|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Министерство науки и высшего образования  Российской Федерации | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования | | |
| «Новосибирский государственный технический университет» | | |
|  | | |
| Кафедра теоретической и прикладной информатики | | |
|  | | |
| Лабораторная работа № 3 | | |
| по дисциплине «Математические методы оптимального планирования эксперимента» | | |
|  | | |
| **построение дискретных оптимальных планов эксперимента** | | |
|  | | |
|  | Факультет: | ПМИ |
| Группа: | ПМИМ-21 |
| Вариант: | 3 |
| Студенты: | Демидович Е. |
|  | Стародубцев С. |
|  | Цыганков А. |
| Преподаватель: | Попов А.А. |
|  |  |
|  | | |
| Новосибирск | | |
| 2022 | | |

# 1. Цель работы

Изучить алгоритмы, используемые при построении дискретных оптимальных планов.

# 2. Содержание работы

1. Изучить алгоритмы построения дискретных оптимальных планов
2. Разработать программу построения дискретных оптимальных планов эксперимента, реализующую заданный алгоритм.
3. Для числа наблюдений 20, 25, 30, 35, 40 построить оптимальные планы на каждой из сеток, указанных в варианте задания. Выбрать лучшие дискретные планы для заданного числа наблюдений.
4. Оформить отчёт, включающий в себя постановку задачи, результаты проведённых в п. 3 исследований, текст программы.
5. Защитить лабораторную работу.

# 3. Постановка задачи

Двухфакторная квадратичная модель на квадрате со сторонами [–1, +1]. Дискретное множество X – сетки 10 x 10 и 20 х 20. Строить D-оптимальные планы. Алгоритм Митчелла. Повторные наблюдения допускаются.

Пусть область действия факторов представляет собой дискретное множество точек Х̃ . Задача построения Ψ-оптимального плана с N наблюдениями имеет вид:

**Алгоритм Митчелла**

1. Выбирается невырожденный начальный план .
2. Выбирается точка , не принадлежащая плану , по правилу:
3. Точка добавляется в план . В результате формируется план , состоящий из 𝑁+1 точек.
4. Выбирается точка , принадлежащая плану , по правилу:
5. Точка исключается из плана и формируется план .
6. Если точка , выбранная на шаге 2, совпадает с точкой , выбранной на шаге 4, то вычисления прекращаются, в противном случае *s* заменяется на *s+1* и осуществляется переход на шаг 2.

# 4. Ход работы

1. Моделирование начальных планов на сетках 10х10 и 20х20 с количеством экспериментов N = 20, 25, 30, 35, 40:
   1. 10х10: [-1;+1], delta = +0.2;
   2. 20х20: [-1;+1], delta = +0.1.
2. Получение оптимального плана с помощью алгоритма Митчелла.
3. Нахождение максимального функционала для каждой сетки.

