

## **Задачи для тренировки:**

Вопросы 19-21 к задаче 1 и следующим задачам такие же, как и в задаче Р00.

- 10) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 69. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 69 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 6 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 62$ .

**Вопросы 19-21 к задаче 11 и следующим задачам следующие:**

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите **минимальное значение  $S$** , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите **два значения  $S$** , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

- 11) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 62 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 54$ .
- 12) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 66. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 66 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 58$ .
- 13) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 68 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 60$ .
- 14) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 74. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 74 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 66$ .
- 15) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 59. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 59 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 5 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 53$ .
- 16) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество

камней в кучах становится не менее 61. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 61 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 5 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 55$ .

- 26) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 79. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 79 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 69$ .
- 27) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 75. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 75 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 65$ .
- 28) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 78. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 78 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 70$ .
- 29) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 72. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 72 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 64$ .
- 30) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 62 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 54$ .
- 31) (А. Носкин) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 41. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 41 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 31$ .

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.  
Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Вопросы 19-21 к задаче 32 и следующим задачам следующие:**

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.  
Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Сколько существует значений  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 32) (А. Носкин) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 40. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 40 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 30$ .
- 33) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 53. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 53 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 9 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 43$ .
- 34) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 49. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 49 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 41$ .
- 35) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 61. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 61 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 7 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 53$ .
- 36) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 48. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 48 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 8 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 39$ .
- 37) За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 61. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 61 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 50$ .
- 38) (С.А. Скопинцева) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может увеличить количество камней в куче в три раза, добавить в кучу один камень, или 3 камня, при этом после каждого хода в куче должно быть нечетное количество камней. Например, пусть в куче было 8 камней. Тогда за один ход можно получить кучу из 9 камней или из 11 камней (увеличить количество камней в три раза нельзя, т.к. после этого хода получится четное количество камней – 24). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Выигрывает тот игрок, после хода которого количество камней в куче становится не менее 51.

В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 50$ .

**19.** Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

**20.** Найдите два наибольших значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;

- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**21.** Определите, сколько существует значений  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим вторым ходом независимо от ходов Пети.

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

#### Задание 19.

Найдите **минимальное значение  $S$** , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

#### Задание 20.

Сколько существует значений  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;

- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

#### Задание 21

Найдите **два наибольших значения  $S$** , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**39) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 25 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 24$ .

**40) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 33 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 32$ .

**41) (А. Кабанов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 12 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество

камней в куче становится не менее 50. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 50 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

- 42) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два камня, добавить в кучу три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 17, 18 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 30 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 29$ .

#### Вопросы 19-21 к следующим задачам:

##### Задание 19.

Найдите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

##### Задание 20.

Найдите **минимальное и максимальное значение  $S$** , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

##### Задание 21

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 43) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу один камень;
  - б) добавить в кучу два камня;
  - в) добавить в кучу три камня;
  - г) увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 33. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 34 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 33$ .

- 44) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу один камень;
  - б) добавить в кучу два камня;
  - в) добавить в кучу три камня;
  - г) увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 37. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 38 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 37$ .

- 45) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу один камень;

- б) добавить в кучу два камня;  
 г) увеличить количество камней в куче в три раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче превышает 64. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 65 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 64$ .

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

**Задание 19.**

Найдите **минимальное значение  $S$** , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.**

Сколько существует значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите **минимальное и максимальное значение  $S$** , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

- 46) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу два камня;
  - б) увеличить количество камней в куче в три раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 45. Если при этом в куче оказалось не более 112 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 44$ .

- 47) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу один камень;
  - б) увеличить количество камней в куче в два раза;
  - в) увеличить количество камней в куче в три раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 36. Если при этом в куче оказалось не более 60 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 35$ .

- 48) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- а) добавить в кучу один камень;
  - б) увеличить количество камней в куче в два раза;
  - в) увеличить количество камней в куче в три раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 43. Если при этом в куче оказалось не более 72 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 42$ .

Вопросы 19-21 к следующим задачам:

**Задание 19.**

Найдите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.**

Сколько существует значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 49) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать  $(6, 9)$ . За один ход из позиции  $(6, 9)$  можно получить любую из четырёх позиций:  $(5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5)$ . Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 20. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 20 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 10$ .
- 50) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать  $(6, 9)$ . За один ход из позиции  $(6, 9)$  можно получить любую из четырёх позиций:  $(5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5)$ . Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 30. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 30 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 18 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 12$ .
- 51) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из одной из куч один камень или уменьшить количество камней в куче в два раза (если количество камней в куче нечётно, остаётся на 1 камень **больше**, чем убирается). Например, пусть в одной куче 6, а в другой 9 камней; такую позицию мы будем обозначать  $(6, 9)$ . За один ход из позиции  $(6, 9)$  можно получить любую из четырёх позиций:  $(5, 9), (3, 9), (6, 8), (6, 5)$ . Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не более 32. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший позицию, в которой в кучах будет 32 или меньше камней. В начальный момент в первой куче было 10 камней, во второй куче –  $S$  камней,  $S > 22$ .
- 52) (Е. Джобс) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу **сто** камней или  
 б) увеличить количество камней в куче в **два** раза.

Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 110 или 20 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 1000. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 1000 или больше камней.

В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 999$ .

**Задание 19.** Сколько существует значений  $S$ , при которых Ваня выигрывает первым ходом?

**Задание 20.** Сколько существует значений  $S$ , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом?

**Задание 21.** Назовите минимальное и максимальное значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом, при этом для любого значения у Вани есть возможность выиграть своим первым ходом (в случае ошибки Пети).

53) (Д. Ф. Муфаззалов, г. Уфа) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча, состоящая из  $S$  конфет. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может съесть не более пяти, но не менее одной конфеты или съесть половину конфет, если число конфет четное. Съесть можно только целое количество конфет.

Игра завершается в тот момент, когда в куче останется **менее десяти конфет**. Победителем считается игрок, который сделал последний ход.

**Задание 19.** Укажите значение  $S$ , при которых Ваня выигрывает первым ходом.

**Задание 20.** Укажите минимальное и максимальное  $S$ , при которых Петя не может выиграть первым ходом, но может выиграть вторым ходом при любом ходе Вани.

**Задание 21.** Укажите такое значение  $S$ , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Вопросы 19-21 к следующим задачам:

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

54) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 83, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 5 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 77$ .

55) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 95, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 5 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 89$ .

56) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 105, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 4 камня, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 100$ .

57) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 129, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 4 камня, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 124$ .

58) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 100, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 93$ .

59) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 108, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 101$ .

60) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в любой куче **в четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 125, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 117$ .

61) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;

б) увеличить количество камней в любой куче в **четыре раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 133, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 125$ .

- 62) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игрошки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в любую кучу один камень или увеличить количество камней в любой куче в два раза. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 30, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K$  камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq K \leq 29$ ,  $1 \leq S \leq 29$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $K=6$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 63) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игрошки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в любую кучу один камень** или **увеличить количество камней в первой куче в два раза** или **увеличить количество камней во второй куче в три раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 30, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $K+S \leq 29$ . Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $S=7$ , найдите минимальное и максимальное значение  $K$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При  $K=1$  найдите такое значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 64) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игрошки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в любую кучу два камня** или **увеличить количество камней в любой куче в три раза**. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 45, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $K+S \leq 43$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Сколько существует пар  $(K; S)$ , таких что Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети?

**Задание 20.** При  $K=4$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При  $K=13$  найдите такое значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

65) (**А. Кабанов**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **убрать из кучи один камень** или **уменьшить количество камней в любой куче в два раза** (**если количество камней нечётно, то остаётся на один камень меньше, чем убирается**). Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не более 18, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было  $K \geq 1$  камней, а во второй –  $S \geq 1$  камней,  $S+K \geq 19$ .

Ответьте на следующие вопросы:

**Задание 19.** Известно, что из начальной позиции  $(M; M)$  Ваня выигрывает первым ходом при любой игре Пети. При каком значении  $M$  это возможно?

**Задание 20.** При  $K=13$ , найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21.** При каком минимальном значении  $N$  для начальной пары  $(N; N)$  одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Вопросы 19-21 к следующим задачам:

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.



Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 80, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 71$ .

- 73) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- добавить в любую кучу один камень;**
- добавить в любую кучу столько камней, сколько их в данный момент в другой куче.**

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 73, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 63$ .

- 74) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- добавить в любую кучу один камень;**
- добавить в любую кучу столько камней, сколько их в данный момент в другой куче.**

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 79, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 69$ .

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

#### **Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

#### **Задание 20.**

Определите, сколько существует таких значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

#### **Задание 21**

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть при любой игре Пети.

- 75) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- добавить в любую кучу один камень;**
- увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 70, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 6 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 63$ .

- 76) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- добавить в любую кучу один камень;**
- увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 81, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 7 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 73$ .

- 77) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- добавить в любую кучу один камень;**
- увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 90, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 9 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 80$ .

78) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в любую кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в три раза**.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 99, побеждает игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 8 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 90$ .

#### Вопросы 19-21 к следующим задачам:

##### Задание 19.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после первого хода Пети. Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

##### Задание 20.

Определите, два таких значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

##### Задание 21

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

79) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 20. Если при этом в куче оказалось не более 30 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 17 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 19$ .

80) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 25. Если при этом в куче оказалось не более 45 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 23 камня и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 24$ .

81) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить** в кучу **один камень**;
- б) **увеличить** количество камней в куче **в два раза**.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 30. Если при этом в куче оказалось не более 45 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 27 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 29$ .

- 82) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в кучу один камень;**
- б) **увеличить количество камней в куче в два раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 50. Если при этом в куче оказалось не более 70 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 40 камней и Петя удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 49$ .

- 83) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в кучу один камень;**
- б) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 56. Если при этом в куче оказалось не более 80 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 45 камней и Петя утроит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 55$ .

- 84) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **добавить в кучу один камень;**
- б) **увеличить количество камней в куче в три раза.**

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 65. Если при этом в куче оказалось не более 100 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. Например, если в куче было 55 камней и Петя утроит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Ваня. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 64$ .

- 85) (А. Богданов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит одна куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) **убрать из кучи половину камней**, если количество камней в куче делится на 2; иначе убрать из кучи **два камня**;
- б) **убрать из кучи две трети камней**, если количество камней в куче делится на 3; иначе убрать из кучи **три камня**.

Например, пусть в куче 10 камней, тогда можно убрать половину или только три камня. А если в куче 12 камней, то можно убрать половину или две трети камней. Игра завершается в тот момент, когда в куче останется ровно 1 камень. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой будет ровно 1 камень. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $2 \leq S \leq 37$ .

### **Задание 19.**

Найдите максимальное значение  $S$ , когда Петя мог выиграть первым ходом, но ошибся, и Ваня выиграл.

### **Задание 20.**

Найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при котором Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Петя может выбрать, каким ходом выиграет Ваня.

- 86) (**Е. Джобс**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. У игроков есть табличка, на которой записана пара неотрицательных целых чисел. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может заменить любое число на сумму обоих чисел. Так, например, если перед ходом игрока была позиция  $(3, 5)$ , то после его хода будет позиция  $(8, 5)$  или  $(3, 8)$ . Игра завершается в тот момент, когда сумма чисел пары становится не менее 45, побеждает игрок, сделавший последний ход.

### **Задание 19.**

Известно, что игра началась в позиции  $(7, S)$ , при этом Ваня одержал победу после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

### **Задание 20.**

Найдите значения  $S$ , при которых Петя при правильной игре гарантированно выигрывает своим вторым ходом из позиции  $(6, S)$ . В качестве ответа укажите сначала минимальное, затем максимальное значение.

### **Задание 21**

Известно, что при игре из позиции  $(S, S)$  Ваня гарантированно выигрывает своим вторым ходом при любой игре Пети. Найдите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

- 87) (**А. Богданов**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит три кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч 3, 13 или 23 камня. Игра завершается в тот момент, когда в сумме в кучах будет не менее 73 камней. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в кучах было  $(2, S, 2S)$  камней,  $1 \leq S \leq 23$ .

### **Задание 19.**

При некотором значении  $S$  Ваня одержал победу свои первым ходом после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

### **Задание 20.**

Найдите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

### **Задание 21**

Найдите два значения  $S$ , при которых выигрышная стратегия есть у Вани, но Петя может выбрать, каким ходом выиграет Ваня – первым или вторым.

- 88) (**А. Богданов**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч 1 или 2 камня. Игра завершается в тот момент, когда в сумме в кучах будет 13 камней. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в первой куче было 3 камня, во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 9$ .

### **Задание 19.**

Петя мог выиграть первым ходом, но сделал неудачный ход и Ваня выиграл. При каком минимальном значении  $S$  это возможно?

