Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра теоретической и прикладной информатики

Лабораторная работа № 4

по дисциплине «Математические методы оптимального планирования эксперимента»

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Факультет:	ПМИ
Группа:	ПМИМ-21
Вариант:	3
Студенты:	Демидович Е.
	Стародубцев С.
	Цыганков А.
Преподаватель:	Попов А.А.

Новосибирск

2022

1. Цель работы

Изучить методы оптимального планирования эксперимента при нелинейной параметризации функции отклика.

2. Задание

1. Изучить понятия локально-оптимального планирования информационной матрицы при нелинейной параметризации функции отклика, ознакомиться с видом производственной функции Кобба-Дугласа
2. По заданному типу технологии сформировать имитационную модель в виде производственной функции Кобба-Дугласа. При этом задать истинные значения для параметров, нелинейно входящих в модель. Выход модели зашумить, уровень шума установить в пределах 15%–20% от мощности полезного сигнала.
3. Выбрать план для затравочного эксперимента, состоящий из небольшого числа наблюдений, и смоделировать на его основе экспериментальные данные.
4. Оценить параметры модели по полученным экспериментальным данным. Для этого необходимо перейти к линейной модели, воспользовавшись логарифмическим представлением уравнения модели наблюдения. Параметры преобразованной модели тогда можно оценить обычным "линейным" МНК.
5. Построить локально-оптимальный план эксперимента для исходной нелинейной модели, воспользовавшись разработанной ранее программой синтеза дискретных оптимальных планов и полученными оценками параметров модели. Число наблюдений должно в 4-5 раз превышать число параметров модели.
6. По сформированной ранее (п.2) имитационной модели провести имитационный эксперимент в точках полученного локально-оптимального плана. Провести оценку параметров и вычислить норму отклонения оценок от их истинных значений. Вычислительный эксперимент повторить не менее 100 раз, каждый раз с новой реализацией помехи. Вычислить среднее значение нормы отклонения оценок. Процедуру повторить, используя в качестве плана эксперимента случайно расположенные точки в факторном пространстве. В серии вычислительных экспериментов случайный план фиксируется (выбирается один раз). Сделайте вывод об эффективности оптимального планирования эксперимента для идентификации заданной нелинейной модели.
7. Оформить отчет, включающий в себя постановку задачи, оценки параметров по затравочному эксперименту, полученный локально-оптимальный план, результаты проведенного в п. 6 исследования и текст программы.
8. Защитить лабораторную работу.

3. Вариант

Технология Кобба-Дугласа. Число входных ресурсов 2. Возрастающая отдача от масштаба. Ресурсы изменяются в пределах [0, 5]. Локально-D-оптимальное планирование.

4. Постановка задачи

Модель наблюдения описывается уравнением

$$y = \eta(x, \theta) + e, \text{где}$$

y – значение зависимой переменной, x – фактор независимых переменных, θ – вектор неизвестных параметров, e — ошибка наблюдения, $\eta(x, \theta)$ – нелинейная функция вектора параметров, в моделе Кобба-Дугласса представлена как

$$\eta(x, \theta) = \theta_0 \prod_{i=1}^{k} X_i^{\theta_i}$$

При возрастающей отдаче от масштаба параметры удовлетворяют ограничению

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i > 1$$

Информационная матрица для нелинейной модели определяется, как:

$$\mathrm{M}(\varepsilon_{\mathrm{N}}, \hat{\theta}) = \mathrm{M}(\varepsilon_{\mathrm{N}}, \theta) = \sum_{j=1}^{n} p_j f(x_j, \theta_{true}) f^T(x_j, \theta_{true}), \text{ где } f(x, \hat{\theta}) = \frac{\partial \eta(x, \theta)}{\partial \theta}|_{\theta=\hat{\theta}}$$

План ε_N^* локально D-оптимальный, если $\varepsilon_N^* = Arg \max_{\varepsilon_N} \mathrm{D}[\mathrm{M}(\varepsilon_{\mathrm{N}}, \theta_{true})]$