# 5. Исследования

**Сетка 10 x 10:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| -0.4  0.0  -0.4  -0.6  0.6  0.4  0.8  -1.0  -1.0  -0.8  0.8  -0.2  0.2  -1.0  0.4  1.00  -0.8  -0.6  0.2  -0.6 | 0.4  0.8  0.4  0.4  -0.6  0.0  -0.4  0.4  1.0  0.8  -0.4  -0.2  0.4  0.6  0.6  0.6  -0.2  -0.2  -1.0  0.8 | -1.0  0.2  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  0.0  0.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  -1.0  0.0  0.0  1.0  1.0 | 1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  0.0  0.0  0.0  0.0  1.0  0.0 |
|  | |  | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| -0.8  -0.2  -0.2  0.6  -0.6  0.0  1.0  -0.8  0.6  0.4  -0.4  0.0  -0.8  0.8  -0.2  0.4  -0.4  -1.0  -0.8  0.6  0.2  0.6  0.6  0.2  0.6 | -0.4  0.4  0.2  0.6  -0.8  0.4  0.4  -0.4  0.0  -0.2  0.2  0.8  -0.8  0.2  -0.6  0.4  -1.0  1.0  -0.4  0.4  -0.2  1.0  -1.0  0.2  -0.2 | -1.0  0.2  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  0.0  0.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  0.0  0.0  1.0  1.0  0.0  1.0 | 1.0  -0.2  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  0.0  0.0  1.0  -1.0  -1.0  0.0  0.0  0.0  1.0 |
|  | |  | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| 0.6  -0.8  -1.0  -0.2  0.0  -1.0  0.8  -0.6  0.0  0.0  0.0  -0.4  1.0  1.0  -0.2  0.8  -0.2  0.0  0.2  0.2  0.8  0.2  1.0  1.0  -0.2  -0.4  0.0  -0.2  1.0  -0.2 | 0.4  0.6  -0.8  -0.8  -0.2  -0.8  -0.6  -0.6  -0.6  -0.8  0.0  0.2  0.2  -0.4  0.8  1.0  0.4  0.4  -0.2  0.2  0.8  0.8  0.6  0.4  0.0  0.6  -0.2  0.0  0.4  -1.0 | 0.0  0.0  -0.2  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  0.0  0.0  0.0  0.0  -1.0  -1.0  -1.0  0.0  1.0  1.0  1.0 | -0.2  0.0  0.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  0.0  0.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  0.0  1.0  0.0  0.0  -1.0 |
|  | |  | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| 0.4  0.4  -0.4  -0.2  -1.0  0.8  -1.0  0.2  0.4  -0.4  0.2  -0.2  0.6  0.0  -0.4  -0.2  -1.0  -0.6  -1.0  1.0  -0.8  -0.4  0.8  -0.6  0.8  -1.0  0.8  0.4  -1.0  -0.4  0.8  -1.0  0.6  -0.8  1.0 | 1.0  -0.6  0.6  -1.0  -0.4  0.2  1.0  0.2  -0.4  -0.8  10  0.0  0.2  -1.0  0.8  0.0  -0.6  0.2  -0.6  -0.2  0.0  -0.2  -0.2  0.2  0.6  0.6  1.0  0.6  -0.4  0.6  -0.8  0.0  0.4  -0.4  0.4 | -1.0  -0.2  0.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  0.0  1.0  1.0  0.0  -1.0  1.0  0.0  0.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  0.0  0.0  0.0  -1.0 | 1.0  0.0  -1.0  0.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  0.0  1.0  1.0  1.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  0.0 |
|  | |  | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| 1.0  0.8  1.0  0.8  -1.0  -0.2  -0.4  1.0  0.0  -0.6  -0.6  0.0  0.8  0.4  -0.2  0.2  1.0  0.6  1.0  0.6  1.0  -0.6  0.0  0.2  0.0  -0.4  0.6  0.6  -0.6  -1.0 | 1.0  0.0  0.0  0.6  0.4  0.6  -1.0  -1.0  1.0  1.0  0.0  1.0  -1.0  0.8  -1.0  -0.6  1.0  1.0  0.0  -0.8  0.8  1.0  0.6  0.2  0.0  0.4  -0.6  -1.0  0.2  0.4 | 1.0  1.0  1.0  0.0  0.0  -0.2  1.0  1.0  0.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  0.0 | 1.0  0.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  1.0  0.0  0.0  -0.2  0.2  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0 |
|  | |  | |