### **Задание 20.**

Найдите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

### **Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает вторым ходом при любых ходах Пети.

- 89) (**И. Осипов**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат три кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в первой куче 10 камней, во второй 7, а в третьей 4 камня; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 7, 4)$ . Тогда за один ход можно получить любую из шести позиций:  $(13, 7, 4)$ ,  $(20, 7, 4)$ ,  $(10, 10, 4)$ ,  $(10, 14, 4)$ ,  $(10, 7, 7)$ ,  $(10, 7, 8)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 71. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 71 или больше камней. В начальный момент в первой куче было семь камней, во второй куче пять камней, в третьей куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 58$ .

#### **Задание 19.**

При некотором значении  $S$  Ваня одержал победу своим первым ходом после неудачного хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

#### **Задание 20.**

Найдите минимальное и максимальное значение  $S$ , при которых Петя выигрывает вторым ходом при любом ходе Вани.

#### **Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 90) (**А. Рогов**) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 5)$ ,  $(30, 5)$ ,  $(10, 6)$ ,  $(10, 15)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 60. Если при этом в куче оказалось не более 79 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было восемь камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 51$ .

#### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Паша не может победить своим первых ходом, но Витя побеждает своим первым ходом при любой игре Паши.

#### **Задание 20.**

Укажите, сколько существует значений  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

#### **Задание 21**

Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 91) (**А. Рогов**) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 5), (20, 5), (10, 6), (10, 10)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 40. Если при этом в куче оказалось не более 49 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было четырнадцать камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 25$ .

#### **Задание 19.**

Укажите значение  $S$ , при котором Паша не может победить своим первых ходом, но Витя побеждает своим первым ходом при любой игре Паши.

#### **Задание 20.**

Укажите, сколько существует значений  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

#### **Задание 21**

Укажите минимальное и максимальное значения  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 92) (**А. Рогов**) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(11, 5), (20, 5), (10, 6), (10, 10)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 91. Если при этом в куче оказалось не более 110 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было сорок камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 50$ .

#### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Паша не может победить своим первых ходом, но Витя побеждает своим первым ходом при любой игре Паши.

#### **Задание 20.**

Укажите, сколько существует значений  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

#### **Задание 21**

Укажите минимальное и максимальное значения  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

93) (А. Рогов) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(12, 5), (30, 5), (10, 7), (10, 15)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 47. Если при этом в кучах оказалось не более 59 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было пять камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 41$ .

#### **Задание 19.**

Укажите количество значений  $S$ , при котором Паша не может победить своим первых ходом, но Витя побеждает своим первым ходом при любой игре Паши.

#### **Задание 20.**

Укажите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

#### **Задание 21**

Укажите количество значений  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

94) (А. Рогов) Два игрока, Паша и Витя, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(12, 5), (20, 5), (10, 7), (10, 10)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 63. Если при этом в двух кучах оказалось не более 74 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник, при этом считается, что противник сделал ход.

В начальный момент в первой куче было пятнадцать камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 47$ .

#### **Задание 19.**

Известно, что Витя победил после первого неудачного хода Паши. Назовите минимальное  $S$ , при котором это возможно.

#### **Задание 20.**

Укажите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых у Паши есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Паша не может выиграть за один ход;
- Паша может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Витя.

**Задание 21**

Укажите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вити есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Паши;
- у Вити нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

**Вопросы 19-21 к следующим задачам:**

**Задание 19.**

Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

**Задание 20.**

Определите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

95) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. При этом нельзя повторять ход, который только что сделал второй игрок. Например, если в начале игры в куче 3 камня, Петя может первым ходом получить кучу из 4, 5 или 6 камней. Если Петя добавил 1 камень и получил кучу из 4 камней, то следующим ходом Ваня может либо добавить 2 камня (и получить 6 камней), либо удвоить количество камней в куче (их станет 8). Получить 5 камней Ваня не может, так как для этого нужно добавить один камень, а такой ход только что сделал Петя.

Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 43. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 43 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 42$ .

96) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. При этом нельзя повторять ход, который только что сделал второй игрок. Например, если в начале игры в куче 3 камня, Петя может первым ходом получить кучу из 4, 5 или 6 камней. Если Петя добавил 1 камень и получил кучу из 4 камней, то следующим ходом Ваня может либо добавить 2 камня (и получить 6 камней), либо удвоить количество камней в куче (их станет 8). Получить 5 камней Ваня не может, так как для этого нужно добавить один камень, а такой ход только что сделал Петя.

Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 68 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 67$ .

97) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень,

добавить три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. При этом нельзя повторять ход, который только что сделал второй игрок. Например, если в начале игры в куче 4 камня, Петя может первым ходом получить кучу из 5, 7 или 8 камней. Если Петя добавил 1 камень и получил кучу из 5 камней, то следующим ходом Ваня может либо добавить 3 камня (и получить 8 камней), либо удвоить количество камней в куче (их станет 10). Получить 6 камней Ваня не может, так как для этого нужно добавить один камень, а такой ход только что сделал Петя.

Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 55. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 55 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 54$ .

- 98) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. При этом нельзя повторять ход, который только что сделал второй игрок. Например, если в начале игры в куче 4 камня, Петя может первым ходом получить кучу из 5, 7 или 12 камней. Если Петя добавил 1 камень и получил кучу из 5 камней, то следующим ходом Ваня может либо добавить 3 камня (и получить 8 камней), либо утроить количество камней в куче (их станет 15). Получить 6 камней Ваня не может, так как для этого нужно добавить один камень, а такой ход только что сделал Петя. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 76. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 76 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 75$ .

- 99) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить три камня или увеличить количество камней в куче в три раза. При этом нельзя повторять ход, который только что сделал второй игрок. Например, если в начале игры в куче 4 камня, Петя может первым ходом получить кучу из 5, 7 или 12 камней. Если Петя добавил 1 камень и получил кучу из 5 камней, то следующим ходом Ваня может либо добавить 3 камня (и получить 8 камней), либо утроить количество камней в куче (их станет 15). Получить 6 камней Ваня не может, так как для этого нужно добавить один камень, а такой ход только что сделал Петя. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 100. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 100 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 99$ .

- 100) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. При этом нельзя повторять ход, который только что сделал второй игрок. Например, если в начале игры в куче 4 камня, Петя может первым ходом получить кучу из 5, 6 или 12 камней. Если Петя добавил 1 камень и получил кучу из 5 камней, то следующим ходом Ваня может либо добавить 2 камня (и получить 7 камней), либо утроить количество камней в куче (их станет 15). Получить 6 камней Ваня не может, так как для этого нужно добавить один камень, а такой ход только что сделал Петя. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 62 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 61$ .