Пусть $\theta_{true} = [0.4,\ 0.4,\ 0.4]$, уровень шума 20%, $N = 15$

5. Результаты

МНК-оценки параметров по затравочному эксперименту:

$$\hat{\theta} = [0.40162815, 0.30966667, 0.39879157]$$

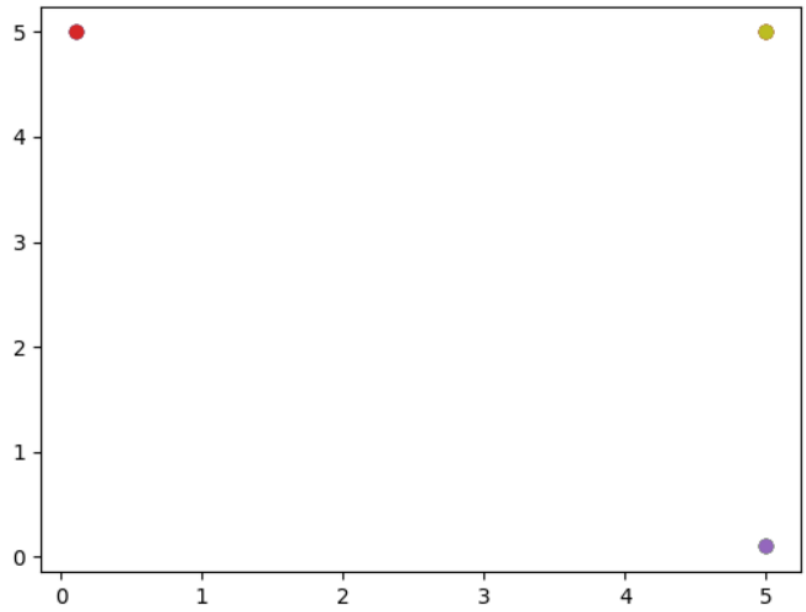
Изменение определителя информационной матрицы M

№ итерации	$\det(M)$
1	0.002423830451882872
2	0.026759353585257818
3	0.050286121951075555
4	0.0926539330025328
5	0.13308095437979764
6	0.18815322394564693
7	0.23674274447657254
8	0.2896232343595149
9	0.32086109638074434
10	0.35772976465844036
11	0.39150351126356825
12	0.4241606785233429
13	0.4559250703946063
14	0.48122288178022066
15	0.49655311911899785

Полученный оптимальный план:

x_1	5.0	5.0	5.0	0.1	5.0	5.0	0.1	0.1	5.0	5.0	5.0	5.0	0.1	0.1	5.0	5.0
x_2	0.1	0.1	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	5.0	0.1	0.1	5.0	0.1	5.0	5.0	5.0	0.1

График полученного плана



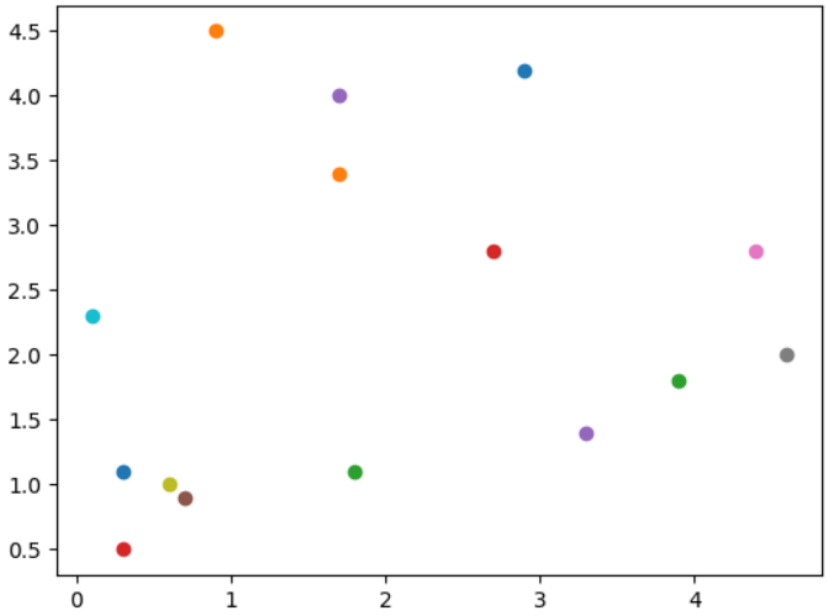
Результаты проведения вычислительного эксперимента (количество повторений 100):

$$RSS = 26.881161423673124 \qquad \left|\left|\theta - \hat{\theta}\right|\right| = 0.003217334536671049$$

План полученный из случайно расположенных точек в факторном пространстве:

x_1	2.9	0.9	1.8	0.3	1.7	0.7	4.4	4.6	0.6	0.1	0.3	1.7	3.9	2.7	3.3
x_2	4.2	4.5	1.1	0.5	4.0	0.9	2.8	2.0	1.0	2.3	1.1	3.4	1.8	2.8	1.4

График полученного плана:



Результаты проведения вычислительного эксперимента (количество повторений 100):

$$RSS = 27.214863644726712 \qquad \left|\left|\theta - \hat{\theta}\right|\right| = 0.011931014617530171$$