**Сетка 20 x 20:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| -0.9  0.3  0.9  0.9  0.3  -0.5  0.0  -1.0  1.0  -0.6  -0.3  0.2  0.3  0.4  -0.2  -0.8  -0.2  -0.3 | 1.0  0.7  0.7  -0.4  -1.0  -1.0  0.9  -0.4  -0.5  -0.5  0.7  0.6  0.9  -1.0  0.7  -0.2  0.3  0.6 | 1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  0.0  0.0  0.0  0.0  -1.0  0.0 | 1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  0.0  1.0  0.0  0.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0 |
|  | |  | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| -0.7  0.3  -0.9  0.3  0.8  0.6  -0.6  1.0  -0.4  0.7  0.2  -0.5  0.3  0.6  -1.0  -0.7  -0.1  0.5  -1.0  0.2  0.7  0.3  -0.6  0.4  0.1 | -0.7  -0.1  -0.8  -0.7  0.6  0.7  1.0  0.7  0.7  -0.5  1.0  -0.8  -0.5  0.5  0.1  0.3  -0.3  -0.5  0.0  -1.0  -0.7  1.0  0.4  0.6  1.0 | 0.2  -1.0  -1.0  -1.0  0.2  0.1  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -0.1  0.0  -1.0  -1.0  1.0 | 1.0  0.1  -0.3  0.0  -1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  0.1  0.1  -1.0  -1.0  -1.0  -0.1  1.0  1.0  -1.0 |
|  | |  | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| 1.0  -0.3  -0.2  -0.4  1.0  -0.4  0.9  -0.8  -0.9  0.8  0.4  -0.5  -0.9  -0.1  1.0  0.7  0.6  0.0  -0.4  -0.1  -0.9  -0.2  0.4  -0.7  -0.6  0.4  0.3  0.1  -0.7  -0.5 | 0.5  0.4  1.0  -0.8  0.2  0.2  0.6  1.0  0.3  0.3  0.9  -0.7  0.3  -0.4  0.7  -0.6  0.3  -0.2  -0.5  -0.5  0.4  0.4  0.7  -0.9  0.7  1.0  0.4  0.1  -0.3  -1.0 | 1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  0.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  0.0  0.0  0.0  0.0  -1.0 | 0.1  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  -0.1  0.0  0.0  0.0  0.0  1.0  1.0  1.0  0.0  0.0  -1.0 |
|  | |  | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| 1.0  0.3  1.0  0.6  0.3  0.8  0.4  0.1  -1.0  0.8  0.4  0.5  0.4  0.2  -0.4  -0.6  0.4  0.0  1.0  -0.3  -0.6  0.0  -0.3  1.0  0.0  0.2  0.2  0.9  -0.8  0.7  0.1 | 0.6  -0.4  1.0  -0.1  -0.9  0.5  -1.0  0.8  -0.8  -0.1  -0.7  -0.4  -0.5  0.6  -0.7  0.2  0.0  0.4  -0.6  0.2  0.9  0.8  -1.0  -0.8  1.0  0.1  0.5  0.2  -0.1  -0.6  0.7 | 1.0  0.0  0.2  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  -1.0  -1.0  0.0  -1.0  0.0  0.0  1.0  1.0  1.0  1.0  0.0 | 1.0  1.0  0.1  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  -1.0  -1.0  0.0  0.0  0.0  1.0  -1.0  -1.0  1.0  1.0  0.0  0.0  1.0  -1.0  0.0 |
|  | |  | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Невырожденный начальный план | | Полученный оптимальный план | |
| 𝑥1 | 𝑥2 | 𝑥1 | 𝑥2 |
| -0.8 | -0.3 | -1.0 | 1.0 |
| -0.3 | 0.5 | -1.0 | 1.0 |
| 0.3 | 0.5 | 1.0 | -1.0 |
| -0.9 | 0.4 | 1.0 | 1.0 |
| 0.6 | 0.1 | 1.0 | 1.0 |
| -0.4 | -1.0 | -1.0 | -1.0 |
| -0.6 | 0.1 | -1.0 | -1.0 |
| 0.9 | -0.6 | 1.0 | -1.0 |
| -0.9 | 0.2 | 1.0 | -1.0 |
| -0.1 | -0.1 | -1.0 | 1.0 |
| -0.1 | 0.7 | -1.0 | 1.0 |
| 0.5 | 0.3 | 1.0 | 1.0 |
| 0.9 | 0.1 | 1.0 | 1.0 |
| 1.0 | -0.2 | -1.0 | -1.0 |
| 0.8 | -0.6 | -1.0 | -1.0 |
| 1.0 | -0.2 | 1.0 | -1.0 |
| 0.9 | -0.2 | 1.0 | -1.0 |
| 0.7 | 0.2 | -1.0 | 1.0 |
| -0.9 | -0.8 | -1.0 | 1.0 |
| -0.4 | 0.7 | 0.0 | -1.0 |
| 0.0 | -0.3 | 0.0 | -1.0 |
| 0.2 | 0.6 | -1.0 | -1.0 |
| -0.6 | -0.8 | -1.0 | -1.0 |
| 1.0 | 0.6 | -1.0 | 1.0 |
| 0.2 | -0.9 | -1.0 | 0.0 |
| -0.7 | 0.1 | -1.0 | 0.0 |
| 0.4 | -0.4 | 0.0 | 1.0 |
| 0.8 | -0.1 | 0.0 | 1.0 |
| 0.0 | 0.9 | 0.0 | 0.0 |
| -0.7 | -0.2 | 0.0 | 0.0 |
| 0.3 | -0.6 | 1.0 | 0.0 |
| 0.6 | 0.7 | 1.0 | 0.0 |
| 0.3 | 0.5 | 1.0 | 0.0 |
| 0.8 | -0.6 | 0.0 | -1.0 |
| -0.1 | 0.7 | -1.0 | 0.0 |
| -1.0 | -0.4 | 0.0 | 1.0 |
| 1.0 | 0.8 | 0.0 | 0.0 |
| -0.2 | -0.6 | 0.0 | 0.0 |
| -0.9 | -0.2 | 1.0 | 1.0 |
| 0.0 | 0.9 | 1.0 | -1.0 |