- 101) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень,

добавить два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. При этом нельзя повторять ход, который только что сделал второй игрок. Например, если в начале игры в куче 4 камня, Петя может первым ходом получить кучу из 5, 6 или 12 камней. Если Петя добавил 1 камень и получил кучу из 5 камней, то следующим ходом Ваня может либо добавить 2 камня (и получить 7 камней), либо утроить количество камней в куче (их станет 15). Получить 6 камней Ваня не может, так как для этого нужно добавить один камень, а такой ход только что сделал Петя. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 140. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 140 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 139$ .

- 102) (А. Кабанов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит набор карт. За один ход игрок берёт одну из карт и кладёт её в стопку поверх предыдущей. Игроки ходят по очереди, первую карту кладёт Петя. Первая карта может быть любой из доступных. В следующие ходы игроки могут положить только карты того же достоинства или на единицу старше. Игра завершается в тот момент, когда положить новую карту в стопку становится невозможно. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть положивший последнюю карту в стопку.

#### **Задание 19.**

Перед игроками лежат 1 семёрка, 3 восьмёрки и 2 девятки. С какой карты Петя должен начать игру, чтобы гарантированно выиграть? В качестве ответа запишите числовое значение этой карты.

#### **Задание 20.**

Перед игроками лежат 1 пятёрка, 2 шестёрки, 3 семёрки, 1 восьмёрка, 3 девятки, 2 десятки. С каких карт Петя должен начать игру, чтобы гарантированно выиграть? В качестве ответа запишите наименьшее и наибольшее числовые значения этих карт.

#### **Задание 21**

Известно, что в начальном наборе были четвёрки, пятёрки, шестёрки и семёрки, но не более четырёх каждого вида. Сколько существует вариантов наборов таких карт, что Ваня сможет победить при любой игре Пети?

- 103) ([PRO100 ЕГЭ](#)) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может увеличить количество камней в куче **в два раза** или добавить в кучу **два камня**. Так же за всю игру можно только один раз сделать суперход – ход, после которого количество камней в куче не изменится, а очередь хода перейдёт к сопернику. То есть суперход может сделать один раз либо Ваня, либо Петя. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Выигрывает тот игрок, после хода которого количество камней в куче становится не менее 20. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 19$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

#### **Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.

Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

#### **Задание 20.**

Найдите два значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть первым ходом, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

#### **Задание 21**

Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , при которых у Вани есть выигрышная стратегия. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

104) (**Е. Джобс**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Играют по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может увеличить количество камней в куче в **целое число раз** (но не более, чем на 80 камней) или добавить в кучу **десять камней** или добавить в кучу **два камня**. Например, из кучи из 10 камней можно получить кучу из 12, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 и 90 камней. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Выигрывает тот игрок, после хода которого количество камней в куче становится не менее 166.

В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 165$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

#### **Задание 19.**

Известно, что Петя выиграл своим вторым ходом после неудачного хода Вани. При каком минимальном значении  $S$  такое возможно?

#### **Задание 20.**

Известно, что Петя имеет выигрышную стратегию. Укажите минимальное и максимальное значения при которых Петя не может победить первым ходом, но при любом ходе Вани Петя побеждает своим вторым ходом.

#### **Задание 21**

Известно, что Ваня имеет выигрышную стратегию за один или два хода, при этом не имеет выигрышной стратегии в один ход. Найдите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

105) (**ЕГЭ-2022**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Играют по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 259. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 259 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 17 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 241$ .

#### **Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.

Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

106) (**ЕГЭ-2022**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Играют по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 165. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в куче будет 165 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 164$ .

**Задание 19.**

Укажите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

**Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

107) (И. Баженов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. У каждого игрока есть 4 варианта хода: 1) добавить четыре камня в первую кучу; 2) добавить три камня во вторую кучу; 3) увеличить в 2 раза количество камней в первой куче; 4) увеличить в 3 раза количество камней во второй куче. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 178. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. первым получивший суммарно в двух кучах 178 или больше камней.

В начальный момент в первой куче был 21 камень, во второй куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 156$ .

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.

Назовите минимальное значение  $S$ , при котором это возможно.

**Задание 20.**

Определите сумму всех значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя не может выиграть за один ход, но может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите произведение всех значений  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Пети есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым, вторым или третьим ходом при любой игре Вани;
- у Пети нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым или вторым ходом.

108) (Е. Джобс) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может уменьшить количество камней в три раза (количество камней, полученное при делении, округляется до меньшего) или убрать из кучи 10 камней. Например, из кучи из 25 камней можно получить кучу из 8 или 15 камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не более 10. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в куче было  $S$  камней ( $S \geq 11$ ).

**Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного хода Пети. При каком максимальном значении  $S$  такое возможно?

**Задание 20.**

Найдите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Сколько существует значений  $S$ , при которых Ваня имеет выигрышную стратегию за один или два хода, при этом не имеет выигрышной стратегии в один ход?

- 109) (Е. Джобс) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 231. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 231 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было 17 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 213$ .

### Задание 19.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите максимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

### Задание 20.

Укажите наибольшее и наименьшее значения  $S$  при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 110) (Д. Статный) Снегурочка и Дед Мороз играют в следующую игру: перед ними лежит куча подарков. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Снегурочку. За один ход игрок может добавить 2 подарка, 5 подарков, 12 подарков или увеличить их количество в два раза. При этом нельзя повторять ход, который этот же игрок делал на предыдущем ходу. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество подарков. Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество подарков станет не менее 121. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в куче будет не меньше, чем 121 подарок. В начальный момент в куче было  $S$  подарков;  $1 \leq S \leq 120$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### Задание 19.

Известно, что Дед Мороз выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Снегурочки. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

### Задание 20.

Укажите минимальное  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Снегурочки есть выигрышная стратегия, позволяющая ей выиграть своим вторым ходом при любой игре Деда Мороза;
- у Снегурочки нет стратегии, которая позволит её гарантированно выиграть первым ходом.

### Задание 21

Найдите максимальное и минимальное значения  $S$ , при которых

- у Деда Мороза есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть, по крайней мере, своим третьим ходом при любой игре Снегурочки;
- у Деда Мороза нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым или вторым ходом.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

- 111) (**Е. Джобс**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может
- добавить в кучу 10 камней;
  - увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 82. Игрок, сделавший ход, который привел к значению 82 или более, считается проигравшим. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 81$ .

#### **Задание 19.**

Известно, что Петя одержал победу, совершив один ход за игру. Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Петя гарантированно одерживает победу.