6. Код программы

```
import numpy as np
import random
import matplotlib.pyplot as plt


def func(x, theta):
    return np.array([x[0] ** theta[1] * x[1] ** theta[2],
                     theta[0] * theta[1] * x[0] ** (theta[1] - 1) * x[1] ** theta[2],
                     theta[0] * theta[2] * x[0] ** theta[1] * x[1] ** (theta[2] - 1)])

def makeY(plan, theta, p = 0.2):
    Y = list(map(lambda x: theta[0] * x[0]**theta[1] * x[1]**theta[2], plan))
    Y = list(map(lambda y: y + random.normalvariate(0, p * y), Y))
    return Y

def makePlan(grid = np.linspace(0, 5, 1001), m = 10):
    return list(map(lambda x: [random.choice(grid), random.choice(grid)], range(m)))

def makeX(plan):
    return np.array(list(map(lambda x: [1.0, np.math.log(x[0]), np.math.log(x[1])],
plan)))

def OLS(X, Y):
    thetahead = np.dot(np.dot(np.linalg.inv(np.dot(X.T, X)), X.T), Y)
    thetahead[0] = np.math.e ** thetahead[0]
    return thetahead

def makeM(x, N, theta):
    M = np.zeros((len(func(x[0], theta)), len(func(x[0], theta))))
    for i in range(len(x)):
        M += 1.0/N * make_partM(func(x[i], theta))
    return M

def make_partM(fx):
    M = np.zeros((len(fx), len(fx)))
    for i in range(len(fx)):
        for j in range(len(fx)):
            M[i][j] = fx[i] * fx[j]
    return M

def makeD(M):
    return np.linalg.inv(M)

def d(x, D, newx, thetahead):
    return np.dot(np.dot(func(x, thetahead), D), func(newx, thetahead).T)

def Delta(x, D, N, newx, thetahead):
    return 1./float(N) * (d(newx, D, newx, thetahead) - d(x, D, x, thetahead))\
           - 1./float(N)**2 * (d(x, D, x, thetahead) * d(newx, D, newx, thetahead) -
d(x, D, newx, thetahead)**2)

def findMaxforOneX(x, D, N, grid, thetahead):
```

```
    maxdot = [grid[0], grid[0]]
    maxvalue = Delta(x, D, N, maxdot, thetahead)
    for x1 in grid:
        for x2 in grid:
            value = Delta(x, D, N, [x1, x2], thetahead)
            if value > maxvalue:
                maxvalue = value
                maxdot = [x1, x2]
    return [maxvalue, maxdot]

def findMaxforAll(X, D, N, grid, thetahead):
    listofmax = [findMaxforOneX(x,D,N,grid,thetahead) for x in X]
    return [*max(listofmax),listofmax.index(max(listofmax))]

def makeOptimalPlan(thetahead, plan, grid, N):
    eps = 0.001
    iteration = 0
    print(thetahead)
    while True:
        M = makeM(plan, N, thetahead)
        print("det", np.linalg.det(M))
        D = makeD(M)
        print(iteration)
        delta = findMaxforAll(plan, D, N, grid, thetahead)
        if delta[0] > eps:
            plan[delta[2]] = delta[1]
        else:
            break
        iteration += 1
    return plan

def RSS(Y, X, thetahead):
    Yhead = np.dot(X, thetahead)
    return np.dot(Y - Yhead, Y - Yhead)

def Experiment(theta, plan):
    ARSS = 0
    Ahead = 0
    for i in range(100):
        Y = makeY(plan, theta)
        Y = np.log(Y)
        X = makeX(plan)
        thetahead = OLS(X, Y)
        ARSS += RSS(Y, X, thetahead)
        Ahead += np.dot(thetahead - theta, thetahead - theta)
    ARSS /= 100
    Ahead /= 100
    return ARSS, Ahead

def draw_graph(points):
    for p in points:
        plt.scatter(p[0], p[1])
    plt.plot()
    plt.show()
```

```
N = 15
grid = np.linspace(0.1, 5, 50)
plan = makePlan(grid = grid)
theta = [0.4, 0.4, 0.4]
Y = makeY(plan, theta)
Y = np.log(Y)
X = makeX(plan)

thetahead = OLS(X, Y)
firstplan = makePlan(grid = grid, m = N)
optplan = makeOptimalPlan(thetahead, firstplan, grid, N)

ARSS, Ahead = Experiment(theta, optplan)
print("Optplan")
print(optplan)
print("Average RSS ", ARSS)
print("Average norm head ", Ahead)
draw_graph(optplan)

firstplan = makePlan(grid = grid, m = N)
ARSS, Ahead = Experiment(theta, firstplan)
print("Random plan")
print(firstplan)
print("Average RSS ", ARSS)
print("Average norm head ", Ahead)
draw_graph(firstplan)
```