Сравнение определителей матрицы М и функционалов D-плана (max):

10 x 10

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| N | s | |M(e)| | ln|M(e)| |
| 20 | 23 | 0.01008810400000004 | -4.596398371094304 |
| 25 | 24 | 0.01089671790592002 | -4.519293644638244 |
| 30 | 28 | 0.010872987459312046 | -4.521473780346014 |
| 35 | 39 | 0.01104201914454014 | -4.506047361328983 |
| **40** | **34** | **0.01117884664976641** | **-4.493731978493877** |

20 x 20

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| N | s | |M(e)| | ln|M(e)| |
| 20 | 31 | 0.011021999999999995 | -4.507862003521094 |
| 25 | 22 | 0.010051071990671515 | -4.600075984426979 |
| 30 | 30 | 0.01097825020484668 | -4.511839217636052 |
| 35 | 37 | 0.01129118723350984 | -4.483732748376751 |
| **40** | **48** | **0.011390625000000027** | **-4.474964630333148** |

Максимального функционала мы достигли при N = 40 на обеих сетках.

|  |  |
| --- | --- |
| 10 х 10 (N = 40) | 20 х 20 (N = 40) |

# 6. Исходный код

import sys  
  
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
  
*# определение f(x)*def f(a, b):  
 f = np.array([[1], [a], [b], [a \* b], [a \*\* 2], [b \*\* 2]])  
 return f  
  
*# построение информационной матрицы М*def calc\_M(c, d, p1, m):  
 M1 = np.zeros((m, m))  
 n = len(c)  
 for q in range(0, n - 1):  
 M1 += p1[q] \* f(c[q], d[q]) @ np.transpose(f(c[q], d[q]))  
 return M1  
  
*# построение дисперсионной матрицы D*def calc\_D(M1):  
 D1 = np.linalg.inv(M1)  
 return D1  
  
*# поиск d(x, e)*def calc\_d(x1, x2, D1):  
 d1 = np.transpose(f(x1, x2)) @ D1 @ f(x1, x2)  
 return d1  
  
*# отрисовка графика*def draw\_graph(a, b):  
 for i1 in range(0, len(a)):  
 plt.scatter(a[i1], b[i1])   
 plt.plot()  
 plt.show()  
  
*# параметры генератора сетки*plan = []  
grid = 20 *# 10 20*grid\_step = {  
 10: 0.2,  
 20: 0.1  
}  
  
N = int(sys.argv[1])  
m = 6   
a = -1  
plan.append(a)  
for i in range(0, grid):  
 a += grid\_step[grid]  
 plan.append(a)  
  