#### **Задание 20.**

Найдите все значения  $S$  такие, при которых Ваня совершает не более одного хода и выигрывает. При этом у Вани нет стратегии, которая позволяла бы ему гарантированно выиграть, не совершив ни одного хода. В качестве ответа приведите минимальное и максимальное значения  $S$ .

#### **Задание 21**

Известно, что Петя выигрывает, сделав не более двух ходов. Укажите минимальное значение  $S$ , если известно, что Петя не может гарантированно выиграть, сделав один ход.

- 112) (**А. Богданов**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может изменить количество камней в куче на 1, 3 или 7, но обязательно в сторону числа 42: если в куче больше 42 камней, то он забирает камни из кучи, а если меньше 42, то добавляет камни. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится ровно 42. Игрок, первым получивший кучу из 42 камней, считается победителем.

#### **Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение  $S$ , когда такая ситуация возможна.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите максимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 113) (**А. Богданов**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в меньшую кучу один или три камня. Изменять количество камней в большей куче не разрешается. Игра завершается, когда количество камней в кучах становится равным. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым сравнявшим количество

камней в двух кучах. Игроки играют рационально, т.е. без ошибок. В начальный момент в первой куче было 13 камней, а во второй –  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 23$ .

### Задание 19.

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

### Задание 20.

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите два значения  $S$ , при которых одновременно выполняются три условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом;
- Петя может выбирать, каким ходом выиграет Ваня.

114) (Д. Статный) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два или четыре камня; увеличить количество камней в два раза. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 100. Игрок, который получил 100 и более камней, считается **проигравшим**. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 99$ .

### Задание 19.

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя выигрывает, совершив всего лишь один ход и не используя умножение.

### Задание 20.

Найдите два минимальных значения  $S$ , при которых у Вани есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Ваня не может выиграть, совершив один ход;
- Ваня может выиграть, совершив не более двух ходов, независимо от того, как будет ходить Петя.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите минимальное и максимальное значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть, совершив один ход;
- Петя может выиграть, совершив не более двух ходов, независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

115) (PRO100 ЕГЭ) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу **один** камень или **три** камня или **одиннадцать** камней. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится числом, оканчивающимся на ноль. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, количество камней в которой оканчивается на ноль. К примеру, игра заканчивается, когда в куче стало 10, 200, 6800 камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней, где  $S$  – **двухзначное число, не оканчивающееся на ноль**.

**Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

**Задание 20.**

Найдите количество значений  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

**Задание 21**

Найдите сумму значений  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

116) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в большую кучу любое количество камней от одного до трёх или удвоить количество камней в меньшей куче. Если кучи содержат равное количество камней, можно добавить в любую из них от одного до трёх камней, удвоение в этой ситуации запрещено.

Игра завершается, когда общее количество камней в двух кучах становится больше или равно 60. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший 60 или больше камней в двух кучах.

**Задание 19.**

Известно, что Петя смог выиграть первым ходом. Какое наименьшее число камней могло быть суммарно в двух кучах?

**Задание 20.**

Известно, что в первой куче 12 камней, а во второй –  $S$  камней ( $1 \leq S \leq 47$ ). Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Запишите в ответе сначала наименьшее значение, потом – наибольшее.

**Задание 21**

Известно, что в первой куче 25 камней, а во второй –  $S$  камней ( $1 \leq S \leq 34$ ). Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

117) (А. Богданов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу 1 или 3 камня или удвоить количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 73. Игрок, первым получивший кучу из 73 или большего числа камней, считается победителем. Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 72$ .

**Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

**Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Найденные значения запишите в порядке возрастания.

118) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней, в каждой из них не менее одного камня. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в большую кучу любое количество камней от одного до трёх или удвоить количество камней в меньшей куче. Если кучи содержат равное количество камней, можно добавить в любую из них от одного до трёх камней, удвоение в этой ситуации запрещено. Игра завершается, когда количество камней в любой из двух куч становится больше или равно 65. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший 65 в одной куче.

**Задание 19.**

Известно, что Петя смог выиграть первым ходом. Какое наименьшее число камней могло быть суммарно в двух кучах?

**Задание 20.**

Известно, что в первой куче 18 камней, а во второй –  $S$  камней ( $1 \leq S \leq 64$ ). Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Запишите в ответе сначала наименьшее значение, потом – наибольшее.

**Задание 21**

Известно, что в первой куче 26 камней, а во второй –  $S$  камней ( $1 \leq S \leq 64$ ). Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

119) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней, в каждой из них не менее одного камня. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в большую кучу любое количество камней от одного до трёх или удвоить количество камней в меньшей куче. Если кучи содержат равное количество камней, можно добавить в любую из них от одного до трёх камней, удвоение в этой ситуации запрещено. Игра завершается, когда количество камней в любой из двух куч становится больше или равно 78. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший 78 в одной куче.

**Задание 19.**

Известно, что Петя смог выиграть первым ходом. Какое наименьшее число камней могло быть суммарно в двух кучах?

**Задание 20.**

Известно, что в первой куче 25 камней, а во второй –  $S$  камней ( $1 \leq S \leq 77$ ). Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Запишите в ответе сначала наименьшее значение, потом – наибольшее.

### **Задание 21**

Известно, что в первой куче 69 камней, а во второй –  $S$  камней ( $1 \leq S \leq 77$ ). Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

120) (А. Богданов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из любой кучи один или три камня. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в любой из куч становится менее 10. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, в которой меньше 10 камней. Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### **Задание 19.**

В начальный момент в кучах было по  $S$  камней. Найдите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

### **Задание 20.**

Известно, что в первой куче 13 камней, а во второй –  $S$  камней ( $S \geq 10$ ). Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Запишите в ответе сначала наименьшее значение, потом – наибольшее.

### **Задание 21**

Известно, что в первой куче 13 камней, а во второй –  $S$  камней ( $S \geq 10$ ). Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

Запишите в ответе сначала наименьшее значение, потом – наибольшее.

121) (А. Богданов) Два игрока, Папа и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Папа. За один ход игрок может добавить в кучу семь камней или увеличить количество камней в куче в два раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 100. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 100 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 99$ .

### **Задание 19.**

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором Папа может выиграть своим первым ходом, но поддается, и Ваня выигрывает своим первым ходом.

### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых у Папы нет выигрышной стратегии, а у Вани есть. Но Ваня ошибается и у Папы нет возможности еще раз поддаться он вынужден

выиграть. Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Папы;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

122) (Е. Джобс) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из кучи 5 камней или уменьшить количество камней в 3 раза. Убирать 5 камней можно только тогда, когда в куче есть не менее 5 камней. Если количество камней некратно 3, то при уменьшении количества камней в три раза остается количество камней равное результату целочисленного деления текущего количества на 3. Например, из кучи из 19 камней можно получить кучу из 14 камней или кучу из 6 камней.

