы и тривекторы, их свойства, применение в задачах аналитической геометрии, а также то, как на них расширяются упомянутые операции умножения в пространствах размерности 2 и 3.

Пользуясь инструментарием алгебры Клиффорда, были рассмотрены способы решения некоторых задач аналитической геометрии.

Список литературы

[Lou01] P. Lounesto. *Clifford algebras and spinors*. The Edinburgh Building, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[LD02] A. Lasenby и C. Doran. *Geometric algebra for physicists*. The Edinburgh Building, Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[DFM07] L. Dorst, D. Fontijne и S. Mann. *Geometric Algebra for Computer Science*. Burlington, Massachusetts: Morgan Kaufmann Publishers, 2007.

[Шир12] Д. С. Широков. *Лекции по алгебрам Клиффорда и спинорам*. Т. 19. М.: МИАН, 2012.

[Bay19] E. Bayro-Corrochano. *Geometric Algebra Applications Vol. I: Computer Vision, Graphics and Neurocomputing*. Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerlande: Springer International Publishing, 2019.