*# выбор невырожденного плана*s = 0  
en\_x1 = np.random.choice(plan, N, replace=True, p=None)  
en\_x2 = np.random.choice(plan, N, replace=True, p=None)  
print(**"en\_x1 = "**, en\_x1)  
print(**"en\_x2 = "**, en\_x2)  
draw\_graph(en\_x1, en\_x2)  
  
while True:  
 print(**"s = "**, s)  
 print(**"plan = "**, plan)  
 print(**"en\_x1 = "**, en\_x1)  
 print(**"en\_x2 = "**, en\_x2)  
 pi = 1 / len(en\_x1)  
 p = []  
 for i in range(0, len(en\_x1)):  
 p.append(pi)  
 print(**"p = "**, p)  
 print(**"sum(p) = "**, np.sum(p))  
 *# выбор точки x\_s* M = calc\_M(en\_x1, en\_x2, p, m)  
 D = calc\_D(M)  
 delta = grid\_step[grid]  
 maxd = -100  
 k = 0  
 x1\_max = -2  
 x2\_max = -2  
 xs\_1 = -1  
 while (xs\_1 <= 1):  
 xs\_2 = -1  
 while (xs\_2 <= 1):  
 for i in range(0, len(en\_x1)):  
 d = calc\_d(xs\_1, xs\_2, D)  
 if maxd <= d:  
 maxd = d  
 x1\_max = xs\_1  
 x2\_max = xs\_2  
 xs\_2 += delta  
 xs\_1 += delta  
  
 print(**"maxd = "**, maxd)  
 print(**"x1\_max = "**, x1\_max)  
 print(**"x2\_max = "**, x2\_max)  
  
 *# точка x\_s добавляется в план* en1\_x1 = np.append(en\_x1, x1\_max)  
 en1\_x2 = np.append(en\_x2, x2\_max)  
  
 *# выбор точки x\_j из плана* new\_pi = 1 / len(en1\_x1)  
 new\_p = []  
 for i in range(0, len(en1\_x1)):  
 new\_p.append(pi)  
   
 M = calc\_M(en1\_x1, en1\_x2, new\_p, m)  
 D = calc\_D(M)  
 mind = 100  
 x1\_min = 2  
 x2\_min = 2  
 i\_min = 0  
 for i in range(0, len(en1\_x1)):  
 d = calc\_d(en1\_x1[i], en1\_x2[i], D)  
 print(**"d = "**, d)  
 print(**"en1\_x1[i] = "**, en1\_x1[i])  
 print(**"en1\_x2[i] = "**, en1\_x2[i])  
 if mind >= d:  
 mind = d  
 x1\_min = en1\_x1[i]  
 x2\_min = en1\_x2[i]  
 i\_min = i  
  
 print(**"mind = "**, mind)  
 print(**"x1\_min = "**, x1\_min)  
 print(**"x2\_min = "**, x2\_min)  
  
 *# точка x\_j исключается из плана en1* es1\_x1 = np.delete(en1\_x1, i\_min)  
 es1\_x2 = np.delete(en1\_x2, i\_min)  
  
 print(**"xs = "**, x1\_max, **", "**, x2\_max)  
 print(**"xj = "**, x1\_min, **", "**, x2\_min)  
  
 if (x1\_max == x1\_min) and (x2\_max == x2\_min):  
 print(**"alg opt"**)  
 print(**"|M(e)| = "**, np.linalg.det(M), **"ln|M(e)| = "**, np.log(np.linalg.det(M)))  
 print(**"es1\_x1 = "**, es1\_x1)  
 print(**"es1\_x2 = "**, es1\_x2)  
 draw\_graph(es1\_x1, es1\_x2)  
 break  
 else:  
 print(**"alg not opt"**)  
 print(**"|M(e)| = "**, np.linalg.det(M), **"ln|M(e)| = "**, np.log(np.linalg.det(M)))  
 s += 1  
 en\_x1 = es1\_x1  
 en\_x2 = es1\_x2