Игра завершается в тот момент, когда из кучи убирается последний камень. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т. е. убравший из кучи последний камень. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $S > 0$ .

### **Задание 19.**

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

### **Задание 20.**

Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите максимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

123) (Е. Джобс) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. У игроков есть табличка, на которой записана пара неотрицательных целых чисел. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может изменить любое число, выполнив над ним одно из двух действий: прибавить к значению 3 или умножить на 2. Так, например, если перед ходом игрока была позиция  $(3, 5)$ , то после его хода будет позиция  $(6, 5)$ ,  $(3, 8)$  или  $(3, 10)$ .

Игра завершается в тот момент, одно из чисел становится не менее 50, при этом победителем считается тот, кто сделал последний ход, то есть получил число, не меньшее 50. Игра начинается из позиции  $(22, S)$  при  $S < 28$ .

### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Ваня может выиграть своим первым ходом при любой игре Пети.

### **Задание 20.**

Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

124) (**Е. Джобс**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) два камня, или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 5 камней; такую позицию в игре будем обозначать  $(10, 5)$ . Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций:  $(12, 5), (20, 5), (10, 7), (10, 10)$ . Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда произведение количеств камней в кучах становится не менее 123. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой произведение числа камней в кучах будет 123 или более.

В начальный момент в первой куче было 3 камня, во второй куче -  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 40$ .

#### **Задание 19.**

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором Ваня выигрывает своим первым ходом после неудачного хода Пети.

#### **Задание 20.**

Найдите два наибольших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

125) (**ЕГЭ-2023**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или четыре камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 88. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 88 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 87$ .

#### **Задание 19.**

Найдите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но Ваня выигрывает своим первым ходом после любого хода Пети.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите наименьшее значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

126) (ЕГЭ-2023) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 59. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 59 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 58$ .

#### **Задание 19.**

Найдите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но Ваня выигрывает своим первым ходом после любого хода Пети.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите наименьшее значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

127) (ЕГЭ-2023) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня или увеличить количество камней в куче в четыре раза. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 111. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 111 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 110$ .

#### **Задание 19.**

Найдите такое значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но Ваня выигрывает своим первым ходом после любого хода Пети.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите наименьшее значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

128) (Е. Джобс) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу два или четыре камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Чтобы делать

ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 82. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 82 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 81$ .

### Задание 19.

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Ваня может выиграть своим первым ходом после неудачного хода Пети.

### Задание 20.

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

129) (А. Рогов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами  $(x, y)$  в одну из трех точек: или в точку с координатами  $(2x, y)$ , или в точку с координатами  $(x, y+3)$ , или в точку с координатами  $(x, y+4)$ . Выигрывает игрок, после хода которого расстояние от фишки до точки с координатами  $(0, 0)$  больше 14 единиц. В начале игры фишка находится в точке с координатами  $(3, S)$ ;  $1 \leq S \leq 13$ .

### Задание 19.

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но Ваня выигрывает своим первым ходом после любого хода Пети.

### Задание 20.

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

130) (А. Богданов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 37. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 37 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 36$ .

### Задание 19.

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но Ваня может выиграть своим первым ходом после любого хода Пети.

**Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

131) (Е. Джобс) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу четыре камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 20. Если при этом в куче оказалось не более 26 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник (при этом победа учитывается как ход противника). В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 19$ .

**Задание 19.**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но Ваня может выиграть своим первым ходом после любого хода Пети.

**Задание 20.**

Найдите наименьшее и наибольшее значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

132) (А. Минак) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может убрать из кучи два или три камня либо уменьшить количество камней в куче в два раза. В случае, если уменьшается в два раза нечётное количество камней, то сначала убирают один камень, а затем уменьшают в два раза. Например, имея кучу из 11 камней, за один ход можно получить кучу из 9, 8 или 5 камней. Нельзя убрать больше камней, чем их имеется в куче. Игра завершается в тот момент, когда в куче не останется камней. При этом победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 30$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

**Задание 19.**

Укажите количество всех возможных значений  $S$ , при которых Петя не может выиграть своим первым ходом, но при любом ходе Пети, Ваня выигрывает своим первым ходом.

**Задание 20.**

Найдите **два наибольших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке убывания.

### Задание 21

Найдите **наибольшее** значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

133) (А. Минак) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. У игроков есть табличка, в которую записана пара неотрицательных целых чисел. Будем называть эту пару чисел позицией. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может заменить одно из чисел пары (по своему выбору) на сумму обоих чисел. Так, например, если перед ходом игрока была позиция  $(2, 20)$ , то после его хода будет позиция  $(22, 20)$  или  $(2, 22)$ . Игра завершается в тот момент, когда сумма чисел пары станет не менее 62. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший в сумму чисел пары 62 и более. В начальный момент в табличке записана пара чисел  $(10, S)$ ,  $1 \leq S \leq 51$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### Задание 19.

Укажите наименьшее значение  $S$ , при котором Петя может выиграть за один ход.

### Задание 20.

Найдите **два наибольших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите **количество** значений  $S$ , при которых одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

134) (А. Минак) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. На координатной плоскости стоит фишка. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. Ход состоит в том, что игрок перемещает фишку из точки с координатами  $(x, y)$  в одну из трех точек:  $(x-10, y+5)$ ,  $(x-5, y-5)$ ,  $(x+5, y-5)$ . Например, при если фишка стоит в позиции  $(10, 5)$ , то за один ход можно получить любую из трёх позиций:  $(0, 10)$ ,  $(5, 0)$ ,  $(15, 0)$ . Игра завершается в тот момент, когда расстояние от фишки до точки с координатами  $(0, 0)$  становится больше 20 единиц. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший позицию, от которой расстояние до точки с координатами  $(0, 0)$  больше 20 единиц. В начальный момент фишка находится в позиции  $(-1, S)$ ,  $S$  – целое число. Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### Задание 19.

Укажите количество всех возможных  $S$ , при которых игра имеет смысл, т. е. для которых расстояние от начальной позиции до точки с координатами  $(0, 0)$  не больше 20.

### Задание 20.

Найдите два числа: первое – количество значений  $S$ , при которых Петя выигрывает первым ходом; и второе число – количество значений  $S$  при которых, у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

### Задание 21

Найдите максимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

135) (А. Минак) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень либо увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 20 камней. Для того чтобы делать ходы, у игроков есть только 80 камней, включая те, которые находятся в куче в начальный момент. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 61. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 60$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### Задание 19.

Укажите количество значений  $S$ , при которых Петя может выиграть своим первым ходом.

### Задание 20.

Найдите **два наименьших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

136) (ЕГЭ-2024) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 65. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах оказывается 65 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было шесть камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 < S < 58$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### Задание 19.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором такая ситуация возможна.

### Задание 20.

Найдите **два наименьших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

137) (ЕГЭ-2024) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или четыре камня либо увеличить количество камней в куче в два раза. У каждого игрока есть неограниченное количество камней, чтобы делать ходы.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 58. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 58 камней или больше. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 < S < 57$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

### **Задание 20.**

Найдите **два наименьших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

138) (ЕГЭ-2024) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня либо увеличить количество камней в куче в два раза. У каждого игрока есть неограниченное количество камней, чтобы делать ходы. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 39. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу из 39 камней или больше. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 38$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

### **Задание 20.**

Найдите два таких значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

139) (ЕГЭ-2024) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 227. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах оказывается 227 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 17 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 209$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### **Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором такая ситуация возможна.

### **Задание 20.**

Найдите **два наименьших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

140) (Демо-2025) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может: убрать из кучи два камня или убрать из кучи пять камней или уменьшить количество камней в куче в три раза (количество камней, полученное при делении, округляется до меньшего). Например, из кучи в 20 камней за один ход можно получить кучу из 18, 15 или 6 камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не более 19. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 19 или меньше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $S \geq 20$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

### **Задание 20.**

Найдите **два наименьших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволяет ему гарантированно выиграть первым ходом.

141) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может: убрать из кучи два камня или убрать из кучи три камня или уменьшить количество камней в куче в два раза (количество камней, полученное при делении, округляется до меньшего). Например, из кучи в 29 камней за один ход можно получить кучу из 27, 26 или 14 камней.

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не более 25. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 25 или меньше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $S \geq 26$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

142) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень, добавить два камня или увеличить количество камней в куче в три раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 163. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах оказывается 163 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 11 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 151$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### **Задание 19.**

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором такая ситуация возможна.

### **Задание 20.**

Найдите **два наименьших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

143) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может: убрать из кучи два камня или убрать из кучи четыре камня или уменьшить количество камней в куче в три раза (количество камней, полученное при делении, округляется до меньшего).

Игра завершается, когда количество камней в куче становится не более 40. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 40 или меньше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $S \geq 41$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### Задание 19.

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

### Задание 20.

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

144) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней.

Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень, добавить три камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 174. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах оказывается 174 или больше камней. В начальный момент в первой куче было 19 камней, во второй куче –  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 154$ .

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

### Задание 19.

Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети.

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором такая ситуация возможна.

### Задание 20.

Найдите **два наименьших** значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

### Задание 21

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 145) (ЕГКР-2024) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может:
- добавить в кучу 3 камня;
  - добавить в кучу 6 камней;
  - увеличить количество камней в куче в 3 раза. Например, из кучи в 20 камней за один ход можно получить кучу из 23, 26 или 60 камней. Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 132. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 132 или больше камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней,  $1 \leq S \leq 131$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

**Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

**Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

- 146) (Досрочный ЕГЭ-2025) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может:
- убрать из кучи два камня,
  - уменьшить количество камней в куче в два раза (количество камней, полученное при делении, округляется до меньшего).

У каждого игрока есть неограниченное количество камней, чтобы делать ходы. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не более 87. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший в куче 87 камней или меньше. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $S > 88$ .

**Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

**Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

147) (**Открытый вариант-2025**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроκи ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или четыре камня либо увеличить количество камней в куче в три раза. У каждого игрока есть неограниченное количество камней, чтобы делать ходы. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 67. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, состоящую из 67 или более камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 66$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

#### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

148) (**ЕГКР-2025**) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроκи ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может:

- добавить в кучу 2 камня;
- добавить в кучу 5 камней;
- увеличить количество камней в куче в 2 раза.

Например, из кучи в 20 камней за один ход можно получить кучу из 22, 25 или 40 камней. Чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней. Игра завершается, когда количество камней в куче становится не менее 128. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу из 128 или более камней. В начальной момент в куче было  $S$  камней,  $1 < S < 127$ .

#### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

149) **(Апробация-2025)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или четыре камня либо увеличить количество камней в куче в три раза.

У каждого игрока есть неограниченное количество камней, чтобы делать ходы. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 52. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, состоящую из 52 или более камней. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 51$ . Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника.

#### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите минимальное значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

150) **(О. Лысенков)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один или три камня, либо увеличить количество камней в куче в два раза.

У каждого игрока есть неограниченное количество камней, чтобы делать ходы. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится **простым числом**. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший кучу, количество камней в которой является простым числом. В начальный момент в куче было  $S$  камней;  $1 \leq S \leq 100$ ,  $S$  не является простым числом.

#### **Задание 19.**

Укажите минимальное значение  $S$ , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом.

#### **Задание 20.**

Найдите два наибольших значения  $S$ , когда Петя имеет выигрышную стратегию, причём одновременно выполняются два условия:

- Петя не может выиграть за один ход;
- Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

Найдите наибольшее значение  $S$ , при котором одновременно выполняются два условия:

- у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;
- у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

151) **(А. Драганов)** Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) убрать 2 камня или
- б) убрать 7 камней или

в) уменьшить количество камней в куче в 2 раза (количество камней в куче, полученное при делении, округляется до меньшего целого числа).

Выполнять операции можно, если в куче хватает камней для изъятия и при этом в результате хода изменяется количество камней. Игра завершается в тот момент, когда в куче останется менее 3 камней. Если при этом в куче окажется **чётное** число камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем считается его противник. В начальный момент в куче было  $S$  3 камней.

#### **Задание 19.**

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором Петя имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему гарантированно выиграть, сделав не более 2 ходов, но при этом у него нет стратегии, позволяющей ему гарантированно выиграть, сделав менее 2 ходов.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых Ваня имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему гарантированно выиграть, сделав не более 2 ходов, но при этом у него нет стратегии, позволяющей ему гарантированно выиграть, сделав менее 2 ходов.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

У Пети была выигрышная стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть при любых вариантах сопротивления Вани. Но Петя специально поддался. Петя сделал свой первый ход так, что Ваня сделал только один ход, после которого игра сразу закончилась и Ваня победил. Укажите наименьшее значение  $S$ , при котором такое было возможно.

152) \*\*(А. Драганов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) убрать 2 камня или
- б) убрать 4 камня или
- в) уменьшить количество камней в куче в 2 раза (количество камней в куче, полученное при делении, округляется до меньшего целого числа).

Выполнять операции можно, если в куче хватает камней для изъятия и при этом в результате хода изменяется количество камней. Игра завершается в тот момент, когда в куче останется менее 3 камней. Если при этом в куче окажется **чётное** число камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем считается его противник. В начальный момент в куче было  $S$  3 камней.

#### **Задание 19.**

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором Петя имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему гарантированно выиграть, сделав не более 2 ходов, но при этом у него нет стратегии, позволяющей ему гарантированно выиграть, сделав менее 2 ходов.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых Ваня имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему гарантированно выиграть, сделав не более 2 ходов, но при этом у него нет стратегии, позволяющей ему гарантированно выиграть, сделав менее 2 ходов.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

У Пети была выигрышная стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть при любых вариантах сопротивления Вани. Но Петя специально поддался. Петя сделал свой первый ход так, что Ваня сделал только один ход, после которого игра сразу закончилась и Ваня победил. Укажите наименьшее значение  $S$ , при котором такое было возможно.

153) \*\*(А. Драганов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) убрать 3 камня или
- б) убрать 5 камней или
- в) уменьшить количество камней в куче в 2 раза (количество камней в куче, полученное при делении, округляется до **большего** целого числа).

Выполнять операции можно, если в куче хватает камней для изъятия и при этом в результате хода изменяется количество камней. Игра завершается в тот момент, когда в куче останется менее 6 камней. Если при этом в куче окажется **чётное** число камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем считается его противник. В начальный момент в куче было  $S$  6 камней.

#### **Задание 19.**

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором Петя имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему гарантированно выиграть, сделав не более 2 ходов, но при этом у него нет стратегии, позволяющей ему гарантированно выиграть, сделав менее 2 ходов.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых Ваня имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему гарантированно выиграть, сделав не более 2 ходов, но при этом у него нет стратегии, позволяющей ему гарантированно выиграть, сделав менее 2 ходов.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

У Пети была выигрышная стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть при любых вариантах сопротивления Вани. Но Петя специально поддался. Петя сделал свой первый ход так, что Ваня сделал только один ход, после которого игра сразу закончилась и Ваня победил. Укажите наименьшее значение  $S$ , при котором такое было возможно.

- 154) \*\*(А. Драганов) Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

- а) убрать 3 камня или
- б) убрать 5 камней или
- в) уменьшить количество камней в куче в 2 раза (количество камней в куче, полученное при делении, округляется до **большего** целого числа).

Выполнять операции можно, если в куче хватает камней для изъятия и при этом в результате хода изменяется количество камней. Игра завершается в тот момент, когда в куче останется менее 6 камней. Если при этом в куче окажется **нечётное** число камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем считается его противник. В начальный момент в куче было  $S$  6 камней.

#### **Задание 19.**

Укажите максимальное значение  $S$ , при котором Петя имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему гарантированно выиграть, сделав не более 2 ходов, но при этом у него нет стратегии, позволяющей ему гарантированно выиграть, сделав менее 2 ходов.

#### **Задание 20.**

Найдите два наименьших значения  $S$ , при которых Ваня имеет выигрышную стратегию, позволяющую ему гарантированно выиграть, сделав не более 2 ходов, но при этом у него нет стратегии, позволяющей ему гарантированно выиграть, сделав менее 2 ходов.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### **Задание 21**

У Пети была выигрышная стратегия, позволяющая ему гарантированно выиграть при любых вариантах сопротивления Вани. Но Петя специально поддался. Петя сделал свой первый ход так, что Ваня сделал только один ход, после которого игра сразу закончилась и Ваня победил. Укажите наименьшее значение  $S$ , при котором такое было возможно.

155) \*(П. Тюрин) Два игрока, Паша и Валера, играют в следующую игру: складывают в одну кучу белые и чёрные камни. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может

- а) добавить в кучу один белый камень
- б) добавить в кучу два белых камня
- в) добавить в кучу один чёрный камень
- г) добавить в кучу два чёрных камня

Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество белых и чёрных камней. В начальной куче может быть любое количество комбинаций белых и чёрных камней, в том числе куча может быть без камней. Победителем считается тот, кто получил суммарно в куче более 7 камней.

*Пример.* В начальной куче было три белых камня и два чёрных камня. Такую комбинацию камней назовём позицией и будем обозначать (3,2). Т.к. первый ход делает Паша, то он может получить следующие позиции: (4,2), (3,3), (5,2), (3,4).

#### Задание 19.

Известно, что Валера выиграл своим первым ходом после первого хода Паши. Укажите количество различных комбинаций камней в куче, при которых такая ситуация возможна.

#### Задание 20.

Найдите наименьшее и наибольшее значение количества камней в куче, при которых выполняются два условия:

- у Паши есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть не более, чем за три хода при любой игре Валеры;
- у Паши нет выигрышной стратегии, позволяющей ему выиграть не более, чем за два хода.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

#### Задание 21

Укажите количество начальных комбинаций камней в куче, при которых Валера имеет выигрышную стратегию.

156) \*(П. Тюрин) Два игрока, Паша и Валера, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча, содержащая белые и чёрные камни. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Паша. За один ход игрок может

- а) убрать из кучи белый камень
- б) убрать из кучи два белых камня
- в) убрать из кучи чёрный камень
- г) убрать из кучи два чёрных камня

Игра заканчивается, когда в куче остаётся суммарно менее двух камней. Победителем считается тот, кто сделал последний ход, после которого в куче осталось менее двух камней. В начальный момент в куче может быть от одного до восьми камней каждого цвета.

*Пример.* В начальной куче было три белых камня и два чёрных камня. Такую комбинацию камней назовём позицией и будем обозначать (3,2). Т.к. первый ход делает Паша, то он может получить следующие позиции: (2,2), (1,2), (3,1), (3,0).

#### Задание 19.

Известно, что Валера выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Паши. Укажите максимальное суммарное количество чёрных и белых камней в куче, при котором такая ситуация возможна.

#### Задание 20.

Найдите наименьшее и наибольшее значение количества камней в куче, при которых выполняются два условия:

- у Паши есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть не более, чем за три хода при любой игре Валеры;

- у Паши нет выигрышной стратегии, позволяющей ему выиграть не более, чем за два хода.

Найденные значения запишите в ответе в порядке возрастания.

**Задание 21**

Укажите количество начальных комбинаций камней в куче, при которых Валера имеет выигрышную стратегию.